



Faculté de Technologie
Département de Hydraulique & Génie Civil

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
جامعة الشهيد حمّة لخضر الوادي
Université Echahid Hamma Lakhdar d'El Oued



كلية التكنولوجيا
قسم الري والهندسة

Mémoire présenté en vue de l'obtention
Du diplôme de

Master

Option : matériaux en génie civil

**Etude des structure de type coques de révolution a
comportement axisymétrique par la méthode des
éléments finis**

Dirigé par
FARIK ALI
DJEDID TAREK

Présenté par :
TERKI ABDELKRIM
LEKHOUMES CHAIMA
REGUIG BOUBAKER
GHERBI OUSSAMA

Promotion : Juin 2022

DÉDICACES

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents. Que Dieu me les garde et que vie nous donne temps pour les remercier.

- Mes beaux-parents*
- Ma femme et mon fils,*
- Mes frères et mes sœurs,*
- Toute ma famille*
- A mes camarades de classe*
- A tous mes fidèles amis*

TERK9 ABDELKRIM

DÉDICACES

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents. Que Dieu me les garde et que vie nous donne temps pour les remercier.

- Mes beaux-parents

- Mes frères et mes sœurs.

- Toute ma famille

- A mes camarades de classe

- A tous mes fidèles amis

LEKHOUTMES CHATMA

DÉDICACES

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents. Que Dieu me les garde et que vie nous donne temps pour les remercier.

- Mes beaux-parents

- Mes frères et mes sœurs,

- Toute ma famille

- A mes camarades de classe

- A tous mes fidèles amis

REQUIG BOUBAKER

DÉDICACES

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents. Que Dieu me les garde et que vie nous donne temps pour les remercier.

- Mes beaux-parents*
- Ma femme et mon fils,*
- Mes frères et mes sœurs,*
- Toute ma famille*
- A mes camarades de classe*
- A tous mes fidèles amis*

GHERRI OUSSAMA

REMERCIEMENTS

*Ce travail a été réalisé au sein du département « Génie civil et hydraulique »
de l'université HANNA LAKHDAR DE EL OUED .*

Tout d'abord, J'exprime mes sincères et profonds

Remerciements et Reconnaissances au professeur LABIODJ BACHIR,

mon directeur de thèse pour avoir su donner des orientations pertinentes à ce

travail, pour ses conseils et pour m'avoir apporté une vision toujours très

claire dans ce domaine. Merci d'avoir pris le temps de me convaincre quand

j'avais tort...

Merci également à tous mes amis qui m'ont soutenu

J'adresse un grand merci à ma Famille qui a toujours été là pour moi.

Merci à tous pour tous les efforts que vous avez consentis durant

ces nombreuses années d'études.

SOMMAIR.....	PAGE
INTRODUCTION GENERALE.....	01
CHAPITRE 1 : THEORIE DES COQUES DE REVOLUTION / RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE	
1- INTRODUCTION.....	03
2-GEOMETRIE DES SURFACES DE REVOLUTION.....	03
2.1 Définition.....	03
2.2 Système de coordonnées intrinsèques.....	03
a) surface de révolution.....	03
b) Coque de révolution.....	06
c) courbure d'une surface.....	08
3 élasticités appliquées aux coques de révolutions.....	10
3.1 Déformations et Contraintes.....	11
3.1.1 Champ de déplacements.....	11
3.1.2 Composantes du vecteur rotation.....	11
3.1.3 Tenseur des déformations.....	12
3.1.4 Tenseur des contraintes.....	13
3.1.5 Efforts normaux dans la coque.....	13
3.1.6 Moments de flexion dans une coque.....	13
3.1.7 Effort tranchant.....	14
3.2 Equations d'équilibre.....	14
3.2.1 Théorie de la membrane.....	15
3.2.2 Flexion des coques.....	16
a) Méthode des inconnues hyperstatiques.....	16
b) méthode des déplacements.....	22
4. Éléments axisymétriques.....	24
4.1. modélisation axisymétrique.....	24
4.2. éléments finis axisymétriques.....	24
4.2.1. Volumes axisymétriques.....	26
4.2.2. Coques axisymétriques.....	26
4.2.3. Autres éléments.....	26
5.1 recherche bibliographique.....	27
5.1.1 coque de révolution.....	27
5.2.1.1 Eléments finis tronconiques.....	29
5.2.1.2 Eléments courbés.....	30
CHAPITRE 2 : FORMULATION	
2.1 Méthode des éléments finis.....	32
2.2.1 Elément CAXI_K (coque mince).....	32
2.2.2.1 Approximation des déplacements et déformations.....	32
2.2.2.2 Loi de comportement.....	33
2.2.2.3 Théorie de love Kirchoff.....	35
2.2.2.3.1 Déplacements et déformations virtuelles.....	35
2.2.2.3.2 Principe des travaux virtuels :	37
2.2.2.3.3 Loi de comportement.....	38
2.2.2.3 Matrice de rigidité.....	38
2.2.2.4 Charges équivalentes.....	40
2.2.2.5 Efforts résultants et contraintes.....	40

CHAPITRE 3 : MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE

3.1 Introduction.....	41
3.2 Présentation des programmes Axisym.....	42
3.2.1 Algorithme générale.....	42
3.2.2 Description des programmes Axisym.....	42

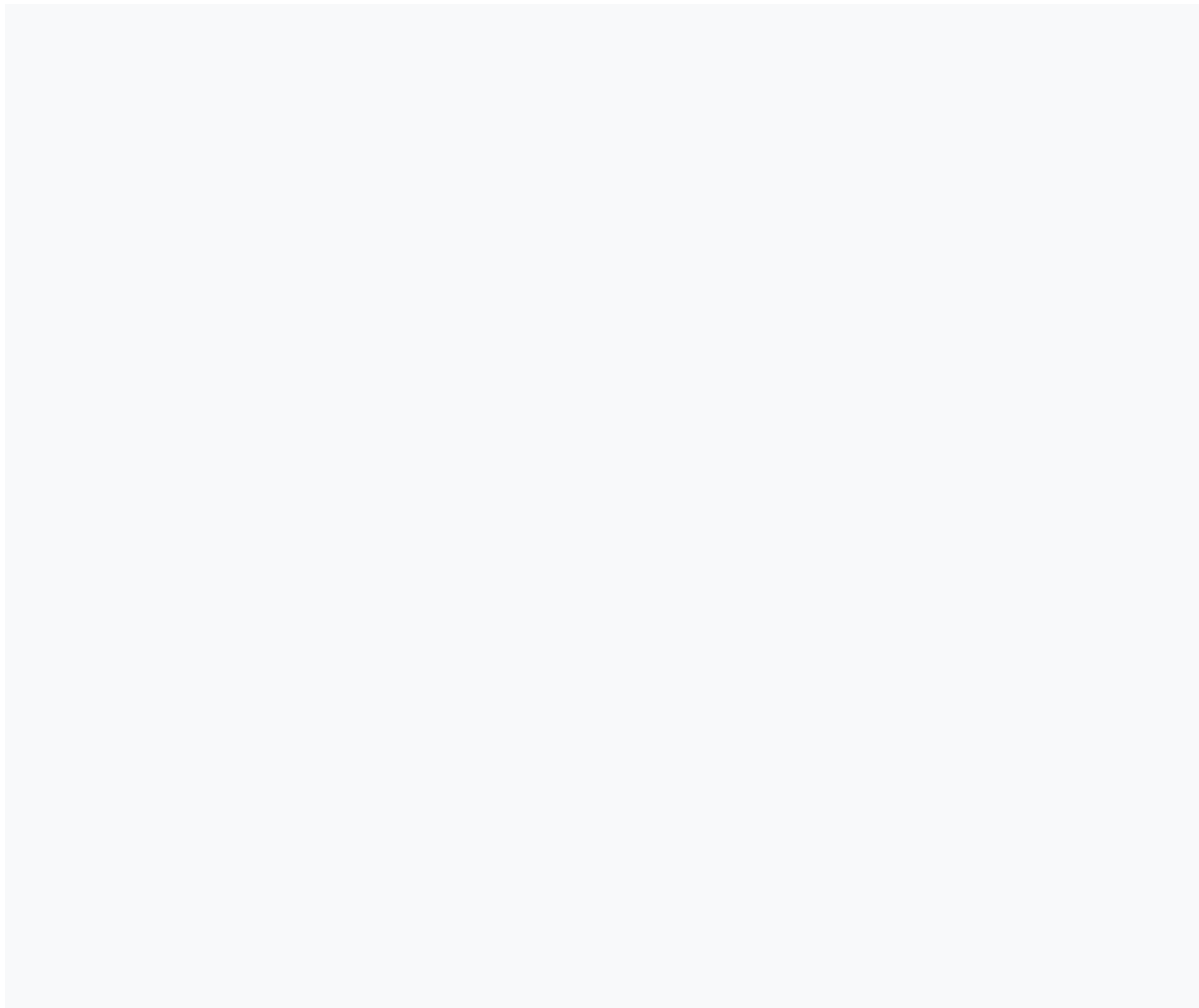
CHAPITRE 4 : VALIDATION ET APPLICATIONS

4.1 Coque De Révolution.....	45
4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité.....	45
4.1.2 Plaque circulaire sous différents types de chargement.....	46
4.1.3 Hémisphère.....	50
4.1.4 Dôme sphérique sous pression.....	52
4.1.5 Hyperboloïde.....	53
4.1.6 Cylindre conique.....	56
CONCLUSION	58
BIBLIOGRAPHIE	59
ANNEXE	62

Résumé

Dans le domaine de l'engineering et particulièrement en génie civil les structures de type coques de révolution sont très utilisées (châteaux d'eau, tour de refroidissement du central nucléaire, réservoirs, silos, etc...) , malgré les simplifications importantes obtenues par l'axisymétrie caractérise ce type de structure sur le calcul analytique, le recours aux méthode numérique a savoir la méthode des éléments finis reste indispensable, d'où la nécessité du développement et la mise en œuvre numérique d'éléments finis destinés à la modélisation de ce type de structure. A travers cette étude nous allons présenter la formulation d'un élément fini de type coque de révolution basé sur la théorie de Love-Kirchoff, cet élément est mis en œuvre numériquement sur le logiciel Matlab, des tests de validation et des applications dans le domaine du génie civil seront réalisées.

MOTS CLES : Coques De Révolution, Axisymétrie, Méthode Numérique, Formulation, Modélisation.



Abstract

In the field of engineering and particularly in civil engineering, structures of the revolving shell type are widely used (water towers, nuclear power station cooling towers, tanks, silos, etc.), despite the significant simplifications obtained by the axisymetry which characterizes this type of structure on the analytical calculation, the recourse to numerical method has knowing the method of the finite elements remains essential, from where the need for the development and the numerical implementation of finite elements intended for the modeling of this type of structure. Through this study we will present the formulation of a finite element of the shell type of revolution based on the Love-Kirchoff theory, this element is implemented numerically on the Matlab software, validation tests and applications in the field of civil engineering will be carried out.

key words : Shells Of Evolution, Axisymetry, Numerical Method, Formulation, Modelling.

المخلص

في مجال الهندسة وخاصة في الهندسة المدنية ، يتم استخدام هياكل من نوع القشرة الدوارة على نطاق واسع (أبراج المياه ، أبراج تبريد محطات الطاقة النووية ، الخزانات ، الصوامع ، إلخ) ، على الرغم من التبسيط الكبير الذي تم الحصول عليه بواسطة التناظر المحوري الذي يميز هذا النوع للهيكل على الحساب التحليلي ، فإن اللجوء إلى الطريقة العددية قد جعل معرفة طريقة العناصر المحددة أمرًا ضروريًا ، من حيث الحاجة إلى التطوير والتنفيذ العددي للعناصر المحددة المخصصة لنمذجة هذا النوع من الهيكل من خلال هذه الدراسة سنقدم صياغة عنصر محدود لنوع القشرة الدوارة بناءً على نظرية لوف كيرشوف، ويتم تنفيذ هذا العنصر عدديًا على برنامج ماطلاب ، وسيتم تنفيذ اختبارات التحقق من الصحة والتطبيقات في مجال الهندسة المدنية.

الكلمات المفتاحية : القشرة الدوارة ، التناظر المحوري، الطريقة العددية، الصياغة ، النمذجة.

Liste des Figures

Chapitre 1 :

Figure (1 . 01): description géométrique de l'axisymétrie.....	04
Figure (1 . 02): le système équivalent.....	20
Figure (1 . 03): Volumes et coques axisymétriques.....	26
Figure (1 . 04): Elément de transition coque-volume axisymétrique.....	27

Chapitre 2 :

Figure (2 . 01) : Elément tronconique linéaire CAXI_K.....	33
--	----

Chapitre 3 :

Figure (3 . 01) : blocs fonctionnels caractéristiques d'un programme éléments finis.....	38
Figure (3 . 02) : Algorithme général du Programme Axisym.....	39

Chapitre 4 :

Figure (4 , 01) cylindre chargé à leur extrémité.....	45
Figure (4 , 02) Convergence de déplacement de l'extrémité libre.....	46
Figure (4 , 03) Plaque circulaire sous divers cas de chargement.....	47
Figure (4 , 04) convergence de déplacement maximal (divers cas de charge)	49
Figure (4 , 05) : Hémisphère.....	50
Figure (4 , 06) : Hémisphère 3d.....	50
Figure (4 , 07) : variation de l'écart entre Axisym et ANSYS.....	51
Figure (4 , 08) structure déformé.....	51
Figure (4 , 09) : Dôme sphérique sous pression.....	52
Figure (4 , 10) : Dôme sphérique sous pression 3d.....	52
Figure (4 , 11) variation de l'écart entre Axisym et ANSYS.....	53
Figure (4 , 12) Structure déformé.....	53
Figure (4 , 13) : Hyperboloïde.....	54
Figure (4 , 14) : Hyperboloïde 3d.....	54
Figure (4 , 15) variation de l'écart entre Axisym et ANSYS.....	55
Figure (4 , 16) Structure déformé.....	55
Figure (4 , 17) : Cylindre conique.....	56
Figure (4 , 18) : Cylindre conique 3d.....	56
Figure (4 , 19) variation de l'écart entre Axisym et ANSYS.....	57
Figure (4 , 20) : Structure déformé.....	57

Liste des Tableaux

Chapitre 4 :

Tableau (4 , 1) : Déplacement radial à l'extrémité chargé (x1/1000)	45
Tableau (4 , 2) : Valeur de déplacement maximal pour divers cas de charge.....	48
Tableau (4 , 3) : Valeur de déplacement maximal (in)	51
Tableau (4 , 4) : Valeur de déplacement maximal (in)	52
Tableau (4 , 5) : Valeur de déplacement maximal (ft)	54
Tableau (4 , 6) : Valeur de déplacement maximal (in)	56

Liste des Notations

\mathbf{u}_p : vecteur déplacement d'un point p (tous vecteurs sont notés en gras)
 \mathbf{u}_p^* : vecteur déplacement virtuel d'un point p (* utilisé pour définir tous valeurs virtuels)
 β, β^* : rotation réel et virtuel
 $\{\}$: matrice colonne (vecteur)
 $[\]$: matrice (utilisé aussi pour les références bibliographiques)
 $[\]^{-1}$: inverse de la matrice
 $[\]^T$: transposé de la matrice
det : déterminant d'une matrice
 $\langle \rangle$: matrice ligne (transposé de vecteur)
 $f_{,x} = \frac{\partial f}{\partial x}$: dérivée partielle de f par rapport à x
X,Y,Z : coordonnées cartésiennes globales
 $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_q$: vecteur position du point p et q
 ξ, θ : coordonnées paramétriques (méridienne et circonférentiel)
s : abscisse curviligne
 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: base orthonormé cartésienne
 $\mathbf{t}, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{n}$: base curviligne
 $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{k}$: base cylindrique
 n_{sc} : cosinus directeur de \mathbf{n} suivant s
 $\frac{1}{R_s}, \frac{1}{R_\theta}$: courbure méridienne, courbure circonférentielle
K, H : courbure gaussienne, courbure moyenne
u, w : composantes du vecteur déplacement dans le repère curviligne
U, W : composantes du vecteur déplacement dans le repère cylindrique
 $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta$: composantes de déformation curviligne
 $\mathcal{X}_s, \mathcal{X}_\theta$: courbures de flexion
 ψ : rotation de la surface moyenne
 e_s, e_θ : déformation de membrane
 γ_s : déformation de cisaillement
 σ_s, σ_θ : contraintes normales (composantes curviligne)
 $\sigma_{s\theta}, \sigma_{sz}, \sigma_{\theta z}$: contraintes de cisaillement (composantes curviligne)
 $\sigma_r, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_\theta, \sigma_{\theta z}, \sigma_z$: composantes cylindriques de contraintes
 Π : fonctionnelle d'énergie
 Π_{int}, Π_{ext} : fonctionnelle, énergie potentielle interne, externe
PTV : principe des travaux virtuels
 W_{int}, W_{ext} : travail virtuel interne, externe
 f_r, f_s, f_z, m_s : sollicitations par unité de surface moyenne
 N_s, N_θ : effort résultantes de membrane suivant s et θ
 M_s, M_θ : effort résultantes de flexion
 T_s : effort tranchant suivant z
 $[H_i], [H]$: matrice de comportement élastique

G : module de cisaillement

E : module de Young

ν : coefficient de Poisson

$[H_m], [H_{mf}], [H_f]$: matrice de comportement homogénéisées de membrane, flexion et couplage membrane-flexion

$[H_c]$: matrice de comportement globale en cisaillement transversal

k : facteur de correction de cisaillement transversal

$(f_r f_z), (f_{sr} f_{sz})$: force de volume, force surfacique sur S_f (solide de révolution)

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{rz}$: composantes cylindriques des contraintes (solide de révolution)

L, C : opérateurs différentielles

Ψ : fonction de pondération

δ : symbole de calcul des variations

V_e : volume élémentaire

$p(x), p(\xi)$: base polynomiale de l'approximation espace réel, paramétrique

$N(x)$: fonction de forme

$\{a\}$: variable généralisées de l'approximation

$\{u(x)\}$: variables généralisés

$\{u_n\}$: variable nodales

$[B]$: matrice reliant les déformations aux variables nodales

$[\partial]$: matrice des dérivées partielles

$\{f_n\}$: vecteur des forces nodales de l'élément

$[k]$: matrice de rigidité élémentaire

$[K], [F]$: matrice de rigidité et vecteur des forces globales

$[B_m] [B_f] [B_c]$: matrices définissant les déformations de membrane, de flexion et de cisaillement transversal

$[k_{mf}], [k_c]$: matrice de rigidité élémentaires de membrane-flexion, cisaillement transversal

g : accélération de la pesanteur

ρ : masse volumique

V : volume

h : épaisseur suivant \mathbf{n}

$\{u_n\}_{loc}$: vecteur déplacements nodales dans le repère local

$[k]_{loc}$: matrice de rigidité élémentaire dans le repère local

$[T]$: matrice de changement de base

INTRODUCTION

GENERALE

Introduction générale

Lorsque correctement appuyée, une coque devient un élément structural de grande efficacité (considérant le rapport poids/portée) qui transmet les charges par action membranaire.

En effet, à l'exception des zones adjacentes aux discontinuités de géométrie ou de chargement (bordures, ouvertures, changement brusque d'épaisseur, charges concentrées sectorielles), les effets flexionnels sont négligeables.

Les propriétés structurales intéressantes des coques ont été mises à contribution depuis l'antiquité dans la construction navale.

De nos jours, les coques sont souvent utilisées en Génie civil dans la construction des voûtes cylindriques ou sphériques en maçonnerie.

Avec l'avènement du béton armé, les formes et les applications se sont diversifiées vers la construction des barrages voûtes, des châteaux d'eau et réservoirs et des toitures de grandes portées. Les structures en forme de coque constituent les éléments structuraux de base dans la construction aéronautique et aérospatiale.

Le comportement structural des plaques et coques est décrit par des équations aux dérivées partielles complexes. Des solutions de ces équations ne sont obtenues, de façon précise, que pour quelques rares cas, souvent d'ordre académique. Les difficultés rencontrées dans la résolution de tels cas de structures sont contournées avec l'usage de la méthode des éléments finis.

Cette méthode donne une solution certes approximative, mais suffisamment précise pour des applications pratiques. Bien qu'étant élaborée depuis le début des années soixante, la recherche est en cours encore aujourd'hui, les objectifs s'inscrivant dans l'amélioration des solutions obtenues.

On distingue deux catégories de coques: les coques de révolution et les coques à géométrie quelconque. Leur analyse repose sur la description de leur surface avec un système de coordonnées le plus approprié, la détermination des paramètres géométriques déterminants et l'écriture des équations aux dérivées partielles fondamentales qui décrivent leur comportement mécanique.

L'avantage du choix et de la conception des structures à symétrie axiale avec chargement de révolution est que la modélisation nous permet d'étudier la structure dans n'importe quel demi plan contenant l'axe de révolution dit plan méridien.

Dans la théorie des coques de révolution la symétrie par rapport à l'axe Z offre une simplicité par conséquent une diminution du temps de calcul soit pour la solution numérique

ou manuel qui est rarement possible (sauf dans des cas très simple), basé sur cette modélisation, et avec l'évolution de la méthode des éléments finis les chercheurs ont développés plusieurs types d'éléments finis où on peut distinguer d'après la théorie des coques deux types d'éléments finis:

✓ Des éléments finis où le cisaillement transversal est pris en considération dans la formulation (théorie de **Rissner-Mindlin**).

✓ Des éléments finis où l'effet du cisaillement transversal n'est pas pris en compte (théorie de **Love-Kirchoff**).

L'objectif de notre travail est d'étudier la performance de l'élément fini **CAXI_K** établi par **Batoz** et **Dhatt** [1] en utilisons un programme réalisé par [2] sous logiciel Matlab.

Le premier chapitre est consacré à la présentation des différentes méthodes théoriques nécessaires pour la formulation des éléments finis, dans la deuxième partie on s'intéresse à la recherche bibliographique des éléments finis type coques axisymétriques.

Dans le deuxième chapitre on présente la formulation de l'élément fini de type coque de révolution **CAXI_K**.

Dans Le troisième chapitre on donne une brève définition du logiciel Matlab, ensuite on présente les différentes étapes qui caractérisent un programme éléments finis, puis on donne l'algorithme général du programme [2] écrit sous MATLAB, aussi on donne le mode de fonctionnement des différentes fonctions (subroutine) qui les constitue.

Le quatrième chapitre à pour objectif l'étude de la performance de l'élément **CAXI_K**, ainsi La comparaison des résultats obtenus pour diverses applications avec ceux obtenus par d'autres logiciels (**ANSYS** et **ROBOT**).

CHAPITRE 1
THEORIE DES COQUES DE REVOLUTION /
RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

1- Introduction

La présente étude pour objet de présenter une méthode de calcul des coques minces à symétrie de révolution et de déduire leur comportement sous l'effort des efforts de membrane ainsi que des efforts de flexion.

La démarche suivie consiste, d'abord, à élaborer des règles de calcul propres à ce type de structures, compte tenu de leurs formes géométriques, puis d'appliquer, moyennant l'introduction de notions appropriées, les lois de la mécanique, notamment celles de l'élasticité et, enfin de proposer des méthodes de résolution des équations qui en résolution.

Le type de structures dont nous envisageons l'analyse et leur forme particulière nécessite le recoure à l'analyse tensorielle, instrument indispensable, des qu'il s'agit d'évoluer dans des espaces courbes, Enfin, et bien que nous nous emploierons à des cas de coques, autres que sphériques, d'épaisseur et de charge variables, nécessite la mise en œuvre de méthodes numérique.

2-Géométrie des surfaces de révolution

Cette partie théorique est inspiré du référence [3]

2.1 Définition

Une surface de révolution est une figure générée par une courbe, la génératrice, qui s'appuie sur un cercle, la directrice, ou cercle directeur, toute en tournant autour de l'axe de ce cercle, l'ensemble des courbes génératrices sont appelées méridiennes, les cercles parallèles à la directrice sont appelés parallèles.

L'étude du comportement des coques, en général, se fera dans un système d'axes de coordonnées intrinsèques dont nous commençons par indiquer le mode de construction.

2.2 Système de coordonnées intrinsèques

a) surface de révolution

l'équation d'un surface de révolution, rapportée à un système d'axes de coordonnées $O_{x,y,z}$, et de la forme :

$$x^2 + y^2 = f^2(z) \dots\dots\dots(1)$$

La système de coordonnées utilisé, dans l'analyse des coques, est un système trirectangulaire dont les axes sont, respectivement, dirigés suivant la normale extérieure à la surface et les tangentes respectives, à la parallèle et à la méridienne.

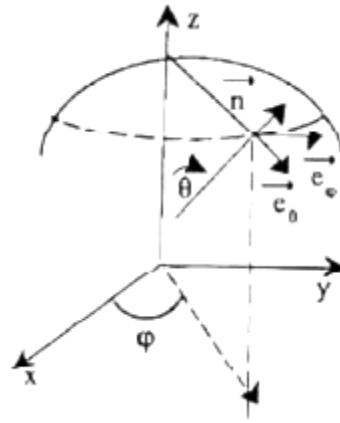


Figure (1 . 1) description géométrique de l'axisymétrie [3]

Si un tel système existe, il définit une transformation de coordonnées permettant le passage de l'ancien repère (x, y, z) , x^i en notions tensorielles, au nouveau repère (φ, θ) , ou α^i Recherchons un tel système de telle sorte que soit vérifiée l'équation (1). Cette dernière peut se mettre sous la forme:

$$\varphi = x^2 + y^2 - f^2(x) = 0$$

on sait que $\vec{N} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$ est un vecteur normal à la surface dont composantes sont :

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2ff' \end{pmatrix}$$

Le vecteur unitaire \vec{n} normal à la surface est, alors, égal à \vec{N} que divise son module :

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

Où

$$|\vec{N}| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + f^2 \cdot f'^2}$$

Compte tenu de (1).

$$|\vec{N}| = 2f\sqrt{1 + f'^2}$$

De ce fait,

$$|\vec{n}| = \frac{1}{|\bar{N}|} \begin{cases} 2x = \alpha \\ 2y = \beta \\ -2ff'^2 = \gamma \end{cases} \dots\dots\dots(2a)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \dots\dots\dots(2b)$$

Des relation (2a) on déduit que :

$$\gamma^2 = \frac{f'^2}{1 + f'^2}$$

Ou

$$f'^2 = \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} \dots\dots\dots(2c)$$

Posons, par ailleurs, $\beta = \alpha \cdot \text{tg } \varphi$, il résulte de (2b):

$$\begin{aligned} \beta^2 &= 1 - \gamma^2 \cos^2 \varphi \\ \alpha^2 &= 1 - \gamma^2 \sin^2 \varphi \dots\dots\dots(2d) \\ \gamma^2 &= \gamma^2 \end{aligned}$$

Les composantes du vecteur unitaire \vec{n} normal à la surface s'expriment, en verte de (2c), en fonction de la seule composante γ , donc de $f'(z)$.

Les rections (2a) indiquent le passage du système de coordonnées caractéristiques aux coordonnées intrinsèques.

Explicitement cette opération se traduit par les relation :

$$\begin{aligned} x &= f(z) \cos \varphi \\ y &= f(z) \sin \varphi \dots\dots\dots(3) \\ z &= z(f) \end{aligned}$$

Les composantes des vecteurs de base du nouveau repère, tangents, respectivement, à la méridienne, sont :

$$\vec{e}_\varphi = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} (f(z) \cos \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (f(z) \sin \varphi) \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{dz}{df} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{cases} \quad \vec{e}_\theta = \begin{cases} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} f(z) \\ \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} f(z) \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{dz}{df} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(z) \end{cases}$$

La condition d'orthogonalité du système exige que le produit scalaire des vecteurs de base, pris deux à deux, soit nul. En particulier.

$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

Cette condition est satisfaite si $f(z)$ est fonction de θ seul : par conséquent, il en est de même pour z et γ .

Il est commode de poser par la suite :

$$\gamma = \cos\theta$$

Il en découle, compte tenu de (2c)

$$f' = \cot\theta$$

Les composantes de \vec{n} sont, alors, d'après (2a) et (2d) :

$$\alpha = \sin\theta \cdot \cos\varphi \quad \beta = \sin\theta \cdot \sin\varphi \quad \gamma = \cos\theta \dots \dots \dots (4)$$

b) Coque de révolution

Une coque de révolution est un corps volumique généré par une surface de révolution dont chaque point se déplace le long de la normale sur une distance h appelée épaisseur. L'épaisseur h peut être petite ou grande par rapport au rayon de courbure ; on est alors en présence d'une coque épaisse. En outre, l'épaisseur h peut être constante ou variable. Pour construire un système de coordonnées intrinsèques à une coque ; nous envisageons un repère mobile d'origine O , située sur la surface moyenne, dont les axes sont dirigés, respectivement, suivant les courbes parallèles et méridiennes et suivant la normale extérieur à la surface moyenne. On mesure au point O les coordonnées (φ, θ) et on compte, à partir du même point, la coordonnée t d'un point courant M , mesurée suivant la normale à la surface moyenne. Nous conviendrons que le trièdre est direct dans le sens $(\vec{e}_\varphi, \vec{n}, \vec{e}_\theta)$.

Compte tenu de cette convention, un rayon vecteur $\vec{r} = \vec{O'M}$, repéré à partir d'une origine arbitraire O' , se décompose comme suite :

$$\vec{r} = \vec{r}^o + \vec{\rho}$$

Où $\vec{r}^\circ = \vec{0'O}$ est le rayon vecteur d'un point 0 pris surface moyenne et $\vec{\rho} = \vec{0M}$ est pris suivant l'épaisseur de la coque dans la direction de la normale ; comme $\vec{\rho} = \vec{n}.t$, l'expression de \vec{r} s'écrit :

$$\vec{r} = \vec{r}^\circ + t.\vec{n}.....(5)$$

Les grandeurs affectées de l'indice (°) se rapportent à la surface moyenne. Connaissant les composantes de \vec{r}° et de \vec{n} , il est aisé, pour la coque, les composantes de \vec{r} , donc les relations de passage du système de coordonnées cartésiennes aux coordonnées intrinsèque. Par exemple, pour une coque sphérique le passage se traduit par :

$$\begin{aligned} x &= (R + t). \sin\theta. \cos\varphi \\ y &= (R + t). \sin\theta. \sin\varphi(6) \\ z &= (R + t). \cos\theta \end{aligned}$$

L'expression des vecteurs de base d'un tel système se déduit de (5), par dérivation du vecteur \vec{r} :

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i} = \frac{\partial \vec{r}^\circ}{\partial \alpha^i} + t \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha^i}$$

et, en définitive :

$$\vec{e}_i = \vec{e}_i^\circ + t \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha^i}(7)$$

Le tenseur métrique fondamental, se réduit à ses composantes diagonales en raison de l'orthogonalité des axes de coordonnées ; ces composantes sont :

$$g_{\varphi\varphi} = \vec{e}_\varphi . \vec{e}_\varphi \quad g_{\theta\theta} = \vec{e}_\theta . \vec{e}_\theta \quad g_{tt} = \vec{e}_t . \vec{e}_t$$

Appliquées à l'exemple de la coque sphérique, ces relation donnent :

$$g_{\varphi\varphi} = (R + t)^2 . \sin^2\theta \quad g_{\theta\theta} = (R + t)^2 \quad g_{tt} = 1.....(8a)$$

Sur la surface moyenne ($t = 0$), le tenseur métrique fondamental se réduit à :

$$g_{\varphi\varphi}^\circ = R^2 . \sin^2\theta \quad g_{\theta\theta}^\circ = R^2 \quad g_{tt}^\circ = 1.....(8b)$$

c) Courbure d'une surface

La courbure, ou son inverse le rayon de courbure, est une caractéristique essentielle des coques. Nous exposons, ci-après, une méthode pratique pour sa détermination.

