



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche
Scientifique



Université Echahid Hamma Lakhdar d'El-Oued

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE *

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Electromécanique

Spécialité : Electromécanique

Thème

**Etude des vibrations d'un disque
d'une turbine à gaz**

Devant le jury composé de :

-Mr: Bousbia Saif Eddine

-Mr: Daghoum Khalil

-Mr: Khechana Mohammed

Président

Examineur

Encadreur

Présenté par :

-Mr: Badidja Nabil

-Mr: Messioughi Yacine

-Mr: Maamir Mohammed Lamine

2018-2019

Résumé

Dans ce travail on a exposé les notions de bases de la mécanique des milieux continus nécessaires à la compréhension des phénomènes qui se déroulent dans les disques minces au cours de leurs fonctionnements que pendant leurs usinages. On a établi ici, les tenseurs de déformations, de contraintes et de déplacements. Ces rappels peuvent être appliqués au disques que ce soit stationnaires et en rotation et géométriquement annulaire ou massif. Dans le cas de la rotation, on a déterminé, les expressions des contraintes radiales et tangentielles induites par les forces centrifuges, ainsi que les déformations radiales et tangentielles et les déplacements.

La dernière partie a été réservée à la simulation du disque par le code éléments finis ANSYS. Dans un premier temps, on a établi les étapes nécessaires pour exploiter ce logiciel et faire une simulation réussie. Par la suite, on a déterminé les modes propres du disque (déformés modales et fréquences directes et rétrogrades). Six modes correspondant aux quatre valeurs de vitesses de rotation choisies entre 0 et 4500 rd/s, soit de 0 à 42993.6 tr/mn, Le diagramme de Campbell dressé et le calcul parallèle, nous ont permis d'identifier, pour chaque mode, la vitesse critique correspondant au rapport 1 ainsi que la stabilité de chaque mode.

ملخص

في هذا العمل ، كشفنا عن المفاهيم الأساسية لآليات الوسائط المستمرة اللازمة لفهم الظواهر التي تحدث في الأقراص الرقيقة أثناء عملياتها كما يحدث أثناء تشغيلها. لقد قمنا بدراسة التشوهات والاجهادات الغير مرغوب فيها. ويمكن تطبيق هذه الاجهادات على الأقراص سواء كانت ثابتة أو دوارة أو حلقي هندسي أو ضخمة. في حالة الدوران ، تم تحديد تغيرات الضغط الشعاعي الناجم عن قوى الطرد المركزي.

تم حجز الجزء الأخير لمحاكاة القرص بواسطة برنامج (ANSYS). أولاً ، تم اتخاذ الخطوات اللازمة لاستغلال هذا البرنامج ولإجراء محاكاة ناجحة. بعد ذلك ، تم تحديد أوضاع الاجهادات للقرص (التشوهات والترددات المباشرة والرجعية). هناك ستة أوضاع تقابل قيم سرعة الدوران الأربعة التي تم اختيارها بين 0 و 4500 rd / s ، أي من 0 إلى 42993.6 دورة في الدقيقة ، وقد رسم مخطط (Campbell) وقد سمح لنا الحساب الموازي بتحديد لكل وضع ، السرعة الحرجة المقابلة لنسبة 1 واستقرار كل وضع.

Liste des figures

Fig. I.1 : Schéma de la turbine à gaz MS 5002c

Fig. I.2 : schéma de rotor du compresseur et turbine HP

Fig. I.3 : Cycle de Baryton théorique dans les diagrammes P, P-v et T-S

Fig. II.1 : Indice des composantes du tenseur.

Fig. II.2 : Évolution de ν et μ lorsque ν varie entre 0 et 0,5, pour un E donné.

Fig. II.3 : Equilibre du parallélépipède suivant x.

Fig. II.4 : Equilibre du parallélépipède en rotation suivant z.

Fig. II.5 : Coordonnées cylindriques.

Fig. II.6 Schématisation d'un disque alésé.

Fig. II.7: Disque circulaire

Fig. III.1: Schéma du projet crée dans ANSYS Workbench.

Fig. III.2: Fixation des propriétés du matériau du disque, sa masse volumique, module de Young et coefficient de poisson.

Fig. III.3: Création ou importation du modèle géométrique du disque dans le module de dessin design modeler

Fig.III.4: Création ou importation du modèle géométrique du disque dans le module de résolution

Fig. III.5: Schéma du modèle de résolution. Conditions aux limites et chargements : support cylindrique dans l'alésage du disque, plage des vitesses de rotation.

Fig. III.6: disque maillé (discrétisé)

Fig. III.7: Solution visualisant les déformées modales ainsi que les fréquences propres en Hz

Fig. III.8: Exemple d'insertion et de visualisation du diagramme de Campbell dans la solution trouvée.

Fig.III.9 Mise en plan du disque modélisé

Fig. III.10 gauche: Le modèle 3D du disque importé. A droite : Disque maillée (Nombre de nœuds : 112241; nombre d'éléments : 60809)

Fig.III.11 Déformée du mode 1 pour le disque stationnaire (vitesse de rotation nulle)

Déplacement max = 8.7181 mm, fréquence=147.44 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 1, nb.Cercles nodaux: 0)

Fig.III.12 Déformée du mode 3 pour le disque stationnaire (vitesse de rotation nulle)

Déplacement max.= 8.7181mm, fréquence=174.44 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 0, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.13 Déformée du mode 4 pour le disque stationnaire (vitesse de rotation nulle)

Déplacement max.= 7.3828 mm, fréquence=210.51 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 2, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.14 Déformée du mode 6 pour le disque stationnaire (vitesse de rotation nulle)

Déplacement max.= 7.3519 mm, fréquence=289.95 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 0, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.15 Déformée du mode 1 pour la vitesse de rotation 1000 rd/s Déplacement max.=

7.2066 mm, fréquence=369.17 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 1, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.16 Déformée du mode 3 pour la vitesse de rotation 1000 rd/s Déplacement max.=

7.0245 mm, fréquence=791.05 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 0, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.17 Déformée du mode 5 pour la vitesse de rotation 1000 rd/s Déplacement max.=

9.3438 mm, fréquence=1258.2 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 1, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.18 Déformée du mode 6 pour la vitesse de rotation 1000 rd/s Déplacement max.= 8.15

mm, fréquence=1302.5 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 2, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.19 Déformée du mode 1 pour la vitesse de rotation 2500 rd/s Déplacement max.=

8.0736 mm, fréquence=1311.9 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 1, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.20 Déformée du mode 2 pour la vitesse de rotation 2500 rd/s Déplacement max.=

5.2675 mm, fréquence=1413.2 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 2, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.21 Déformée du mode 3 pour la vitesse de rotation 2500 rd/s Déplacement max.=

4.8138 mm, fréquence=1421.9 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 0, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.22 Déformée du mode 4 pour la vitesse de rotation 2500 rd/s Déplacement max.= 8.26 mm, fréquence=1597.5 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 0, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.23 Déformée du mode 5 pour la vitesse de rotation 2500 rd/s Déplacement max.= 11.408 mm, fréquence=1629.1 Hz, (nb. Diamètres nodaux:1, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.24 Déformée du mode 6 pour la vitesse de rotation 2500 rd/s Déplacement max.= 11.093 mm, fréquence=1874.6 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 2, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.25 Déformée du mode 1 pour la vitesse de rotation 4500 rd/s Déplacement max.= 10.969 mm, fréquence=1904.0 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 1, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.26 Déformée du mode 2 pour la vitesse de rotation 4500 rd/s Déplacement max.= 10.87 mm, fréquence=2152.8 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 2, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.27 Déformée du mode 3 pour la vitesse de rotation 4500 rd/s Déplacement max.= 9.1681 mm, fréquence=2173.9 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 0, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.28 Déformée du mode 4 pour la vitesse de rotation 4500 rd/s Déplacement max.= 10.674 mm, fréquence= 2461.1 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 0, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.29 Déformée du mode 5 pour la vitesse de rotation 4500 rd/s Déplacement max.= 10.404 mm, fréquence=2473.3 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 1, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.30 Déformée du mode 6 pour la vitesse de rotation 4500 rd/s, Déplacement max.= 6.643 mm, fréquence=23.733 Hz, (nb. Diamètres nodaux: 2, nb. Cercles nodaux: 0)

Fig.III.31 Diagramme de Campbell et vitesses critiques relatives au rapport 1.