La géométrie différentielle nous enseigne que la courbure d'une figure géométrique est donnée par la relation :

$$\mu \cdot \vec{n} = \frac{d^2 r^\circ}{dl^2} \dots\dots\dots(9a)$$

Dans le cas qui nous intéresse \vec{r} est la rayon de coordonnées (φ, θ) et dl la longueur de \vec{ar} . Exécutons la double dérivation par rapport aux coordonnées α^i et α^j ,

$$\mu \cdot \vec{n} = - \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} \cdot \frac{d\alpha^i}{dl} \frac{d\alpha^j}{dl} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i} \cdot \frac{d^2 \alpha^i}{dl^2} \dots\dots\dots(9b)$$

Remarqueone que:

$$dl^2 = g_{ij} d\alpha^i d\alpha^j$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} = \vec{e}_k \cdot \Gamma_{ij}^k$$

Γ_{ij}^k est le symbole de Christoffel de 2° espèce du système de coordonnée. Multiplions scolairement les deux membres de (9b) par, \vec{n} , et remarquons que $\vec{n} \cdot \vec{e}_k = \delta_{tk}, \delta_{tk}$ étant le symbole de Kronecker

$$(\delta_{kt} = 1 \text{ si } k = t \text{ et } \delta_{kt} = 0 \text{ si } k \neq t)$$

d'une part, et que le deuxième terme du second membre de (9a) disparaît comme produit scalaire de deux vecteur orthogonaux, d'autre part, on obtient la relation :

$$(\mu \cdot g_{ij} + \Gamma_{ij}^t) d\alpha^i \cdot d\alpha^j = 0$$

Cette relation est vérifiée si est vérifiée le système d'équations linéaires :

$$(\mu \cdot g_{ij} + \Gamma_{ij}^t) d\alpha^i = 0$$

Dont les $d\alpha^i$ sont les inconnues. On sait que pour qu'il existe une solution, non nulle, de ce système d'équations il faut que le déterminant de la matrice des coefficients des inconnues soit

nul. On remarquera, par ailleurs, que cette matrice se réduit à une diagonale car les termes pour lesquels i et j sont différents sont nuls, et on déduit :

$$\mu = \frac{1}{g_{ii}} \cdot \Gamma_{ii}^t = \Gamma_{it}^j$$

Sachant que :

$$\Gamma_{it}^j = + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{g_{ii} \partial t}$$

L'expression de la courbure d'une surface de révolution est :

$$\mu_i = 1/R_j = \Gamma_{it}^i$$

Les coques repérées par deux coordonnées angulaires possèdent deux rayons de courbure. Ainsi, pour la coque sphérique, les courbures sont :

$$\mu_\varphi = \frac{1}{R+t} \quad \mu_\theta = \frac{1}{R+t}$$

Qui se ramènent, sur la surface moyenne ($t = 0$), à :

$$\mu_\varphi = \mu_\theta = \frac{1}{R}$$

Remarquons que pour une sphère les deux rayons de courbure sont égaux. Si la coque à la forme d'un parabololoïde révolution d'équation :

$$x^2 + y^2 = -2pz$$

on arriverait par un raisonnement similaire aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} x &= (p \cdot tg\theta + t \cdot \sin\theta) \cdot \cos\varphi \\ y &= (p \cdot tg\theta + t \cdot \sin\theta) \cdot \sin\varphi \\ z &= -p \cdot tg^2\theta + t \cdot \cos\theta \end{aligned}$$

On peut déduire aisément les composantes des vecteurs de base; ainsi que le tenseur métrique fondamental. Les rayons de courbure ont, alors, pour expression :

$$R_\varphi = \frac{p}{\cos\theta} \quad R_\theta = \frac{p}{\cos^2\theta}$$

On peut déduire des considérations qui précèdent l'expression du tenseur métrique fondamental et de sa racine carrée au point M, en fonction de leur expression en O' (sur la surface moyenne). Ainsi, par dérivation de (3), et multiplication scalaire des deux membres par e_i° , on a, après transformation

$$\sqrt{g_{ii}} = \sqrt{g_{ii}^\circ} \cdot (1 + t/R_i)$$

On déduit les composantes du tenseur métrique fondamental :

$$g_{ii} = g_{ii}^\circ \cdot (1 + t/R_i)^2$$

Il arrive, parfois que compte tenu du rapport des dimensions de la coque, ($t/R \ll 1$), on se contente de l'approximation suivante :

$$g_{ii} = g_{ii}^\circ \cdot (1 + 2t/R_i)$$

Ces grandeurs interviennent dans la dérivée covariante des tenseurs et on les rencontre, essentiellement, dans l'expression du tenseur des déformations.

3 Elasticité appliquée aux coques de révolution

Les coques minces sont caractérisées par un rapport épaisseur sur rayon de courbure h/R très petit. De ce fait, les contraintes qui agissent dans la direction de l'épaisseur sont nulles ou négligeables.

Donc $\sigma_{it} = 0$

De même les déformations angulaires (ε_{it}) sont nulles.

De sait, par définition, que les composantes covariantes du tenseur des déformations sont :

$$\varepsilon_{it} = \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j)$$

En conséquence de ce qui précède

$$\nabla_t u_i = \nabla_i u_t$$

3.1 Déformations et contraintes

3.1.1 Champ de déplacements

La théorie de l'élasticité nous enseigne qu'une particule élémentaire autour d'un point M d'un corps subit une translation, une rotation et une déformation pure. Cette dernière est négligée car insignifiante. Le déplacement élémentaire de M a alors, pour expression

$$\vec{d}u = \vec{\omega} \wedge \vec{d}\vec{\rho} \dots \dots \dots (10a)$$

Où

$\vec{\omega} = 1/2 \cdot \overrightarrow{rot} \vec{u}$ est le vecteur rotation et $\vec{\rho}$ le rayon vecteur de composantes $(0, t, 0)$ dans le système de coordonnées intrinsèques.

Intégrons du le long de \overrightarrow{OM} , il vient :

$$\vec{u}(M) = \vec{u}^o + \vec{\omega} \wedge \vec{\rho} - \int_{\overrightarrow{om}} \vec{d}\omega \wedge \vec{\rho}$$

L'expression sous le signe de l'intégration se ramène, après transformation, à

$$\vec{d}\omega \wedge \vec{\rho} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \rho} \cdot (\vec{d}\rho \wedge \vec{\rho}) = 0$$

Car le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires $\vec{\rho}$, et $(\vec{d}\rho)$, est nul. Il reste :

$$\vec{u} = \vec{u}^o + \vec{\omega} \wedge \vec{\rho} \dots \dots \dots (10b)$$

3.1.2 Composantes du vecteur rotation

De (10a), après dérivation par rapport à t, il découle,

$$\vec{\omega} \wedge \vec{n} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{e}^t \cdot \nabla_t u_i = -\vec{e}^t \cdot \nabla_i u_t$$

Où ∇_t est symbole de la dérivée covariante de u_i par rapport à t. après avoir effectué les opérations vectorielles et être revenu aux grandeurs physiques des tenseurs, les composantes physiques du vecteur rotation ont pour expression

$$\omega_\theta = 0 \qquad \omega_\varphi = -\frac{1}{R} \left(\frac{du_t}{d\theta} - u_\theta \right)$$

3.1.3 Tenseur des déformations

Le vecteur déplacement de M est :

$$\vec{u} = \vec{u}^\circ + \vec{\omega} \wedge \vec{\rho}$$

Ses composantes covariantes sont :

$$\vec{u}_i = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{ii}^\circ}} u_i^\circ - t \cdot \nabla_i u_t$$

Formons la dérivée covariante de u_i par rapport à une coordonnée arbitraire α^j

$$\nabla_j u_i = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{ii}^\circ}} \cdot \nabla_j u_i^\circ - t \cdot \nabla_j \nabla_i u_t$$

Après avoir effectué les opération de dérivation covariante et être retourné aux grandeurs physiques, et sachant que la dérivée ordinaire par rapport à φ est nulle, en raison de la symétrie de révolution, nous trouvons finalement que les composantes du tenseur des déformations se présentent ainsi :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \varepsilon_{\varphi\varphi}^\circ + \omega_\varphi \cot\theta \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta}^\circ + t \cdot \frac{d\omega_\varphi}{d\theta} \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} \omega_\varphi &= -\frac{1}{R} \cdot \left(\frac{du_t}{d\theta} - u_\theta \right) \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^\circ &= \frac{1}{R} \cdot (u_t + u_\theta \cdot \cot\theta) \dots\dots\dots(11) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^\circ &= -\frac{1}{R} \cdot \left(\frac{du_\theta}{d\theta} + u_t \right) \end{aligned}$$

La composante tangentielle ($\varepsilon_{\varphi\varphi}$) du tenseur des déformations est nulle en raison de la symétrie de révolution du système.

3.1.4 Tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes se déduit du tenseur des déformations au moyen de la loi de Hook généralisée. On obtient, ainsi

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{\theta\theta}) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}) \end{aligned} \dots\dots\dots(12)$$

3.1.5 Efforts normaux dans la coque

Ce sont les forces N_φ et N_θ qui agissent normalement à une section de la coque, respectivement, suivant la tangente τ_θ à une méridienne. Elles ont pour expression :

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \int_S \sigma_{\varphi\varphi} \cdot \tau_\varphi \cdot ds \\ N_\theta &= \int_S \sigma_{\theta\theta} \cdot \tau_\theta \cdot ds \end{aligned} \dots\dots\dots(13)$$

Dans le cas d'une coque sphérique

$$\tau_\theta \cdot ds = R \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot dt \quad \text{et} \quad \tau_\varphi \cdot ds = R \cdot d\theta \cdot dt$$

Remplaçons $\sigma_{\varphi\varphi}$ et $\sigma_{\theta\theta}$ par leur expression et exécutons (13), nous obtenons :

$$\begin{aligned} n_\varphi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\varphi\varphi}^0 + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^0) \\ n_\theta &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta}^0 + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}^0) \end{aligned} \dots\dots\dots(14)$$

n_φ et n_θ sont les efforts normaux, par unité de longueur, de parallèle et de méridienne.

3.1.6 Moments de flexion dans une coque

Les composantes du moment des forces de contraintes agissant en un point **M** de la coque sont, par définition

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \int_S t \cdot \sigma_{\theta\theta} \cdot \tau_\theta \cdot ds \\ M_\theta &= - \int_S t \cdot \sigma_{\varphi\varphi} \cdot \tau_\varphi \cdot ds \end{aligned}$$

Remplaçons $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\theta\theta}$, τ_{θ} et τ_{φ} par leur expression et intégrons par rapport à $t(-h/2 < t < h/2)$.

Les composantes du moment, par unité de longueur, autour de la parallèle et de la méridienne sont, respectivement, dans le cas d'une coque sphérique :

$$m_{\varphi} = \frac{D}{R} \cdot \left(\frac{d\omega_{\varphi}}{d\theta} - \nu \cdot \omega_{\theta} \cdot \cot g\theta \right)$$

$$m_{\theta} = -\frac{D}{R} \cdot \left(\omega_{\varphi} \cdot \cot g\theta + \nu \cdot \frac{d\omega_{\theta}}{d\theta} \right)$$

avec

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

D est la rigidité de la coque à la flexion.

3.1.7 Effort tranchant

On démontre, par des considérations énergétiques, que l'effort tranchant, par unité de longueur de parallèle est

$$Q = \frac{1}{R \cdot \sin\theta} \cdot \left[m_{\theta} \cdot \cos\theta + \frac{d}{d\theta} (m_{\varphi} \cdot \sin\theta) \right] \dots\dots\dots(15)$$

3.2 Equations d'équilibre

Supposons la coque soumise à force extérieure répartie d'intensité p par unité de surface. Il est, alors, aisé de déduire les équations d'équilibre par application du théorème du minimum de l'énergie potentielle. Il en résulte les équations suivantes :

$$(n_{\varphi} + n_{\theta}) \sin\theta - \frac{d}{d\theta} (Q \cdot \sin\theta) = p_t R \cdot \sin\theta \dots\dots\dots(16a)$$

$$n_{\varphi} \cdot \cos\theta - \frac{d}{d\theta} (n_{\theta} \cdot \sin\theta) - Q \cdot \sin\theta = p_{\theta} R \cdot \sin\theta \dots\dots\dots(16b)$$

p_t et p_{θ} sont les composantes normale et tangentielle, suivant une méridienne, à la surface de la coque, de la force par unité de surface.

Ce système d'équations, dont les fonctions inconnues n_{φ} , n_{θ} et Q peuvent s'exprimer en fonction des déplacements u_{θ} et u_t , définit complètement le comportement de la coque.

3.2.1 Théorie de la membrane

Si l'appui de la coque est tel que les bords puissent tourner librement, les moments de flexion sont, alors, négligeables et on obtient une bonne approximation en ne considérant que seuls les efforts normaux, ou forces de membrane, sont susceptibles de se développer de façon significative. Dans ce cas, les moment de flexion et les efforts tranchants sont ignorés et les équations (16) s'écrivent :

$$n_{\theta} \cdot \sin\theta + n_{\varphi} \cdot \sin\theta = p_t \cdot R \cdot \sin\theta \dots\dots\dots(17a)$$

$$n_{\varphi} \cdot \cos\theta - \frac{d}{d\theta}(n_{\theta} \cdot \sin\theta) = p_{\theta} \cdot R \cdot \sin\theta \dots\dots\dots(17b)$$

Pour résoudre ce système d'équations différentielles du premier ordre en n_{φ} et n_{θ} , il faut connaître l'expression de p_t et p_{θ} . Supposons, cas le plus courant, que la coque soit soumise à une force vertical, son poids propre, de densité p par unité de surface ; la projection de cette force sur les axes de coordonnées intrinsèques donne alors :

$$p_t = p \cdot \cos\theta \quad \text{et} \quad p_{\theta} = p \cdot \sin\theta$$

Eliminant n_{φ} entre (17a) et (17b), il vient :

$$\sin\theta \cdot \frac{dn_{\theta}}{d\theta} + 2 \cdot n_{\theta} \cdot \cos\theta = -pR$$

Cette équation admet pour solution générale

$$n_{\theta} = (pR \cdot \cos\theta + A) / \sin^2\theta$$

n_{θ} doit rester fini au voisinage de $\theta = 0$. Pour cela, il faut que le numérateur s'annule en ce point. Donc.

$$A = -pR$$

L'effort normal à la méridienne par unité de parallèle est, après simplification.

$$n_{\theta} = \frac{-pR}{(1 + \cos\theta)}$$

Pour les angles d'ouverture habituels ($\theta < 90^\circ$), n_{θ} est un effort de compression.

On déduit. Sans difficulté, l'expression de n_{φ} . L'équation (17a), nous donne, par exemple :

$$n_\varphi = \frac{-pR}{(1 + \cos\theta)} \cdot (\cos^2\theta + \cos\theta - 1)$$

n_φ est un effort de compression qui s'annule pour un angle θ voisin de 52° , pour devenir effort de traction au-delà.

Si la force répartie p était normale à la surface de la coque (pression hydrostatique), nous aurions abouti, par un raisonnement identique, à la répartition suivante des forces de membrane :

$$n_\varphi = n_\theta = \frac{-pR}{2}$$

3.2.2 Flexion des coques

a) Méthode des inconnues hyperstatiques

Pour l'étude de la flexion des coques on utilise les équation (15). Toutefois, des études détaillées ont montré que la flexion n'est significative qu'au voisinage des bords. Ailleurs les forces de membrane sont prépondérantes. Pour tenir compte de cela et simplifier la résolution du problème, on suppose que la coque est soumise à des forces, équivalentes aux forces de membrane, appliquées sur ses bords, de telle sorte qu'elles produisent le même effet que les forces réellement appliquées. En ignorant le second membre, les équations (15a) et (15b) deviennent :

$$\begin{aligned} n_\varphi \cdot \sin\theta + n_\theta \cdot \sin\theta - \frac{d}{d\theta}(Q \cdot \sin\theta) &= 0 \\ n_\varphi \cdot \cos\theta - \frac{d}{d\theta}(n_\theta \cdot \sin\theta) - Q \cdot \sin\theta &= 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(18)$$

Ces relation sont satisfaites pour

$$n_\theta = Q \cdot \cotg\theta \qquad n_\varphi = \frac{dQ}{d\theta}$$

Reprenons, par ailleurs, l'expression des déformations sur la surface moyenne de la coque, données par les formules (11).

Dérivons $\varepsilon_{\varphi\varphi}^\circ$:

$$\frac{d}{d\theta} \varepsilon_{\varphi\varphi}^\circ = -\frac{1}{R} \left(\frac{du_t}{d\theta} - u_\theta \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{du_\theta}{d\theta} + u_t \right) \cotg\theta - \frac{1}{R} (u_t + u_\theta \cdot \cotg\theta) \cdot \cotg\theta$$

$$\frac{d}{d\theta} \varepsilon_{\varphi\varphi}^\circ = \omega_\varphi + (\varepsilon_{\varphi\varphi}^\circ - \varepsilon_{\theta\theta}^\circ) \cotg\theta$$

Or

$$\frac{d}{d\theta} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{\circ} = \frac{1}{Eh} \frac{d}{d\theta} (n_{\varphi} - \nu \cdot n_{\theta}) = \frac{1}{Eh} \left(\frac{d^2 Q}{d\theta^2} - \nu \cdot \cot g\theta \cdot \frac{dQ}{d\theta} \right)$$

Et

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{\circ} - \varepsilon_{\theta\theta}^{\circ} = \frac{1}{Eh} \cdot (n_{\varphi} - n_{\theta}) = \frac{1}{Eh} \cdot \left(Q \cdot \cot g\theta - \frac{dQ}{d\theta} \right)$$

Remplaçons $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{\circ}$ et $\varepsilon_{\theta\theta}^{\circ}$ ainsi que leur dérivée en fonction de l'effort tranchant Q puis ordonnons et simplifions l'écriture ; on obtient l'équation différentielle :

$$-Eh\omega_{\varphi} = \frac{d^2 Q}{d\theta^2} + \cot g\theta - (\cot g\theta^2 - \nu) \cdot Q$$

Par ailleurs, la relation (15) peut s'écrire :

$$RQ = (m_{\varphi} + m_{\theta}) \cdot \cot g\theta + \frac{dm_{\varphi}}{d\theta}$$

$$Q = \frac{D}{R^2} \cdot \left[(1 - \nu) \left(\frac{dm_{\varphi}}{d\theta} + \nu \omega_{\varphi} \cdot \cot g\theta \right) + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dm_{\varphi}}{d\theta} + \nu \omega_{\varphi} \cdot \cot g\theta \right) \right]$$

Ordonnons et simplifions l'écriture de cette équation qui devient :

$$\frac{QR^2}{D} = \frac{d^2 \omega_{\varphi}}{d\theta^2} + \cot g\theta \cdot \frac{d\omega_{\varphi}}{d\theta} - (\cot g^2\theta + \nu) \cdot \omega_{\varphi}$$

On obtient, en définitive, le système d'équations :

$$\frac{d^2 Q}{d\theta^2} + \cot g\theta \cdot \frac{dQ}{d\theta} - \cot g\theta^2 \cdot Q = -(Eh\omega_{\varphi} + \nu Q)$$

$$\frac{d^2 \omega_{\varphi}}{d\theta^2} + \cot g\theta \cdot \frac{d\omega_{\varphi}}{d\theta} - \cot g^2\theta \cdot \omega_{\varphi} = (QR^2 + \nu \omega_{\varphi})$$

Négligeons dans les deux équation (20) ν devant $\cot g\theta$. Il reste :

$$\frac{d^2 Q}{d\theta^2} + \cot g\theta \cdot \frac{dQ}{d\theta} - \cot g\theta^2 \cdot Q = -Eh\omega_{\varphi}$$

$$\frac{d^2 \omega_{\varphi}}{d\theta^2} + \cot g\theta \cdot \frac{d\omega_{\varphi}}{d\theta} - \cot g^2\theta \cdot \omega_{\varphi} = \frac{R^2 Q}{D} \dots\dots\dots(19)$$

Ainsi, l'équilibre des coques de révolution sollicitées en flexion s'exprime au moyen de deux équations différentielles, en Q et ω_{φ} , à coefficients variables.

Remarquons qu'au voisinage du sommet $\theta = 0$, $\cot g\theta$ devient très grand. Or, les expression contenant $\cot g\theta$ doivent rester finies. Pour cela, il faut que les facteurs de ce terme soient très

petits et comme, ce sont des fonctions régulières et monotones qui ne doivent pas varier brusquement, ils resteront petits dans le domaine de variation de θ .

Il en résulte que les dérivées de Q et ω_φ d'un certain ordre sont négligeables devant leurs dérivées d'ordre supérieur. Négligeons, Q , ω_φ ainsi que leurs dérivées premières dans les équations d'équilibre se ramène à :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q}{d\theta^2} &= -Eh\omega_\varphi \\ \frac{d^2 \omega_\varphi}{d\theta^2} &= \frac{R^2}{D} \cdot Q \end{aligned} \dots\dots\dots(20)$$

Dérivons deux fois la première équation et remplaçons le second membre par son expression déduite de la deuxième équation ; on obtient une seule équation en Q une seule en ω_φ , qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d^4 Q}{d\theta^4} + 4\lambda^4 \cdot Q &= 0 & (a) \\ \frac{d^4 \omega_\varphi}{d\theta^4} + 4\lambda^4 \cdot \omega_\varphi &= 0 & (b) \end{aligned} \dots\dots\dots(21)$$

où $4\lambda^4 = \frac{EhR^2}{D} = 12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot \frac{R^2}{h^2}$

La solution générale de l'équation différentielle (21a) est de la forme :

$$Q = e^{-\lambda\theta} (A \cos \lambda\theta + B \sin \lambda\theta) + e^{\lambda\theta} (C \cos \lambda\theta + D \sin \lambda\theta) \dots\dots\dots(22)$$

La solution particulière dépend de quatre constantes qui seront déterminées par les conditions aux limites. On sait, toutefois, des nombreuses études réalisées sur les coques, que les efforts croissent. Aussi, nous ne conserverons dans l'équation (22) que le terme qui croit avec θ .

Posons pour plus de commodité $\theta = \alpha - \psi$, α est l'angle d'ouverture au sommet de la coque. Dans ces conditions, la solution de l'équation d'équilibre peut s'écrire, lorsque la coque ne présente pas d'ouverture au sommet :

$$Q = K \cdot e^{-\lambda\psi} \cdot \sin(\lambda\psi + J)$$

De cette relation, on peut déduire les expressions suivantes :

❖ Effort normal suivant une méridienne :

$$n_\theta = Q \cdot \cotg \theta$$

❖ Effort normal suivant une parallèle :

$$n_\varphi = \frac{dQ}{d\theta}$$

❖ Rotation autour d'une parallèle :

$$\omega_\varphi = \frac{-1}{Eh} \frac{d^2Q}{d\theta^2}$$

❖ Moment de flexion autour d'une parallèle :

$$m_\varphi = \frac{D}{EhR} \frac{d^3Q}{d\theta^3}$$

❖ Moment de flexion autour d'une méridienne :

$$m_\theta = -\nu m_\varphi$$

La composante verticale du déplacement du bord appuyé d'une coque est toujours nulle. La composante horizontale du déplacement a pour expression :

$$\delta = u_t \cdot \sin\theta + u_\theta \cdot \cos\theta$$

Ou

$$\delta = R \cdot \varepsilon_{\varphi\varphi} \sin\theta$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{Eh} (n_\varphi - \nu n_\theta) = \frac{1}{Eh} \left(\frac{dQ}{d\theta} - \nu Q \cdot \cot\theta \right)$$

Négligeons $Q \cdot \cot\theta$, le déplacement horizontal est en définitive :

$$\delta = \frac{R}{Eh} \cdot \sin\theta \frac{dQ}{d\theta}$$

Remarquons, au passage, que δ , qui croit comme le rapport R/h , peut devenir très grand ; c'est pour cela que l'on prend la précaution de raidir le bord des coques au moyen d'anneaux circulaires rigides. Il est possible, des lors, de résoudre un certain nombre de problèmes à l'aide des formules précédentes. Considérons, par exemple, le cas d'une coques soumise à une pression normale d'intensité ρ par unité de surface, et dont le bord est encastré. Pour résoudre le problème, on considère le système équivalent constitué par la coque envisagée soumise à la résultante des forces de membrane supposées appliquées sur le contour de son bord appuyé **Figure(1 . 2)**. Pour réaliser l'équilibre, on superpose une force de réaction horizontale $M\alpha$ et un

moment d'encastrement et la rotation des appuis. Exprimons, tout d'abord, $M\alpha$ et $H\alpha$ en fonction des données. Pour cela, écrivons la solution de l'équation

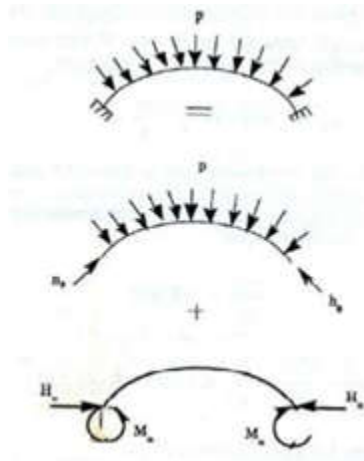


Figure : (1 . 2) le système équivalent [3]

d'équilibre en fonction de ψ :

$$Q = e^{-\lambda\psi}(A\cos\lambda\psi + B\sin\lambda\psi)$$

Le problème se ramène à la détermination des constantes A et B en fonction des conditions aux limites. Dérivons trois cette relation,

$$\frac{dQ}{d\psi} = -\lambda Q + e^{-\lambda\psi}(-A.\sin\lambda\psi + B.\cos\lambda\psi)$$

$$\frac{d^2Q}{d\psi^2} = -\lambda \frac{dQ}{d\psi} - \lambda^2 e^{-\lambda\psi}[A.(-\sin\lambda\psi + \cos\lambda\psi) + B.(\cos\lambda\psi + \sin\lambda\psi)]$$

$$\frac{d^3Q}{d\psi^3} = -\lambda \frac{d^2Q}{d\psi^2} + 2\lambda^3 e^{-\lambda\psi}(A.\cos\lambda\psi + B.\sin\lambda\psi)$$

La rotation étant nulle aux appuis, nous avons :

$$\omega_\varphi = -\frac{1}{Eh} \frac{d^2Q}{d\psi^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2Q}{d\psi^2} \right)_{\psi=0} = 0$$

d'où $B = 0$

Par ailleurs

$$Q)_{\psi=0} = -H\alpha.\sin\alpha = A$$

$$m_\psi)_{\psi=0} = D.\left(\frac{dW_\varphi}{d\psi} \right) = -\frac{D}{R}.\left(\frac{d^3Q}{d\psi^3} \right) = \frac{2D}{EhR}A$$

Comme aux appuis $m_\psi)_{\psi=0} = M\alpha$ il vient :

$$A = -H\alpha \cdot \sin\alpha = -\frac{Eh}{2D}RM\alpha$$

Pour avoir l'expression de A, en doit écrire que la force $H\alpha$ produit un déplacement horizontal ($\delta\alpha$) sur le bord qui annule le déplacement (δ°) produit par les forces de membrane.

Or.

$$\delta = u_\theta \cos\theta + u_t \sin\theta = R\varepsilon_{\varphi\varphi} \sin\theta$$

Comme :

$$n_\varphi = n_\theta = -\frac{pR}{2}$$

$$\delta)_{\psi=0} + \frac{pR^2(1-\nu)}{2Eh} \sin\alpha = \delta^\circ$$

$$\delta\alpha = \frac{-dQ)_{\psi=0}}{d\psi} \frac{R}{Eh} \sin\alpha = \frac{A\lambda R}{Eh} \sin\alpha = \delta^\circ$$

D'où

$$A = -\frac{pR(1-\nu)}{2 \cdot \lambda}$$

En définitive :

$$H\alpha = \frac{(1-\nu)p \cdot R}{2 \cdot \lambda \sin\alpha}$$

$$M\alpha = \frac{(1-\nu)pR^2}{4\lambda^2} = \frac{pRh}{4} \sqrt{\frac{(1-\nu)}{3(1-\nu)}}$$

L'équation d'équilibre prend, en fin de compte, la forme :

$$Q = \frac{(1-\nu)}{2\lambda} p R e^{-\lambda\psi} \cos\lambda\psi$$

Comme

$$m_\varphi = \frac{D}{R} \frac{d\omega_\varphi}{d\psi} = -\frac{D}{EhR} \frac{d^3Q}{d\psi^3}$$

on a, après transformation,

$$m_\varphi = \frac{pRh}{4} \sqrt{\frac{(1-\nu)}{3(1+\nu)}} e^{-\lambda\psi} \cos\lambda\psi$$

On peut, à l'aide de ces formules, calculer les efforts en tout point de la coque.

b) Méthode des déplacements :

Reprenons l'expression des composantes du tenseur des déformations d'une coque sphérique,

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R}(u_\varphi \cot\theta - u_\theta) + \frac{1}{R}\omega_\varphi \cot\theta$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R}\left(\frac{du_\theta}{d\theta} + u_t\right) + \frac{1}{R}\frac{d\omega_\varphi}{d\theta}$$

Avec

$$\omega_\varphi = -\frac{1}{R}\left(\frac{du_t}{d\theta} - u_\theta\right)$$

Négligeons les termes contenant $\cot\theta$ comme très petits, ainsi que :

$$\frac{t}{R^2} \frac{du_\theta}{d\theta} \text{ devant } \frac{t}{R} \frac{du_\theta}{d\theta}, \text{ il reste}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_t}{R}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R}\left(\frac{du_\theta}{d\theta} + u_t\right) - \frac{1}{R^2} \frac{d^2 u_t}{d\theta^2}$$

Les composantes des contraintes déduit de la loi de Hooke ont pour expressions :

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{(1-\nu^2)R} \left[(1+\nu)u_t + \nu \frac{du_\theta}{d\theta} - \frac{\nu}{R^2} \frac{d^2 u_t}{d\theta^2} \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\nu^2)R} \left[\frac{du_\theta}{d\theta} + (1+\nu)u_t - \frac{t}{R^2} \frac{d^2 u_\theta}{d\theta^2} \right]$$

Supposons la coque soumise à une force verticale constante p par unité de surface (son poids propre). L'application du théorème du minimum de l'énergie potentielle conduit aux deux équations d'équilibre suivantes :

$$\frac{d}{d\theta}(n_\theta \sin\theta) = -pR \sin^2\theta$$

$$\frac{D}{R^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\sin\theta \frac{d^2 \mu_t}{d\theta^2} \right) + \frac{(n_\varphi + n_\theta) \sin\theta}{R} = -pR \sin\theta \cos\theta$$

Développons ces expressions et négligeons les termes contenant $\cot g\theta$, ainsi que les dérivées d'ordre inférieur devant les dérivées d'ordre supérieur. Par ailleurs,

$$n_{\theta} + n_{\varphi} = (1 + \nu)n_{\theta} + \frac{Eh}{R}u_t$$

Portons cette expression dans la deuxième équation ci-dessus et opérons les simplifications convenues; on obtient le système d'équations suivant qui définit complètement le comportement de la coque :

$$\frac{dn_{\theta}}{d\theta} = -pR\sin\theta$$

$$\frac{D}{R^4} \frac{d^4u_t}{d\theta^4} + \frac{Eh}{R^2}u_t = -p\cos\theta - (1 + \nu)\frac{n_{\theta}}{R}$$

Divisons les deux membres de la seconde équation par D/R^4 et posons :

$$4\lambda^4 = \frac{EhR^2}{D} = 12(1 - \nu^2)\frac{R^2}{h^2}$$

Intégrons la première équation, ci-dessus ; on a :

$$n_{\theta} = pR\cos\theta + K$$

On détermine la K en remarquant qu'au sommet de la coque ($\theta = 0$), n_{θ} est égale à la force de membrane. Donc :

$$n_{\theta})_{\theta=0} = pR + K = -pR/2$$

D'où :

$$K = -3pR/2$$

Portons cette expression dans la seconde équation d'équilibre ; on obtient alors :

$$\frac{d^4n_{\varphi}}{d\theta^4} + 4\lambda^4u_t = -(2 + \nu)\frac{pR^4}{D}\cos\theta + \frac{3pR^4}{2D}(1 + \nu)$$

La solution de cette équation différentielle détermine complètement le problème. Il sera aisé, à partir de là, de calculer l'expression des efforts en chaque point de la coque.

Si la coque est soumise à une force normal à sa surface, les équations précédentes se simplifient quelque peu. On a alors :

$$K = -pR/2$$

$$u_t^{IV} + 4\lambda^4 u_t = -\frac{1-\nu}{2} \frac{pR^4}{D}$$

La solution de cette équation différentielle est, dans le cas d'une coque sans ouverture au sommet :

$$u_t = e^{-\lambda\psi} (A \cos \lambda\psi + B \sin \lambda\psi) - \frac{(1-\nu)}{2} \frac{pR^4}{4\lambda^4 D}$$

Les constantes A et B sont déterminées par les condition aux limites. Si la coque est encastées les constantes ont pour valeur :

$$A = B = \frac{(1-\nu)}{2} \frac{pR}{4\lambda^4}$$

Il en découle, alors :

$$m_\varphi = -\frac{pRh}{4} \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{3(1-\nu)}} e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Q = \frac{(1-\nu)}{2\lambda} pR e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi - \frac{\pi}{2}\right)$$

On voit que sur le bord encasté ($\psi = 0$) les valeurs du moment de flexion et de l'effort tranchant coïncident exactement avec celles données par la méthode des inconnues hyperstatiques.

On établit aisément l'expression des autres efforts.

$$m_\varphi = -\nu m_\psi \quad n_\theta = -\frac{pR}{2} \quad n_\varphi = \nu n_\theta + \frac{Eh}{R} u_t$$

4. Éléments axisymétriques

4.1. Modélisation axisymétrique

Cette partie théorique est inspiré du référence [4]

Lorsqu'une structure a une géométrie, des chargements, des conditions aux limites qui présentent une symétrie de révolution et que la loi constitutive est indépendante du choix du plan contenant l'axe de révolution de la structure, le problème est axisymétrique. Puisque la structure se comporte de la même manière dans tous les demi-plans contenant l'axe de révolution, elle peut être modélisée simplement dans n'importe lequel de ces demi-plans. Par abus de langage, il porte

le nom de plan méridien (on devrait dire le demi-plan méridien) et le modèle est dit axisymétrique. Par convention, l'axe de révolution est l'axe z. Par définition, r étant la direction radiale et z la direction axiale, dans le repère (r, z) attaché au plan méridien, la structure est toujours définie avec $r \geq 0$. Le volume de matière associé à un élément est celui d'un tore dont la trace est la section plane dans le plan méridien. La modélisation est donc topo logiquement bidimensionnelle, bien que la structure étudiée soit complètement tridimensionnelle. On parle souvent de calcul $2D^{1/2}$. Ce type de modélisation présente deux avantages appréciables : tout d'abord une grande simplification de la définition du modèle liée à une diminution très sensible des données de calcul, ensuite un gain de temps CPU, d'entrées-sorties et d'espace disque puisque l'on résout un problème tridimensionnel par un calcul dans le plan méridien.

D'un point de vue purement mathématique, il existe potentiellement dans un modèle axisymétrique deux modes rigides : la translation axiale et la rotation autour de l'axe de révolution. Le déplacement u_θ dans la direction circonférentielle n'étant pas défini pour les éléments axisymétriques, puisqu'il est nul par hypothèse, seul le mode de translation axiale peut exister selon les conditions aux limites.