Liste des Tableaux

Tab. II.1: Récapitulatif des champs de contraintes, de déformations et de déplacements

Dans un disque mince alésé animé d'une vitesse de rotation ω (expressions simplifiées).

Tab II.2: Récapitulatif des champs de contraintes, de déformations et de déplacements

Dans un disque mince non alésé animé d'une vitesse de rotation ω (expressions simplifiées).

TAB. II.3: Déformations et déplacements au sein d'un disque mince alésé en rotation.

TAB II.4: Déformations et déplacements au sein d'un disque mince sans alésage en rotation.

Tab.III.1 Tableau récapitulant toutes les fréquences propres du disque pour les différentes vitesses de rotation.

Tab.III.2 Tableau récapitulant les vitesses critiques pour les 6 modes relatifs

aux différentes vitesses de rotation du disque.

Liste des abréviations

ϵ_{ij} : Tenseur de déformation.

σ_{ij} : Tenseur du champ des contraintes

ϵ_{ij} : Composante de déformation

u : Déplacement dans la direction x (mm)

v : Déplacement dans la direction y (mm)

w : Déplacement dans la direction z (mm)

$\vec{n}$: Vecteur unitaire normale à la surface

$\vec{T}$: Vecteur unité de surface (contrainte)

$\vec{f}_v$: Force de volume (Kg)

ν : Coefficient de Poisson

I_3 : La matrice identité

tr : La trace de la matrice

λ : coefficient de Lamé.

E : Module d'Young.(MPa)

ρ : La masse volumique du matériau (kg/m³)

r_e : Rayon extérieur (m)

r_i : Rayon intérieur (m)

h : épaisseur (nm)

t : le temps (min)

n : nombre de diamètres nodaux.

m : nombre de cercle nodaux.

A : constante d'intégration

B : constante d'intégration

D : la constante des coques en flexion.

T : L'énergie cinétique.(J)

L : le lagrangien du système

V : L'énergie potentielle

$[M]$: La matrice

f_r : Fonction limite

σ_r : Contrainte normale dans la direction r

σ_θ : Contrainte normale dans la direction

$\sigma_{\min}$: Contrainte normale minimum dans la direction

ϵ_r : Déformation normale dans la direction r

ϵ_θ : Déformation normale dans la direction

ϵ_z : Déformation normale dans la direction z

τ_{rz} : Contrainte de cisaillement.(Pa)

λ_n : Les valeurs propres de la matrice $[M]_n$

∇ : Nabla

u_r : Déplacement dans la direction r .(μm)

u_z : Déplacement dans la direction z. (μm)

U_r : Les champs de déplacement

U_z : Les champs de déplacement

ω : Pulsation en (rad/sec)

ω_{mn} : La pulsation propre (rad/sec)

Ω : Vitesse de rotation.

J_n : Fonction de Bessel de 1^{ère} espèce.

Y_n : Fonction de Bessel de 2^{ème} espèce

I_n : Fonction de Bessel modifiée 1^{ère} espèce.

K_n : Fonction de Bessel modifiée 2^{ème} espèce.

$c_{1,n}$ $c_{2,n}$ $c_{3,n}$ $c_{4,n}$: Constantes.

div : Divergence d'un vecteur. (m)

Remerciement	i
Dédicace	ii
Liste des figures	iii
Liste des tableaux	vi
Liste des abréviations	vii
Sommaire	x
Introduction générale	1
<u>Chapitre I: généralités sur les turbines a gaz</u>	
I-1 Définitions	3
I-2 Avantages et inconvénients des turbines à gaz	4
I-3 Classification des turbines à gaz	4
I-3-1 Par le mode de construction.....	4
I-3-2 Par le mode de travail	5
I-3-3 Par le mode de fonctionnement thermodynamique	5
I-4 Historique des turbines à gaz	6
I-5 Particularités de fonctionnement d'une turbine à gaz	7
I-6 le cycle théorique des installations à turbine à gaz	8
<u>Chapitre II: Modélisation mathématique</u>	
II.1. Introduction	12
II.2. Tenseurs fondamentaux	12
II.2.1. Tenseur des contraintes	12
II.2.2. Tenseur des déformations	13
II.2.3. Tenseur Déplacements.....	13
II.3. La loi de comportement en élasticité linéaire	13
II.3.1. Définition	13
II.3.2. La loi de Hooke.....	14

II.4. Problèmes de contraintes planes et déformations planes	15
II.4.1. Contraintes planes.....	15
II.4.2. Déformations planes.....	16
II.5. Equations d'équilibre	17
II.5.1. Équilibre en translation.....	17
II.5.2. Équilibre en rotation.....	18
II.5.3. Équilibre local	19
II.5.3.1. Tenseur des contraintes	19
II.5.3.2. Tenseur de déformation	20
II.6. Comportement élastique d'un disque mince alésé	20
II.6.1. Efforts centrifuges.....	21
II.6.2. Forme du tenseur des contraintes	21
II.6.3. La condition de compatibilité	22
II.7. Détermination des contraintes dans le disque mince alésé en rotation..	22
II.7.1. Déformations dans le disque mince alésé en rotation.....	23
II.7.2. Déplacements dans le disque mince alésé en rotation.....	23
II.8. Contexte infinitésimal.....	24
II.9. Comportement élastique linéarisé d'un disque mince non alésé.....	25
II.9.1. Contraintes, déformations et déplacements.....	25
II.10. Limite d'élasticité.....	26
II.11. Solution, au sens de Saint Venant, du problème de l'elastostatique	
d'un disque mince en rotation.....	27
II.12. Expressions générales des contraintes	28
II.13. Equations de compatibilité	28
II.13.1. Détermination complète des contraintes.....	29
II.13.2. Disque alésé.....	30
II.13.3. Disque non alésé.....	32
II.13.4. Déformations et déplacements.....	32

II.14 : Vibrations	34
II.14.1 Recherche de l'équation du mouvement	34
II.14.2 Extraction des fréquences propres.....	36

Chapitre III: Simulation du disque de turbine

III.1. Démarches suivies dans ANSYS Workbench pour notre simulation..	39
III.2. Simulation du disque de turbine	43
III.2.1 Modèle géométrique du disque	43
III.2.2 Déformées modales, déplacements max, fréquences et nombre de diamètres et de cercles nodaux.....	46
III.3. Diagramme :Fréquence- Fréquence de rotation	56
III.4. Conclusion	57
Conclusion générale	59
Références bibliographiques	61
Résumé	

Introduction Générale

Les disques toujours présents dans les machines tournantes, sont considérés comme des pièces d'importance majeure, du fait qu'ils sont les supports des aubes dans les turbomachines. En mode de fonctionnement, si ces derniers sont minces, leurs rigidités deviennent faibles et par conséquent ils sont exposés aux problèmes de vibrations.

Pendant leurs usinages, le caractère de minceur des disques peut poser les mêmes problèmes de vibrations. Ainsi, un niveau élevé de vibrations représente un mauvais signe pour le disque et le mécanisme qui le-comporte. Les conséquences des vibrations peuvent être à l'origine d'une déformation inacceptable ou même une rupture et par conséquent, la défaillance du mécanisme qui le-contient. En usinage, un mauvais état de surface peut survenir et rendre le disque inacceptable.

Le phénomène des vibrations des disques minces mérite une compréhension approfondie. Ainsi, lors de son fonctionnement dans une turbomachine ou pendant son usinage, ce dernier peut passer par des vitesses critiques qui excitent des fréquences de résonances. Le choix des vitesses de rotation loin de ces vitesses critiques, garantit sa stabilité au cours de son fonctionnement ou en usinage. Ces valeurs peuvent être déterminées en faisant l'étude de ses comportements à l'état stationnaire et en rotation.

Ce travail est composé de trois chapitres :

Dans un premier temps on fait un état de l'art sur les problèmes des disques minces.

Du fait qu'un disque est un milieu continu élastique et déformable et ses vibrations sont exprimées en fonction du champs des déplacements, le deuxième chapitre expose les notions de la mécanique des milieux continus. La connaissance des champs de déplacements d'un élément du disque est obligatoire pour décrire l'équation modèle des vibrations. Le champ de déplacement est lié aux autres champs, tels que les déformations et les contraintes. Pour ces raisons, on réservera le deuxième chapitre aux rappels de la mécanique des milieux continus appliqués aux disques minces.

Au début de ce chapitre, on exposera les démarches essentielles pour faire une simulation réussie en exploitant le code Ansys. Comme la connaissance du comportement dynamique du disque est basée sur les notions exposées dans le deuxième chapitre, on consacrerà le dernier chapitre à la simulation numérique des vibrations d'un disque de turbomachine.

I.1 Définitions :

La grande puissance, le bon fonctionnement ainsi que les hautes performances des turbines à gaz font d'elle un des moyens les plus sollicités pour l'entraînement des charges mécaniques. Les turbines utilisées aux centres industriels, sont des turbines à deux arbres. Ces dernières possèdent deux roues mécaniquement indépendantes.

La turbine à gaz est un moteur à combustion interne de tous les points de vue, elle peut être considérée comme un système autosuffisant : en effet, elle prend et comprime l'air atmosphérique dans son propre compresseur, augmente la puissance énergétique de l'air dans sa chambre de combustion et convertit cette puissance en énergie mécanique utile pendant les processus de détente qui a lieu dans la section turbine. L'énergie mécanique qui en résulte est transmise par l'intermédiaire d'un accouplement à une machine réceptrice, qui produit la puissance utile pour le processus industriel.

Comparée aux autres moteurs thermiques, la turbine à gaz présente une double particularité ; de même que la turbine à vapeur, la turbine à gaz est une machine à écoulement continu, donc ne comporte pas de variation périodiques de l'état de fluide ; dans toutes sections donnée ; mais tendit que la turbine à vapeur, le fluide ne subit pas qu'une seule transformation qui est la détente.

La turbine à gaz (au sens large du terme), est le siège de l'ensemble de transformations constituant le cycle thermodynamique décrit par le fluide ; donc, la turbine à gaz est assimilée aux moteurs à combustion interne mais les transformations s'effectuent dans des enceintes et juxtaposées dans l'espace.

Le rendement thermique d'une T.A.G se situe entre 16 et 28% pour une installation simple sans la récupération des calories d'échappements et entre 26 et 30% pour une installation avec la récupération de ces calories. Il reste néanmoins bien inférieur à celui des moteurs à gaz.

I.2 Avantages et inconvénients des turbines à gaz :

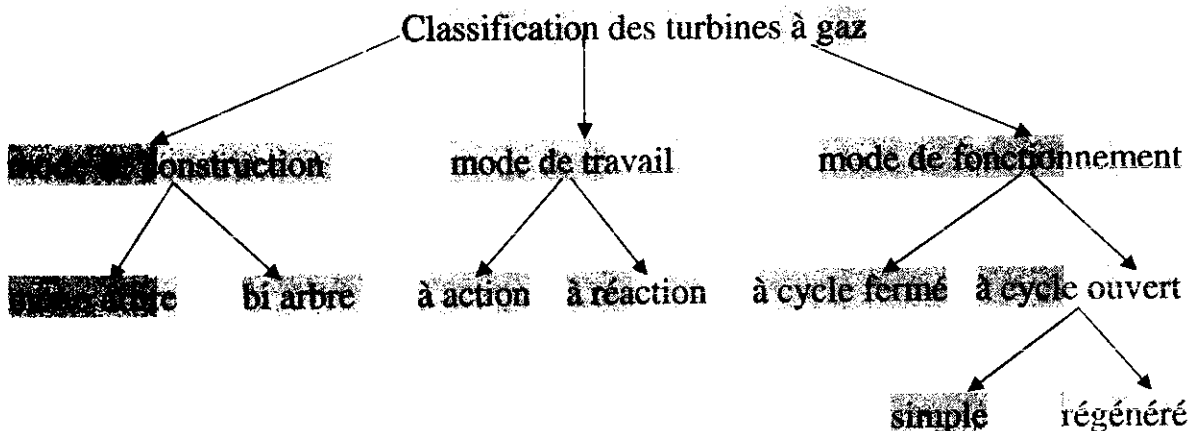
® Avantage :

- Une puissance élevée dans un espace restreint dans le quel un groupe diesel de même Puissance ne pourrait pas être logé;
- A l'exception de démarrage et arrêt, la puissance est produite d'une façon continue;
- Démarrage facile même à grand froid;
- Diversité de combustible pour le fonctionnement;
- Possibilité de fonctionnement à faible charge.

◆ Inconvénients :

- Au-dessous d'environ 3000KW, prix d'installation supérieur de celui d'un groupe diesel;
- Temps de lancement beaucoup plus long que celui d'un groupe diesel ; à titre indicatif : 30 à 120 s pour une turbine, 8 à 20 s pour un groupe diesel.
- Rendement inférieur à celui d'un moteur diesel (cycle simple). À titre indicatif : 28 à 33 % pour une turbine de 3000 KW, 32 à 38 % pour un groupe diesel.

I-3 Classification des turbines à gaz :



I.3.1 Par le mode de construction :

L'objectif pour le quel on utilise la turbine à gaz définit le type qu'on doit choisir. Dans l'industrie, on trouve les turbines à un seul arbre, dites aussi **mono-arbre**; elles sont généralement utilisées dans le cas où on cherche un fonctionnement avec une charge constante (pour entraîner les générateurs d'électricité).

Une T.A.G peut comporter une seule ligne d'arbre comprenant le compresseur d'air, la turbine de détente des gaz à la sortie de la chambre de combustion et l'appareil entraîné, Dans

ces conditions la turbine fournit à la fois la puissance nécessaire à l'entraînement du compresseur d'air et la puissance utile.

Un deuxième type, englobe **les turbines à deux arbres (bi-arbres)**: elles ont l'avantage d'entraîner des appareils à charges variables (pompes, compresseur,...), elles se composent de deux parties, la première assure l'autonomie de la turbine (GG), la deuxième est liée à la charge. Un troisième type peut être aussi cité, ce sont les turbines dites **dérivées de l'aéronautique**, Elles ont une conception spéciale suivant le domaine dans le quel elles sont utilisées; dans ce troisième type la partie qui assure l'autonomie de la turbine existe toujours, et l'énergie encore emmagasinée dans les gaz d'échappement est utilisée pour créer la poussée, en transformant cette énergie (thermique et de pression) en une énergie cinétique de jet dans une tuyère.

La première de ces lignes d'arbre est constituée par le compresseur d'air et une turbine dite **auxiliaire**, formant un turbocompresseur équilibré c.-à-d. sans puissance d'appoint en puissance prélevée et que l'on peut appeler le **générateur de gaz**.

La deuxième comprend la turbine dite **motrice** ou turbine de puissance et l'appareil entraîné. Bien plus que complexe, la turbine à 2 lignes d'arbre se justifie du point de vue du transport de gaz par une plus grande souplesse d'exploitation.

I.3.2 Par le mode de travail :

On distingue deux types de turbine :

- **Turbine à action :**

Où l'énergie thermique est transformée complètement en énergie cinétique dans la directrice. L'évolution des gaz dans la roue se fait sans variation de pression statique $P_1 > P_2 = P_3$.

- **Turbine à réaction :**

Une partie de l'énergie thermique est transformée dans la roue en énergie cinétique et mécanique. L'évolution des gaz dans la roue se fait avec variation de la pression statique $P_1 > P_2 > P_3$. Le taux de réaction ϵ caractérisera le % d'énergie thermique totale.

I.3.3 Par le mode de fonctionnement thermodynamique :

Il existe deux cycles thermodynamiques :

- **Turbine à gaz à cycle fermé :**

dans laquelle le même fluide est repris après chaque cycle.