Il n'est pas rare de faire, en pré-dimensionnement, des calculs axisymétriques sur des structures qui ne le sont pas tout à fait, de manière à avoir un ordre de grandeur des déplacements et des contraintes. C'est par exemple le cas de brides, où on remplace la couronne localement percée par un matériau homogène axisymétrique équivalent. Cependant, il faut bien admettre que ce type de modélisation est peu fréquent dans l'industrie pour deux raisons principales. Premièrement, si trois des conditions requises sont souvent satisfaites, il est rare que la charge soit complètement axisymétrique. On peut alors parfois recourir à la technique de Fourier mais elle n'est pas disponible dans tous les logiciels et elle est un peu délicate de mise en œuvre. Deuxièmement, la tendance étant de tout mailler finement en éléments volumiques, cette technique qui permet de réduire les ressources informatiques nécessaires pour une analyse est parfois considérée comme une perte de temps. En effet, à partir d'une CAO volumique, il faut définir l'intersection du volume de la structure et du plan méridien, puis l'isoler pour faire le maillage...

4.2. Éléments finis axisymétriques

Quand on étudie la section d'une structure par le plan méridien, trois situations peuvent se produire:

- la structure est massive,
- la structure est élancée,
- la structure comporte des parties massives et des parties élancées.

Il existe dans la plupart des logiciels de calcul une bibliothèque spécialisée comportant divers éléments axisymétriques pour traiter ces situations. Les meilleurs automatiques bidimensionnels de tous types peuvent être utilisés pour mailler les parties massives nécessitant des éléments de volumes axisymétriques, les meilleurs linéiques pour mailler les parties élancées qui peuvent être modélisées par des éléments de coques axisymétriques.

4.2.1. Volumes axisymétriques

La trace dans le plan méridien d'un volume torique est un triangle ou un quadrangle Figure (1.3). Ces éléments de volume axisymétrique sont de degré 1 ou 2. Les triangles du premier degré sont trop raides, il est préférable de les utiliser au second degré. Si les éléments quadrangulaires sont intégrés sélectivement ou s'ils comportent des modes incompatibles, il est possible de les utiliser au premier degré, si la géométrie de la structure s'y prête. Les éléments quadrangulaires classiques sont trop raides au premier degré. Les nœuds, qu'ils soient sommets ou milieux, ont deux degrés de liberté de translation dans le plan méridien, notés u_r et u_z : le déplacement radial et le déplacement axial, tous les deux alimentés en raideur. Il n'y a aucune donnée particulière à définir pour ces éléments.

4.2.2. Coques axisymétriques

Dans le plan méridien, la trace d'une surface de révolution est une ligne. Cette ligne représente le feuillet moyen d'un élément de coque axisymétrique, rectiligne ou curviligne. Les nœuds, qu'ils soient sommets ou milieux, ont trois degrés de liberté notés u_r , u_z et θ respectivement : le déplacement radial, le déplacement axial et la rotation dans le plan méridien, tous les trois alimentés en raideur. Il faut définir l'épaisseur des coques axisymétriques, ce qui correspond à la « largeur du trait » dans le plan méridien.

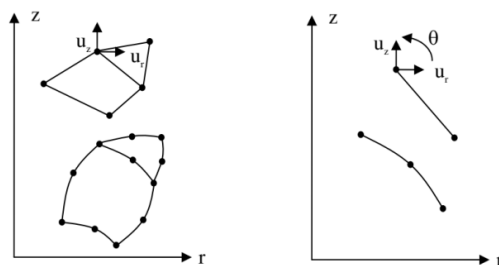


Figure (1 . 3) : Volumes et coques axisymétriques [4]

4.2.3. Autres éléments :

Il existe d'autres éléments axisymétriques: les membranes axisymétriques, les poutres axisymétriques et les éléments de transition. La membrane axisymétrique ne travaille qu'en

traction compression dans son feuillet moyen (ligne décrite dans le plan méridien). La poutre axisymétrique, dont la trace dans le plan méridien n'est qu'un point, permet la modélisation de raidisseurs circonférentiels. L'élément de transition est un peu particulier car d'un côté, il a des degrés de liberté de coque, de l'autre, des degrés de liberté de volume. Il permet, dans un même modèle, de raccorder des parties massives modélisées en volume sur des parties élancées modélisées en coques. La zone de transition et sa taille dépendent du choix de l'utilisateur (Figure 4.2).

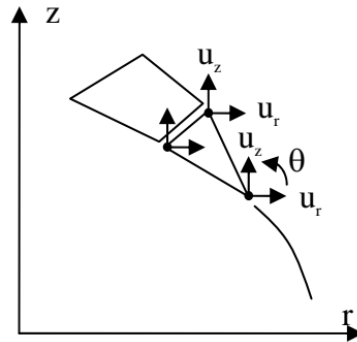


Figure (1 . 4) : Élément de transition coque-volume axisymétrique [4]

5.1 Recherche bibliographique :

5.1.1 Coque de révolution :

Pour les coques axisymétriques on peut considérer qu'il y'a deux types d'éléments finis

- › Les éléments finis basés sur la théorie de LOVE-KIRCHOFF, où l'effet du cisaillement transversal n'est pas pris en compte.
- › Les éléments finis basés sur la théorie de RISSNER-MINDLIN où le cisaillement transversal est pris en considération dans la formulation.

Le premier type d'élément nécessite le respect de la continuité C^1 aux interfaces, le deuxième type d'éléments est basé sur des interpolations indépendantes des déplacements et rotations, et ne nécessite que la continuité C^0 , il est applicable aux coques minces si on utilise la méthode d'intégration réduite. Comme pour tous les types d'élément finis il faut s'assurer avant tout calcul, que les éléments de types coque axisymétrique convergent vers la solution exacte lorsqu'on discrétise toujours plus finement, la solution exacte est celle résultant de la théorie sur base de laquelle l'élément finis est construit.

Pour garantir la convergence, l'élément fini doit pouvoir représenter les modes rigides et constants, de plus il doit être conforme, c'est-à-dire assurer la parfaite continuité des déplacements représentatifs aux frontières.

Dans les éléments finis de type coque, il est souvent très difficile de satisfaire ces exigences, la plus délicate est celle de conformité aux frontières, dans certains circonstances il est tout

simplement impossible d'y satisfaire, elle n'est toutefois pas impérative, les éléments non conformes assurent également la convergence vers la solution exacte s'ils satisfont au patch test, concrètement l'excès de rigidité est compensé par un certain assouplissement dû aux légères discontinuités aux frontières.

Tests de convergence :

Presque tous les éléments finis de coque sont non conformes, cependant la vérification de la convergence de l'élément peut se faire avec:

- Les tests impliquant un seul élément
- Les tests impliquant plusieurs éléments (patch test)

Dans le cas des coques à surface courbe, les tests sont plus difficiles à proposer que dans le cas des plaques ou des milieux continus, à cause de la représentation (discrétisation) de la géométrie.

Les tests impliquant un seul ou plusieurs éléments (patch tests) sont relatifs à la représentation des mouvements rigides ou modes rigides (état de déformations nulles) et de l'état de déformations constantes ou modes constants.

Etat de déformations nulles (mode rigides) :

Un mode rigide (ou mouvement de corps rigides) est caractérisé par un champ de déplacement u_p et de rotation β non nuls qui produit des déformations $e_s, e_\theta, \chi_s, \chi_\theta$ et γ nulles en tout points.

Il en découle que l'énergie interne de déformation est nulle pour un mode rigide, pour le cas d'une coque de révolution axisymétrique il existe un seul mode rigide, soit la translation suivant l'axe global Z , en description cylindrique :

$$U = 0, W = a_1, \beta = 0$$

$$\text{ET } e_s = e_\theta = \chi_s = \chi_\theta = \gamma = 0$$

Pour que les éléments finis soient performants, il est nécessaires que les approximations retenues pour la géométrie $r(s)$ et $Z(s)$ et pour les composantes de u_p assurent une représentation exacte sinon très bonne de l'état de déformations nulles, si cet état est mal représenté, il y a présence de déformations et d'une énergie interne parasite. La représentation exacte des déformations nulles ne pose pas de problème si les composantes cylindriques U et W sont utilisées puisqu'il suffit que l'approximation de W contienne un terme constant, pour une formulation curviligne, si les approximations de la géométrie $r(s)$, $Z(s)$ et des déplacements $u(s), w(s)$ sont identiques, le mode rigide est correctement représenté.

Blocage en membrane (formulation curviligne) :

Le comportement d'une coque résulte de l'interaction entre membrane, flexion et cisaillement :

$$\Pi_{int} = (h\Pi_m + h_3\Pi_f + h\Pi_c)2\pi$$

Les termes de membrane dépendent linéairement de l'épaisseur en h alors que la flexion est fonction cubique de h , il en découle qu'une mauvaise représentation des déformations de membrane peut introduire une influence numérique parasite des termes de membrane sur les termes de flexion ce qui définit le blocage en membrane (membrane LOCKING). Pour éviter le blocage en membrane il faut que les approximations de $u(s)$ et de $w(s)$ permettent d'obtenir des déformations e_s et e_θ nulles sont modifier la représentation de la flexion, pour une coque de révolution il n'existe pas de mode dit inextensionnel, c'est-à-dire tel que $e_s = e_\theta = \gamma = 0$ avec χ_s et $\chi_\theta \neq 0$.

Cependant le problème de blocage en membrane se manifeste d'autant moins que les approximations $u(s)$ et $w(s)$ permettent de représenter $e_s = u_{,s} - w/R_s$, où R_s est le rayon de courbure réel de la coque sans restreindre l'approximation de $w(s)$ (qui sert à la représentation des courbures χ_s et $\chi_\theta \neq 0$).

Etat de déformations constantes (mode constant) :

Un mode constant est un champ de déplacement u et β non nuls qui conduit à une valeur constante d'une ou de plusieurs déformations généralisées e_s , e_θ , χ_s , χ_θ et γ les autres déformations étant nulles. Il existe un seul mode constant pour une coque dont le méridien est quelconque et trois modes constants pour une coque tronconique.

5.2.1.1 Eléments finis tronconiques :

Plusieurs éléments ont été développés au début des années 1960, le premier élément fini formulé (en 1963) dans le domaine des types de structures coque été un élément tronconique pour coques de révolution basé sur la théorie de Love- KIRCHOFF références ([2] [5] [40] [41]). L'élément de type KIRCHOFF le plus utilisé actuellement est l'élément CAXI_K, pour ce type le champ de déplacement u est linéaire, w cubique. En ce qui concerne les éléments basés sur la théorie de RISSNER-MINDLIN d'autres éléments que l'élément CAXI_L(référence [2], qui sera présenter en détail dans le chapitre 2) ont été proposés est testés. un élément simple est performant basé sur le modèle déplacement à été formulé en [22], les composantes u et β sont

linéaires et w quadratique, l'intégration ce fait avec 3 points de Gauss pour la membrane, 2 points pour la flexion, 1 point pour le cisaillement transversal. En s'inspirant de l'élément avec formulation mixte en cisaillement transversal pour les poutres droites, un élément avec u et w linéaires et β quadratique à été formulé et testé en [23] et [24], en utilisant une intégration uniforme avec deux points de Gauss, il implique une élimination locale de deux variables internes, mais il présente une performance meilleur que l'élément CAXI_L. En [25], un élément fini tronconique a été défini pour les coques multicouches et sandwich en utilisant l'hypothèse de MINDLIN pour chaque couche et en assurant la continuité des déplacements aux interfaces, sur chaque couche le déplacement $u(s)$ est linéaire ainsi que la rotation $\beta(s)$ alors que $w(s)$ est cubique de type HERMITE.

5.2.1.2 Eléments courbés :

On peut distinguer aussi Les éléments courbés qui sont basés sur la description curviligne du champ de déplacement (composantes u et w), de tels éléments utilisant la théorie de KIRCHOFF ont été formulés et évalués à partir des années 1965 références ([30] [31] [27] [32] [17] [33] [29]), les chercheurs emploient différentes approximations de la géométrie et de composantes $u(s)$ et $w(s)$, un des problèmes majeurs avec les éléments courbes en composantes curviligne est celui qui est relatif à la représentation correcte du mouvement du corps rigide, des approximations assez élevées doivent être utilisées pour $u(s)$ si on utilise le modèle déplacement pour éviter une rigidité parasite ou blocage en membrane. Certains chercheurs ont utilisé des approximations de $u(s)$ et $w(s)$ permettant une représentation explicite des mouvements de corps rigide [26], une représentation implicite acceptable nécessite une approximation polynomiale au moins quadratique pour $u(s)$ [28] [17] [29]. Dans la thèse [17] des approximations quadratique pour $u(s)$ et cubique (Hermite) pour $w(s)$ sont utilisées et conduisent à un élément très performant. Un élément courbe avec u et w quadratiques et w du 5ème degré est présenté en [33], il permet d'avoir trois nœuds et quatre degrés de liberté par nœud (u , w et w, s). Des approximations cubiques de type Hermite pour u et w ont été utilisées en [35], alors que des fonctions cubiques de type B-SPLINES ont été retenues en [36], pour définir un élément courbé, où les variables nodales pour cet élément sont u , w et les dérivées premières et secondes par rapport à s . Un élément mixte de très haute précision (mais relativement compliqué) est présenté en [18] où u et w sont cubiques de type Hermite ainsi que les moments M_s et M_θ (conservés comme variables nodales). Des éléments courbes avec cisaillement transversal ont été formulés à partir des années 1980 références ([20] [35] [31] [16] [37] [23] [38]), Au risque de blocage en membrane s'ajoute le blocage en cisaillement transversal. Un élément courbé avec trois nœuds

est développé dans [16], il utilise une interpolation quadratique, cet élément est présenter pour le cas des plaques circulaires avec introduction d'un facteur de pénalisation quand le rapport R/h est de l'ordre de 100, l'élément donne aussi des bons résultats pour les coques cylindriques et sphériques. Un élément courbe avec u , w , β quadratiques et R_s constant a été utilisé en [20]. D'autres éléments courbes avec R_s constant ont été formulés en [21] et [22] sans blocage en membrane et cisaillement transversal. En [22] les chercheurs considèrent des approximations linéaires de u , w et β mais ils utilisent des expressions modifiées (indépendantes) de e_s , e_θ et γ , un ou deux points de Gauss peuvent être utilisés, de bons résultats sont obtenus avec cet élément simple à six degrés de liberté. Dans [21] un élément du même type mais avec u , w , β quadratiques à été proposé et testé, des approximations différentes de u , w , β sont cependant utilisées dans les expressions de e_s , e_θ et γ , pour définir e_s et e_θ ils utilisent u quadratique et :

$$W = N_i w_i \text{ avec } (i = 1,2,3)$$

$$N_1 = \left(\frac{1}{3} - \xi\right)/2 \quad N_2 = \frac{2}{3} \quad N_3 = \left(\frac{1}{3} + \xi\right)/2$$

Pour définir γ ils considèrent u et w quadratiques mais utilisent $\beta = \overline{N}_i \beta_i$ (les fonctions \overline{N}_i sont obtenus par la méthode des moindres carrés), deux ou trois points de Gauss peuvent être utilisés, de bons résultats sont obtenus. Dans la thèse [35] on trouve des éléments courbes où les composantes curvilignes u , w ou cylindriques U , W sont approchées (comme β) par des polynômes quadratiques ou cubiques (de type Lagrange) et la géométrie est définie à partir d'une représentation cubique de type Hermite pour $r(s)$ et $Z(s)$, des exemples de coques sphériques, tronconiques et cylindriques sont traités. Des éléments avec des approximations du 5ème degré des variables u , w , β sont utilisés en [31] (pas de blocage en membrane ou cisaillement transversal), de nombreux exemples sont présentés. Un élément pour l'étude statique et dynamique des coques axisymétrique épaisses est présenté en [15] l'élément est basé sur un principe de variation modifiée de HELLINGER-REISSNER, et présente des degrés de liberté nodales additionnels pour l'interpolation du champ de déplacement afin d'augmenter la performance numérique, Plusieurs exemples numériques confirment l'efficacité de cet élément qui donne des résultats très précis pour des analyses statiques et vibration. Un nouveau élément à huit nœuds de type coque-solide baptisé CSH8gZ7 très performant et présenté en [19], valable pour l'analyse des structures isotropes et composites minces ou épaisses, Cet élément a été couplé à une méthode spécifique de surface de réponse pour l'optimisation des structures composites. La méthodologie proposée a montré une efficacité en terme de précision et capacité d'optimisation de structures composites multicouches.

CHAPITRE 2

FORMULATION

2.1 Méthode des éléments finis :

Cette partie théorique est inspiré du référence [2]

Introduction :

La mécanique des solides permet de décrire le comportement des systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles, la méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées pour résoudre effectivement ces équations, elle consiste à utiliser une approximations simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques, elle fait appel aux trois domaines suivants :

- ♣ la mécanique des solides pour construire les équations aux dérivées partielles.
- ♣ Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- ♣ Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur

2.2.1 Élément CAXI_K (coque mince) :

C'est un élément tronconique basé sur la théorie de KIRCHOFF [2], le modèle utilisé pour cet élément est le modèle déplacement, les composantes curvilignes $u(s)$ et $w(s)$ sont définies par des approximations linéaires et cubiques respectivement. La géométrie est définie comme l'élément CAXI_K.

2.2.2.1 Approximation des déplacements et déformations :

L'élément est formulé en utilisant les composantes curvilignes u et w de \mathbf{u}_p :

$$\mathbf{u}_p = u(s) \mathbf{t} + w(s) \mathbf{n}$$

$u(s)$ est linéaire (2 variables) et $w(s)$ est cubique en s , de type Hermite (quatre variable) **figure (2 . 1)** approximation de $u(\xi) -1 \leq \xi \leq 1$:

$$u(\xi) = N_1^L u_1 + N_2^L u_2 \quad , \quad N_1^L = \frac{1 - \xi}{2}, \quad N_2^L = \frac{1 + \xi}{2}$$

$$u_{,\xi} = \frac{1}{2}(u_1, u_2) ; u_{,s} = u_{,\xi} \xi_{,s} = \frac{2}{L} u_{,\xi} \dots\dots\dots (2 . 1)$$

approximation de $w(\xi)$:

$$W = \langle N \rangle \{W_n\} ; \langle W_n \rangle = \langle W_1 \theta_1 W_2 \theta_2 \rangle$$

$\theta = -W_{,s}$ est du même type que β dans l' élément CAXI_L

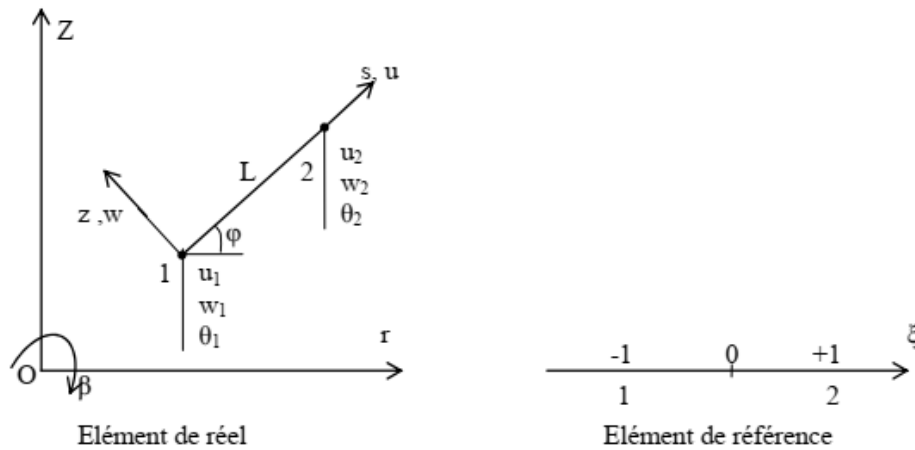


Figure (2 . 1) : Elément tronconique linéaire CAXI_K [2]

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi) ; & N_2 &= -\frac{L}{8}(1 - \xi^2)(1 - \xi) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi) ; & N_4 &= -\frac{L}{8}(-1 + \xi^2)(1 + \xi) \dots\dots\dots (2 . 2) \\
 N_{1,s} &= \frac{3}{2L}(-1 + \xi^2) ; & N_{2,s} &= -\frac{1}{4}(-1 - 2\xi + 3\xi^2) \\
 N_{3,s} &= \frac{3}{2L}(1 - \xi^2) ; & N_{4,s} &= -\frac{1}{4}(-1 + 2\xi + 3\xi^2) \\
 N_{1,ss} &= \frac{6}{L^2}\xi ; & N_{2,ss} &= -\frac{1}{L}(-1 + 3\xi) \\
 N_{3,ss} &= -\frac{6}{L^2}\xi ; & N_{4,ss} &= -\frac{1}{L}(-1 + 3\xi)
 \end{aligned}$$

2.2.2.2 Loi de comportement :

Relations contraintes-déformations et déformation déplacement:

Nous considérons une coque constituée de matériau élastique subit de petites déformations et de petits déplacements, les relations contraintes-déformations sont établies avec l’hypothèses contraintes planes ($\sigma_{z'} = 0$) et avec l’hypothèse d’anisotropie plane, (pas de couplage entre $(\epsilon_s, \epsilon_\theta)$ et $\gamma_{sz'}$)

On suppose également que les propriétés élastiques sont axisymétriques :

Pour un matériau isotrope :

$$[\sigma] = [H_1][\epsilon] ; [H_1] = \begin{bmatrix} [H] & \{0\} \\ (0) & G \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2 . 3)$$

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} ; G = \frac{E}{2(1+\nu)} \dots\dots\dots(2 . 4)$$

G : module de cisaillement

E : module de Yong

ν : coefficient de poisson

Dans le cadre des petits déplacements et des petites rotations, l'hypothèse des sections droites conduit au champ de déplacements réels d'un point quelconque q :

$$u_q = u_p + z\beta \quad \text{avec} \quad \beta \cdot n = 0$$

avec pour un comportement axisymétrique ($v = \beta_\theta = 0$) :

$$u_q = (U(s) + z\beta(s) \cos \varphi) i_r + (W(s) + z\beta(s) \sin \varphi) k \quad (\text{coordonnées cylindrique})$$

$$u_q = (u(s) + z\beta(s)) t + w(s) n \quad (\text{coordonnées curviligne})$$

Déformation de membrane équations :

les déformations réelles ϵ_s , ϵ_θ et γ_{sz} , sont définies en fonction des composantes de u_p et de β comme ϵ_s^* , ϵ_θ^* et γ_{sz}^* , en fonction de u_p^* et de β^* . On a donc:

$$\epsilon_s = \frac{1}{\alpha_1} (e_s + z\chi_s) \dots\dots\dots (2.5)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{\alpha_2} (e_\theta + z\chi_\theta) \dots\dots\dots (2.6)$$

$$\gamma_s = \frac{1}{\alpha_1} \gamma \quad ; \quad \gamma = \beta + \psi \dots\dots\dots (2.7)$$

Avec $\langle e \rangle = \langle e_s \quad e_\theta \rangle \quad ; \quad \langle \chi \rangle = \langle \chi_s \quad \chi_\theta \rangle$

$$e_s = u_{p,s} \cdot t = U_{,s} \cos \varphi + W_{,s} \sin \varphi = u_{,s} - \frac{1}{R_s} w \dots\dots\dots (2.8)$$

$$e_\theta = \frac{1}{r} u_{p,\theta} \cdot i_\theta = \frac{1}{r} U = \frac{1}{r} (u \cos \varphi - w \sin \varphi) \dots\dots\dots (2.9)$$

$$\chi_s = \beta_{,s} \quad ; \quad \chi_\theta = \frac{1}{r} \beta \cos \varphi \dots\dots\dots (2.10)$$

$$\psi = u_{p,s} \cdot n = -U_{,s} \sin \varphi + W_{,s} \cos \varphi = w_{,s} + \frac{1}{R_s} u \dots\dots\dots (2.11)$$

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_s \\ e_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,s} \\ 1/r(Cu - Sw) \end{Bmatrix} = [B_m] \{u_n\}_{loc} \dots\dots\dots (2.12)$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} N_1^L C & -\frac{1}{r} N_1 S & -\frac{1}{r} N_2 S & \frac{1}{r} N_2 C & -\frac{1}{r} N_3 S & -\frac{1}{r} N_4 S \end{bmatrix}$$

$$\langle u_n \rangle_{loc} = \langle u_1 w_1 \theta_1 u_2 w_2 \theta_2 \rangle \quad (\text{déplacements nodaux}) \dots\dots\dots (2.13)$$

Courbure de KIRCHOFF équations avec $\frac{1}{R_s}$

$$\chi_s = - \left(w_{,s} + \frac{1}{R_s} u \right)_{,s} = - \left(w_{,ss} + \frac{1}{R_s} u_{,s} - \frac{R_{s,s}}{R_s^2} u \right)$$

$$\chi_\theta = - \frac{1}{r} \cos \varphi \left(w_{,s} + \frac{1}{R_s} u_{,s} \right)$$

(idem pour χ_s^* et χ_θ^* en fonction de U^* , W^* , u^* et w^*)

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_s \\ \chi_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -W_{,ss} \\ -(C/r)W_{,s} \end{Bmatrix} = [B_f]\{u_u\}_{loc} \dots \dots \dots (2.14)$$

$$[B_f] = \begin{bmatrix} 0 & -N_{1,ss} & -N_{2,ss} & 0 & -N_{3,ss} & -N_{4,ss} \\ 0 & -\frac{C}{r}N_{1,s} & -\frac{C}{r}N_{2,s} & 0 & -\frac{C}{r}N_{3,s} & -\frac{C}{r}N_{4,s} \end{bmatrix}$$

2.2.2.3 Théorie de love Kirchoff :

La théorie des coques dites de kirchoff est basée sur l'hypothèse de conservation des normales : les points matériels situés sur une normale \mathbf{n} à la surface moyenne déformée. On admet ainsi que les déformations de cisaillement transversal sont négligées, cela conduit à relier la rotation de la normale β^* et la rotation de la surface moyenne Λ , notée ψ^* .

2.2.2.3.1 Déplacements et déformations virtuelles :

$$\gamma^* = 0 \quad \text{et} \quad \gamma = 0$$

Les déformations virtuelles :

Expressions générales :

$$\varepsilon_s^* = \frac{1}{\alpha_1} u_{q,s}^* \cdot t = \frac{1}{\alpha_1} (e_s^* + z \chi_s^*) \dots \dots \dots (2.15)$$

$$\varepsilon_\theta^* = \frac{1}{r\alpha_2} u_{q,\theta}^* \cdot i_\theta = \frac{1}{\alpha_2} (e_\theta^* + z \chi_\theta^*) \dots \dots \dots (2.16)$$

$$\gamma_s^* = u_{q,z}^* \cdot t + \frac{1}{\alpha_1} u_{q,s}^* \cdot n = \frac{1}{\alpha_1} \gamma^* \quad ; \quad \gamma^* = \beta^* + \psi^* \dots \dots \dots (2.17)$$

(ψ rotation de la surface moyen)

$$\text{Avec } \alpha_1 = 1 - \frac{z}{R_s} \quad ; \quad \alpha_1 = 1 - \frac{1}{R_\theta} \quad ; \quad \frac{1}{R_s} = \varphi_{,s} \quad ; \quad r = R_\theta \sin \varphi$$

$$e_s^* = u_{p,s}^* \cdot t \quad ; \quad e_\theta^* = \frac{1}{r} u_{p,\theta}^* \cdot i_\theta \quad ; \quad \Psi^* = u_{p,s}^* \cdot n \dots \dots \dots (2.18)$$

Les courbures virtuelles suivant s et θ sont:

$$\chi_s^* = \beta_{,s}^* \quad ; \quad \chi_\theta^* = \beta^* \cos \varphi \dots \dots \dots (2.19)$$

Déformation de membrane et de cisaillement transversal :

En coordonnées cylindriques :

$$e_s^* = U_{,s}^* \cos \varphi + W_{,s}^* \sin \varphi \quad ; \quad e_\theta^* = \frac{1}{r} U^* \dots \dots \dots (2.20)$$

$$\Psi^* = w_{,s}^* + \frac{1}{R_s} u^* \quad ; \quad \gamma^* = \beta^* + \psi^* \dots \dots \dots (2.21)$$

conduit à (équations de (2.15) à (2.21) :

$$\beta^* = -\psi^* = -u_{p,s}^* \cdot n \quad ; \quad \beta = -\psi = -u_{p,s} \cdot n \dots \dots \dots (2.22)$$

Les champs de déplacements réels et virtuels sont ainsi :

$$u_q^* = u_p^* - z \Psi^* t \quad ; \quad u_q = u_p - z \Psi t \dots \dots \dots (2.23)$$

Ces champs ne sont fonction que des composantes de u_q^* et de u_q (en faisant intervenir les dérivées premières par rapport à s). En description cylindrique :

$$u_q = U_q i_r + W_k k \quad \Psi = W_{,s} \cos \varphi - U_{,s} \sin \varphi \dots\dots\dots(2 . 24)$$

Avec $U_q = U - Z\Psi \cos \varphi$; $W_q = W - Z \Psi \sin \varphi$

En description curviligne :

$$u_q = u_q t + W_q n \quad ; \quad \Psi = W_{,s} + \frac{1}{R} u \dots\dots\dots(2 . 25)$$

Avec $u_q = u - z \Psi$; $w_q = w$

Les déplacements virtuels sont du même type.

Pour les déformations, nous obtenons :

$$\varepsilon_s = \frac{1}{\alpha_1} (e_s + z \chi_s) \dots\dots\dots(2 . 26)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{\alpha_2} (e_\theta + z \chi_\theta) \dots\dots\dots(2 . 27)$$

les déformation de membrane e_s et e_θ sont définies par (en coordonnées cylindriques et curvilignes) :

$$e_s = u_{p,s} \cdot t = U_{,s} \cos \varphi + W_{,s} \sin \varphi = u_{,s} - \frac{1}{R_s} w$$

$$e_\theta = \frac{1}{r} u_{p,\theta} \cdot i_\theta = \frac{1}{r} U = \frac{1}{r} (u \cos \varphi - w \sin \varphi)$$

les déformation de membrane virtuels e_s et e_θ :

En coordonnées cylindrique :

$$e_s^* = U_{,s}^* \cos \varphi + W_{,s}^* \sin \varphi \quad ; \quad e_\theta^* = \frac{1}{r} U^* \dots\dots\dots(2 . 28)$$

En coordonnées curviligne :

$$e_s^* = u_{,s}^* - \frac{1}{R_s} w^* \quad ; \quad e_\theta^* = \frac{1}{r} (u^* \cos \varphi + w^* \sin \varphi) \dots\dots\dots(2 . 29)$$

les courbures sont :

$$\chi_s = -\Psi_{,s} = -(u_{p,s} \cdot n)_{,s} \quad ; \quad \chi_\theta = -\frac{1}{r} \Psi \cos \varphi = -\frac{1}{r} \cos \varphi u_{p,s} \cdot n \dots\dots\dots(2 . 30)$$

En coordonnées cylindrique :

$$\chi_s = - \left(\cos \varphi \left(W_{,ss} - \frac{1}{R_s} U_{,s} \right) - \sin \varphi \left(U_{,ss} + \frac{1}{R_s} W_{,s} \right) \right) \dots\dots\dots(2 . 31)$$

$$\chi_\theta = -\frac{1}{r} \cos\varphi (W_{,s} \cos\varphi - U_{,s} \sin\varphi) \dots\dots\dots (2 . 32)$$

En coordonnées curviligne :

$$\chi_s = -\left(W_{,s} + \frac{1}{R_s} u\right)_{,s} = -\left(w_{,ss} + \frac{1}{R_s} u_{,s} - \frac{R_{s,s}}{R_s^2} u\right) \dots\dots\dots (2 . 33)$$

$$\chi_\theta = -\frac{1}{r} \cos\varphi \left(w_{,s} + \frac{1}{R_s} u_{,s}\right) \dots\dots\dots (2 . 34)$$

(idem pour χ_s^* et χ_θ^* en fonction de U^* , W^* , u^* et w^*)

Remarque :

Les expressions de courbures χ_s et χ_θ sont plus complexes que dans le modèle de **Mindlin**, en particulier, la présence des dérivées secondes de U et W dans la description cylindrique, mais seulement celle de w dans la description curviligne ; cependant, dans cette dernière, apparaît également la dérivée première du rayon R_s .

2.2.2.3.2 Principe des travaux virtuels :

Les différentes expressions du principe des travaux virtuels établies pour la théorie de **Mindlin** sont valables pour la théorie de **kirchoff** en tenant compte des relations cinématiques équations (2 . 23) à (2 . 34) nous écrivons:

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \dots\dots\dots (2 . 35)$$

$$\forall u_p^* \text{ avec } u_p^* = 0 \quad \text{et} \quad \Psi^* = 0 \text{ sur } S_u$$

$$W_{int} = 2\pi \int_s (\langle e^* \rangle [N] + \langle \chi^* \rangle [M]) r ds \dots\dots\dots (2 . 36)$$

$$\text{avec } \langle e^* \rangle = \langle e_s^* e_\theta^* \rangle ; \langle \chi^* \rangle = \langle \chi_s^* \chi_\theta^* \rangle$$

les déformations virtuelles de membrane sont définis par les équations (2 . 15) à (2 . 21) , et les courbures virtuelles par les équations nous (1 . 31) à (1 . 34)

les efforts résultantes sont données par :

$$\langle N \rangle = \langle N_s N_\theta \rangle \quad ; \quad \langle M \rangle = \langle M_s M_\theta \rangle$$

$$N_s = \int_{-t}^t \sigma_s \alpha_2 dz \quad ; \quad M_s = \int_{-t}^t \sigma_s z \alpha_2 dz \quad ; \quad T_s = \int_{-t}^t \sigma_{sz} \alpha_2 dz \dots\dots\dots (2 . 37)$$

$$N_\theta = \int_{-t}^t \sigma_\theta \alpha_1 dz \quad ; \quad M_\theta = \int_{-t}^t \sigma_\theta z \alpha_1 dz \dots\dots\dots (2 . 38)$$

$$\alpha_1 = 1 - \frac{z}{R_s} \quad ; \quad \alpha_2 = 1 - \frac{z}{R_\theta}$$

pour les travaux virtuels externes nous retenons une forme générale due à des sollicitations surfaciques **f** et **ms** , linéiques **F** et **M** et une charge concentré **Pz** sur l'axe **Z** :

$$W_{ext} = 2\pi \int_s (u_p^* . f - \psi^* m_s) r ds + 2\pi (r u_p^* . F - r \psi^* M)_{sf} + w_p^* Pz \dots\dots\dots (2 . 39)$$

En effectuant plusieurs intégrations par parties de l'équation (2 . 36) en obtient les équations d'équilibre suivant s et z ainsi que les conditions sur S_f.

En tenant compte des expressions de $\langle e^* \rangle$, $\langle \chi^* \rangle$ et γ^* équations de (2 . 15) à (2 . 21) et en intégrant par partie tous les termes faisant intervenir les dérivées par rapport à s, on obtient les équation d'équilibre sur A et sur S_f:

$$W = -2\pi \int_s (u^*EQ1 + w^*EQ2 + \beta^*EQ3) r ds + 2\pi(ru^*EQ4 + rw^*EQ5 + r\beta^*EQ6)_{Sf}$$

$$\forall u^*, w^*, \beta^* = 0 \text{ sur } S_u$$

Les équations correspondantes aux relations en écriture :

$$EQ1 = N_{s,s} + \frac{\cos \varphi}{r} (N_s - N_\theta) - \frac{T_s}{R_s} + f_s = 0 \dots \dots \dots (2 . 40)$$

$$EQ2 = T_{s,s} + \frac{\cos \varphi}{r} T_s + \frac{N_s}{R_s} + \frac{N_\theta}{R_\theta} + f_z = 0 \dots \dots \dots (2 . 41)$$

$$EQ3 = M_{s,s} + \frac{\cos \varphi}{r} (M_s - M_\theta) - T_s + m_s = 0 \dots \dots \dots (2 . 42)$$

Et sur S_f:

$$EQ4 = N_s n_{sc} - F_s = 0$$

$$EQ5 = T_s n_{sc} - F_z = 0$$

$$EQ6 = M_s n_{sc} - M = 0$$

n_{sc} est le cosinus directeur de la normale en s dirigée vers l'extérieur du méridien, c'est-à-dire

$$n_{sc} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = \pm 1$$

(2 . 40) à (2 . 42) en éliminant l'effort tranchant

T_s (en utilisant EQ3 (2 . 42) c'est-à-dire :

$$T_s = M_{s,s} + \frac{\cos \varphi}{r} (M_s - M_\theta) \dots \dots \dots (2 . 43)$$

2.2.2.3 Loi de comportement :

La loi de comportement retenue ne concerne que $\epsilon_s, \epsilon_\theta, \sigma_s$ et σ_θ

$$[N] = [H_m]\{e\} + [H_{mf}]\{\chi\} \dots \dots \dots (2 . 44)$$

$$[M] = [H_{mf}]\{\chi\} + [H_f]\{e\}$$

$$\text{avec } \langle e \rangle = \langle e_s \ e_\theta \rangle \quad ; \quad \langle \chi \rangle = \langle \chi_s \ \chi_\theta \rangle$$

Le modèle déplacement correspond à l'équation (2 . 35) avec :

$$W_{int} = 2\pi \int_s (\langle e^* \rangle ([H_m]\{e\} + [H_{mf}]\{\chi\}) + \langle \chi^* \rangle ([H_{mf}]\{e\} + [H_f]\{\chi\})) r ds \dots \dots \dots (2 . 45)$$

(χ_s et χ_θ sont donnés par les équations de (2 . 31) à (2 . 34))

L'énergie potentielle totale est :

$$\Pi(u_p) = \Pi_{int} - \Pi_{ext}$$

$$\text{Avec } \forall u_p = \bar{u}_p \text{ et } \psi = \bar{\psi} \text{ sur } S_u$$

$$\Pi_{int} = 2\pi \int_s \left(\frac{1}{2} \langle e \rangle [H_m]\{e\} + \langle e \rangle [H_{mf}]\{\chi\} + \frac{1}{2} \langle \chi \rangle [H_f]\{\chi\} \right) r ds \dots \dots \dots (2 . 46)$$

$$\Pi_{ext} = 2\pi \int_s (u_p \cdot f - \psi m_s) r ds + 2\pi (r u_p \cdot F - r \psi \mathcal{M})_{Sf} + w_p P_z \dots \dots \dots (2 . 47)$$

2.2.2.3 Matrice de rigidité :

Les expressions (1 . 48) et (1 . 49) , et de (2 . 12) à (2 . 14) permettent de définir la matrice de rigidité d'un élément

$$W_{int}^e = 2\pi \int_0^L \left(\langle e^* \rangle (H_m \{e\} + [H_{mf}] \{x\}) + \langle x^* \rangle ([H_{mf}] \{e\} + [H_f] \{x\}) \right) r ds$$

$$W_{int}^e = \langle u_n^* \rangle_{loc} [k]_{loc} \{u_n\}_{loc} \dots \dots \dots (2 . 48)$$

$\langle u_n^* \rangle_{loc}$ est défini comme $\langle u_n \rangle_{loc}$ équation (2 . 13)

$$[k]_{loc} = 2\pi \int_0^L [k_\xi] ds = 2\pi \int_{-1}^1 [k_\xi] \frac{L}{2} d\xi \dots \dots \dots (2 . 49)$$

$$[k]_c = \{k_{m/T}\} \frac{1}{k_T} \langle k_{m/T} \rangle = 2\pi \{B_c\} H_c r_m L \langle B_c \rangle \dots \dots \dots (2 . 50)$$

$$\text{Avec } [k_\xi] = \left([B_m]^T ([H_m][B_m] + [H_{mf}][B_f]) + [B_f]^T ([H_{mf}][B_m] + [H_f][B_f]) \right) r$$

Les matrices $[B_m]$ et $[B_f]$ sont données par (2 . 12) et (2 . 14) les matrices $[H_m]$, $[H_{mf}]$ et $[H_f]$ sont définies par (2 . 50) Les termes à intégrer équation (2 . 49) sont des fractions rationnelles en ξ avec aux dénominateurs des termes linéaires en ξ (provenant de $r(\xi)$) et aux numérateurs des termes constants à cubiques en ξ (provenant de $[B_m]$), l'intégration numérique selon la méthode de Gauss intègre exactement un polynôme d'ordre m avec un nombre de points d'intégrations r tel que : $m \leq 2 r - 1$, donc on peut utilisé un schéma d'intégration numérique à deux points de Gauss :

$$[k]_{loc} = 2\pi \sum_{i=1}^2 [k_\xi(\xi = \xi_i)] \omega_i \frac{L}{2}$$

$$\text{Avec } \xi_i = \pm 1/\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \omega_i = 1$$

près évaluation de $[k]_{loc}$ il est nécessaire de transformer les variables $\{u_n\}_{loc}$ définies dans le repère local de l'élément en fonction des variables nodales du repère cylindrique, avant de procéder à l'assemblage, la matrice de transformation $[T]$ est donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [t] = \begin{bmatrix} [t]^T & 0 \\ [0] & [t] \end{bmatrix}$$

$$[Q] = [t \quad n] = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix}$$

Donc on peut écrire:

$$W_{int}^e = \langle u_n^* \rangle [k] \{u_n\}$$

$$\text{avec } \langle u_n \rangle = \langle U_1 W_1 \theta_1 U_2 W_2 \theta_2 \rangle \text{ et } [k] = [T]^T [k]_{loc} [T]$$

2.2.2.4 Charges équivalentes :

Pour de nombreux types de sollicitations volumique et surfacique le vecteur des charges équivalentes est défini à partir de

$$W_{ext} = 2\pi \int_0^L (u^* f_s + w^* f_z - \beta^* m_s) r d\xi$$

$$W_{ext}^e = 2\pi \int_0^L (u^* f_s + w^* f_z - w_{,s}^* m_s) r ds = 0$$

$$\begin{Bmatrix} f_s \\ f_z \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \end{Bmatrix}$$

les composantes f_r , f_z , m_s sont présentés dans la partie (2.2.1.3) pour plusieurs types de sollicitations (poids propre, pression) le vecteur des charges équivalentes est ainsi :

$$W_{ext}^e = \langle u_n^* \rangle \{f_n\} \text{ avec } \{f_n\} = 2\pi \int_{-1}^1 \{f_\xi\} \frac{L}{2} d\xi$$

$$\{f_\xi\} = \{N^L\} f_s + \{N^C\} f_z - \{N_{,s}^c\} m_s$$

Avec :

$$\langle N^L \rangle = \langle N_1^L \quad 0 \quad 0 \quad N_2^L \quad 0 \quad 0 \rangle$$

$$\langle N^C \rangle = \langle 0 \quad N_1 \quad N_2 \quad 0 \quad N_3 \quad N_4 \rangle$$

$$\langle N_{,s}^c \rangle = \langle 0 \quad N_{1,s} \quad N_{2,s} \quad 0 \quad N_{3,s} \quad N_{4,s} \rangle$$

2.2.2.5 Efforts résultants et contraintes :

Les déformations ε_s , ε_θ , les efforts résultants $[N]$, $[M]$ et les contraintes σ_s et σ_θ se calculent par les relations :

$$[N] = [H_m] \{e\} + [H_{mf}] \{x\}$$

$$[M] = [H_{mf}] \{e\} + [H_f] \{x\}$$

$$\{e\} = [B_m] \{u_n\} \quad ; \quad \{x\} = [B_f] \{u_n\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix}$$

dans cet élément les déformations et contraintes peuvent être évaluées en plusieurs points (point d'intégration, nœuds sommets)

CHAPITRE 3
MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE

3.1 Introduction :

Cette partie théorique est inspiré du référence [4]

Touts programmes basés sur la méthode des éléments finis inclut quelques blocs fonctionnels caractéristiques :

- Lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage (nœuds et éléments), les paramètres physiques (module d'élasticité...etc), les sollicitations et conditions aux limites.
- Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice globale et le vecteur global des sollicitations.
- Résolution du système d'équation après prise en compte des conditions aux limites.
- Impression des résultats après calcul éventuel des variables additionnelles (contraintes, réactions...etc)

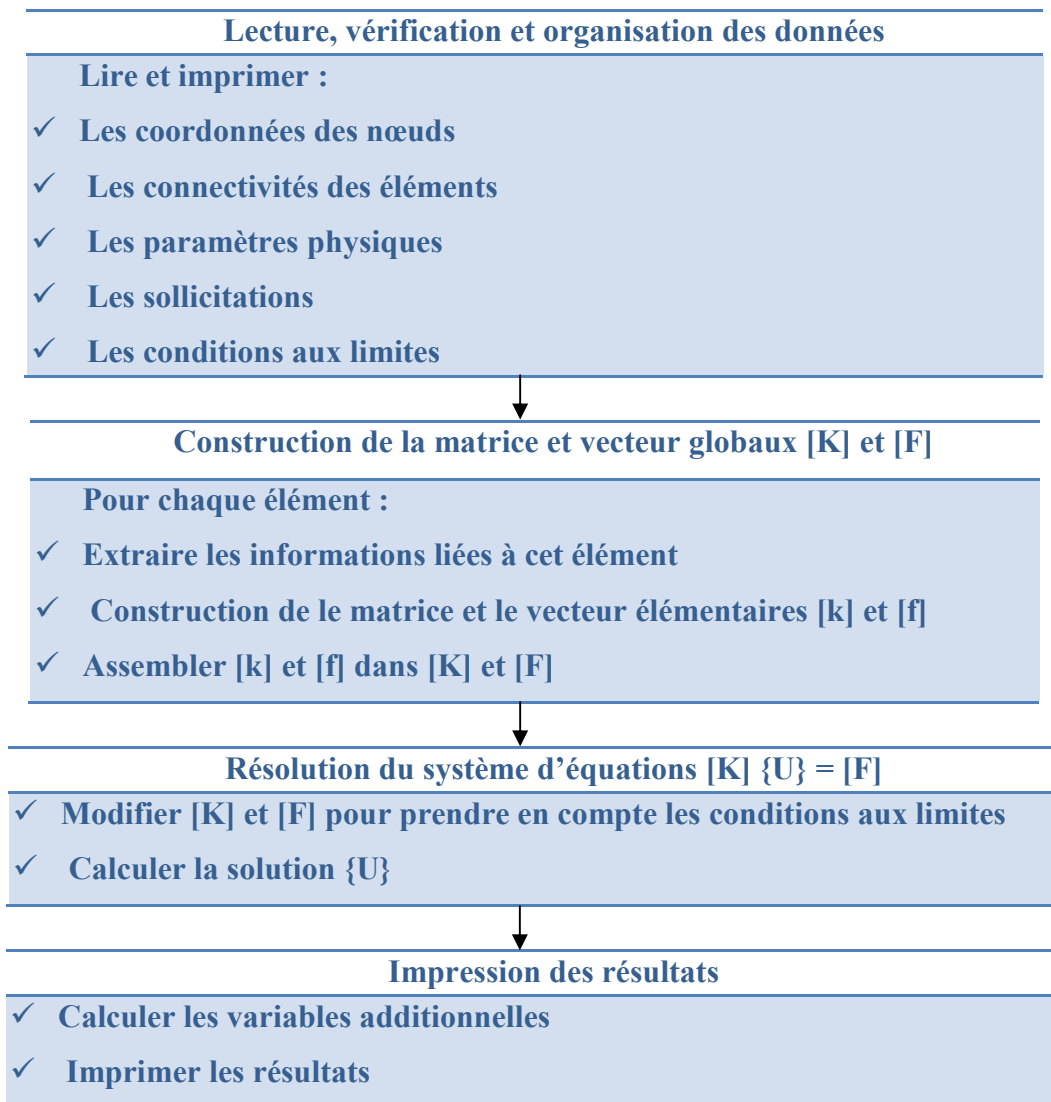


Figure (3 . 1) : blocs fonctionnels caractéristiques d'un programme éléments finis [6]

3.2 Présentation des programmes Axisym :

Les programmes qu'on a élaborés (AxisymCAXI_K) relatifs aux éléments finis CAXI_K et T3AX présentés dans le chapitre 2 sont écrits sous langage Matlab, chaque programme est constitué d'une fonction (function) principale Axisym qui remplace le programme principal en Fortran et un ensemble des fonctions (functions) secondaires (qui jouent le même rôle des subrotines en Fortran).

3.2.1 Algorithme générale : COMMANDE $U = K \setminus F$

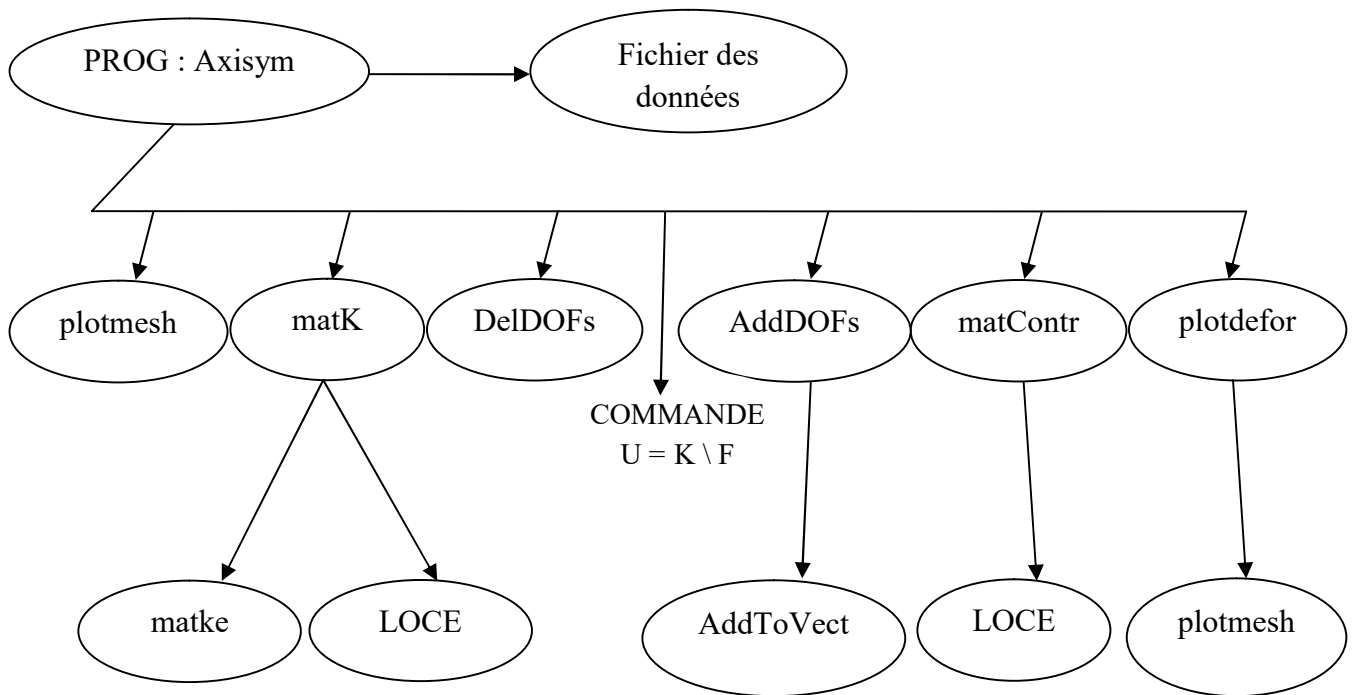


Figure (3 . 2) : Algorithme général d'un Programme Axisym

3.2.2 Description des programmes Axisym :

➤ **Programme principal Axisym :**

Il fait appel aux différentes fonctions secondaires nécessaires aux calculs d'une structure axisymétrique en utilisant les formulations décrites au chapitre (2) pour chaque type d'élément.

➤ **Fichier des données :**

C'est un fichier fonction où on introduit toutes les données relatives au problème :

- tableau des coordonnées des nœuds - tableau de connectivité des éléments
- épaisseur des éléments - module d'élasticité - coefficient de poisson

- conditions aux limites (numéros des degrés de liberté a bloquées)
- vecteur sollicitations

La commande Matlab : [les données] = feval(str2func(Nom du fichier des données)); ouvre le fichier des données et permet aux différentes fonction existant dans le programme principal de lire les données.

➤ **Fonction plotmesh :**

Cette fonction nous donne un affichage graphique du maillage, les coordonnées et la numérotation des nœuds, ce qui permet, avec le tracer la structure saisie, une vérification visuelle des données (tableaux des coordonnées et connectivité).

➤ **Fonction matK :**

C'est la fonction qui comporte le processus d'assemblage des matrices de rigidité élémentaires K_e fournit par la fonction matke, la boucle ce fait sur les éléments en utilisant la fonction LOCE qui nous fournit les degrés de liberté de chaque élément qui est nécessaires pour le stockage des termes de la matrice élémentaire dans la matrice de rigidité globale.

➤ **Fonction LOCE :**

A partir de la table de connectivité des éléments existant dans le fichier des données, cette fonction Fournit la table de localisation (numéros) des degrés de liberté pour chaque élément.

➤ **Fonction matke:**

Permet le calcul des matrices de rigidité élémentaires présenter au chapitre 2 (différentes d'un élément à un autre).

➤ **Fonction DelDOFs :**

Les conditions aux limites sont l'ensemble des déplacements nuls aux niveaux des appuis, un vecteur e dans le fichier de données est utilisé pour spécifier les degrés de liberté à bloquer. Pour appliquer cette condition on élimine les lignes et les colonnes correspondants

au vecteur e des matrices K et du vecteur F vecteur sollicitations (puisque le chargement est saisi pour tous les noeuds y compris ceux d'appuis).

➤ **Commande $U = K \setminus F$:**

Une fois les conditions aux limites sont appliquées, il ne reste qu'à résoudre le système discret, La solution en déplacement (au nœuds) s'obtient avec la commande MATLAB $U = K \setminus F$, qui remplace les méthodes classiques pour résoudre les systèmes d'équations linéaires (méthode de factorisation de cholesky Pour une matrice symétrique définie positive).

➤ **Fonction AddDOFs :**

Avec cette fonction on ajoute au vecteur déplacement les degrés de liberté des nœuds bloqués qui est supprimés par la fonction DelDOFs, la boucle se fait sur les numéros des degrés de liberté à ajouter en utilisant la fonction AddToVect.

➤ **Fonction AddToVect:**

Fournit le vecteur déplacement résultant pour chaque degré de liberté ajouté.

➤ **Fonction matContr:**

Permet le calcul des contraintes en utilisant la formulation présenter au chapitre 2, pour chaque type d'élément.

➤ **Fonction plotdeforme:**

Cette fonction dessine la structure déformée, elle trace les solutions obtenues sur le schéma déjà obtenu par la fonction plotmesh.

CHAPITRE 4

VALIDATION ET APPLICATIONS

4.1 Coque De Révolution

4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité:

On applique les éléments étudiés à une coque cylindrique fixée à une extrémité est chargé à l'autre extrémité libre figure (4 , 1).

le tableau N°(4 , 1) permet de faire la comparaison entre la solution analytique donné en [1] et les résultats obtenus par le programme Axisym pour les éléments (CAXI_K)

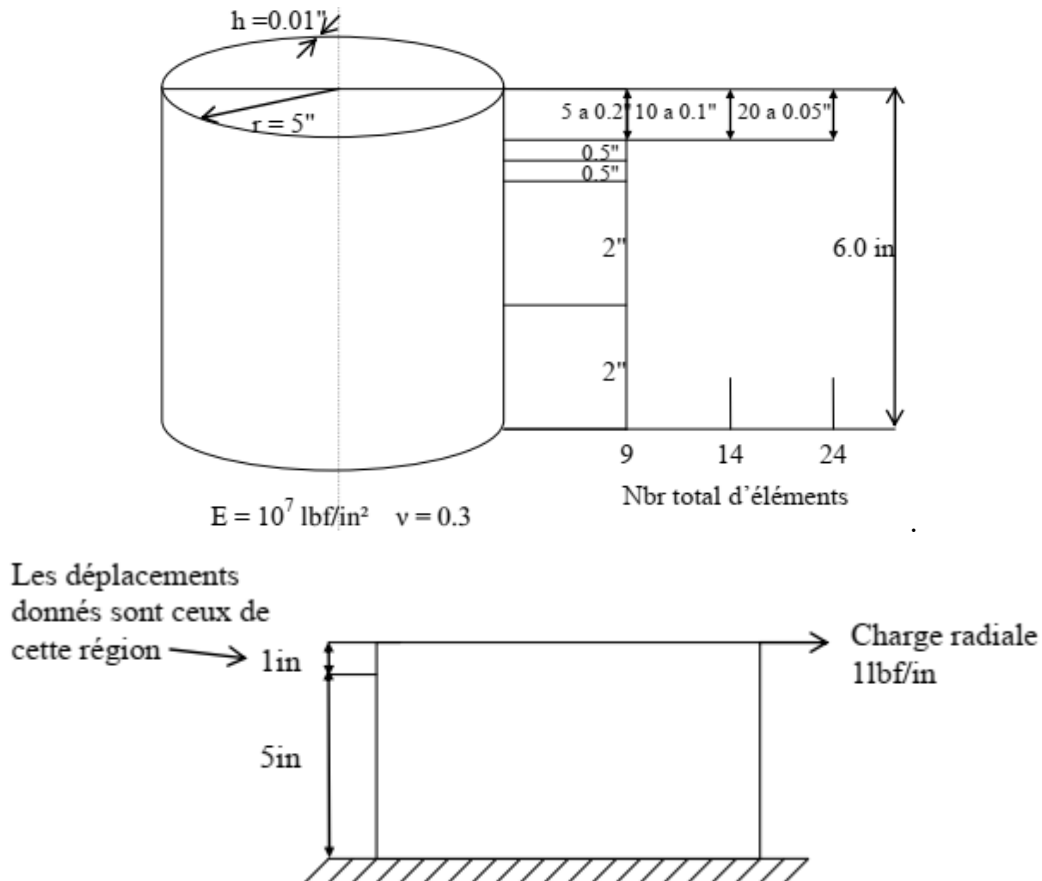


Figure (4 , 1) cylindre chargé à leur extrémité

Maillage	SOL Ref [1]	Prog : CAXI_K	Erreur
9 éléments	2874	2815	2.05%
14 éléments		2861	0.45%
24 éléments		2871	0.10%
30 éléments maillage uniforme		2815	2.05%
40 éléments maillage uniforme		2842	1.11%
50 éléments maillage uniforme		2855	0.66%
60 éléments maillage uniforme		2861	0.52%
75 éléments maillage uniforme		2866	0.27%
100 éléments maillage uniforme		2870	0.14%

Tableau (4 , 1) : Déplacement radial (in) à l'extrémité chargé (x1/1000)

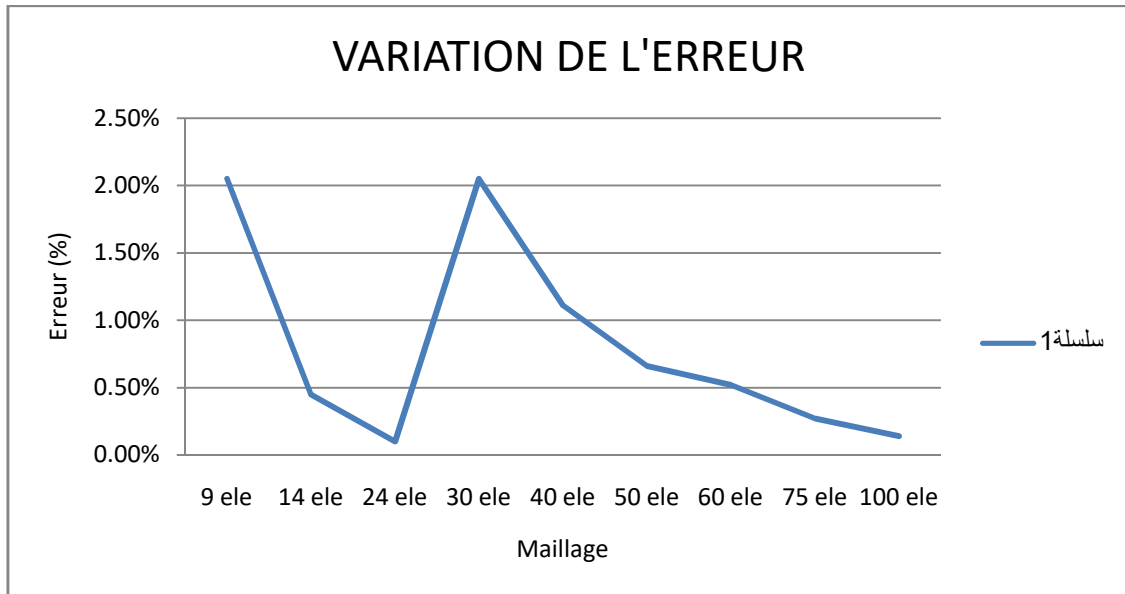


Figure (4 , 2) Convergence de déplacement de l'extrémité libre

Conclusion : (Cylindre chargé à leur extrémité)

Nous remarquons que l'élément tronconique de type Love-kirchoff CAXI_K nous donne des résultats très satisfaisantes en raffinant le maillage dans la zone proche du point d'application de la charge.

pour les maillages de type uniforme, il est nécessaire d'utiliser un nombre d'élément plus élevé (jusqu'à 100 éléments) pour assurer la convergence vers la solution de référence.

4.1.2 Plaque circulaire sous différents types de chargement :

On applique les éléments CAXI_K à une plaque circulaire sous diverses conditions de charges et d'appuis figure (4 , 3)

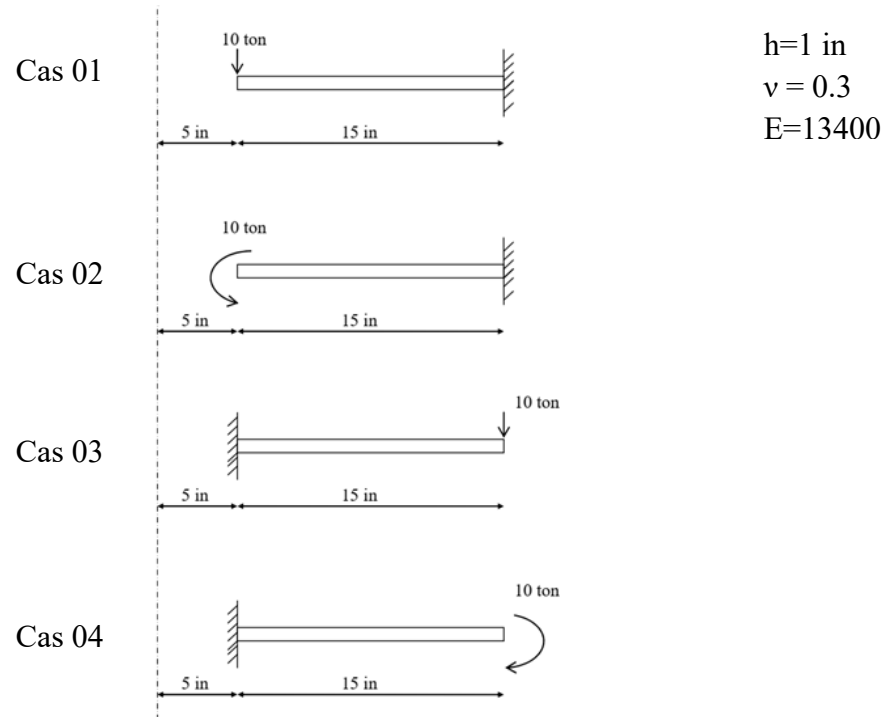


Figure (4 , 3) Plaque circulaire sous divers cas de chargement

Cas de charge 1			
Maillage	SOL Ref [5]	Prog:CAXI_K	Erreur
5 éléments	0,02888	0.028897	-0,17%
10 éléments		0,028897	-0,17%
20 éléments uniforme		0,028897	-0,17%
20 éléments graduels		0,02896	-0,28%
30 éléments uniforme		0.02889	-0.03%
30 éléments graduels		0.02889	-0.03%

Elément CAXI_K cas de charge 1

Cas de charge 2			
Maillage	SOL Ref [5]	Prog:CAXI_K	Erreur
5 éléments	0,00502	0.005024099	-0,0816%
10 éléments		0.005023752	-0,0747%
20 éléments uniforme		0.005023729	-0,0742%
20 éléments graduels		0.005023729	-0,0742%
30 éléments uniforme		0.005023728	-0,0742%
30 éléments graduels		0.005023747	-0,0746%

Elément CAXI_K cas de charge 2

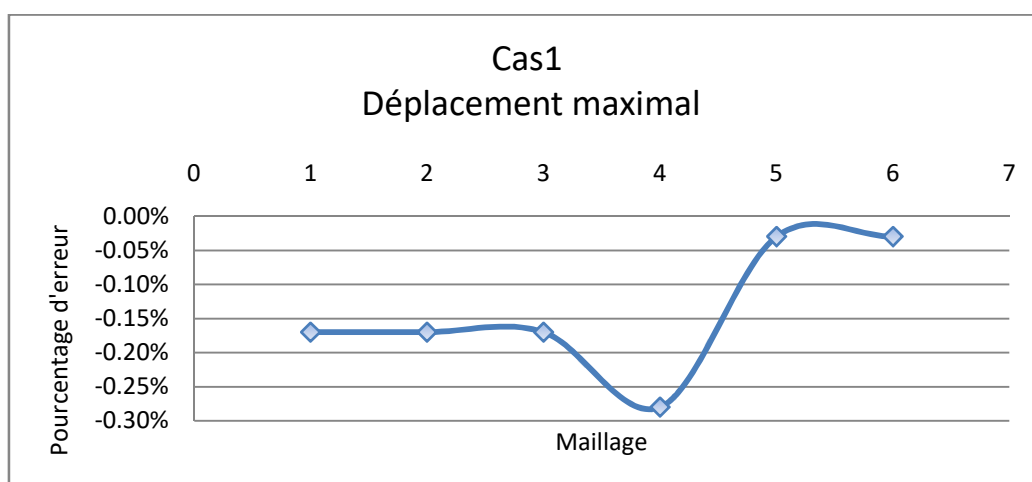
Cas de charge 3			
Maillage	SOL Ref [5]	Prog:CAXI_K	Erreur
5 éléments	0,03509	0.035172548	-0.235%
10 éléments		0.035175125	-0.242%
20 éléments uniforme		0.035175297	-0,243%
20 éléments graduels		0.035175169	-0,242%
30 éléments uniforme		0.035175307	-0,243%
30 éléments graduels		0.035175166	-0,242%

Elément CAXI_K cas de charge 3

Cas de charge 4			
Maillage	SOL Ref [5]	Prog:CAXI_K	Erreur
5 éléments	0,00455	0.004552040	-0,0448%
10 éléments		0.004552111	-0,0463%
20 éléments uniforme		0.004552116	-0,0465%
20 éléments graduels		0.004552112	-0,0464%
30 éléments uniforme		0.004552116	-0,0465%
30 éléments graduels		0.004552112	-0,0464%

Elément CAXI_K cas de charge 4

Tableau (4 , 2) : Valeur de déplacement maximal pour divers cas de charge



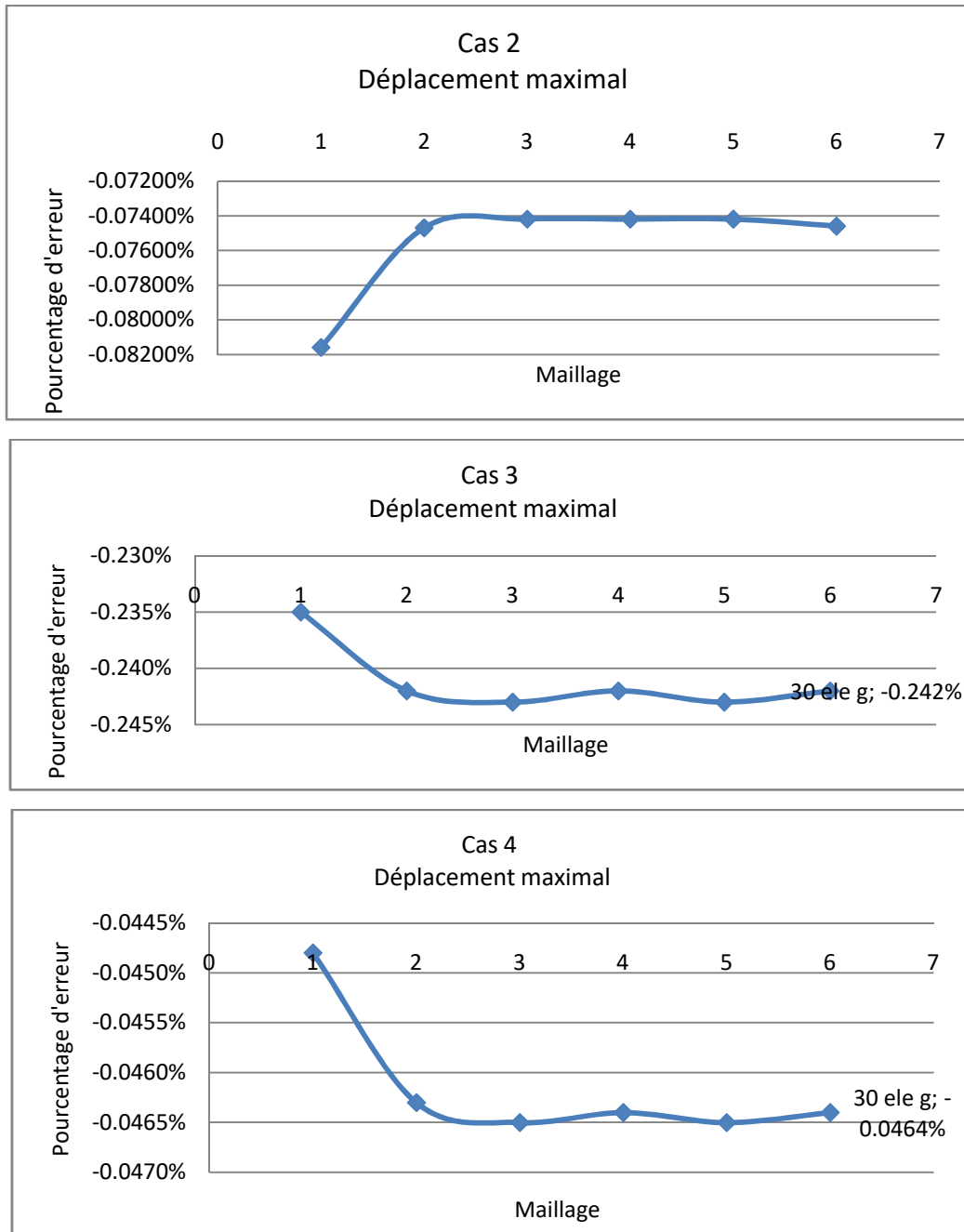


Figure (4 , 4) convergence de déplacement maximal (divers cas de charge)

Commentaires :

Cas de charge 1 :

L'élément CAXI_K converge rapidement au démarrage de la discrétisation, ensuite les deux types d'éléments convergent vers la solution exacte.