- **Turbine à gaz à cycle ouvert :**

c'est une turbine dont l'aspiration et l'échappement s'effectuent directement dans l'atmosphère, ce type de turbine qui est le plus répandu se divise en deux classes :

➤ **Turbine à cycle simple** : c'est une turbine utilisant un seul fluide pour la production d'énergie mécanique, après la détente les gaz possédant encore un potentiel énergétique qui est perdu dans l'atmosphère à travers l'échappement.

➤ **Turbine à cycle régénéré** : c'est une turbine dont le cycle thermodynamique fait intervenir plusieurs fluides moteurs dans le but d'augmenter le rendement de l'installation.

1.4 Historique des turbines à gaz :

Les premières turbines à gaz sont apparues sur le marché à la fin des années 40; elles sont généralement employées dans les chemins de fer et avaient l'avantage de brûler du combustible liquide, même à faible qualité (à cause de la limitation des procédés de raffinage). La turbine MS3001 construite par GE, ayant une puissance de 4500HP, a été spécifiquement employée pour le service locomoteur.

Les progrès réalisés dans le coté métallurgique, en plus des résultats favorables des recherches approfondies sur la combustion, ont permis des améliorations rapides des performances de ces machines, en terme de puissance, rendement, longévité,...etc.

Trois générations peuvent être classées, distinguées par les intervalles de température maximale (en °C) des gaz à l'entrée de la première roue de turbine :

- 1^e génération : $760 < T_{\max} < 950$.
- 2^e génération : $955 < T_{\max} < 1124$.
- 3^e génération : $1149 < T_{\max} < 1288$.

Évidemment, l'augmentation de la température d'entrée à la première turbine a eu comme effet une augmentation du rendement thermodynamique, qui est passé des valeurs inférieures à 20% dans les premières machines, à des valeurs courantes supérieures à 40% (turbine LM6000).

Quelques dates :

1936 : première turbine aéronautique britannique.

1939 : turbine à gaz expérimentale (en cycle fermé) de 200 kW par Escher wiss...

1944 : turbine à gaz pour propulsion marine par Elliott.

1960 : général électrique lance la 5000, la plus réponde des turbines à gaz industrielles.

1975 : la turbine à gaz dépasse 100Mw (modèle 9001 Alsthom- Atlantique).

Depuis l'arrivé de nouveaux constructeurs dans le domaine est assez rare, vu le niveau technologique atteint par ces machines.

I.5 Particularités de fonctionnement d'une turbine à gaz :

La T.A.G appliquée au transport du gaz présente cependant de grands avantages :

➤ Sa simplicité, ses frais de premier établissement peu élevés, sa grande souplesse d'exploitation, sa mise en charge rapide et sa télécommande très facilement réalisable, enfin sa surveillance minime et son entretien à des dates très espacés la font souvent préférer dans les régions où l'eau est rare, ou lorsque il n'est pas possible d'envisager de gardiennage, de même lorsque le prix de combustible n'est pas le facteur économique prépondérant, soit par ce que le nombre d'heures de fonctionnement prévu est peu important soit par ce que le prix du combustible est faible en comparaison de celui de l'énergie électrique ;

➤ Possibilité d'avoir des vitesses de rotation différentes pour les 2 arbres, donc d'avoir une plage étendue de variation de vitesse de l'appareil entraîné, et de faciliter le démarrage au cours duquel l'appareil entraîné est découplé automatiquement ;

➤ Variation possible de la vitesse de rotation de la 2^{ème} ligne d'arbres dans larges limites sans trop affecter le rendement.

➤ Meilleur rendement aux charges de régime plus rapides ;

➤ Démarrages et changements de régime plus rapides ;

➤ Possibilités en cas d'incident, d'échange rapide du générateur de gaz si la turbine à gaz est constituée d'une turbine de puissance placée à la sortie d'un turboréacteur d'aviation.

➤ La construction à un seul arbre est bien adaptée aux machines dont la vitesse est très peu variable, ou constante, et en particulier à l'alternateur, alors que la construction, à deux lignes d'arbre trouve essentiellement son application dans l'entraînement des turbomachines telles que compresseurs, pompes centrifuges.... Etc.

➤ Les machines à deux lignes d'arbres consentent, en variation de vitesse 20% à 30% de plus que les machines à un arbre ;

La puissance est limitée par :

- La température d'admission à la 1^{ère} roue de la turbine de détente pour les turbines à une ligne d'arbre ;

- La vitesse de rotation du générateur de gaz pour les turbines à 2 arbres ;

La vitesse inférieure de la turbine de puissance est limitée par :

- ❖ pour la turbine à une ligne d'arbre par le pompage du compresseur axial d'air (on peut diminuer la vitesse limite inférieure par un dispositif de montage d'air à la sortie du compresseur pour reculer le pompage).

- ❖ pour la turbine à 2 lignes d'arbres par le pompage du compresseur centrifuge de gaz qui est entraîné par la turbine.

I.6 le cycle théorique des installations à turbine à gaz :

Les cycles de l'installation de turbine à gaz sont divers, d'après l'utilisation du fluide moteur dans le cycle, on distingue d'abord le cycle fermé et le cycle ouvert.

Dans l'installation de turbine à gaz à cycle ouvert le fluide moteur après avoir fourni le travail s'échappe dans le milieu ambiant (comme dans les moteurs à combustion interne) et au contraire, dans l'installation de turbine à gaz à cycle fermé le fluide moteur (air ou l'autre gaz) circule constamment dans le contour et accomplit le cycle fermé.

D'après le cycle thermodynamique on peut citer les I.T.G simples, les I.T.G avec refroidissement et échauffement intermédiaires.

En ce qui concerne l'apport de chaleur, il existe deux types d'I.T.G : I.T.G à apport de chaleur à la pression constante et I.T.G à apport de chaleur au volume constant.

Dans les installations des turbines à gaz moderne on utilise principalement l'apport de chaleur à $p=\text{constant}$.

C'est pourquoi commençons à étudier I.T.G à apport de chaleur à $P=\text{constant}$ et qui fonctionne d'après le cycle ouverts.

Les installations de turbines à gaz les plus simples comprennent les éléments suivants : pompe d'alimentation de combustible, compresseur d'air, chambre de combustion et turbine à gaz.

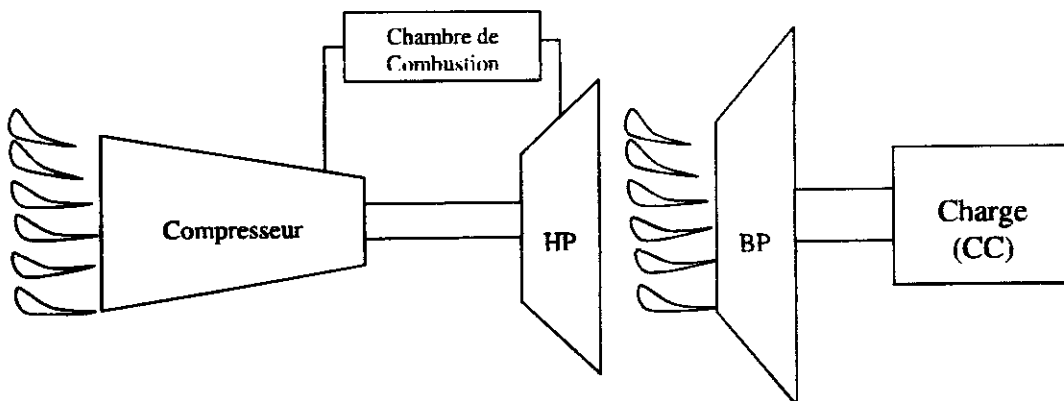


Fig. I.1 : Schéma de la turbine à gaz MS 5002c

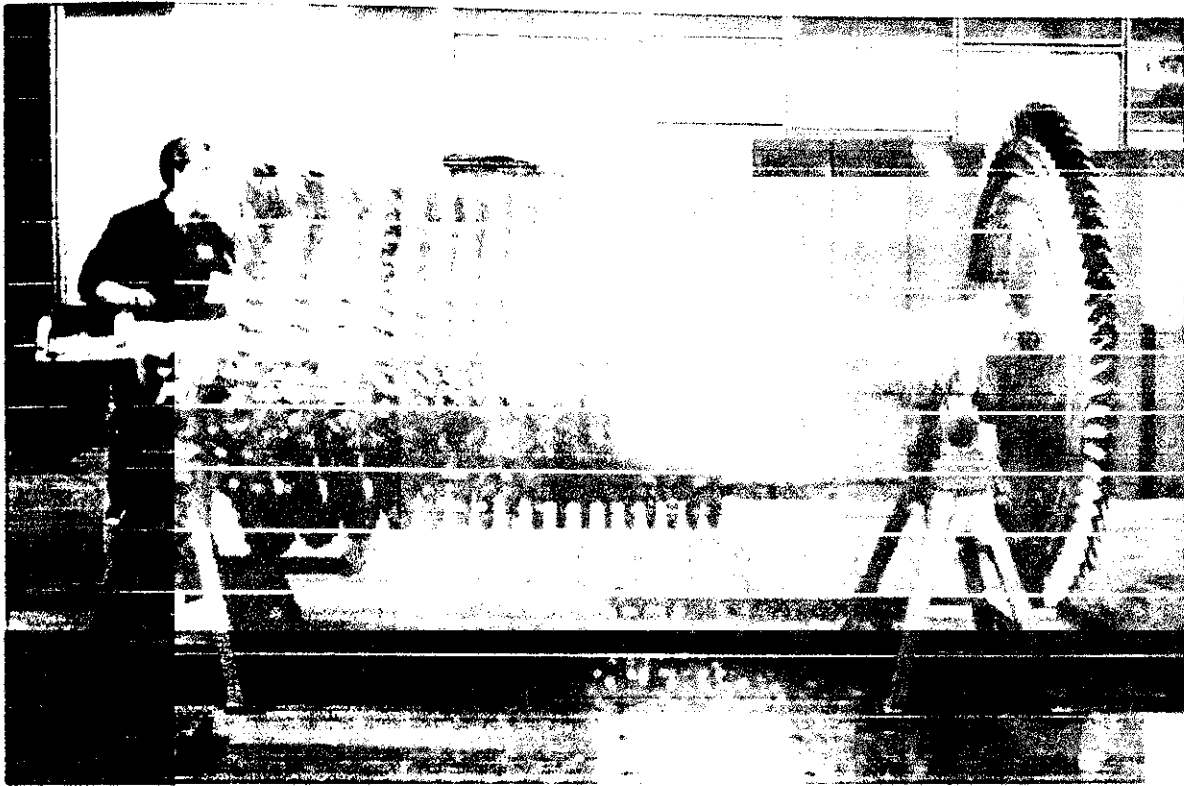
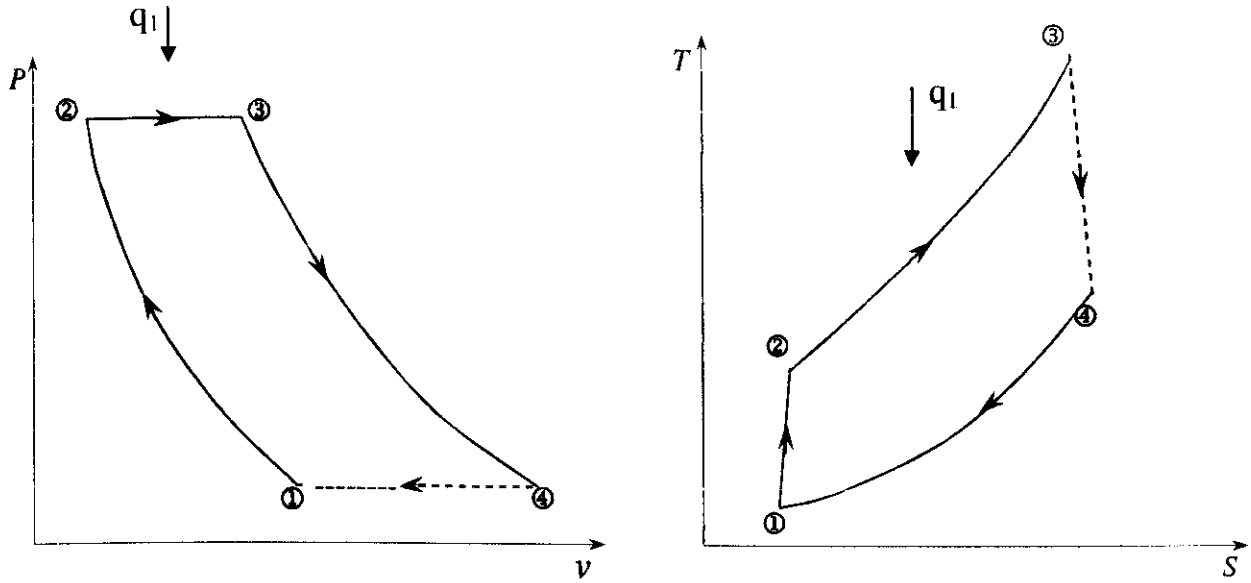


Fig. I.2 : schéma de rotor du G.T. à 1 axe, turbine HP

La turbine à gaz et le compresseur se trouve sur le même arbre, le compresseur aspire l'air atmosphérique, le comprime puis l'envoie vers la chambre de combustion, dans cette chambre à la pression constante le combustible pulvérisé brûle et le fluide moteur reçoit une quantité de chaleur, la température des gaz augmente, puis ces gaz pénètrent dans la turbine à gaz et au cours de la détente des gaz, l'énergie thermique est transformée en énergie cinétique et celle-ci se transforme à son tour en énergie mécanique,

Considérons le cycle thermodynamique d'I.T.G sans tenir compte des pertes dans la turbine et dans le compresseur. Un tel cycle s'appelle cycle théorique.

Le compresseur aspire et comprime l'air (transformation adiabatique 1-2), puis, on a l'apport de chaleur dans la chambre de combustion à la pression constante.



**Fig. I.3 : Cycle de Baryton théorique dans les diagrammes P
P-v et T-S**

1-2 : compression isentropique.

2-3 : combustion isobare.

3-4 : détente isentropique.

Mais la température des gaz augmente dans la chambre de combustion de T_2 jusqu'à T_3 , après cela les gaz se détendent adiabatiquement dans la turbine de la pression P_3 jusqu'à la pression atmosphérique P_4 .

Au cours de la détente des gaz dans la turbine l'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique et puis dans les aubes mobiles l'énergie cinétique se transforme en énergie mécanique, c.-à-d. en énergie de rotation du rotor de la turbine.

II.1. Introduction

Afin de pouvoir étudier les vibrations d'un disque mince au cours d'une opération de tournage à grande vitesse, nous avons choisi de faire un bref rappel sur les différentes notions de la mécanique des milieux continus qui sont nécessaires à cette étude. Citons les tenseurs des contraintes, les tenseurs de déformations et les tenseurs de déplacements.