Cas de charge 2 :

C'est l'inverse du cas de charge 1.

Maillage	SOL Ref [6]	Prog:CAXI_K	Erreur
2 éléments	1,60E-05	0.00050	99,96%
10 éléments		2,21434 E-05	-38.39%
20 éléments		1,58729 E-05	0,794%
24 éléments		1,58748 E-05	0,782%
28 éléments		1,58783 E-05	0,760%

Tableau (4 , 3) : Valeur de déplacement maximal (in)

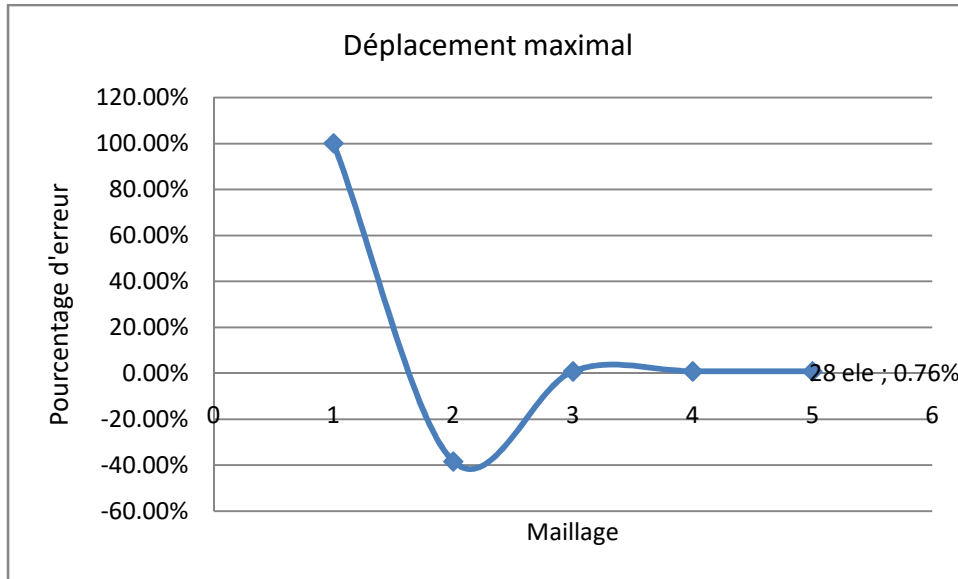


Figure (4 , 7) variation de l'écart entre Axisym et SOL Ref [6]

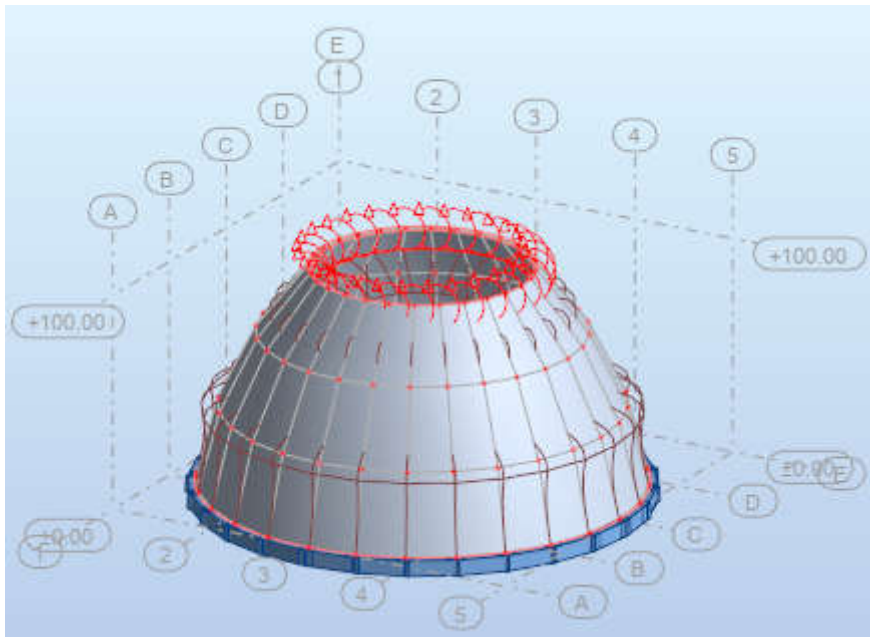


Figure (4 , 8) structure déformée

Commentaires :

On comparant avec le résultat obtenu par SOL Ref [6], le résultat obtenu par l'élément CAXI_K est acceptable.

4.1.4 Dôme sphérique sous pression :

Un dôme sphérique [8] est modélisé par le logiciel Robot Structural Analysis Professional et Prog:CAXI_K, les résultats sont regroupés dans le tableau ci-après :

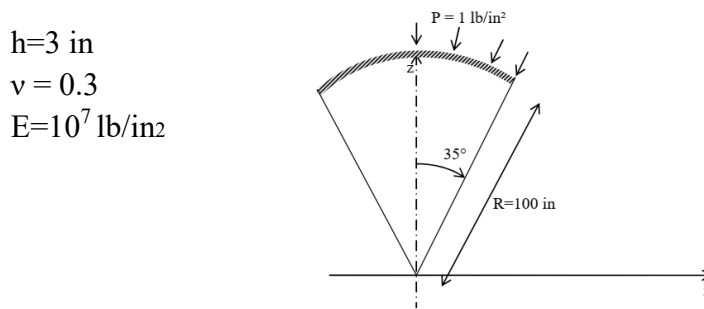


Figure (4 , 9) : Dôme sphérique sous pression

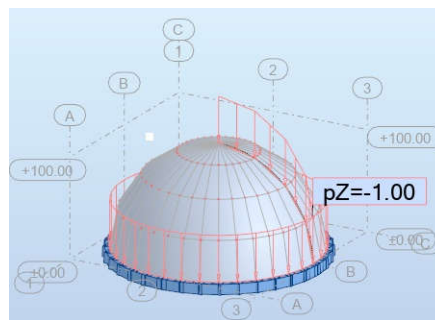


Figure (4 , 10) : Dôme sphérique sous pression 3d

Maillage	Prog:CAXI_K	Robot	DIFF
5 éléments	2,18601E-04	1.021300000e-04	53.280%
10 éléments	1,88066 E-04	1.521591378e-04	19.092%
14 éléments	1,57459 E-04	1.693268552e-04	-7.5371%

Tableau (4 , 4) : Valeur de déplacement maximal (in)

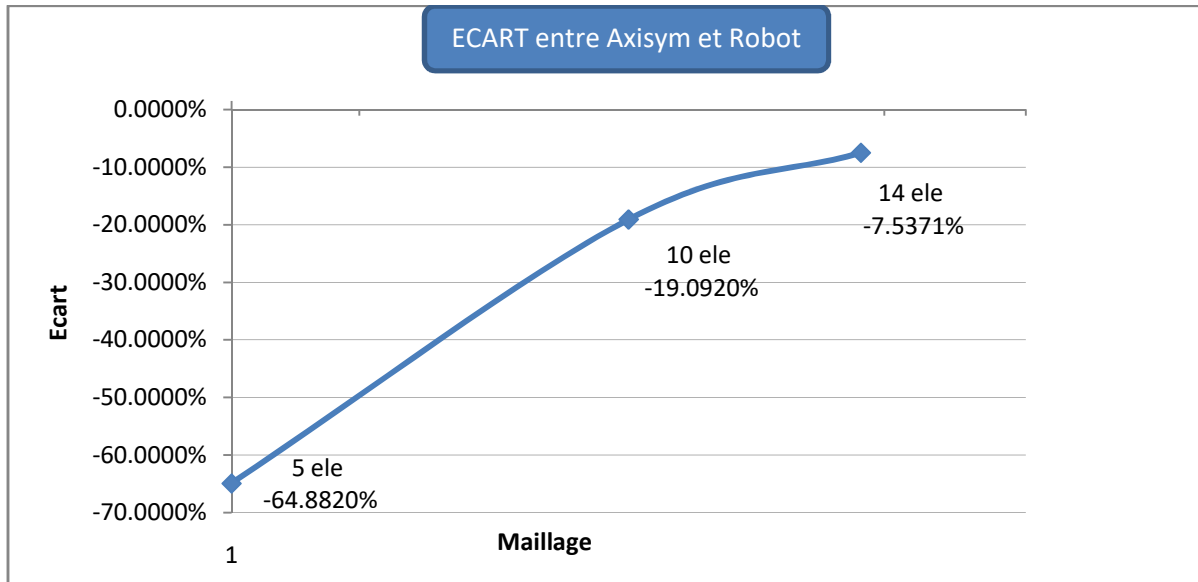


Figure (4 , 11) variation de l'écart entre Prog : CAXI_K et Robot

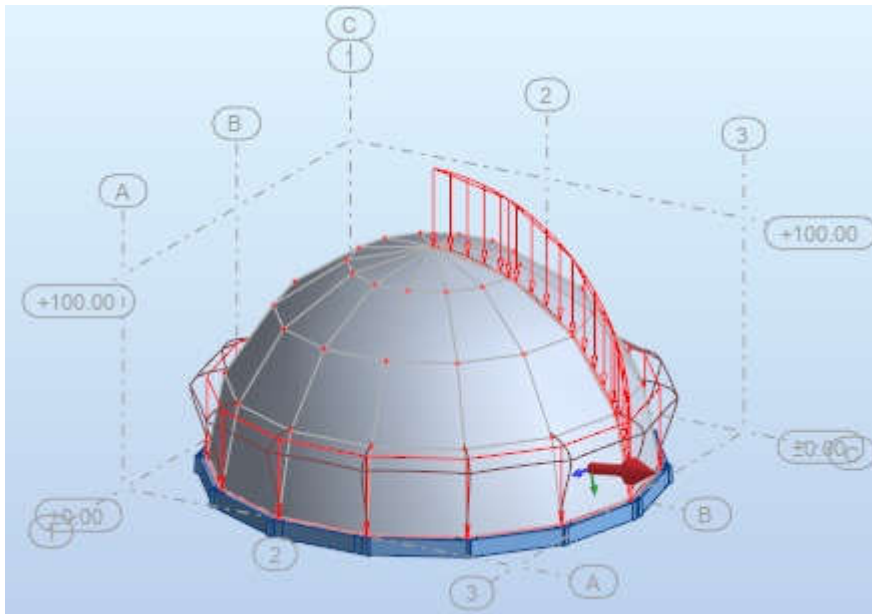


Figure (4 , 12) Structure déformée

Commentaires :

On remarque que les résultats obtenus par Robot, et ce de notre programme pour l'élément CAXI_K convergent de façon uniforme.

4.1.5 Hyperboloïde :

Un hyperboloïde [6] (qui peut être un tour de refroidissement) est modélisé par le logiciel Robot Structural Analysis Professional et ANSYS, les résultats sont regroupés dans le tableau ci-après :

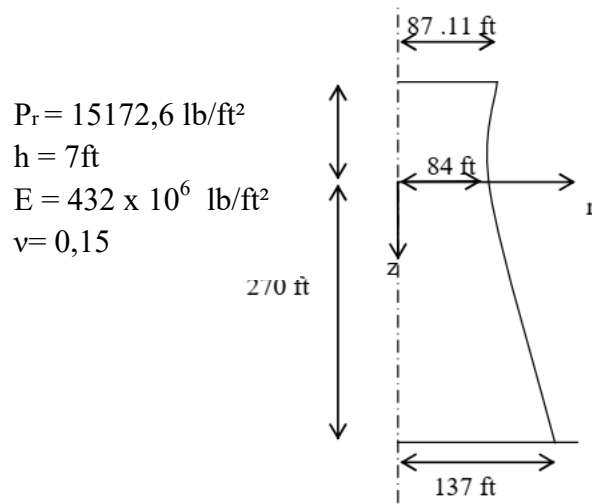


Figure (4 , 13) : hyperboloïde

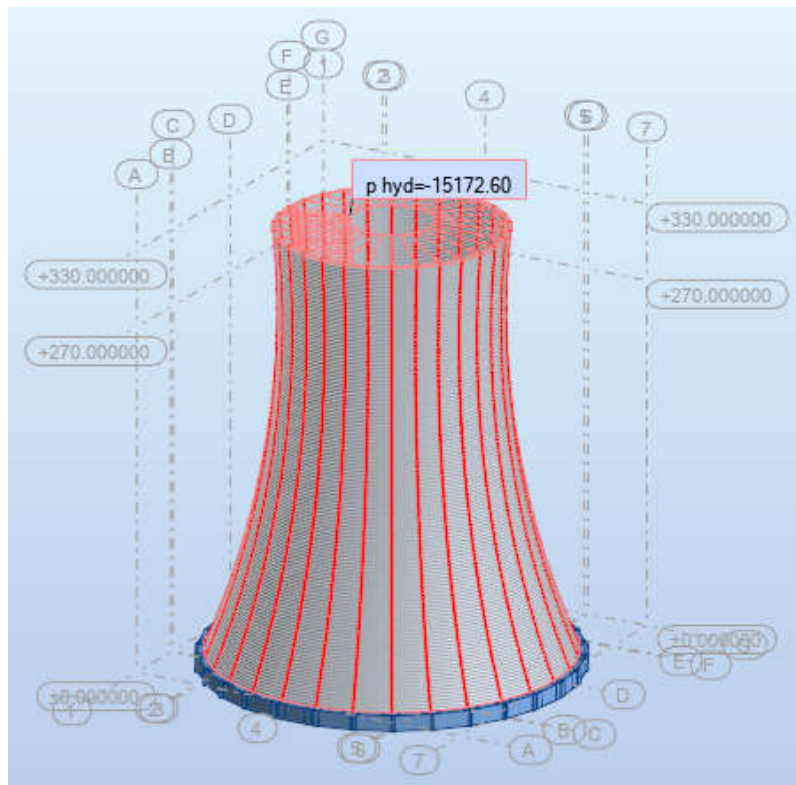


Figure (4 , 14) : hyperboloïde 3d

Maillage	ANSYS	Robot	DIFF
7 éléments	0,0414	-0.03386061	18.211%
20 éléments	0,03823	-0.03605905	5.596%
30 éléments	0,03823	-0.03706280	3.053%

Tableau (4 , 5) : Valeur de déplacement maximal (ft)

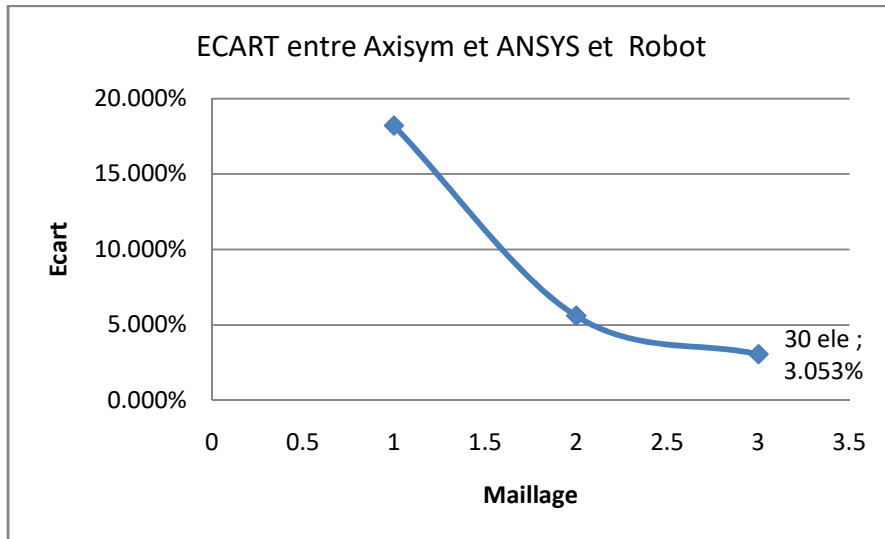


Figure (4 , 15) variation de l'écart entre Robot et ANSYS

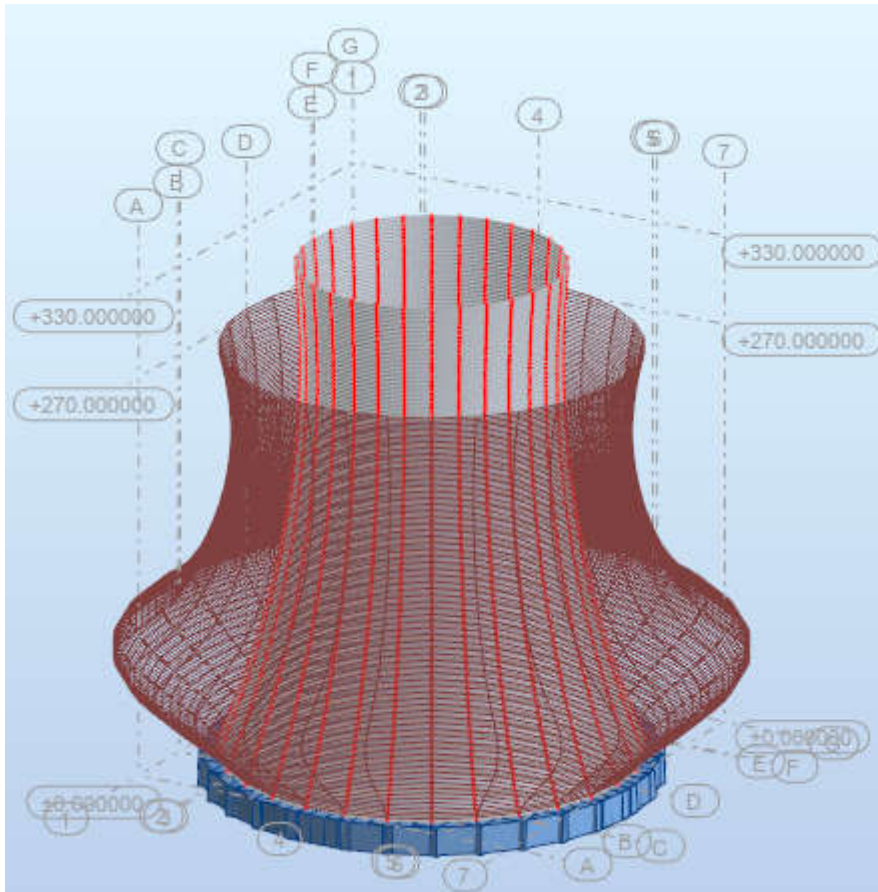


Figure (4 , 16) Structure déformée

Commentaires :

On remarque que les résultats obtenus par le logiciel ANSYS convergent rapidement au démarrage par rapport à le logiciel Robot, ensuite les deux programmes convergent vers le même résultat.

4.1.6 Cylindre conique :

Un cylindre conique [8] est modélisé par le logiciel Robot Structural Analysis Professional et Prog: CAXI_L, les résultats sont regroupés dans le tableau ci-après :

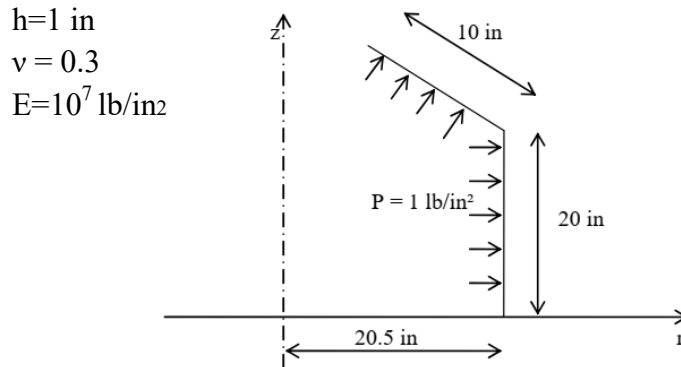


Figure (4 , 17) : Cylindre conique

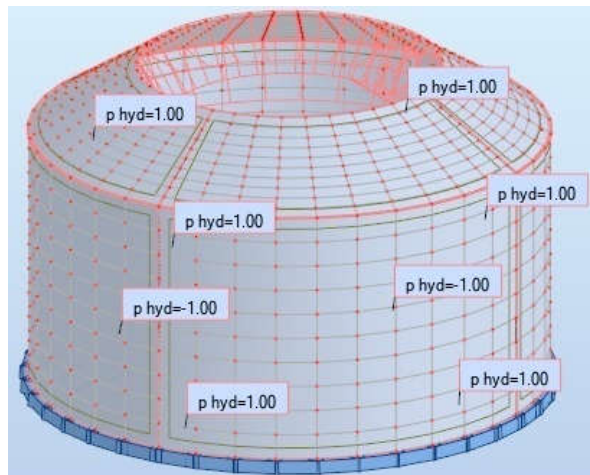


Figure (4 , 18) : Cylindre conique 3d

Maillage	Prog:CAXI_L	Robot	DIFF
4 éléments	4,3471711 E-05	4.0122392 E-05	7.509%
8 éléments	4,9397913 E-05	4.3640421 E-05	11.655%
12 éléments	4,4354791 E-05	4.3538557 E-05	1.840%
20 éléments	4.5298000 E-05	4.3731837 E-05	3.457%
30 éléments	3,9772899 E-05	3,9938000 E-05	-0.415%

Tableau (4 , 6) : Valeur de déplacement maximal (in)

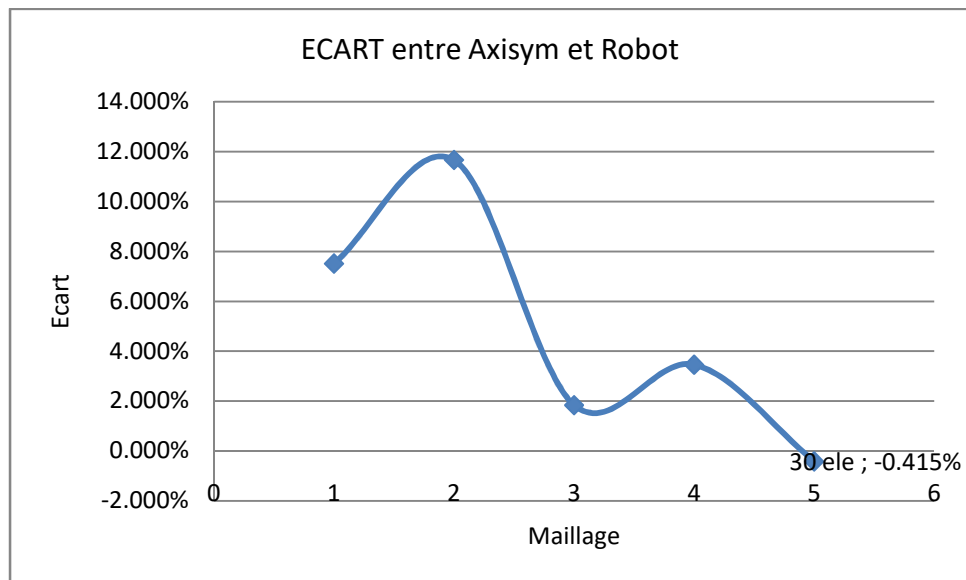


Figure (4 , 19) variation de l'écart entre Axisym et Robot

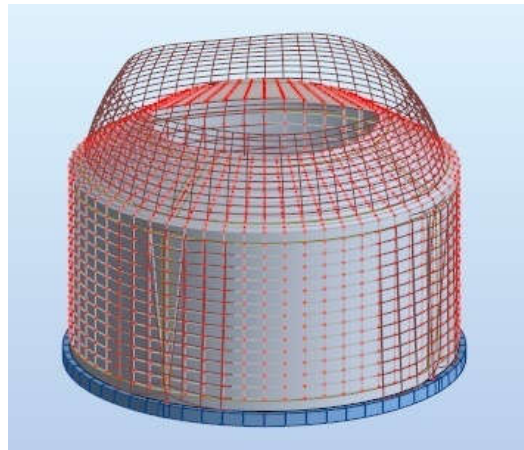


Figure (4 , 20) Structure déformée

Commentaires :

On remarque que les résultats obtenus par Robot, et ceux de programme CAXI_L convergent de façon uniforme.

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

Afin de modéliser les coques de révolution plusieurs éléments sont utilisés, les éléments **CAXI_L**, **CAXI_K** pour les coques à épaisseur constante et l'élément **CAXI_Q** pour les coques à épaisseur variable. Chaque type d'élément est caractérisé par une matrice de rigidité, matrice de masse et le vecteur des forces équivalentes aux nœuds. Ces trois facteurs une fois connu permettent alors d'évaluer les déplacements aux niveaux des nœuds, les efforts internes qui comparés aux valeurs de référence nous donne une idée sur la fiabilité de chaque l'élément. Des tests de validation auraient pu être faits pour évaluer les performances et la précision du modèle utilisé. Après telle vérification, une comparaison entre le logiciel robot et les résultats de coulant de l'élément testé nous édifiera plus amplement sur la validité du modèle.

A travers cette étude et les résultats obtenus dans ce cadre on peut déduire les conclusions et les recommandations suivantes :

- Dans le cas des structures coques de révolution a épaisseurs mince la modélisation par l'élément tronconique **CAXI_K** qui est basé sur une formulation de type **Love-Kirchoff** (cisaillement transverse négligé), conduit à des résultats très satisfaisants, on remarque que cet élément présente une convergence rapide et monotone vers la solution exacte.
- La comparaison des résultats obtenus par l'élément **CAXI_K** programmé sous **Matlab** avec ceux obtenus par les logiciels **ANSYS** et **Robot Structural Analysis**, permet de mettre en évidence la bonne performance de cet élément.
- La formulation de l'élément fini **CAXI_K** à été faite avec un modèle en déplacement, le changement de ce modèle on introduisant une formulation mixte comme l'élément **CAXI_L**, ou l'utilisation d'une formulation variationnelle mixte (type **Hellinger – Reissner**) peuvent apporter plus de précision sur les résultats obtenus par cet élément.
- Pour améliorer les résultats nous proposons d'utilisé d'autre schéma d'intégration numérique dans l'évaluation de la matrice de rigidité de l'élément **CAXI_K**, sachant que l'intégration numérique pour cet élément est faite avec deux points de Gauss.

BIBLIOGRAPHIE:

- [1] BATOZ, J.L., DHATT.G., Modélisation des structures par éléments finis volume 1, HERMES 1990.
- [2] BATOZ, J.L., DHATT.G., Modélisation des structures par éléments finis volume 3, HERMES 1992.
- [3] calcul des coques minces a symétrie de révolution Présenté par MOHAMED KHAOUA Maitre de Recherche au C.G.S.(Alger) Enseignant Associé à l' ENTP
- [4] Modélisation des structures continues à symétrie axiale de formes quelconques Par la méthode des éléments finis Présenté par : LABIODH BACHIR Soutenu publiquement le 19/10/2011
- [5] C.ROCKEY, H.R. EVANS, D.W. GRIFFITHS, D.A. NETHERCOT Introduction à la méthode des éléments finis. EYROLLES 1979.
- [6] TOZOUT, G., DHATT, G., Une présentation de la méthode des éléments finis, Maloine S.A 1981.
- [7] ROARCK, R., YOUNG, W., Formulas for stress and strain. McGraw-Hill, 5th edition 1975.
- [8] O.C ZIENKIEWICZ AND R.L TAYLOR, the finite element method volume 2 Solid mechanic fifth edition Butterworth-Heinemann, 2000.
- [9] SERGE LAROZE résistance des matériaux et structures, tome 1, Milieux continus solides plaques et coques, EYROLLES – MASSON, 1983.
- [10] F.HAZIM ,Phd Thesis ,University of walls, 1989, UC
- [11] RATHOD, H.A, Explicit stiffness matrices for axisymmetric triangular element, Comput. and Struct, Vol. 30, N° 5, p. 1091-1100. 1988.
- [12] UTKU, S., Explicit expression for triangular torus stiffness matrix, AIAA J., Vol. 6, p. 1174-1176, 1968.
- [13] DAVID,V. HUTTON, fundamentals of finite element analysis, McGraw- Hill, 2004.
- [14] DUROCHER, L., GASPER, A., RHOADES, G., A numerical comparison of axisymmetric finite element, IJNME, Vol. 12, p. 1415-1427, 1978.
- [15]KIM JIN-GON Korean Society of Mechanical Engineers, Seoul, COREE, REPUBLIQUE 2004 (Revue)
- [16] G.A.MOHR Application of penalty functions to a curved isoparametric axisymmetric thick shell element, Computers & Structures Volume 15, Issue 6, 1982, Pages 685-690.
- [17] PROST, J.P., Analyse de la stabilité élastique des voiles minces de révolution par la méthode des éléments finis, Thèse de maîtrise es sciences, Université Laval, Québec, 1975.

- [18] CHAN, A.S.L, TRBOJEVIC, V.M, Thin shell finite element by the mixed method formulation, CMAME 1977
- [19] M. HANNACHI, H. NACEUR, J.L. BATOZ, S. BELOUETTAR 8^{ème} Colloque National en Calcul des Structures Mai 2007, Giens
- [20] COMBESCURE, A., Etude numérique du flambage plastique des coques de révolution, dans Volume 3, Calcul des structures et intelligence artificielle, (Fouet et al. Eds.), Pluralis, p. 81-95, 1990.
- [21] PRATHAP, G., RAMESH BABU, C.R., A field consistent three noded quadratic curved axisymmetric shell element, IJNME, Vol. 23, p.711-723, 1986.
- [22] RAMESH BABU, C., PRATHAP, G., A field consistent two noded curved axisymmetric thick shell element, IJNME, Vol. 23, p.1245-1261, 1986.
- [23] TESSLER, A., An efficient conforming axisymmetric shell element including transverse shear and rotary inertia, Computers & Structures Vol 15 N° 5, p. 567-574, 1982
- [24] DESPINOY, J.P, Modélisation des coques de révolution par éléments finis. Formulations et applications en statique et dynamique, Mémoire d'ingénieur CNAM, 1991.
- [25] LIU, X.J, Modélisation de coques minces axisymétriques en grandes déformations élasto-plastiques. Thèse de doctorat, UTC, 1991.
- [26] ENGRAND, D., BORDAS, J., Calcul des coques en matériaux multicouches et sandwichs, par la méthode des éléments finis, la Recherche Aérospatiale, n°2, p. 109-118, 1973
- [27] JONES, R.E, STROME, D.R, Direct stiffness method analysis of shells of revolution utilizing curved éléments, AIAA J., Vol. 4, N° 9, p. 1519-1526, 1966
- [28] MEBANE, P.M., STRICKLIN, J.A., Implicit rigid body motion in curved finite elements, AIAA J., Vol. 9, N° 2, p. 344-345, 1971.
- [29] STRICKLIN, J.A., NAVARATNA, D.R, PIAN, T.H.H., Improvements on the analysis of shells of revolution by the matrix displacement method, AIAA J., Vol. 4, p. 2069-2072, 1966.
- [30] BROMBOLISH, L., GOULD, P., Finite element analysis of shells of revolution by minimization of the potential energy functional, Proceeding Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, Nashville, USA, p. 279-307, 1969.
- [31] GOULD, P., Finite element analysis of shells of revolution, Pitman Publishing Ltd, London, 1985.
- [32] POPOV, E.P., SHARIFI, P., A refined curved element for thin shells of revolution, IJNME, Vol. 3, p.495-508, 1971.