II.2. Tenseurs fondamentaux :

II.2.1. Tenseur des contraintes :

L'état des contraintes en tout point M d'un milieu continu, est entièrement défini par la connaissance du tenseur des contraintes, noté $\sigma(M)$. Ce tenseur de rang 2 et symétrique est représenté par :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}. \quad (\text{II.2})$$

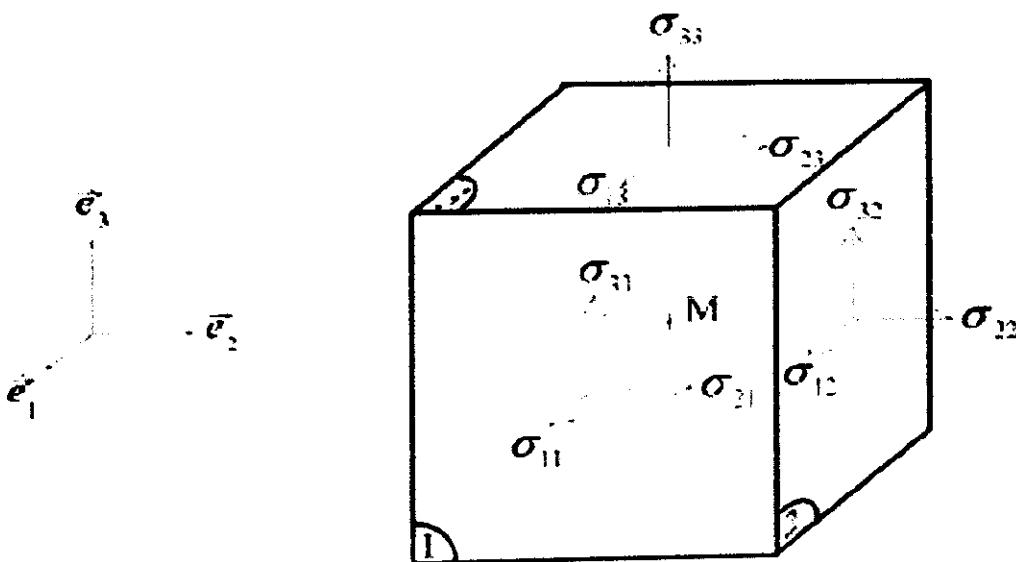


Fig. II.1 : Indice des composantes du tenseur.

II.2.2. Tenseur des déformations :

Soit ε_{ij} le tenseur du champ des déformations (appelé tenseur de Green Lagrange linéaires) qui est une matrice symétrique notée $[\varepsilon]$ et qui a pour composantes (en 3D) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (II.3)$$

Le tenseur des déformations est un tenseur de rang 2, symétrique :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (II.4)$$

Il s'écrit sous forme matricielle suivant :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (II.5)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (II.6)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad (II.7)$$

II.2.3. Tenseur Déplacements

Indépendamment dans chaque couche, la forme précise du champ de déplacement, à un mouvement de corps rigide infinitésimal près, à savoir les trois composantes :

$$u_i = u(x, y, z)e_1 + v(x, y, z)e_2 + w(x, y, z)e_3, u_i = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (II.8)$$

II.3. La loi de comportement en élasticité linéaire :

II.3.1. Définition

La loi de comportement va relier les deux tenseurs définis précédemment (déformations et contraintes). Comme cela se passe dans un ressort, on va généralement imposer que la contrainte soit linéairement liée à la déformation.

On peut introduire des termes de plus haut degré, pour simuler des comportements plus complexes et en particulier non linéaires, mais on préfère utiliser une fonction linéaire par morceaux pour approximer la courbe non linéaire qui relie contraintes et déformation.

La loi linéaire que nous allons considérer est de la forme $\sigma = k \varepsilon$ où k est une fonction linéaire. Les deux tenseurs σ et ε sont des matrices 3×3 symétriques et ont donc chacun 6 coefficients indépendants.

k comporte donc, 36 coefficients indépendants qui lient linéairement ceux des deux tenseurs. Un matériau, dans le cadre des approximations linéaires, va donc être représenté par 36 coefficients qui vont entièrement définir son comportement et peuvent être mesurés sur des matériaux réels par des séries de tests, qui sont dits rhéologiques.

II.3.2. La loi de Hooke

La loi linéaire introduite précédemment est souvent trop générale et peut être simplifiée.

Si l'on considère que le matériau est isotrope, c'est-à-dire qu'il a le même comportement dans toutes les directions (c'est très souvent le cas, sauf pour des matériaux fibreux à direction privilégiée, comme le bois ou les muscles).

Alors des raisons de symétrie font que parmi les 36 coefficients, deux seulement sont indépendants. La loi de comportement se simplifie et peut s'écrire :

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\varepsilon) I_3 + 2\mu \varepsilon \quad (\text{II.9})$$

Où I_3 est la matrice identité et tr la trace de la matrice. λ et μ sont les deux coefficients indépendants et s'appellent les constantes de Lamé.

Elles sont homogènes à des pressions, c'est à dire exprimées en Pa.

Ces tests mesurent en fait directement deux autres valeurs : le module d'Young E (homogène à une pression) et le coefficient de Poisson ν (sans unité). Ces valeurs sont liées aux coefficients de Lamé par les équations :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II.10})$$

Où

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (\text{II.11})$$

Avec, en inversant équation (II.9) :

$$\varepsilon = -\frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) I_3 + \frac{1+\nu}{E} \sigma \quad (\text{II.12})$$

E correspond à la rigidité du matériau et varie entre 10^5 et 10^{10} . ν mesure son incompressibilité et varie entre 0,0 (aucune préservation de volume, valeur théorique, en pratique ν est supérieur à 0,25) et 0,5 (matériaux parfaitement incompressibles).

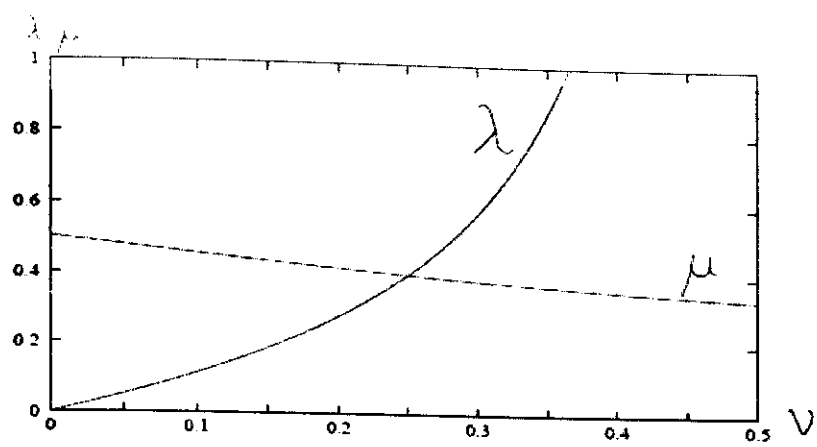


Fig. II.2 : Évolution de λ et μ lorsque ν varie entre 0 et 0,5, pour un E donné.

Noter que λ tend vers l'infini pour des matériaux incompressibles $\nu=0,5$.

En écrivant les tenseurs des contraintes et déformations en vecteur colonne de taille 6, on peut exprimer la loi de Hooke de manière matricielle.

II.4. Problèmes de contraintes planes et déformations planes :

Les méthodes de résolution des problèmes reposent sur la minimisation du nombre d'inconnues à l'aide d'hypothèses simplificatrices qui peuvent être strictement vérifiées pour la situation étudiée ou bien constituer une approximation du problème réel. L'une d'entre elle consiste à considérer que les phénomènes se passent dans un plan et à écrire des conditions simplifiées pour ce qui se passe dans la troisième direction. On analyse successivement les simplifications apportées par quelques-unes de ces hypothèses.

D'autres simplifications comme la symétrie dans un problème peuvent être exploitées.

II.4.1. Contraintes planes

Le tenseur des contraintes a la forme :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{II.13}$$

Où σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xz} sont indépendants de z .

L'axe z est donc, une direction principale et la contrainte principale associée est nulle.

La loi de comportement se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{II.14}$$

Avec:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{II.15})$$

D'où la forme du tenseur des déformations :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

Les déformations et les contraintes ne dépendent que des déplacements $u(x;y)$ et $v(x;y)$ parallèles aux axes x et y .

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

II.4.2. Déformations planes

Le champ de déplacement est de la forme :

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ w = 0 \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

On en déduit le tenseur des déformations :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

Avec

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{II.20})$$

En tout point du solide, la direction z est donc direction principale. Les déformations et les contraintes sont indépendantes de z .

La loi de comportement se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Avec

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{II.22})$$

D'où le tenseur des contraintes :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

II.5. Equations d'équilibre :

Soit $\vec{f}$ la force par unité de volume appliquée au point de coordonnées (x, y, z) du solide.

Soient $\vec{\gamma}$ l'accélération du point de coordonnées (x, y, z) et ρ la masse volumique du matériau.