-
- [33] SHIVAKUMAR, K.N., KRISHNA MURTY, A.V., A high precision ring element for vibration of laminated shells, *J. Sound Vibrations*, Vol. 58, p. 311-318, 1978.
- [34] HITCHINGS, D., Axisymmetric thin shells, in finite element analysis of thin walled Structures, *J. Bull Ed.*, Elsevier, 1988, p. 133-164.
- [35] EL HARIF, A., Etude par la méthode des éléments finis de l'effet de cisaillement transverse dans les plaques et les coques de révolution, Thèse de doctorat es Sciences, Université de Mouhamed V, Rabat, Maroc, Décembre 1988.
- [36] LUKASIEWICZ, S., Local loads in plate and shells, Sijthoff at Noordhoff, 1979.
- [37] LEISSA, A.W, NARITA, Y., Natural frequencies of simply supported circular plates, *JSV*, Vol. 70, p. 221-229, 1980.
- [38] TESSLER, A., SPIRIDIGLIOZZI, L., Resolving membrane and shear locking phenomena in curved shear deformable axisymmetric shell elements, *IJNME*, Vol. 26, p. 1071-1086, 1988.
- [39] GRAFTON, P.E, STROME, D.R, Analysis of axisymmetric shells by the direct stiffness method, *AIAAJ.*, Vol. 1, n° 10, p. 2342-2347, 1963.
- [40] MEYER, R.R, HARMON, M.B, Conical segment method for analyzing open crown shells of revolution for edge loadings, *AIAAJ.*, Vol. 1, n° 4, p. 886-891, 1963.
- [41] PERCY, J.H, PIAN, T.N.H, KLEIN, S., NAVARATNA, D.R., Application of matrix displacement method for linear elastic analysis of shell of revolution, *AIAA J.*, Vol. 3, n° 11, p. 2138-2145, Nov. 1965.
- [42] POPOV, E.P, PENZIEN, J, LU., Z.A., Finite element solution for axisymmetric shells, *J. Engng. Mech, Div., ASCE*, Vol. 90, p. 119-145, 1964.
- [43] O.C ZIENKIEWICZ AND R.L TAYLOR, the finite element method volume 1 The basic fifth edition Butterworth-Heinemann, 2000.

ANNEXE

```

function [t,p,e,g,E,nu,F] = elemtronc30ELE
t = [1 2           % connectivité de l'élément 1
     2 3           % connectivité de l'élément 2
     3 4           % connectivité de l'élément 3
     4 5           % connectivité de l'élément 4
     5 6           % connectivité de l'élément 5
     6 7           % connectivité de l'élément 6
     7 8           % connectivité de l'élément 7
     8 9           % connectivité de l'élément 8
     9 10          % connectivité de l'élément 9
    10 11          % connectivité de l'élément 10
    11 12          % connectivité de l'élément 11
    12 13          % connectivité de l'élément 12
    13 14          % connectivité de l'élément 13
    14 15          % connectivité de l'élément 14
    15 16          % connectivité de l'élément 15
    16 17          % connectivité de l'élément 16
    17 18          % connectivité de l'élément 17
    18 19          % connectivité de l'élément 18
    19 20          % connectivité de l'élément 19
    20 21          % connectivité de l'élément 20
    21 22          % connectivité de l'élément 21
    22 23          % connectivité de l'élément 22
    23 24          % connectivité de l'élément 23
    24 25          % connectivité de l'élément 24
    25 26          % connectivité de l'élément 25
    26 27          % connectivité de l'élément 26
    27 28          % connectivité de l'élément 27
    28 29          % connectivité de l'élément 28
    29 30          % connectivité de l'élément 29
    30 31          % connectivité de l'élément 30
];
p = [ 5.0  6.0      % coordonnées du noeud 1
     5.0  5.80     % coordonnées du noeud 2
     5.0  5.60     % coordonnées du noeud 3
     5.0  5.40     % coordonnées du noeud 4
     5.0  5.20     % coordonnées du noeud 5
     5.0  5.00     % coordonnées du noeud 6
     5.0  4.80     % coordonnées du noeud 7
     5.0  4.60     % coordonnées du noeud 8
     5.0  4.40     % coordonnées du noeud 9
     5.0  4.20     % coordonnées du noeud 10
     5.0  4.00     % coordonnées du noeud 11
     5.0  3.80     % coordonnées du noeud 12
     5.0  3.60     % coordonnées du noeud 13
     5.0  3.40     % coordonnées du noeud 14
     5.0  3.20     % coordonnées du noeud 15
     5.0  3.00     % coordonnées du noeud 16
     5.0  2.80     % coordonnées du noeud 17
     5.0  2.60     % coordonnées du noeud 18
     5.0  2.40     % coordonnées du noeud 19
     5.0  2.20     % coordonnées du noeud 20
     5.0  2.00     % coordonnées du noeud 21
     5.0  1.80     % coordonnées du noeud 22
     5.0  1.60     % coordonnées du noeud 23
     5.0  1.40     % coordonnées du noeud 24
     5.0  1.20     % coordonnées du noeud 25
];

```

```

5.0 1.00      % coordonnées du noeud 26
5.0 0.80      % coordonnées du noeud 27
5.0 0.60      % coordonnées du noeud 28
5.0 0.40      % coordonnées du noeud 29
5.0 0.20      % coordonnées du noeud 30
5.0 0.00      % coordonnées du noeud 31
];
e = [ 91; 92; 93];          % noeud 31 bloqué dans la direction u w
beta
g=0.01* ones(1,size(t,1));
E = 10^07 * ones(1,size(t,1)); % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3 * ones(1,size(t,1)); % coef de poisson
F = [ 31.4159 ; 0 ; 0 % charge appliqué au noeud 1 direction w
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
0 ; 0 ; 0
];

```

Résultats de calcul structure coque de revolution
4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité: Prog CAXI_K
fichier de données du probleme : elemtronc30ELE

Nombre des elements total :30

Nombre des noeuds total : 31

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.002815	-0.00001	+0.01629
2	+0.000373	+0.00000	+0.00680
3	-0.000181	+0.00000	+0.00015
4	-0.000084	+0.00000	-0.00063
5	-0.000004	-0.00000	-0.00018
6	+0.000007	-0.00000	+0.00002

7	+0.000002	-0.000000	+0.000002
8	-0.000000	+0.000000	+0.000000
9	-0.000000	+0.000000	-0.000000
10	-0.000000	-0.000000	-0.000000
11	+0.000000	-0.000000	-0.000000
12	+0.000000	-0.000000	+0.000000
13	+0.000000	+0.000000	+0.000000
14	-0.000000	+0.000000	+0.000000
15	-0.000000	+0.000000	-0.000000
16	-0.000000	-0.000000	-0.000000
17	+0.000000	-0.000000	+0.000000
18	+0.000000	-0.000000	+0.000000
19	-0.000000	+0.000000	+0.000000
20	-0.000000	+0.000000	-0.000000
21	-0.000000	-0.000000	-0.000000
22	+0.000000	-0.000000	-0.000000
23	+0.000000	-0.000000	+0.000000
24	+0.000000	+0.000000	+0.000000
25	-0.000000	+0.000000	-0.000000
26	-0.000000	+0.000000	-0.000000
27	-0.000000	-0.000000	-0.000000
28	+0.000000	-0.000000	+0.000000
29	+0.000000	-0.000000	+0.000000
30	-0.000000	+0.000000	+0.000000
31	+0.000000	+0.000000	+0.000000

les contraintes :

Noeud	Ns1	Ts1	Ms1	Ns2	Ts2	Ms2
1	+0.0000	-2.142	-0.0000	-0.0000	-2.9926	-0.049
2	-0.0000	-3.291	+0.0487	+0.0000	-3.0043	-0.013
3	+0.0000	-3.279	+0.0126	-0.0000	-3.1208	+0.002
4	-0.0000	-3.162	-0.0015	+0.0000	-3.1498	+0.002
5	-0.0000	-3.133	-0.0016	+0.0000	-3.1458	+0.000
6	+0.0000	-3.137	-0.0003	-0.0000	-3.1419	-0.000
7	+0.0000	-3.141	+0.0001	-0.0000	-3.1412	-0.000
8	-0.0000	-3.142	+0.0001	+0.0000	-3.1415	-0.000
9	+0.0000	-3.142	+0.0000	-0.0000	-3.1416	+0.000
10	+0.0000	-3.142	-0.0000	-0.0000	-3.1416	+0.000
11	-0.0000	-3.142	-0.0000	+0.0000	-3.1416	-0.000
12	+0.0000	-3.142	+0.0000	-0.0000	-3.1416	-0.000
13	+0.0000	-3.142	+0.0000	-0.0000	-3.1416	-0.000
14	+0.0000	-3.142	+0.0000	-0.0000	-3.1416	+0.000
15	+0.0000	-3.142	-0.0000	-0.0000	-3.1416	+0.000
16	+0.0000	-3.142	-0.0000	-0.0000	-3.1416	+0.000
17	+0.0000	-3.142	-0.0000	-0.0000	-3.1416	-0.000
18	+0.0000	-3.142	+0.0000	-0.0000	-3.1416	-0.000
19	+0.0000	-3.142	+0.0000	-0.0000	-3.1416	-0.000
20	+0.0000	-3.142	+0.0000	-0.0000	-3.1416	+0.000
21	+0.0000	-3.142	-0.0000	-0.0000	-3.1416	+0.000
22	+0.0000	-3.142	-0.0000	-0.0000	-3.1416	-0.000
23	+0.0000	-3.142	+0.0000	-0.0000	-3.1416	-0.000
24	+0.0000	-3.142	+0.0000	-0.0000	-3.1416	-0.000
25	+0.0000	-3.142	+0.0000	-0.0000	-3.1416	+0.000
26	+0.0000	-3.142	-0.0000	-0.0000	-3.1416	+0.000
27	+0.0000	-3.142	-0.0000	-0.0000	-3.1416	+0.000
28	+0.0000	-3.142	-0.0000	-0.0000	-3.1416	-0.000
29	+0.0000	-3.142	+0.0000	-0.0000	-3.1416	-0.000

30 +0.0000 -3.142 +0.0000 -0.0000 -3.1416 +0.000

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité: Prog CAXI_K

fichier de données du probleme : elemtronc40ELE

Nombre des elements total :40

Nombre des noeuds total : 41

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.002842	-0.00001	+0.01635
2	+0.000786	+0.00000	+0.00973
3	-0.000072	+0.00000	+0.00245
4	-0.000179	+0.00000	-0.00038
5	-0.000085	+0.00000	-0.00064
6	-0.000015	-0.00000	-0.00029
7	+0.000007	-0.00000	-0.00004
8	+0.000006	-0.00000	+0.00003
9	+0.000002	-0.00000	+0.00002
10	+0.000000	+0.00000	+0.00001
11	-0.000000	+0.00000	+0.00000
12	-0.000000	+0.00000	-0.00000
13	-0.000000	-0.00000	-0.00000
14	+0.000000	-0.00000	-0.00000
15	+0.000000	-0.00000	+0.00000
16	+0.000000	-0.00000	+0.00000
17	+0.000000	+0.00000	+0.00000
18	-0.000000	+0.00000	+0.00000
19	-0.000000	+0.00000	-0.00000
20	-0.000000	+0.00000	-0.00000
21	-0.000000	-0.00000	-0.00000
22	+0.000000	-0.00000	-0.00000
23	+0.000000	-0.00000	+0.00000
24	+0.000000	+0.00000	+0.00000
25	-0.000000	+0.00000	+0.00000
26	-0.000000	+0.00000	-0.00000
27	-0.000000	+0.00000	-0.00000
28	-0.000000	-0.00000	-0.00000
29	+0.000000	-0.00000	-0.00000
30	+0.000000	-0.00000	+0.00000
31	+0.000000	-0.00000	+0.00000
32	+0.000000	+0.00000	+0.00000
33	-0.000000	+0.00000	-0.00000
34	-0.000000	+0.00000	-0.00000
35	-0.000000	-0.00000	-0.00000
36	+0.000000	-0.00000	-0.00000
37	+0.000000	-0.00000	+0.00000
38	+0.000000	-0.00000	+0.00000
39	+0.000000	-0.00000	+0.00000
40	-0.000000	+0.00000	+0.00000
41	+0.000000	+0.00000	+0.00000

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité: Prog CAXI_K

fichier de données du probleme : elemtronc50ELE

Nombre des elements total :50

Nombre des noeuds total : 51

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.002855	-0.00001	+0.01640

2	+0.001108	-0.00000	+0.01158
3	+0.000140	+0.00000	+0.00485
4	-0.000169	+0.00000	+0.00084
5	-0.000166	+0.00000	-0.00057
6	-0.000086	+0.00000	-0.00065
7	-0.000025	-0.00000	-0.00036
8	+0.000002	-0.00000	-0.00012
9	+0.000008	-0.00000	+0.00000
10	+0.000006	-0.00000	+0.00003
11	+0.000002	-0.00000	+0.00002
12	+0.000000	+0.00000	+0.00001
13	-0.000000	+0.00000	+0.00000
14	-0.000000	+0.00000	-0.00000
15	-0.000000	+0.00000	-0.00000
16	-0.000000	-0.00000	-0.00000
17	+0.000000	-0.00000	-0.00000
18	+0.000000	-0.00000	-0.00000
19	+0.000000	-0.00000	+0.00000
20	+0.000000	-0.00000	+0.00000
21	+0.000000	+0.00000	+0.00000
22	-0.000000	+0.00000	+0.00000
23	-0.000000	+0.00000	-0.00000
24	-0.000000	+0.00000	-0.00000
25	-0.000000	-0.00000	-0.00000
26	-0.000000	-0.00000	-0.00000
27	+0.000000	-0.00000	-0.00000
28	+0.000000	-0.00000	+0.00000
29	+0.000000	-0.00000	+0.00000
30	+0.000000	+0.00000	+0.00000
31	-0.000000	+0.00000	+0.00000
32	-0.000000	+0.00000	-0.00000
33	-0.000000	+0.00000	-0.00000
34	-0.000000	+0.00000	-0.00000
35	-0.000000	-0.00000	-0.00000
36	+0.000000	-0.00000	-0.00000
37	+0.000000	-0.00000	+0.00000
38	+0.000000	-0.00000	+0.00000
39	+0.000000	+0.00000	+0.00000
40	-0.000000	+0.00000	+0.00000
41	-0.000000	+0.00000	-0.00000
42	-0.000000	+0.00000	-0.00000
43	-0.000000	+0.00000	-0.00000
44	-0.000000	-0.00000	-0.00000
45	+0.000000	-0.00000	-0.00000
46	+0.000000	-0.00000	+0.00000
47	+0.000000	-0.00000	+0.00000
48	+0.000000	-0.00000	+0.00000
49	+0.000000	+0.00000	+0.00000
50	-0.000000	+0.00000	-0.00000
51	+0.000000	+0.00000	+0.00000

Résultats de calcul structure coque de revolution
4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité: Prog CAXI_K
fichier de données du probleme : elemtronc60ELE
Nombre des elements total :60
Nombre des noeuds total : 61
Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.002861	-0.00001	+0.01643
2	+0.001353	-0.00000	+0.01279
3	+0.000373	+0.00000	+0.00688
4	-0.000076	+0.00000	+0.00246
5	-0.000189	+0.00000	+0.00014
6	-0.000155	+0.00000	-0.00064
7	-0.000086	+0.00000	-0.00065
8	-0.000033	-0.00000	-0.00041
9	-0.000003	-0.00000	-0.00018
10	+0.000007	-0.00000	-0.00004
11	+0.000008	-0.00000	+0.00002
12	+0.000005	-0.00000	+0.00003
13	+0.000002	-0.00000	+0.00002
14	+0.000001	+0.00000	+0.00001
15	-0.000000	+0.00000	+0.00000
16	-0.000000	+0.00000	+0.00000
17	-0.000000	+0.00000	-0.00000
18	-0.000000	+0.00000	-0.00000
19	-0.000000	-0.00000	-0.00000
20	-0.000000	-0.00000	-0.00000
21	+0.000000	-0.00000	-0.00000
22	+0.000000	-0.00000	+0.00000
23	+0.000000	-0.00000	+0.00000
24	+0.000000	-0.00000	+0.00000
25	+0.000000	+0.00000	+0.00000
26	-0.000000	+0.00000	+0.00000
27	-0.000000	+0.00000	-0.00000
28	-0.000000	+0.00000	-0.00000
29	-0.000000	+0.00000	-0.00000
30	-0.000000	-0.00000	-0.00000
31	-0.000000	-0.00000	-0.00000
32	+0.000000	-0.00000	-0.00000
33	+0.000000	-0.00000	+0.00000
34	+0.000000	-0.00000	+0.00000
35	+0.000000	-0.00000	+0.00000
36	+0.000000	+0.00000	+0.00000
37	-0.000000	+0.00000	+0.00000
38	-0.000000	+0.00000	-0.00000
39	-0.000000	+0.00000	-0.00000
40	-0.000000	+0.00000	-0.00000
41	-0.000000	-0.00000	-0.00000
42	-0.000000	-0.00000	-0.00000
43	+0.000000	-0.00000	-0.00000
44	+0.000000	-0.00000	+0.00000
45	+0.000000	-0.00000	+0.00000
46	+0.000000	-0.00000	+0.00000
47	+0.000000	+0.00000	+0.00000
48	-0.000000	+0.00000	+0.00000
49	-0.000000	+0.00000	-0.00000
50	-0.000000	+0.00000	-0.00000
51	-0.000000	+0.00000	-0.00000
52	-0.000000	-0.00000	-0.00000
53	+0.000000	-0.00000	-0.00000
54	+0.000000	-0.00000	-0.00000
55	+0.000000	-0.00000	+0.00000
56	+0.000000	-0.00000	+0.00000

57	+0.000000	-0.000000	+0.000000
58	+0.000000	+0.000000	+0.000000
59	-0.000000	+0.000000	+0.000000
60	-0.000000	+0.000000	-0.000000
61	+0.000000	+0.000000	+0.000000

Résultats de calcul structure coque de revolution
 4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité: Prog CAXI_K
 fichier de données du probleme : elemtronc75ELE

Nombre des elements total :75

Nombre des noeuds total : 76

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.002866	-0.00001	+0.01646
2	+0.001623	-0.00000	+0.01393
3	+0.000694	+0.00000	+0.00920
4	+0.000139	+0.00000	+0.00486
5	-0.000119	+0.00000	+0.00183
6	-0.000190	+0.00000	+0.00014
7	-0.000168	+0.00000	-0.00057
8	-0.000114	+0.00000	-0.00070
9	-0.000062	+0.00000	-0.00057
10	-0.000025	-0.00000	-0.00036
11	-0.000003	-0.00000	-0.00018
12	+0.000006	-0.00000	-0.00006
13	+0.000008	-0.00000	+0.00000
14	+0.000007	-0.00000	+0.00003
15	+0.000005	-0.00000	+0.00003
16	+0.000002	-0.00000	+0.00002
17	+0.000001	+0.00000	+0.00001
18	+0.000000	+0.00000	+0.00001
19	-0.000000	+0.00000	+0.00000
20	-0.000000	+0.00000	-0.00000
21	-0.000000	+0.00000	-0.00000
22	-0.000000	+0.00000	-0.00000
23	-0.000000	+0.00000	-0.00000
24	-0.000000	-0.00000	-0.00000
25	+0.000000	-0.00000	-0.00000
26	+0.000000	-0.00000	-0.00000
27	+0.000000	-0.00000	+0.00000
28	+0.000000	-0.00000	+0.00000
29	+0.000000	-0.00000	+0.00000
30	+0.000000	-0.00000	+0.00000
31	+0.000000	+0.00000	+0.00000
32	-0.000000	+0.00000	+0.00000
33	-0.000000	+0.00000	+0.00000
34	-0.000000	+0.00000	-0.00000
35	-0.000000	+0.00000	-0.00000
36	-0.000000	+0.00000	-0.00000
37	-0.000000	-0.00000	-0.00000
38	-0.000000	-0.00000	-0.00000
39	+0.000000	-0.00000	-0.00000
40	+0.000000	-0.00000	-0.00000
41	+0.000000	-0.00000	+0.00000
42	+0.000000	-0.00000	+0.00000
43	+0.000000	-0.00000	+0.00000
44	+0.000000	+0.00000	+0.00000
45	+0.000000	+0.00000	+0.00000

46	-0.000000	+0.000000	+0.000000
47	-0.000000	+0.000000	+0.000000
48	-0.000000	+0.000000	-0.000000
49	-0.000000	+0.000000	-0.000000
50	-0.000000	+0.000000	-0.000000
51	-0.000000	-0.000000	-0.000000
52	-0.000000	-0.000000	-0.000000
53	+0.000000	-0.000000	-0.000000
54	+0.000000	-0.000000	+0.000000
55	+0.000000	-0.000000	+0.000000
56	+0.000000	-0.000000	+0.000000
57	+0.000000	-0.000000	+0.000000
58	+0.000000	+0.000000	+0.000000
59	+0.000000	+0.000000	+0.000000
60	-0.000000	+0.000000	+0.000000
61	-0.000000	+0.000000	-0.000000
62	-0.000000	+0.000000	-0.000000
63	-0.000000	+0.000000	-0.000000
64	-0.000000	+0.000000	-0.000000
65	-0.000000	-0.000000	-0.000000
66	+0.000000	-0.000000	-0.000000
67	+0.000000	-0.000000	-0.000000
68	+0.000000	-0.000000	+0.000000
69	+0.000000	-0.000000	+0.000000
70	+0.000000	-0.000000	+0.000000
71	+0.000000	-0.000000	+0.000000
72	+0.000000	-0.000000	+0.000000
73	+0.000000	+0.000000	+0.000000
74	-0.000000	+0.000000	+0.000000
75	-0.000000	+0.000000	-0.000000
76	+0.000000	+0.000000	+0.000000

Résultats de calcul structure coque de revolution
4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité: Prog CAXI_K
fichier de données du probleme : elemtronc100ELE
Nombre des elements total :100
Nombre des noeuds total : 101
Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.002870	-0.00001	+0.01649
2	+0.001913	-0.00001	+0.01494
3	+0.001111	-0.00000	+0.01165
4	+0.000522	+0.00000	+0.00803
5	+0.000138	+0.00000	+0.00487
6	-0.000077	+0.00000	+0.00246
7	-0.000173	+0.00000	+0.00084
8	-0.000191	+0.00000	-0.00012
9	-0.000168	+0.00000	-0.00058
10	-0.000128	+0.00000	-0.00071
11	-0.000087	+0.00000	-0.00066
12	-0.000051	+0.00000	-0.00052
13	-0.000025	-0.00000	-0.00036
14	-0.000007	-0.00000	-0.00022
15	+0.000003	-0.00000	-0.00012
16	+0.000007	-0.00000	-0.00004
17	+0.000008	-0.00000	+0.00000
18	+0.000007	-0.00000	+0.00002
19	+0.000006	-0.00000	+0.00003

20	+0.000004	-0.000000	+0.000003
21	+0.000002	-0.000000	+0.000002
22	+0.000001	+0.000000	+0.000002
23	+0.000000	+0.000000	+0.000001
24	-0.000000	+0.000000	+0.000001
25	-0.000000	+0.000000	+0.000000
26	-0.000000	+0.000000	+0.000000
27	-0.000000	+0.000000	-0.000000
28	-0.000000	+0.000000	-0.000000
29	-0.000000	+0.000000	-0.000000
30	-0.000000	+0.000000	-0.000000
31	-0.000000	-0.000000	-0.000000
32	-0.000000	-0.000000	-0.000000
33	+0.000000	-0.000000	-0.000000
34	+0.000000	-0.000000	-0.000000
35	+0.000000	-0.000000	-0.000000
36	+0.000000	-0.000000	+0.000000
37	+0.000000	-0.000000	+0.000000
38	+0.000000	-0.000000	+0.000000
39	+0.000000	-0.000000	+0.000000
40	+0.000000	+0.000000	+0.000000
41	+0.000000	+0.000000	+0.000000
42	+0.000000	+0.000000	+0.000000
43	-0.000000	+0.000000	+0.000000
44	-0.000000	+0.000000	+0.000000
45	-0.000000	+0.000000	-0.000000
46	-0.000000	+0.000000	-0.000000
47	-0.000000	+0.000000	-0.000000
48	-0.000000	+0.000000	-0.000000
49	-0.000000	-0.000000	-0.000000
50	-0.000000	-0.000000	-0.000000
51	-0.000000	-0.000000	-0.000000
52	+0.000000	-0.000000	-0.000000
53	+0.000000	-0.000000	-0.000000
54	+0.000000	-0.000000	+0.000000
55	+0.000000	-0.000000	+0.000000
56	+0.000000	-0.000000	+0.000000
57	+0.000000	-0.000000	+0.000000
58	+0.000000	+0.000000	+0.000000
59	+0.000000	+0.000000	+0.000000
60	+0.000000	+0.000000	+0.000000
61	-0.000000	+0.000000	+0.000000
62	-0.000000	+0.000000	+0.000000
63	-0.000000	+0.000000	-0.000000
64	-0.000000	+0.000000	-0.000000
65	-0.000000	+0.000000	-0.000000
66	-0.000000	+0.000000	-0.000000
67	-0.000000	+0.000000	-0.000000
68	-0.000000	-0.000000	-0.000000
69	-0.000000	-0.000000	-0.000000
70	+0.000000	-0.000000	-0.000000
71	+0.000000	-0.000000	-0.000000
72	+0.000000	-0.000000	-0.000000
73	+0.000000	-0.000000	+0.000000
74	+0.000000	-0.000000	+0.000000
75	+0.000000	-0.000000	+0.000000
76	+0.000000	-0.000000	+0.000000

77	+0.000000	-0.000000	+0.000000
78	+0.000000	+0.000000	+0.000000
79	+0.000000	+0.000000	+0.000000
80	-0.000000	+0.000000	+0.000000
81	-0.000000	+0.000000	+0.000000
82	-0.000000	+0.000000	-0.000000
83	-0.000000	+0.000000	-0.000000
84	-0.000000	+0.000000	-0.000000
85	-0.000000	+0.000000	-0.000000
86	-0.000000	+0.000000	-0.000000
87	-0.000000	-0.000000	-0.000000
88	-0.000000	-0.000000	-0.000000
89	+0.000000	-0.000000	-0.000000
90	+0.000000	-0.000000	-0.000000
91	+0.000000	-0.000000	+0.000000
92	+0.000000	-0.000000	+0.000000
93	+0.000000	-0.000000	+0.000000
94	+0.000000	-0.000000	+0.000000
95	+0.000000	-0.000000	+0.000000
96	+0.000000	-0.000000	+0.000000
97	+0.000000	+0.000000	+0.000000
98	-0.000000	+0.000000	+0.000000
99	-0.000000	+0.000000	-0.000000
100	-0.000000	+0.000000	-0.000000
101	+0.000000	+0.000000	+0.000000

```
function [t,p,e,g,E,nu,F] = plaqC2M30Mgrad
t = [1 2           % connectivité de l'élément 1
     2 3           % connectivité de l'élément 2
     3 4
     4 5
     5 6
     6 7
     7 8
     8 9
     9 10
    10 11
    11 12
    12 13
    13 14
    14 15
    15 16
    16 17
    17 18
    18 19
    19 20
    20 21
    21 22
    22 23
    23 24
    24 25
    25 26
    26 27
    27 28
    28 29
    29 30
    30 31
    ];
p = [ 5.00 0.0      % coordonnées du noeud 1
     5.10 0.0      % coordonnées du noeud 2
     5.20 0.0      % coordonnées du noeud 3
     5.30 0.0
     5.40 0.0
     5.50 0.0
     6.70 0.0
     6.90 0.0
     7.10 0.0
     7.30 0.0
     7.40 0.0
     7.70 0.0
     8.00 0.0
     8.30 0.0
     8.60 0.0
     8.90 0.0
     9.20 0.0
     9.60 0.0
    10.00 0.0
    10.40 0.0
    10.80 0.0
    11.20 0.0
    11.60 0.0
    12.00 0.0
    12.40 0.0
```


les contraintes :

Noeud	Ns	Nteta	Ms	Mteta
1	+0.000000000	+0.000000000	-0.010375963	-1.125161484
2	+0.000000000	+0.000000000	+0.411107631	-1.273638123
3	+0.000000000	+0.000000000	+0.825526502	-0.637270170
4	+0.000000000	+0.000000000	+1.184655653	-0.163951955
5	+0.000000000	+0.000000000	+1.497324865	+0.214899315
6	+0.000000000	+0.000000000	+0.886228638	+0.265868591

Résultats de calcul structure coque de revolution

fichier de données du problème : plaqC1M10

Nombre des éléments total :10

Nombre des nœuds total : 11

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.000000000	-0.028897168	-0.0050237523
2	-0.000000000	-0.024025663	-0.0047162143
3	-0.000000000	-0.019475069	-0.0043783847
4	-0.000000000	-0.015283668	-0.0039965303
5	+0.000000000	-0.011498271	-0.0035660248
6	+0.000000000	-0.008168097	-0.0030861514
7	+0.000000000	-0.005342097	-0.0025579280
8	+0.000000000	-0.003067774	-0.0019831250
9	+0.000000000	-0.001390691	-0.0013637995
10	+0.000000000	-0.000354311	-0.0007020687
11	+0.000000000	+0.000000000	+0.0000000000

Résultats de calcul structure coque de revolution

fichier de données du probleme : plaqC1M20

Nombre des elements total :20

Nombre des noeuds total : 21

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.000000000	-0.028897119	-0.0050237292
2	-0.000000000	-0.026423019	-0.0048722667
3	-0.000000000	-0.024025631	-0.0047161982
4	-0.000000000	-0.021708143	-0.0045522406
5	-0.000000000	-0.019475047	-0.0043783728
6	-0.000000000	-0.017331629	-0.0041933700
7	-0.000000000	-0.015283653	-0.0039965213
8	-0.000000000	-0.013337146	-0.0037874536
9	+0.000000000	-0.011498262	-0.0035660179
10	+0.000000000	-0.009773190	-0.0033322151
11	+0.000000000	-0.008168091	-0.0030861462
12	+0.000000000	-0.006689060	-0.0028279789
13	+0.000000000	-0.005342094	-0.0025579242
14	+0.000000000	-0.004133078	-0.0022762205
15	+0.000000000	-0.003067773	-0.0019831224
16	+0.000000000	-0.002151811	-0.0016788928
17	+0.000000000	-0.001390691	-0.0013637978
18	+0.000000000	-0.000789780	-0.0010381024
19	+0.000000000	-0.000354312	-0.0007020679
20	+0.000000000	-0.000089392	-0.0003559506
21	+0.000000000	+0.000000000	+0.0000000000

Résultats de calcul structure coque de revolution

fichier de données du probleme : plaqC1M20Mgrad

Nombre des elements total :20

Nombre des noeuds total : 21

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000000	-0.028897118	-0.0050237287
2	-0.0000000000	-0.027650608	-0.0049483002
3	-0.0000000000	-0.026423018	-0.0048722664
4	-0.0000000000	-0.025214574	-0.0047950500
5	-0.0000000000	-0.024025630	-0.0047161981
6	-0.0000000000	-0.021708142	-0.0045522405
7	-0.0000000000	-0.019475046	-0.0043783727
8	-0.0000000000	-0.017331628	-0.0041933699
9	-0.0000000000	-0.015283652	-0.0039965213
10	-0.0000000000	-0.013337145	-0.0037874537
11	+0.0000000000	-0.011498261	-0.0035660180
12	+0.0000000000	-0.009773189	-0.0033322152
13	+0.0000000000	-0.008168091	-0.0030861463
14	+0.0000000000	-0.006689059	-0.0028279790
15	+0.0000000000	-0.005342093	-0.0025579243
16	+0.0000000000	-0.004133077	-0.0022762206
17	+0.0000000000	-0.003067772	-0.0019831225
18	+0.0000000000	-0.002151809	-0.0016788930
19	+0.0000000000	-0.001390690	-0.0013637981
20	+0.0000000000	-0.000354311	-0.0007020680
21	+0.0000000000	+0.000000000	+0.0000000000

Résultats de calcul structure coque de revolution
 fichier de données du probleme : plaqC1M30