II.5.1. Équilibre en translation

La projection sur x de la somme des forces appliquées au parallélépipède rectangle infiniment petit, de centre M et de côtés dx, dy, dz , est nulle. La Fig. II.1 représente ces contraintes.

$$\begin{aligned} & -\sigma_{xx}(x, y, z)dydz + \sigma_{xx}(x + dx, y, z)dydz \\ & -\sigma_{xy}(x, y, z)dx dz + \sigma_{xy}(x, y + dy, z)dx dz \\ & -\sigma_{xz}(x, y, z)dx dy + \sigma_{xz}(x, y, z + dz)dx dy + f_x dx dy dz \\ & = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dv + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dv + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dv + f_x dv = \rho dv \gamma_x \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Ou $dv = dx dy dz$. Il vient après simplification :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = \rho \gamma_x \quad (\text{II.25})$$

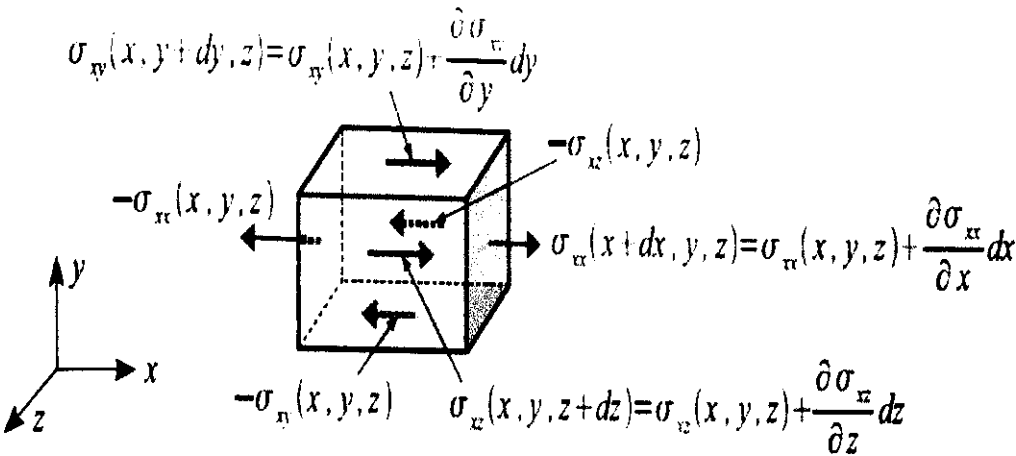


Fig. II.3 : Equilibre du parallélépipède suivant x.

De même :

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = \rho \gamma_y$$
(II.26)

Et

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho \gamma_z$$
(II.27)

II.5.2 Equilibre en rotation

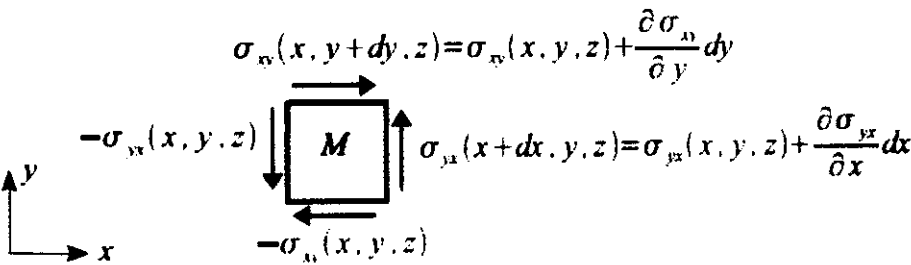


Fig. II.4 : Equilibre du parallélépipède en rotation suivant z.

La somme des moments des forces appliquées au parallélépipède est nulle. Il vient, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieurs à 3 :

$$dx \left(dy dz \sigma_{yx} \right) - dy \left(dx dz \sigma_{xy} \right) = 0$$
(II.28)

Soit : $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$

De même : $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$
(II.29)

Le tenseur des contraintes est donc symétrique :

$$[\sigma] = [\sigma]^T$$

II.5.3. Equilibre local :

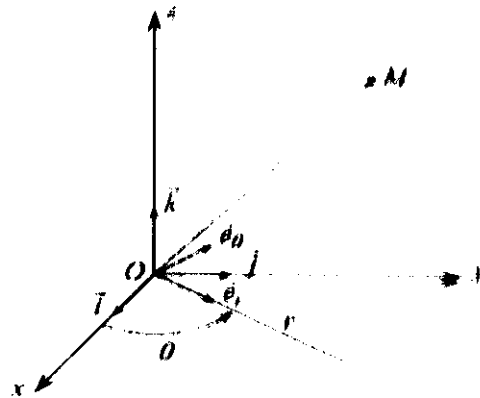


Fig. II.5 : Coordonnées cylindriques.

II.5.3.1. Tenseur des contraintes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}_{\left\{ \begin{smallmatrix} \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \end{smallmatrix} \right\}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{\left\{ \begin{smallmatrix} \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z \end{smallmatrix} \right\}} \quad (II.30)$$

Équation intrinsèque :

$$\text{div } \sigma + \vec{f}_v = \vec{0} \quad (II.31)$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3^v = 0 \end{cases} \quad (II.32)$$

En coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + f_r^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + f_\theta^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z^v = 0 \end{cases} \quad (II.33)$$

II.5.3.2. Tenseur de déformation :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}_{\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\theta} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}_{\left\{ \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z \right\}} \quad (\text{II.34})$$

En coordonnées cartésiennes :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

En coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} & 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} & 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ 2\varepsilon_{\theta r} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} & \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} & 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ 2\varepsilon_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} & 2\varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{II.36})$$

II.6. Comportement élastique d'un disque mince alésé :

Le but de cette partie est la détermination de la réponse élastique linearisée d'un disque simplifié axisymétrique d'axe z , présentant une section rectangulaire dans le plan (r, z) de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e comme sur la **Fig. II.6** On ne tient donc pas compte des variations d'épaisseur des disques réels. On supposera dans cette partie que le disque est libre d'effort en $r = r_i$ (existence d'un jeu entre l'arbre et le disque). Le disque est alors libre d'effort en $r = r_e$. On se restreint au contexte des petites perturbations et au cas des contraintes planes ($\sigma_{zz} = 0$). Le matériau a un comportement élastique isotrope linéarisé. La configuration initiale est supposée correspondre à un état naturel.

Le disque tourne à la vitesse angulaire $\omega \vec{e}_z$ supposée constante (ou variant très lentement). Dans ce problème, on va déterminer les champs de contraintes, de déformations et de

déplacements dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , d'origine O , attaché au disque. On travaille donc dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire $\omega \mathbf{e}_z$.

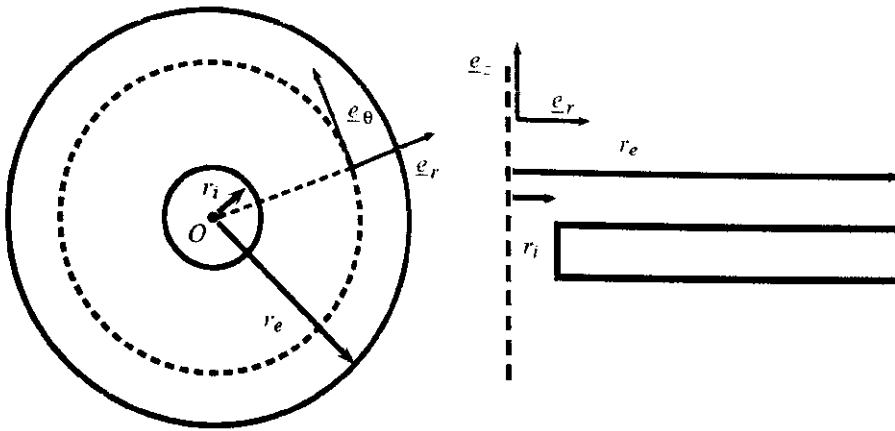


Fig. II.6 Schématisation d'un disque alésé.

II.6.1. Efforts centrifuges

Dans le référentiel tournant attaché au disque, les équations d'équilibre s'écrivent

$$\text{div } \sigma + \rho f = 0 \quad (\text{II.37})$$

$$\varepsilon_{rr} = u_r = (r \varepsilon_{\theta\theta})' = \varepsilon_{\theta\theta} + r \varepsilon_{\theta\theta}' \quad (\text{II.38})$$

II.6.2. Forme du tenseur des contraintes

On cherche l'état de contraintes dans le disque sous la forme :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

Le disque simplifié étant axisymétrique, les composantes cherchées ne dépendent pas de la variable θ . Les contraintes sont supposées indépendantes de la variable z . Les composantes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont donc recherchées comme des fonctions de la variable r seulement.