Nombre des elements total :30

Nombre des noeuds total : 31

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000000	-0.028897116	-0.0050237279
2	-0.0000000000	-0.027255712	-0.0049240650
3	-0.0000000000	-0.025647388	-0.0048230142
4	-0.0000000000	-0.024072807	-0.0047193875
5	-0.0000000000	-0.022486864	-0.0046090161
6	-0.0000000000	-0.020984128	-0.0044977519
7	-0.0000000000	-0.019518847	-0.0043819555
8	-0.0000000000	-0.018049978	-0.0042575722
9	-0.0000000000	-0.016665607	-0.0041316901
10	-0.0000000000	-0.015323638	-0.0040005767
11	-0.0000000000	-0.013987192	-0.0038599201
12	-0.0000000000	-0.012736697	-0.0037179419
13	+0.0000000000	-0.011533944	-0.0035705677
14	+0.0000000000	-0.010346560	-0.0034130907
15	+0.0000000000	-0.009246211	-0.0032548004
16	+0.0000000000	-0.008198978	-0.0030911865
17	+0.0000000000	-0.007177411	-0.0029171006
18	+0.0000000000	-0.006243378	-0.0027428435
19	+0.0000000000	-0.005367701	-0.0025634401
20	+0.0000000000	-0.004528305	-0.0023732910
21	+0.0000000000	-0.003776272	-0.0021836561
22	+0.0000000000	-0.003087634	-0.0019890941
23	+0.0000000000	-0.002446137	-0.0017835632
24	+0.0000000000	-0.001891146	-0.0015792318
25	+0.0000000000	-0.001404361	-0.0013702044
26	+0.0000000000	-0.000975786	-0.0011500118
27	+0.0000000000	-0.000632183	-0.0009316838
28	+0.0000000000	-0.000361367	-0.0007088882
29	+0.0000000000	-0.000160018	-0.0004747461

30	+0.0000000000	-0.000041454	-0.0002431045
31	+0.0000000000	+0.000000000	+0.0000000000

Résultats de calcul structure coque de revolution

fichier de données du probleme : plaqC1M30Mgrad

Nombre des elements total :30

Nombre des noeuds total : 31

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000000	-0.028897157	-0.0050237468
2	-0.0000000000	-0.028396289	-0.0049936049
3	-0.0000000000	-0.027898437	-0.0049634313
4	-0.0000000000	-0.027403605	-0.0049331803
5	-0.0000000000	-0.026911805	-0.0049028105
6	-0.0000000000	-0.026423048	-0.0048722841
7	-0.0000000000	-0.020804519	-0.0044839721
8	-0.0000000000	-0.019914692	-0.0044140131
9	-0.0000000000	-0.019039031	-0.0043422979
10	-0.0000000000	-0.018177893	-0.0042687677
11	-0.0000000000	-0.017752886	-0.0042313069
12	-0.0000000000	-0.016500670	-0.0041160844
13	-0.0000000000	-0.015283669	-0.0039965263
14	-0.0000000000	-0.014103194	-0.0038725652
15	-0.0000000000	-0.012960574	-0.0037441621
16	-0.0000000000	-0.011857143	-0.0036113003
17	+0.0000000000	-0.010794240	-0.0034739809
18	+0.0000000000	-0.009442385	-0.0032839815
19	+0.0000000000	-0.008168099	-0.0030861494
20	+0.0000000000	-0.006974498	-0.0028805734
21	+0.0000000000	-0.005864659	-0.0026673603
22	+0.0000000000	-0.004841612	-0.0024466288
23	+0.0000000000	-0.003908341	-0.0022185060
24	+0.0000000000	-0.003067775	-0.0019831241
25	+0.0000000000	-0.002322792	-0.0017406179
26	+0.0000000000	-0.001676213	-0.0014911239
27	+0.0000000000	-0.001130806	-0.0012347779
28	+0.0000000000	-0.000689286	-0.0009717151
29	+0.0000000000	-0.000354312	-0.0007020685
30	+0.0000000000	-0.000089392	-0.0003559509
31	+0.0000000000	+0.000000000	+0.0000000000

Résultats de calcul structure coque de revolution

fichier de données du probleme : plaqC2

Nombre des elements total :5

Nombre des noeuds total : 6

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000000	+0.005024099	+0.0013652569
2	-0.0000000000	+0.002849439	+0.0008581615
3	+0.0000000000	+0.001465492	+0.0005461027
4	+0.0000000000	+0.000607035	+0.0003226971
5	+0.0000000000	+0.000143277	+0.0001470277
6	+0.0000000000	+0.000000000	+0.0000000000

Résultats de calcul structure coque de revolution

fichier de données du probleme : plaqC2M10

Nombre des elements total :10

Nombre des noeuds total : 11

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
-------	----	----	------

1	-0.0000000000	+0.005023752	+0.0013652569
2	-0.0000000000	+0.003811311	+0.0010751398
3	-0.0000000000	+0.002849349	+0.0008581615
4	-0.0000000000	+0.002079868	+0.0006868949
5	+0.0000000000	+0.001465461	+0.0005461027
6	+0.0000000000	+0.000980585	+0.0004266428
7	+0.0000000000	+0.000607023	+0.0003226971
8	+0.0000000000	+0.000331324	+0.0002303871
9	+0.0000000000	+0.000143273	+0.0001470277
10	+0.0000000000	+0.000034930	+0.0000707008
11	+0.0000000000	+0.000000000	+0.0000000000

Résultats de calcul structure coque de revolution
 fichier de données du probleme : plaqC2M20

Nombre des elements total :20

Nombre des noeuds total : 21

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000000	+0.005023729	+0.0013652569
2	-0.0000000000	+0.004381383	+0.0012085626
3	-0.0000000000	+0.003811300	+0.0010751398
4	-0.0000000000	+0.003303267	+0.0009596180
5	-0.0000000000	+0.002849343	+0.0008581615
6	-0.0000000000	+0.002443234	+0.0007679570
7	-0.0000000000	+0.002079865	+0.0006868949
8	-0.0000000000	+0.001755086	+0.0006133617
9	+0.0000000000	+0.001465459	+0.0005461027
10	+0.0000000000	+0.001208104	+0.0004841273
11	+0.0000000000	+0.000980584	+0.0004266428
12	+0.0000000000	+0.000780820	+0.0003730077
13	+0.0000000000	+0.000607023	+0.0003226971
14	+0.0000000000	+0.000457641	+0.0002752773
15	+0.0000000000	+0.000331324	+0.0002303871
16	+0.0000000000	+0.000226884	+0.0001877228
17	+0.0000000000	+0.000143273	+0.0001470277
18	+0.0000000000	+0.000079564	+0.0001080828
19	+0.0000000000	+0.000034930	+0.0000707008
20	+0.0000000000	+0.000008630	+0.0000347199
21	+0.0000000000	+0.000000000	+0.0000000000

Résultats de calcul structure coque de revolution
 fichier de données du probleme : plaqC2M20Mgrad

Nombre des elements total :20

Nombre des noeuds total : 21

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000000	+0.005023729	+0.0013652569
2	-0.0000000000	+0.004692772	+0.0012835852
3	-0.0000000000	+0.004381382	+0.0012085626
4	-0.0000000000	+0.004088009	+0.0011393217
5	-0.0000000000	+0.003811300	+0.0010751398
6	-0.0000000000	+0.003303267	+0.0009596180
7	-0.0000000000	+0.002849343	+0.0008581615
8	-0.0000000000	+0.002443234	+0.0007679570
9	-0.0000000000	+0.002079865	+0.0006868949
10	-0.0000000000	+0.001755086	+0.0006133617
11	+0.0000000000	+0.001465459	+0.0005461027
12	+0.0000000000	+0.001208104	+0.0004841273
13	+0.0000000000	+0.000980584	+0.0004266428

14	+0.0000000000	+0.000780820	+0.0003730077
15	+0.0000000000	+0.000607023	+0.0003226971
16	+0.0000000000	+0.000457642	+0.0002752773
17	+0.0000000000	+0.000331324	+0.0002303871
18	+0.0000000000	+0.000226884	+0.0001877228
19	+0.0000000000	+0.000143273	+0.0001470277
20	+0.0000000000	+0.000034930	+0.0000707008
21	+0.0000000000	+0.000000000	+0.0000000000

Résultats de calcul structure coque de revolution
 fichier de données du probleme : plaqC2M30

Nombre des elements total :30

Nombre des noeuds total : 31

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000000	+0.005023728	+0.0013652569
2	-0.0000000000	+0.004591076	+0.0012588994
3	-0.0000000000	+0.004191636	+0.0011636306
4	-0.0000000000	+0.003822063	+0.0010776179
5	-0.0000000000	+0.003469568	+0.0009971503
6	-0.0000000000	+0.003152454	+0.0009257733
7	-0.0000000000	+0.002857934	+0.0008600723
8	-0.0000000000	+0.002576283	+0.0007975070
9	-0.0000000000	+0.002322520	+0.0007411081
10	-0.0000000000	+0.002086741	+0.0006884376
11	-0.0000000000	+0.001861407	+0.0006376024
12	-0.0000000000	+0.001658728	+0.0005912082
13	+0.0000000000	+0.001470926	+0.0005473932
14	+0.0000000000	+0.001292143	+0.0005046589
15	+0.0000000000	+0.001132157	+0.0004652770
16	+0.0000000000	+0.000984856	+0.0004277528
17	+0.0000000000	+0.000845742	+0.0003908464
18	+0.0000000000	+0.000722458	+0.0003565690
19	+0.0000000000	+0.000610254	+0.0003236736
20	+0.0000000000	+0.000505779	+0.0002910995
21	+0.0000000000	+0.000414770	+0.0002606528
22	+0.0000000000	+0.000333632	+0.0002312622
23	+0.0000000000	+0.000260006	+0.0002019957
24	+0.0000000000	+0.000197909	+0.0001744973
25	+0.0000000000	+0.000144747	+0.0001478237
26	+0.0000000000	+0.000099046	+0.0001211399
27	+0.0000000000	+0.000063243	+0.0000959588
28	+0.0000000000	+0.000035641	+0.0000714342
29	+0.0000000000	+0.000015558	+0.0000468053
30	+0.0000000000	+0.000003976	+0.0000234785
31	+0.0000000000	+0.000000000	+0.0000000000

Résultats de calcul structure coque de revolution
 fichier de données du probleme : plaqC2M30Mgrad

Nombre des elements total :30

Nombre des noeuds total : 31

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000000	+0.005023747	+0.0013652569
2	-0.0000000000	+0.004888908	+0.0013317278
3	-0.0000000000	+0.004757363	+0.0012993570
4	-0.0000000000	+0.004629000	+0.0012680789
5	-0.0000000000	+0.004503712	+0.0012378329
6	-0.0000000000	+0.004381401	+0.0012085626

7	-0.0000000000	+0.003115588	+0.0009175239
8	-0.0000000000	+0.002936121	+0.0008774743
9	-0.0000000000	+0.002764473	+0.0008392965
10	-0.0000000000	+0.002600288	+0.0008028365
11	-0.0000000000	+0.002520889	+0.0007852072
12	-0.0000000000	+0.002293008	+0.0007345348
13	-0.0000000000	+0.002079865	+0.0006868949
14	-0.0000000000	+0.001880601	+0.0006419586
15	-0.0000000000	+0.001694448	+0.0005994430
16	-0.0000000000	+0.001520717	+0.0005591034
17	+0.0000000000	+0.001358789	+0.0005207268
18	+0.0000000000	+0.001160284	+0.0004722935
19	+0.0000000000	+0.000980584	+0.0004266428
20	+0.0000000000	+0.000818642	+0.0003834534
21	+0.0000000000	+0.000673530	+0.0003424519
22	+0.0000000000	+0.000544420	+0.0003034040
23	+0.0000000000	+0.000430573	+0.0002661074
24	+0.0000000000	+0.000331324	+0.0002303871
25	+0.0000000000	+0.000246074	+0.0001960905
26	+0.0000000000	+0.000174280	+0.0001630842
27	+0.0000000000	+0.000115450	+0.0001312508
28	+0.0000000000	+0.000069136	+0.0001004869
29	+0.0000000000	+0.000034930	+0.0000707008
30	+0.0000000000	+0.000008630	+0.0000347199
31	+0.0000000000	+0.000000000	+0.0000000000

Résultats de calcul structure coque de revolution
 fichier de données du probleme : plaqC3

Nombre des elements total :5

Nombre des noeuds total : 6

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000000	+0.002644558	-0.0023910837
3	+0.0000000000	+0.008846049	-0.0036807742
4	+0.0000000000	+0.016958528	-0.0043499888
5	+0.0000000000	+0.025971209	-0.0046044631
6	+0.0000000000	+0.035172548	-0.0045520401

Résultats de calcul structure coque de revolution
 fichier de données du probleme : plaqC3M10

Nombre des elements total :10

Nombre des noeuds total : 11

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000000	+0.000731649	-0.0013859246
3	+0.0000000000	+0.002645940	-0.0023911403
4	+0.0000000000	+0.005426714	-0.0031333204
5	+0.0000000000	+0.008847934	-0.0036808423
6	+0.0000000000	+0.012738010	-0.0040767912
7	+0.0000000000	+0.016960705	-0.0043500591
8	+0.0000000000	+0.021404070	-0.0045209993
9	+0.0000000000	+0.025973602	-0.0046045337
10	+0.0000000000	+0.030587795	-0.0046119689
11	+0.0000000000	+0.035175125	-0.0045521109

Résultats de calcul structure coque de revolution
 fichier de données du probleme : plaqC3M20

Nombre des elements total :20

Nombre des noeuds total : 21

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000000	+0.000193163	-0.0007510147
3	+0.0000000000	+0.000731711	-0.0013859273
4	+0.0000000000	+0.001563512	-0.0019271847
5	+0.0000000000	+0.002646033	-0.0023911442
6	+0.0000000000	+0.003943829	-0.0027900584
7	+0.0000000000	+0.005426827	-0.0031333248
8	+0.0000000000	+0.007069113	-0.0034283000
9	+0.0000000000	+0.008848061	-0.0036808469
10	+0.0000000000	+0.010743684	-0.0038957128
11	+0.0000000000	+0.012738147	-0.0040767959
12	+0.0000000000	+0.014815392	-0.0042273376
13	+0.0000000000	+0.016960850	-0.0043500639
14	+0.0000000000	+0.019161208	-0.0044472907
15	+0.0000000000	+0.021404223	-0.0045210040
16	+0.0000000000	+0.023678580	-0.0045729211
17	+0.0000000000	+0.025973762	-0.0046045384
18	+0.0000000000	+0.028279955	-0.0046171693
19	+0.0000000000	+0.030587961	-0.0046119736
20	+0.0000000000	+0.032889130	-0.0045899821
21	+0.0000000000	+0.035175297	-0.0045521156

Résultats de calcul structure coque de revolution

fichier de données du probleme : plaqC3M20Mgrad

Nombre des elements total :20

Nombre des noeuds total : 21

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000000	+0.000731649	-0.0013859238
3	+0.0000000000	+0.002645938	-0.0023911387
4	+0.0000000000	+0.003943732	-0.0027900532
5	+0.0000000000	+0.005426727	-0.0031333199
6	+0.0000000000	+0.007069010	-0.0034282952
7	+0.0000000000	+0.008847956	-0.0036808423
8	+0.0000000000	+0.010743577	-0.0038957084
9	+0.0000000000	+0.012738037	-0.0040767916
10	+0.0000000000	+0.014815281	-0.0042273334
11	+0.0000000000	+0.016960737	-0.0043500598
12	+0.0000000000	+0.019161092	-0.0044472868
13	+0.0000000000	+0.021404106	-0.0045210002
14	+0.0000000000	+0.023678461	-0.0045729173
15	+0.0000000000	+0.025973641	-0.0046045347
16	+0.0000000000	+0.028279832	-0.0046171656
17	+0.0000000000	+0.030587836	-0.0046119700
18	+0.0000000000	+0.031739795	-0.0046030138
19	+0.0000000000	+0.032889003	-0.0045899785
20	+0.0000000000	+0.034034454	-0.0045729759
21	+0.0000000000	+0.035175169	-0.0045521121

Résultats de calcul structure coque de revolution

fichier de données du probleme : plaqC3M30

Nombre des elements total :30

Nombre des noeuds total : 31

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
-------	----	----	------

1	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000000	+0.000085778	-0.0005100543
3	+0.0000000000	+0.000330646	-0.0009655935
4	+0.0000000000	+0.000717914	-0.0013742102
5	+0.0000000000	+0.001250609	-0.0017525493
6	+0.0000000000	+0.001884466	-0.0020834068
7	+0.0000000000	+0.002622170	-0.0023825381
8	+0.0000000000	+0.003480394	-0.0026610935
9	+0.0000000000	+0.004399559	-0.0029055712
10	+0.0000000000	+0.005395532	-0.0031269547
11	+0.0000000000	+0.006494335	-0.0033330366
12	+0.0000000000	+0.007624519	-0.0035134846
13	+0.0000000000	+0.008811283	-0.0036761797
14	+0.0000000000	+0.010087236	-0.0038266292
15	+0.0000000000	+0.011371967	-0.0039571683
16	+0.0000000000	+0.012697403	-0.0040734837
17	+0.0000000000	+0.014100781	-0.0041794017
18	+0.0000000000	+0.015495186	-0.0042695183
19	+0.0000000000	+0.016917369	-0.0043478666
20	+0.0000000000	+0.018407715	-0.0044169655
21	+0.0000000000	+0.019874899	-0.0044733504
22	+0.0000000000	+0.021359028	-0.0045197489
23	+0.0000000000	+0.022902459	-0.0045576180
24	+0.0000000000	+0.024411264	-0.0045851813
25	+0.0000000000	+0.025927728	-0.0046040965
26	+0.0000000000	+0.027495206	-0.0046149304
27	+0.0000000000	+0.029018753	-0.0046173947
28	+0.0000000000	+0.030541849	-0.0046122456
29	+0.0000000000	+0.032108025	-0.0045992847
30	+0.0000000000	+0.033622723	-0.0045795509
31	+0.0000000000	+0.035175307	-0.0045521159

Résultats de calcul structure coque de revolution

fichier de données du probleme : plaqC4M30Mgrad

Nombre des elements total :30

Nombre des noeuds total : 31

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000000	+0.000008090	-0.0001608476
3	+0.0000000000	+0.000031984	-0.0003161140
4	+0.0000000000	+0.000071136	-0.0004660675
5	+0.0000000000	+0.000125028	-0.0006109576
6	+0.0000000000	+0.000193166	-0.0007510163
7	+0.0000000000	+0.001968459	-0.0021212761
8	+0.0000000000	+0.002411161	-0.0023038947
9	+0.0000000000	+0.002889302	-0.0024757892
10	+0.0000000000	+0.003400807	-0.0026376382
11	+0.0000000000	+0.003668457	-0.0027149890
12	+0.0000000000	+0.004516236	-0.0029335866
13	+0.0000000000	+0.005426724	-0.0031333197
14	+0.0000000000	+0.006394493	-0.0033156962
15	+0.0000000000	+0.007414538	-0.0034820327
16	+0.0000000000	+0.008482224	-0.0036334855
17	+0.0000000000	+0.009593243	-0.0037710754
18	+0.0000000000	+0.011135096	-0.0039345154
19	+0.0000000000	+0.012738035	-0.0040767915
20	+0.0000000000	+0.014393925	-0.0041995309

21	+0.0000000000	+0.016095244	-0.0043041506
22	+0.0000000000	+0.017834996	-0.0043918926
23	+0.0000000000	+0.019606654	-0.0044638520
24	+0.0000000000	+0.021404103	-0.0045210001
25	+0.0000000000	+0.023221595	-0.0045642028
26	+0.0000000000	+0.025053710	-0.0045942359
27	+0.0000000000	+0.026895321	-0.0046117973
28	+0.0000000000	+0.028741569	-0.0046175178
29	+0.0000000000	+0.030587833	-0.0046119699
30	+0.0000000000	+0.032889000	-0.0045899784
31	+0.0000000000	+0.035175166	-0.0045521120

Résultats de calcul structure coque de revolution
 fichier de données du probleme : plaqC4

Nombre des elements total :5

Nombre des noeuds total : 6

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000000	+0.000225131	-0.0002151695
3	+0.0000000000	+0.000834944	-0.0003904928
4	+0.0000000000	+0.001775254	-0.0005477042
5	+0.0000000000	+0.003019340	-0.0006951630
6	+0.0000000000	+0.004552040	-0.0008367703

Résultats de calcul structure coque de revolution
 fichier de données du probleme : plaqC4M10

Nombre des elements total :10

Nombre des noeuds total : 11

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000000	+0.000059113	-0.0001150559
3	+0.0000000000	+0.000225183	-0.0002151695
4	+0.0000000000	+0.000486363	-0.0003059442
5	+0.0000000000	+0.000835009	-0.0003904928
6	+0.0000000000	+0.001265902	-0.0004706833
7	+0.0000000000	+0.001775323	-0.0005477042
8	+0.0000000000	+0.002360521	-0.0006223479
9	+0.0000000000	+0.003019410	-0.0006951630
10	+0.0000000000	+0.003750369	-0.0007665414
11	+0.0000000000	+0.004552111	-0.0008367703

Résultats de calcul structure coque de revolution
 fichier de données du probleme : plaqC4M20

Nombre des elements total :20

Nombre des noeuds total : 21

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000000	+0.000015203	-0.0000599051
3	+0.0000000000	+0.000059115	-0.0001150559
4	+0.0000000000	+0.000129651	-0.0001665495
5	+0.0000000000	+0.000225187	-0.0002151695
6	+0.0000000000	+0.000344438	-0.0002614907
7	+0.0000000000	+0.000486367	-0.0003059442
8	+0.0000000000	+0.000650126	-0.0003488594
9	+0.0000000000	+0.000835013	-0.0003904928
10	+0.0000000000	+0.001040439	-0.0004310468
11	+0.0000000000	+0.001265907	-0.0004706833

12	+0.0000000000	+0.001510991	-0.0005095334
13	+0.0000000000	+0.001775327	-0.0005477042
14	+0.0000000000	+0.002058597	-0.0005852845
15	+0.0000000000	+0.002360526	-0.0006223479
16	+0.0000000000	+0.002680869	-0.0006589566
17	+0.0000000000	+0.003019415	-0.0006951630
18	+0.0000000000	+0.003375973	-0.0007310119
19	+0.0000000000	+0.003750374	-0.0007665414
20	+0.0000000000	+0.004142467	-0.0008017847
21	+0.0000000000	+0.004552116	-0.0008367703

Résultats de calcul structure coque de revolution
 fichier de données du probleme : plaqC4M20Mgrad

Nombre des elements total :20

Nombre des noeuds total : 21

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000000	+0.000059113	-0.0001150559
3	+0.0000000000	+0.000225183	-0.0002151695
4	+0.0000000000	+0.000344434	-0.0002614907
5	+0.0000000000	+0.000486363	-0.0003059442
6	+0.0000000000	+0.000650122	-0.0003488594
7	+0.0000000000	+0.000835009	-0.0003904928
8	+0.0000000000	+0.001040436	-0.0004310468
9	+0.0000000000	+0.001265903	-0.0004706833
10	+0.0000000000	+0.001510988	-0.0005095334
11	+0.0000000000	+0.001775324	-0.0005477042
12	+0.0000000000	+0.002058594	-0.0005852845
13	+0.0000000000	+0.002360522	-0.0006223479
14	+0.0000000000	+0.002680866	-0.0006589566
15	+0.0000000000	+0.003019412	-0.0006951630
16	+0.0000000000	+0.003375969	-0.0007310119
17	+0.0000000000	+0.003750370	-0.0007665414
18	+0.0000000000	+0.003944214	-0.0007841969
19	+0.0000000000	+0.004142463	-0.0008017847
20	+0.0000000000	+0.004345101	-0.0008193081
21	+0.0000000000	+0.004552112	-0.0008367703

Résultats de calcul structure coque de revolution
 fichier de données du probleme : plaqC4M30

Nombre des elements total :30

Nombre des noeuds total : 31

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000000	+0.000006691	-0.0000401379
3	+0.0000000000	+0.000026242	-0.0000780104
4	+0.0000000000	+0.000057970	-0.0001139918
5	+0.0000000000	+0.000102790	-0.0001493982
6	+0.0000000000	+0.000157570	-0.0001823895
7	+0.0000000000	+0.000223040	-0.0002142213
8	+0.0000000000	+0.000301301	-0.0002459702
9	+0.0000000000	+0.000387432	-0.0002759015
10	+0.0000000000	+0.000483312	-0.0003050711
11	+0.0000000000	+0.000592045	-0.0003344236
12	+0.0000000000	+0.000707021	-0.0003623109
13	+0.0000000000	+0.000831112	-0.0003896713
14	+0.0000000000	+0.000968322	-0.0004173688

15	+0.0000000000	+0.001110430	-0.0004438235
16	+0.0000000000	+0.001261204	-0.0004698987
17	+0.0000000000	+0.001425486	-0.0004964055
18	+0.0000000000	+0.001593501	-0.0005218174
19	+0.0000000000	+0.001769854	-0.0005469469
20	+0.0000000000	+0.001960179	-0.0005725686
21	+0.0000000000	+0.002153197	-0.0005971978
22	+0.0000000000	+0.002354306	-0.0006216113
23	+0.0000000000	+0.002569900	-0.0006465573
24	+0.0000000000	+0.002787234	-0.0006705842
25	+0.0000000000	+0.003012467	-0.0006944426
26	+0.0000000000	+0.003252733	-0.0007188609
27	+0.0000000000	+0.003493848	-0.0007424144
28	+0.0000000000	+0.003742712	-0.0007658337
29	+0.0000000000	+0.004007179	-0.0007898322
30	+0.0000000000	+0.004271651	-0.0008130069
31	+0.0000000000	+0.004552116	-0.0008367703

Résultats de calcul structure coque de revolution

fichier de données du probleme : plaqC4M30Mgrad

Nombre des elements total :30

Nombre des noeuds total : 31

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000000	+0.000000623	-0.0000124285
3	+0.0000000000	+0.000002478	-0.0000246204
4	+0.0000000000	+0.000005540	-0.0000365890
5	+0.0000000000	+0.000009789	-0.0000483467
6	+0.0000000000	+0.000015203	-0.0000599051
7	+0.0000000000	+0.0000164940	-0.00001863063
8	+0.0000000000	+0.0000204142	-0.00002056454
9	+0.0000000000	+0.0000247172	-0.00002246021
10	+0.0000000000	+0.0000293959	-0.00002432079
11	+0.0000000000	+0.0000318740	-0.00002523880
12	+0.0000000000	+0.0000398536	-0.00002794759
13	+0.0000000000	+0.0000486363	-0.00003059442
14	+0.0000000000	+0.0000582047	-0.00003318601
15	+0.0000000000	+0.0000685430	-0.00003572815
16	+0.0000000000	+0.0000796371	-0.00003822583
17	+0.0000000000	+0.0000914745	-0.00004068341
18	+0.0000000000	+0.001083940	-0.00004390429
19	+0.0000000000	+0.001265903	-0.00004706833
20	+0.0000000000	+0.001460420	-0.00005018208
21	+0.0000000000	+0.001667300	-0.00005325113
22	+0.0000000000	+0.001886376	-0.00005628028
23	+0.0000000000	+0.002117495	-0.00005927364
24	+0.0000000000	+0.002360522	-0.00006223479
25	+0.0000000000	+0.002615334	-0.00006516686
26	+0.0000000000	+0.002881822	-0.00006807257
27	+0.0000000000	+0.003159883	-0.00007095432
28	+0.0000000000	+0.003449427	-0.00007381422
29	+0.0000000000	+0.003750370	-0.00007665414
30	+0.0000000000	+0.004142463	-0.00008017847
31	+0.0000000000	+0.004552112	-0.00008367703

les contraintes :

Noeud	Ns	Nteta	Ms	Mteta
1	+0.000000000	+0.000000000	-0.154005962	-0.046201789
2	+0.000000000	+0.000000000	-0.303826774	-0.096590578
3	+0.000000000	+0.000000000	-0.299881532	-0.100538588
4	+0.000000000	+0.000000000	-0.296157416	-0.104265217
5	+0.000000000	+0.000000000	-0.292638206	-0.107786714
6	+0.000000000	+0.000000000	-0.288198157	-0.110784568
7	+0.000000000	+0.000000000	-0.259332293	-0.139901785
8	+0.000000000	+0.000000000	-0.256806604	-0.143603537
9	+0.000000000	+0.000000000	-0.253665714	-0.146749208
10	+0.000000000	+0.000000000	-0.250788938	-0.149642742
11	+0.000000000	+0.000000000	-0.249418134	-0.150996601
12	+0.000000000	+0.000000000	-0.245638482	-0.154751642
13	+0.000000000	+0.000000000	-0.242299872	-0.158099371
14	+0.000000000	+0.000000000	-0.239316241	-0.161090559
15	+0.000000000	+0.000000000	-0.236639006	-0.163774100
16	+0.000000000	+0.000000000	-0.234227617	-0.166190783
17	+0.000000000	+0.000000000	-0.232039374	-0.168372263
18	+0.000000000	+0.000000000	-0.229437401	-0.170969680
19	+0.000000000	+0.000000000	-0.227149956	-0.173264260
20	+0.000000000	+0.000000000	-0.225120960	-0.175299093
21	+0.000000000	+0.000000000	-0.223312909	-0.177111959
22	+0.000000000	+0.000000000	-0.221694859	-0.178734008
23	+0.000000000	+0.000000000	-0.220241098	-0.180191112
24	+0.000000000	+0.000000000	-0.218930121	-0.181504902
25	+0.000000000	+0.000000000	-0.217743829	-0.182693575
26	+0.000000000	+0.000000000	-0.216666900	-0.183772530
27	+0.000000000	+0.000000000	-0.215686296	-0.184754866
28	+0.000000000	+0.000000000	-0.214790865	-0.185651784
29	+0.000000000	+0.000000000	-0.213968924	-0.186472280
30	+0.000000000	+0.000000000	-0.213036090	-0.187404099
31	+0.000000000	+0.000000000	-0.106098294	-0.094122391

```

function [t,p,e,g,E,nu,F] = SPHER28ELECHE
t = [1 2           % connectivité de l'élément 1
     2 3
     3 4
     4 5
     5 6
     6 7
     7 8
     8 9
     9 10
    10 11
    11 12
    12 13
    13 14
    14 15
    15 16
    16 17
    17 18
    18 19
    19 20
    20 21
    21 22
    22 23
    23 24
    24 25
    25 26
    26 27
    27 28
    28 29
    ];
phi = (pi/180)*[0 10 20 30 40 42 44 46 47 48 49 50 51 52 53 53.5 54 54.5 55
55.5 56 56.5 57 57.5 58 58.5 59 59.5 60];
R = 100;
p = [ (R^2-(R*sin(phi(1,1)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,1)))^2)^0.5 %
coordonnées du noeud 1
      (R^2-(R*sin(phi(1,2)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,2)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,3)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,3)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,4)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,4)))^2)^0.5 %
coordonnées du noeud 2
      (R^2-(R*sin(phi(1,5)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,5)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,6)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,6)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,7)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,7)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,8)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,8)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,9)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,9)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,10)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,10)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,11)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,11)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,12)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,12)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,13)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,13)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,14)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,14)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,15)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,15)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,16)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,16)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,17)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,17)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,18)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,18)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,19)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,19)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,20)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,20)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,21)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,21)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,22)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,22)))^2)^0.5

```


Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.8 Hémisphère: Prog CAXI_K

fichier de données du probleme : SPHER10ELECHE

Nombre des elements total :10

Nombre des noeuds total : 11

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	-0.0000000000	-0.0000000000	-0.0000000000
3	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
4	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
5	-0.0000000002	-0.0000000000	+0.0000000001
6	-0.0000000027	-0.0000000002	+0.0000000005
7	+0.0000000114	+0.0000000003	+0.0000000013
8	-0.0000001404	-0.0000000078	-0.0000000294
9	-0.0000023611	-0.000004145	-0.0000003705
10	+0.0000009920	+0.000001658	-0.0000002083
11	-0.0000221434	-0.000008945	

+0.0000056835

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.8 Hémisphère: Prog CAXI_K

fichier de données du probleme : SPHER20ELECHE

Nombre des elements total :20

Nombre des noeuds total : 21

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000003	+0.0000000000	+0.0000000000
3	-0.0000000033	-0.0000000001	-0.0000000007
4	+0.0000000129	+0.0000000007	+0.0000000064
5	+0.0000001554	+0.0000000097	-0.0000000145
6	-0.0000008379	-0.000000823	-0.0000003018
7	-0.0000012484	-0.000001242	-0.0000003702
8	-0.0000017316	-0.000001750	-0.0000004305
9	-0.0000022693	-0.000002329	-0.0000004700
10	-0.0000028265	-0.000002942	-0.0000004711
11	-0.0000033479	-0.000003524	-0.0000004109
12	-0.0000037531	-0.000003970	-0.0000002607
13	-0.0000039328	-0.000004130	+0.0000000139
14	-0.0000037467	-0.000003796	+0.0000004512
15	-0.0000030231	-0.000002698	+0.0000010917
16	-0.0000015632	-0.000000502	+0.0000019733
17	+0.0000008502	+0.000003187	+0.0000031249
18	+0.0000044375	+0.000008803	+0.0000045574
19	+0.0000093978	+0.000016784	+0.0000062508
20	+0.0000124400	+0.000021788	+0.0000071768
21	+0.0000158729	+0.000027519	+0.0000081380

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.8 Hémisphère: Prog CAXI_K

fichier de données du probleme : SPHER24ELECHE

Nombre des elements total :24

Nombre des noeuds total : 25

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000003	+0.0000000000	+0.0000000000
3	-0.0000000034	-0.000000001	-0.0000000007
4	+0.0000000135	+0.000000007	+0.0000000066
5	+0.0000001573	+0.000000098	-0.0000000154
6	+0.0000000490	+0.000000000	-0.0000000740
7	-0.0000002557	-0.000000284	-0.0000001711
8	-0.0000008396	-0.000000856	-0.0000003014
9	-0.0000012496	-0.000001275	-0.0000003700
10	-0.0000017326	-0.000001783	-0.0000004304
11	-0.0000022701	-0.000002362	-0.0000004699
12	-0.0000028274	-0.000002975	-0.0000004711
13	-0.0000033488	-0.000003557	-0.0000004110
14	-0.0000037541	-0.000004003	-0.0000002607
15	-0.0000039339	-0.000004163	+0.0000000139
16	-0.0000037476	-0.000003829	+0.0000004514
17	-0.0000030237	-0.000002730	+0.0000010922
18	-0.0000015633	-0.000000533	+0.0000019740
19	+0.0000008510	+0.000003157	+0.0000031261
20	+0.0000024843	+0.000005698	+0.0000038080
21	+0.0000044377	+0.000008777	+0.0000045593
22	+0.0000067352	+0.000012448	+0.0000053766
23	+0.0000093976	+0.000016763	+0.0000062532
24	+0.0000124408	+0.000021769	+0.0000071792
25	+0.0000158748	+0.000027502	+0.0000081404

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.8 Hémisphère: Prog CAXI_K

fichier de données du probleme : SPHER28ELECHE

Nombre des elements total :28

Nombre des noeuds total : 29

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000003	+0.0000000000	+0.0000000000
3	-0.0000000034	-0.000000001	-0.0000000007
4	+0.0000000135	+0.000000007	+0.0000000066
5	+0.0000001573	+0.000000098	-0.0000000155
6	+0.0000000490	-0.000000000	-0.0000000741
7	-0.0000002559	-0.000000284	-0.0000001712
8	-0.0000008399	-0.000000856	-0.0000003015
9	-0.0000012500	-0.000001276	-0.0000003701
10	-0.0000017332	-0.000001783	-0.0000004305
11	-0.0000022708	-0.000002362	-0.0000004700

12	-0.0000028281	-0.000002976	-0.0000004712
13	-0.0000033497	-0.000003558	-0.0000004110
14	-0.0000037550	-0.000004004	-0.0000002607
15	-0.0000039346	-0.000004164	+0.0000000141
16	-0.0000038974	-0.000004073	+0.0000002101
17	-0.0000037487	-0.000003828	+0.0000004520
18	-0.0000034659	-0.000003393	+0.0000007447
19	-0.0000030250	-0.000002728	+0.0000010932
20	-0.0000024002	-0.000001789	+0.0000015021
21	-0.0000015647	-0.000000528	+0.0000019755
22	-0.0000004907	+0.000001106	+0.0000025167
23	+0.0000008496	+0.000003166	+0.0000031279
24	+0.0000024837	+0.000005708	+0.0000038098
25	+0.0000044379	+0.000008788	+0.0000045611
26	+0.0000067363	+0.000012460	+0.0000053784
27	+0.0000093994	+0.000016777	+0.0000062550
28	+0.0000124435	+0.000021784	+0.0000071810
29	+0.0000158783	+0.000027518	+0.0000081422

```

function [t,p,e,g,E,nu,F] = elemtronc14ELE
t = [1 2           % connectivité de l'élément 1
     2 3           % connectivité de l'élément 2
     3 4
     4 5
     5 6
     6 7
     7 8
     8 9
     9 10
    10 11
    11 12
    12 13
    13 14
    14 15
    ];
phi = (pi/180)*[0 10 20 30 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90];
R = 100;
p = [ (R^2-(R*sin(phi(1,1)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,1)))^2)^0.5 %
      % connectivité de l'élément 1
      (R^2-(R*sin(phi(1,2)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,2)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,3)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,3)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,4)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,4)))^2)^0.5 %
      % connectivité de l'élément 2
      (R^2-(R*sin(phi(1,5)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,5)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,6)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,6)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,7)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,7)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,8)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,8)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,9)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,9)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,10)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,10)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,11)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,11)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,12)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,12)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,13)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,13)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,14)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,14)))^2)^0.5
      (R^2-(R*sin(phi(1,15)))^2)^0.5 (R^2-(R*cos(phi(1,15)))^2)^0.5
    ];
e = [ 1
      2           % noeud 10 bloqué dans la direction u
      3
    ];
g = 3* ones(1,size(t,1)); % nombre des elements total
E = 10^7 * ones(1,size(t,1)); % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3 * ones(1,size(t,1)); % coef de poisson
Pr = 1;
net = size(t,1);
nnt = size(p,1);
fe=sparse(nnt,3);
for i=1:net
    h = t(i,1);
    r1 = p(h,1);
    z1 = p(h,2);
    h = t(i,2);
    r2 = p(h,1);
    z2 = p(h,2);
L=((r2 - r1)^2+(z1 - z2)^2)^(1/2);
C = (r2-r1)/L;
S = (z2-z1)/L;

```

```

a1 = (2*r1)+r2;
a2 = (2*r2)+r1;
f = (2*pi*Pr*L/6)*[-S*a1 C*a1 0;-S*a2 C*a2 0];
ti = [t(i,1),t(i,2)];
fe(ti,1:3)= fe(ti,1:3)+ f;

```

end

```

F = [ fe(1,1);fe(1,2);fe(1,3)
      fe(2,1);fe(2,2);fe(2,3)
      fe(3,1);fe(3,2);fe(3,3)
      fe(4,1);fe(4,2);fe(4,3)
      fe(5,1);fe(5,2);fe(5,3)
      fe(6,1);fe(6,2);fe(6,3)
      fe(7,1);fe(7,2);fe(7,3)
      fe(8,1);fe(8,2);fe(8,3)
      fe(9,1);fe(9,2);fe(9,3)
      fe(10,1);fe(10,2);fe(10,3)
      fe(11,1);fe(11,2);fe(11,3)
      fe(12,1);fe(12,2);fe(12,3)
      fe(13,1);fe(13,2);fe(13,3)
      fe(14,1);fe(14,2);fe(14,3)
      fe(15,1);fe(15,2);fe(15,3)
];

```

return

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.9 Dôme sphérique sous pression :Prog CAXI_K

fichier de données du probleme : elemtronc5ELE

Nombre des elements total :5

Nombre des noeuds total : 6

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.000000000000	+0.000000000	+0.000000000
2	-0.000185305928	-0.000218601	-0.000015645
3	-0.000118168810	-0.000150449	+0.000012583
4	-0.000039686694	-0.000025313	+0.000003163
5	-0.000019290040	-0.000031549	-0.000003387
6	-0.000002309129	-0.000100386	-0.000008757

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.9 Dôme sphérique sous pression :Prog CAXI_K

fichier de données du probleme : elemtronc10ELE

Nombre des elements total :10

Nombre des noeuds total : 11

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.000000000000	+0.000000000	+0.000000000
2	-0.000074525199	-0.000031281	-0.000004690
3	-0.000110632692	-0.000062705	-0.000000754
4	-0.000102590605	-0.000081200	+0.000000188
5	-0.000088097743	-0.000095853	+0.000000000
6	-0.000072915100	-0.000109662	-0.000000122
7	-0.000055500302	-0.000120973	-0.000000186
8	-0.000036966707	-0.000131745	-0.000000764
9	-0.000020599569	-0.000157648	-0.000002874
10	-0.000010360182	-0.000179249	-0.000001701

11 -0.000000074174 -0.000188066 -0.000000929

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.9 Dôme sphérique sous pression :Prog CAXI_K

fichier de données du probleme : elemtronc14ELE

Nombre des elements total :14

Nombre des noeuds total : 15

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.000000000000	+0.000000000	+0.000000000
2	-0.000074627844	-0.000031287	-0.000004689
3	-0.000110020120	-0.000062524	-0.000000649
4	-0.000099420763	-0.000079952	+0.000000338
5	-0.000089502764	-0.000098113	-0.000001265
6	-0.000086287566	-0.000108956	-0.000000059
7	-0.000077690818	-0.000114540	+0.000000327
8	-0.000067788416	-0.000118302	+0.000000310
9	-0.000057969491	-0.000121883	+0.000000174
10	-0.000048381876	-0.000125705	+0.000000031
11	-0.000038903830	-0.000129852	-0.000000127
12	-0.000029496556	-0.000134724	-0.000000364
13	-0.000020124632	-0.000141184	-0.000000713
14	-0.000010493652	-0.000149687	-0.000001025
15	-0.000000099658	-0.000157459	-0.000001218

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.9 Dôme sphérique sous pression :Prog CAXI_K

fichier de données du probleme : elemtronc24ELE

Nombre des elements total :24

Nombre des noeuds total : 25

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.000000000000	+0.000000000	+0.000000000
2	-0.000077087253	-0.000031542	-0.000005741
3	-0.000108602743	-0.000049448	-0.000002388
4	-0.000116193328	-0.000062455	-0.000000424
5	-0.000112237495	-0.000071640	+0.000000288
6	-0.000104910262	-0.000079136	+0.000000336
7	-0.000097432160	-0.000086331	+0.000000215
8	-0.000089819845	-0.000093248	+0.000000232
9	-0.000080539470	-0.000098543	+0.000000559
10	-0.000067817662	-0.000099960	+0.000001185
11	-0.000051431284	-0.000096275	+0.000001640
12	-0.000035682344	-0.000093054	+0.000000410
13	-0.000019142815	-0.000093707	-0.000002710
14	-0.000029820945	-0.000131478	-0.000004975
15	-0.000037919678	-0.000171023	-0.000003700
16	-0.000037174359	-0.000197547	-0.000001968
17	-0.000030532035	-0.000212138	-0.000000976
18	-0.000028824404	-0.000214071	-0.000000687
19	-0.000025035451	-0.000216649	-0.000000296
20	-0.000020948429	-0.000218033	-0.000000064

21	-0.000010623111	-0.000221885	-0.000000625
22	-0.000008549158	-0.000223030	-0.000000500
23	-0.000004310334	-0.000224658	-0.000000314
24	-0.000002161451	-0.000225142	-0.000000177
25	-0.000000001671	-0.000225334	-0.000000039

```

function [t,p,e,g,E,nu,F] = coqueconique30EL
t = [1  2
     2  3
     3  4
     4  5
     5  6
     6  7
     7  8
     8  9
     9 10
    10 11
    11 12
    12 13      % connectivité de l'élément 1
    13 14
    14 15
    15 16
    16 17
    17 18
    18 19
    19 20
    20 21
    21 22
    22 23
    23 24
    24 25
    25 26
    26 27
    27 28
    28 29
    29 30
    30 31
    ];
d=[0.80 0.80*2 0.80*3 0.80*4 0.80*5 0.80*6 0.80*7 0.80*8 0.80*9 0.80*10
  0.80*11 0.80*12 0.80*13 0.80*14 0.80*15];
p = [ 20.5  0
     20.5  1.70
     20.5  2.55
     20.5  3.40
     20.5  4.25
     20.5  5.10
     20.5  5.95
     20.5  6.80
     20.5  7.65
     20.5  8.50
     20.5  8.80
     20.5  9.35
     20.5 10.20
     20.5 11.05
     20.5 11.90
     20.5 20.00
     20.5-d(1,1)*cos(45*pi/180)  20+d(1,1)*sin(45*pi/180)
     20.5-d(1,2)*cos(45*pi/180)  20+d(1,2)*sin(45*pi/180)
     20.5-d(1,3)*cos(45*pi/180)  20+d(1,3)*sin(45*pi/180)
     20.5-d(1,4)*cos(45*pi/180)  20+d(1,4)*sin(45*pi/180)
     20.5-d(1,5)*cos(45*pi/180)  20+d(1,5)*sin(45*pi/180)
     20.5-d(1,6)*cos(45*pi/180)  20+d(1,6)*sin(45*pi/180)
     20.5-d(1,7)*cos(45*pi/180)  20+d(1,7)*sin(45*pi/180)

```

```

20.5-d(1,8)*cos(45*pi/180) 20+d(1,8)*sin(45*pi/180)
20.5-d(1,9)*cos(45*pi/180) 20+d(1,9)*sin(45*pi/180)
20.5-d(1,10)*cos(45*pi/180) 20+d(1,10)*sin(45*pi/180)
20.5-d(1,11)*cos(45*pi/180) 20+d(1,11)*sin(45*pi/180)
20.5-d(1,12)*cos(45*pi/180) 20+d(1,12)*sin(45*pi/180)
20.5-d(1,13)*cos(45*pi/180) 20+d(1,13)*sin(45*pi/180)
20.5-d(1,14)*cos(45*pi/180) 20+d(1,14)*sin(45*pi/180)
20.5-d(1,15)*cos(45*pi/180) 20+d(1,15)*sin(45*pi/180)
];
e = [ 1; 2; 3]; % noeud 10 bloqué dans la direction u w beta
g=1* ones(1,size(t,1));
E = 10^7 * ones(1,size(t,1)); % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3 * ones(1,size(t,1)); % coef de poisson
Pr = -1;
net = size(t,1);
nnt = size(p,1);
fe=sparse(nnt,3);
for i=1:net
    h = t(i,1);
    r1 = p(h,1);
    z1 = p(h,2);
    h = t(i,2);
    r2 = p(h,1);
    z2 = p(h,2);
L=((r2 - r1)^2+(z1 - z2)^2)^(1/2);
C = (r2-r1)/L;
S = (z2-z1)/L;
a1 = (2*r1)+r2;
a2 = (2*r2)+r1;
f = (2*pi*Pr*L/6)*[-S*a1 C*a1 0;-S*a2 C*a2 0];
ti = [t(i,1),t(i,2)];
fe(ti,1:3)= fe(ti,1:3)+ f;
end
F = [ fe(1,1);fe(1,2);fe(1,3)
      fe(2,1);fe(2,2);fe(2,3)
      fe(3,1);fe(3,2);fe(3,3)
      fe(4,1);fe(4,2);fe(4,3)
      fe(5,1);fe(5,2);fe(5,3)
      fe(6,1);fe(6,2);fe(6,3)
      fe(7,1);fe(7,2);fe(7,3)
      fe(8,1);fe(8,2);fe(8,3)
      fe(9,1);fe(9,2);fe(9,3)
      fe(10,1);fe(10,2);fe(10,3)
      fe(11,1);fe(11,2);fe(11,3)
      fe(12,1);fe(12,2);fe(12,3)
      fe(13,1);fe(13,2);fe(13,3)
      fe(14,1);fe(14,2);fe(14,3)
      fe(15,1);fe(15,2);fe(15,3)
      fe(16,1);fe(16,2);fe(16,3)
      fe(17,1);fe(17,2);fe(17,3)
      fe(18,1);fe(18,2);fe(18,3)
      fe(19,1);fe(19,2);fe(19,3)
      fe(20,1);fe(20,2);fe(20,3)
      fe(21,1);fe(21,2);fe(21,3)
      fe(22,1);fe(22,2);fe(22,3)
      fe(23,1);fe(23,2);fe(23,3)
      fe(24,1);fe(24,2);fe(24,3)

```

```

fe(25,1);fe(25,2);fe(25,3)
fe(26,1);fe(26,2);fe(26,3)
fe(27,1);fe(27,2);fe(27,3)
fe(28,1);fe(28,2);fe(28,3)
fe(29,1);fe(29,2);fe(29,3)
fe(30,1);fe(30,2);fe(30,3)
fe(31,1);fe(31,2);fe(31,3)
];

```

Return

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.11 Cylindre conique : CAXI_L

fichier de données du probleme : coqueconique 4EL

Nombre des elements total :4

Nombre des noeuds total : 5

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.000000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.000038617789	+0.000002526	+0.000006583
3	+0.000021903698	+0.000003359	-0.000009039
4	+0.000019049552	+0.000001604	+0.000006940
5	+0.000043471711	+0.000023253	+0.000006138

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.11 Cylindre conique : CAXI_L

fichier de données du probleme : coqueconique8EL

Nombre des elements total :8

Nombre des noeuds total : 9

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.000000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.000026027351	+0.000001749	+0.000009492
3	+0.000049397913	+0.000001613	-0.000000093
4	+0.000029748194	+0.000001349	-0.000007729
5	+0.000010008612	+0.000002590	+0.000000517
6	+0.000016644463	+0.000010321	+0.000006478
7	+0.000026581970	+0.000020582	+0.000004658
8	+0.000032605252	+0.000025847	+0.000001917
9	+0.000035988326	+0.000027168	+0.000000921

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.11 Cylindre conique : CAXI_L

fichier de données du probleme : coqueconique20EL

Nombre des elements total :20

Nombre des noeuds total : 21

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.000000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.000015416352	+0.000002205	+0.000008121
3	+0.000035831235	+0.000003486	+0.000003997
4	+0.000040408325	+0.000003821	+0.000001630
5	+0.000041509963	+0.000004088	-0.000000238
6	+0.000039669765	+0.000004365	-0.000001996
7	+0.000034739982	+0.000004723	-0.000003994
8	+0.000026270019	+0.000005244	-0.000006168
9	+0.000014525010	+0.000006014	-0.000007640
10	+0.000002149599	+0.000007090	-0.000006367
11	-0.000003723800	+0.000008410	+0.000000960
12	+0.000001851701	+0.000015878	

+0.000008320

13	+0.000011906808	+0.000027564	+0.000009133
14	+0.000020766462	+0.000037636	+0.000006563
15	+0.000025977513	+0.000043616	+0.000002974
16	+0.000027284806	+0.000045298	-0.000000195
17	+0.000025603341	+0.000043673	-0.000002328
18	+0.000022186903	+0.000040061	-0.000003413
19	+0.000018075896	+0.000035549	-0.000003784
20	+0.000013827621	+0.000030725	-0.000003888
21	+0.000009518703	+0.000025702	-0.000004032

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.11 Cylindre conique : CAXI_L

fichier de données du probleme : coqueconique30EL

Nombre des elements total :30

Nombre des noeuds total : 31

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.000000000000	+0.000000000	+0.000000000
2	+0.000006835900	+0.000000983	+0.000006570
3	+0.000013158838	+0.000001382	+0.000007445
4	+0.000019711254	+0.000001698	+0.000007421
5	+0.000025909919	+0.000001933	+0.000006843
6	+0.000031419109	+0.000002093	+0.000005953
7	+0.000036067315	+0.000002190	+0.000004902
8	+0.000039772899	+0.000002234	+0.000003761
9	+0.000042481223	+0.000002238	+0.000002535
10	+0.000044114496	+0.000002214	+0.000001178
11	+0.000044416137	+0.000002201	+0.000000655
12	+0.000044550292	+0.000002176	-0.000000386
13	+0.000043544330	+0.000002141	-0.000002265
14	+0.000040799592	+0.000002127	-0.000004543
15	+0.000035936587	+0.000002160	-0.000007278
16	+0.000006216886	+0.000004653	+0.000000568
17	+0.000007698155	+0.000006715	+0.000004061
18	+0.000010638619	+0.000010189	+0.000005996
19	+0.000014272980	+0.000014287	+0.000006717
20	+0.000018021981	+0.000018411	+0.000006541
21	+0.000021475494	+0.000022142	+0.000005755
22	+0.000024371182	+0.000025215	+0.000004601
23	+0.000026570774	+0.000027490	+0.000003281
24	+0.000028035673	+0.000028931	+0.000001953
25	+0.000028803177	+0.000029580	+0.000000733
26	+0.000028964203	+0.000029532	-0.000000302
27	+0.000028642985	+0.000028914	-0.000001109
28	+0.000027978770	+0.000027868	-0.000001677
29	+0.000027109110	+0.000026528	-0.000002025
30	+0.000026153941	+0.000025012	-0.000002202
31	+0.000025199188	+0.000023398	-0.000002286

Project: Dôme sphérique sous pression 05 elem

Filtering	Node	Case
Full list	1to9 11to14 16to19 21to24	1
Selection	1to9 11to14 16to19 21to24	1
Total number	21	1
Selected number	21	1

Node/Case	UX (in)	UY (in)	UZ (in)	RX (Rad)	RY (Rad)	RZ (Rad)
1/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2/ 1	1.0213e-04	9.6810e-10	-1.7275e-04	-2.0449e-10	1.0088e-05	5.9492e-10
3/ 1	5.0346e-05	5.1854e-10	-1.6201e-04	-7.2549e-10	1.4038e-06	1.1768e-09
4/ 1	-1.2483e-05	-3.9401e-09	-2.8158e-04	1.0147e-09	1.3037e-06	-3.0172e-10
5/ 1	2.7305e-06	-2.2682e-09	-3.6043e-04	3.9842e-11	6.2926e-08	-3.2640e-12
6/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7/ 1	3.1058e-05	-9.7690e-05	-1.6918e-04	9.5688e-06	2.8658e-06	-6.9308e-07
8/ 1	1.6783e-05	-4.8656e-05	-1.5550e-04	1.2543e-06	2.2699e-07	-4.5323e-07
9/ 1	-8.7847e-08	1.0276e-05	-2.6786e-04	9.1677e-07	8.2521e-07	1.2507e-07
11/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
12/ 1	-8.0336e-05	-5.8419e-05	-1.6763e-04	5.7139e-06	-8.0540e-06	-3.5835e-07
13/ 1	-3.7643e-05	-2.8734e-05	-1.5287e-04	6.0585e-07	-8.8040e-07	-1.6344e-07
14/ 1	1.1871e-05	6.2635e-06	-2.6413e-04	6.6861e-07	-5.6317e-07	3.1867e-08
16/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
17/ 1	-8.0333e-05	5.8418e-05	-1.6763e-04	-5.7141e-06	-8.0537e-06	3.5733e-07
18/ 1	-3.7638e-05	2.8729e-05	-1.5287e-04	-6.0644e-07	-8.7969e-07	1.6187e-07
19/ 1	1.1871e-05	-6.2712e-06	-2.6413e-04	-6.6713e-07	-5.6358e-07	-3.1488e-08
21/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
22/ 1	3.1057e-05	9.7687e-05	-1.6918e-04	-9.5687e-06	2.8657e-06	6.9345e-07
23/ 1	1.6783e-05	4.8651e-05	-1.5549e-04	-1.2541e-06	2.2672e-07	4.5362e-07
24/ 1	-8.4100e-08	-1.0272e-05	-2.6783e-04	-9.1586e-07	8.2536e-07	-1.2517e-07

Project: Dôme sphérique sous pression 10 elem

Filtering	Node	Case
Full list	1to9 11to14 16to19 21to24 26to29 31to34 36to39 41to44 46to49	1
Selection	1to9 11to14 16to19 21to24 26to29 31to34 36to39 41to44 46to49	1
Total number	41	1
Selected number	41	1

Node/Case	UX (in)	UY (in)	UZ (in)	RX (Rad)	RY (Rad)	RZ (Rad)
1/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2/ 1	1.5216e-04	-1.6142e-13	-8.2078e-05	1.0557e-13	5.1942e-06	-1.6179e-12
3/ 1	4.8974e-06	-2.0228e-13	-2.4817e-04	-4.6656e-13	1.4428e-06	-9.5737e-13
4/ 1	-2.7586e-05	1.5392e-13	-3.8296e-04	-5.1887e-13	-2.3343e-06	-1.1013e-12
5/ 1	-6.2506e-07	1.3322e-14	-5.1406e-04	-1.7491e-15	2.5634e-08	-1.1934e-12
6/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7/ 1	1.2635e-04	-9.3256e-05	-7.8314e-05	3.1325e-06	4.1069e-06	-3.7600e-07
8/ 1	1.0784e-05	-9.0116e-06	-2.3740e-04	7.1812e-07	9.9457e-07	-1.0247e-07
9/ 1	-1.7938e-05	1.2164e-05	-3.6702e-04	-2.3275e-06	-2.2611e-06	2.1845e-07
11/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
12/ 1	4.7459e-05	-1.4650e-04	-7.8398e-05	4.8679e-06	1.5396e-06	-1.5699e-07
13/ 1	3.5986e-06	-1.1004e-05	-2.3733e-04	1.1335e-06	4.1530e-07	-1.3529e-08
14/ 1	-6.5265e-06	1.9220e-05	-3.6387e-04	-2.5197e-06	-6.8393e-07	8.2353e-08
16/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
17/ 1	-4.7328e-05	-1.4577e-04	-7.8380e-05	4.8393e-06	-1.5872e-06	-7.0408e-08
18/ 1	-3.3671e-06	-1.0602e-05	-2.3703e-04	1.1564e-06	-3.6608e-07	-2.6994e-08
19/ 1	6.3349e-06	1.9429e-05	-3.6289e-04	-2.5868e-06	8.6086e-07	2.7286e-09
21/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
22/ 1	-1.2377e-04	-8.9964e-05	-7.8366e-05	2.9890e-06	-4.1230e-06	-2.9987e-08
23/ 1	-8.6565e-06	-6.3887e-06	-2.3701e-04	7.1620e-07	-9.7609e-07	-1.1389e-08
24/ 1	1.6759e-05	1.2068e-05	-3.6271e-04	-1.6162e-06	2.2336e-06	-7.4521e-09
26/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
27/ 1	-1.5294e-04	1.5694e-13	-7.8360e-05	-1.0584e-13	-5.0916e-06	-1.6223e-12
28/ 1	-1.0672e-05	9.9323e-14	-2.3699e-04	5.0128e-13	-1.2085e-06	-9.1414e-13

29/	1	2.0699e-05	-1.7783e-13	-3.6263e-04	5.5634e-13	2.7672e-06	-1.0799e-12
31/	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
32/	1	-1.2377e-04	8.9964e-05	-7.8366e-05	-2.9890e-06	-4.1230e-06	2.9984e-08
33/	1	-8.6565e-06	6.3887e-06	-2.3701e-04	-7.1620e-07	-9.7609e-07	1.1388e-08
34/	1	1.6759e-05	-1.2068e-05	-3.6271e-04	1.6162e-06	2.2336e-06	7.4499e-09
36/	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
37/	1	-4.7328e-05	1.4577e-04	-7.8380e-05	-4.8393e-06	-1.5872e-06	7.0405e-08
38/	1	-3.3671e-06	1.0602e-05	-2.3703e-04	-1.1564e-06	-3.6608e-07	2.6992e-08
39/	1	6.3349e-06	-1.9429e-05	-3.6289e-04	2.5868e-06	8.6085e-07	-2.7308e-09
41/	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
42/	1	4.7459e-05	1.4650e-04	-7.8398e-05	-4.8679e-06	1.5396e-06	1.5698e-07
43/	1	3.5986e-06	1.1004e-05	-2.3733e-04	-1.1335e-06	4.1530e-07	1.3527e-08
44/	1	-6.5265e-06	-1.9220e-05	-3.6387e-04	2.5197e-06	-6.8393e-07	-8.2355e-08
46/	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
47/	1	1.2635e-04	9.3256e-05	-7.8314e-05	-3.1325e-06	4.1069e-06	3.7600e-07
48/	1	1.0784e-05	9.0116e-06	-2.3740e-04	-7.1812e-07	9.9457e-07	1.0247e-07
49/	1	-1.7938e-05	-1.2164e-05	-3.6702e-04	2.3275e-06	-2.2611e-06	-2.1845e-07

Project: Dôme sphérique sous pression14elem

Filtering	Node	Case
Full list	1to9 11to14 16to19 21to24 26to29 31to34 36to39 41to44 46to49 51to54 56to59 61to64 66to69	1
Selection	1to9 11to14 16to19 21to24 26to29 31to34 36to39 41to44 46to49 51to54 56to59 61to64 66to69	1
Total number	57	1
Selected number	57	1

Node/Case	UX (in)	UY (in)	UZ (in)	RX (Rad)	RY (Rad)	RZ (Rad)
1/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2/ 1	1.67663e-04	-1.11868e-13	-7.04973e-05	-4.3587e-14	2.6517e-06	-4.9070e-13
3/ 1	-4.50194e-06	-1.28664e-13	-2.71215e-04	-1.6990e-13	1.5201e-06	-4.9912e-13
4/ 1	-2.91451e-05	1.76312e-13	-4.06787e-04	-2.8165e-13	-3.5124e-06	-6.1466e-13
5/ 1	-8.62942e-07	1.20486e-15	-5.50789e-04	-2.9956e-15	2.9155e-08	-6.6055e-13
6/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7/ 1	1.56020e-04	-7.63579e-05	-6.64656e-05	1.1910e-06	2.3619e-06	-1.8206e-07
8/ 1	4.75152e-06	-3.40148e-06	-2.59782e-04	3.8785e-07	1.1645e-06	9.3848e-08
9/ 1	-2.22532e-05	9.88316e-06	-3.93021e-04	-2.7157e-06	-3.9359e-06	2.8429e-07
11/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
12/ 1	1.06339e-04	-1.33978e-04	-6.65085e-05	2.0596e-06	1.6126e-06	-9.1803e-08
13/ 1	2.70835e-06	-4.22591e-06	-2.58811e-04	1.0655e-06	8.3109e-07	-3.4364e-08
14/ 1	-1.41121e-05	1.62922e-05	-3.87214e-04	-3.2590e-06	-2.3144e-06	1.6276e-07
16/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
17/ 1	3.77296e-05	-1.65949e-04	-6.65073e-05	2.5485e-06	5.7217e-07	-4.0889e-08
18/ 1	7.46310e-07	-4.06836e-06	-2.58556e-04	1.2564e-06	2.8014e-07	-1.5003e-08
19/ 1	-5.14940e-06	2.02716e-05	-3.85387e-04	-3.9022e-06	-8.3919e-07	6.3211e-08
21/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
22/ 1	-3.77990e-05	-1.65446e-04	-6.64928e-05	2.5463e-06	-5.8603e-07	-2.0392e-08
23/ 1	-8.46864e-07	-3.60654e-06	-2.58444e-04	1.2644e-06	-2.8995e-07	-6.2047e-09
24/ 1	4.47991e-06	2.05144e-05	-3.84907e-04	-3.9195e-06	8.9861e-07	1.2757e-08
26/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
27/ 1	-1.05670e-04	-1.32502e-04	-6.64804e-05	2.0394e-06	-1.6295e-06	-1.2735e-08
28/ 1	-2.15096e-06	-2.73551e-06	-2.58364e-04	1.0075e-06	-8.0357e-07	-6.1010e-09
29/ 1	1.31632e-05	1.65676e-05	-3.84766e-04	-3.1709e-06	2.5255e-06	-4.7902e-09
31/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
32/ 1	-1.52588e-04	-7.34880e-05	-6.64748e-05	1.1312e-06	-2.3513e-06	-6.2123e-09
33/ 1	-3.01822e-06	-1.47934e-06	-2.58327e-04	5.5741e-07	-1.1563e-06	-3.7328e-09
34/ 1	1.91480e-05	9.21297e-06	-3.84692e-04	-1.7667e-06	3.6675e-06	-5.4086e-09
36/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
37/ 1	-1.69327e-04	1.02654e-13	-6.64729e-05	4.2709e-14	-2.6087e-06	-4.8837e-13
38/ 1	-3.32597e-06	6.31566e-14	-2.58315e-04	1.8529e-13	-1.2818e-06	-4.7603e-13
39/ 1	2.12721e-05	-1.97069e-13	-3.84662e-04	3.0691e-13	4.0759e-06	-5.9739e-13
41/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
42/ 1	-1.52588e-04	7.34880e-05	-6.64748e-05	-1.1312e-06	-2.3513e-06	6.2113e-09
43/ 1	-3.01822e-06	1.47934e-06	-2.58327e-04	-5.5741e-07	-1.1563e-06	3.7318e-09
44/ 1	1.91480e-05	-9.21297e-06	-3.84692e-04	1.7667e-06	3.6675e-06	5.4074e-09
46/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
47/ 1	-1.05670e-04	1.32502e-04	-6.64804e-05	-2.0394e-06	-1.6295e-06	1.2734e-08
48/ 1	-2.15096e-06	2.73551e-06	-2.58364e-04	-1.0075e-06	-8.0357e-07	6.1000e-09
49/ 1	1.31632e-05	-1.65676e-05	-3.84766e-04	3.1709e-06	2.5255e-06	4.7890e-09
51/ 1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
52/ 1	-3.77990e-05	1.65446e-04	-6.64928e-05	-2.5463e-06	-5.8603e-07	2.0391e-08

53/	1	-8.46864e-07	3.60654e-06	-2.58444e-04	-1.2644e-06	-2.8995e-07	6.2038e-09
54/	1	4.47991e-06	-2.05144e-05	-3.84907e-04	3.9195e-06	8.9861e-07	-1.2759e-08
56/	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
57/	1	3.77296e-05	1.65949e-04	-6.65073e-05	-2.5485e-06	5.7217e-07	4.0888e-08
58/	1	7.46310e-07	4.06836e-06	-2.58556e-04	-1.2564e-06	2.8014e-07	1.5002e-08
59/	1	-5.14940e-06	-2.02716e-05	-3.85387e-04	3.9022e-06	-8.3919e-07	-6.3212e-08
61/	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
62/	1	1.06339e-04	1.33978e-04	-6.65085e-05	-2.0596e-06	1.6126e-06	9.1802e-08
63/	1	2.70835e-06	4.22591e-06	-2.58811e-04	-1.0655e-06	8.3109e-07	3.4363e-08
64/	1	-1.41121e-05	-1.62922e-05	-3.87214e-04	3.2590e-06	-2.3144e-06	-1.6276e-07
66/	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
67/	1	1.56020e-04	7.63579e-05	-6.64656e-05	-1.1910e-06	2.3619e-06	1.8206e-07
68/	1	4.75152e-06	3.40148e-06	-2.59782e-04	-3.8785e-07	1.1645e-06	-9.3849e-08
69/	1	-2.22532e-05	-9.88316e-06	-3.93021e-04	2.7157e-06	-3.9359e-06	-2.8429e-07