L'expression de la divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 en coordonnées cylindriques conduit à l'équation suivante portant sur les composantes de contraintes :

$$\sigma_{rr}' + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho \omega^2 r = 0 \quad (\text{II.40})$$

Où σ_{rr}' désigne la dérivée par rapport à r de σ_{rr} .

II.6.3. La condition de compatibilité

En utilisant une équation de compatibilité et les relations d'élasticité linéaire isotrope, on établit la relation suivante

$$(1+\nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = r(\sigma_{\theta\theta}' - \sigma_{rr}') \quad (\text{II.41})$$

Où σ_{rr}' (respect. $\sigma_{\theta\theta}'$) désigne la dérivée par rapport à r de σ_{rr} (respect. $\sigma_{\theta\theta}$).

En coordonnées cylindriques, une équation de compatibilité est :

$$\varepsilon_{rr} = u_r' = (r \varepsilon_{\theta\theta})' = \varepsilon_{\theta\theta} + r \varepsilon_{\theta\theta}' \quad (\text{II.42})$$

Où u_r est la composante radiale de déplacement. Les déformations sont liées aux contraintes par la loi d'élasticité isotrope :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E} - \frac{\nu \sigma_{\theta\theta}}{E} \quad (\text{II.43})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \frac{\nu \sigma_{rr}}{E} \quad (\text{II.44})$$

II.7. Détermination des contraintes dans le disque mince alésé en rotation :

L'intégration de l'équation (II.42) montre que les contraintes peuvent se mettre sous la forme

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho \omega^2 r^2}{8} (3 + \nu) + \frac{A}{r^2} + B \quad (\text{II.45})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\rho \omega^2 r^2}{8} (1 + 3\nu) - \frac{A}{r^2} + B \quad (\text{II.46})$$

Où A et B sont deux constantes d'intégration.

En éliminant $\sigma_{\theta\theta}$ dans (II.40) et (II.41), on obtient l'équation différentielle suivante portant sur σ_{rr} :

$$r \sigma_{rr}' + 3 \sigma_{rr}' + \rho \omega^2 r (3 + \nu) = 0 \quad (\text{II.47})$$

Les conditions aux limites permettant de déterminer A et B sont :

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = \sigma_{rr}(r = r_e) = 0 \quad (\text{II.48})$$

Ce qui donne

$$A = -\frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 r_i^2 r_e^2 \quad (\text{II.49})$$

$$B = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (r_i^2 - r_e^2)$$

(II.50)

On obtient finalement l'expression complète des contraintes :

$$\sigma_r = -\frac{3+\nu}{8} + \frac{\rho \omega^2}{r^2} (r^2 - r_i^2)(r^2 - r_e^2)$$

(II.51)

$$\sigma_{\theta} = \frac{\rho \omega^2 r^2}{8} (3+\nu) \left(\frac{r_i^2 - r_e^2}{r^4} + \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) - (1+3\nu)$$

(II.52)

II.7.1 Déformations dans le disque mince alésé en rotation

Les composantes du tenseur des déformations se déduisent des résultats précédents :

Les relations d'élasticité isotrope linéaires fournissent les déformations en fonction :

$$\varepsilon_r = \frac{\rho \omega^2 r^2}{8E} \left[(\nu^2 - 1) + (3+\nu)(1-\nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1+\nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right]$$

(II.53)

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\rho \omega^2 r^2}{8E} \left[(\nu^2 - 1) + (3+\nu)(1-\nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1+\nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right]$$

(II.54)

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_{\theta}) = -\frac{\nu}{E} \frac{\rho \omega^2 r^2}{4} \left[2(\nu^2 - 1) + (3+\nu)(1-\nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1+\nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right]$$

(II.55)

II.7.2 Déplacements dans le disque mince alésé en rotation

Comme le déplacement radial vaut $u_r = r \varepsilon_{\theta}$, il ne dépend pas de θ et est entièrement déterminée par :

$$u_r = r \varepsilon_{\theta} = \frac{\rho \omega^2 r^3}{8E} \left[(\nu^2 - 1) + (3+\nu)(1-\nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1+\nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right]$$

(II.56)

La recherche de la composante u_{θ} permet d'écrire les relations suivantes :

$$2\varepsilon_{r\theta} = -\frac{u_{\theta}}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

(II.57)

$$2\varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z}$$

(II.58)

Comme les deux déplacements sont nuls dans le volume du disque, on a $u_{\theta} = 0$ et on en déduit le déplacement radial :

$$u_r = 0$$

Cette composante représente une rotation infinitésimale d'angle α par rapport à l'axe e_z

L'intégration de l'équation (II.55) par rapport à z conduit à l'expression de u_z suivante :

$$u_z = \frac{\nu}{E} \frac{\rho \omega^2 r^2}{4} z \left(2(1+\nu) - (3+\nu) \frac{r_e^2}{r^2} \right) + f(r) \quad (\text{II.60})$$

Où une fonction f de la coordonnée r doit être introduite. Pour la déterminer, il faut calculer la déformation de cisaillement :

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\nu(1+\nu)}{2E} \rho \omega^2 r z + f'(r) \quad (\text{II.61})$$

$$u_z = \frac{\nu}{E} \frac{\rho \omega^2 r^2}{4} z \left(2(1+\nu) - (3+\nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) \quad (\text{II.62})$$

Dans la suite du problème on travaille avec les expressions simplifiées des contraintes, déformations et déplacements ainsi déterminées.

En vertu de la symétrie du disque et des données du problème par rapport au plan $z = 0$, la condition suivante est attendue :

$$u_z(r, z = 0) = 0, \forall r \in [r_i, r_e] \quad (\text{II.63})$$

Cette condition de symétrie entraîne la nullité de la fonction $f(r)$ dans (II.61)). Le déplacement u_z prend donc la forme annoncée. Les expressions simplifiées des contraintes, déformations et déplacements du disque mince alésé en rotation sont rassemblées dans le Tableau II.1

II.8. Contexte infinitésimal

Le contexte des petites perturbations qui a présidé aux développements précédents exige en particulier que les déformations restent infinitésimales.

Préciser les conditions correspondantes, en fonction de la vitesse de rotation et des caractéristiques du disque. On ne cherchera pas dans ce problème à analyser les conditions associées au caractère infinitésimal des rotations.

Examinons d'abord la déformation circonférentielle,

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho \omega^2}{8E} \left((\nu^2 - 1) r^2 + (3+\nu) \left((1-\nu)(r_i^2 + r_e^2) + (1+\nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^2} \right) \right) \quad (\text{II.64})$$

II.9. Comportement élastique linéarisé d'un disque mince non alésé

Si le disque n'est pas alésé, les expressions simplifiées des contraintes et des déformations régnant dans un disque mince non alésé peuvent être établies en suivant une démarche similaire à celle mise en œuvre dans la situation précédente. On peut vérifier que ces expressions simplifiées coïncident avec l'état limite où le rayon intérieur $r_i \rightarrow 0$.

II.9.1. Contraintes, déformations et déplacements

Dans le cas du disque non alésé, l'équation différentielle à résoudre pour trouver σ_r est toujours donnée par (II.49) lorsque le comportement du disque reste purement élastique. Les contraintes sont donc de la forme (II.51) et (II.52). L'absence de singularité attendue en $r = 0$ n'implique que la constante $A = 0$. La constante B est alors déterminée à l'aide de la condition à la limite $\sigma_r(r = r_e) = 0$, et $r_i = 0$. Finalement, les contraintes sont

$$\sigma_r = \frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8}(r_e^2 - r^2) \quad (II.65)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho\omega^2}{8}(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu)) \quad (II.66)$$

Les déformations associées aux contraintes par la loi d'élasticité isotrope sont :

$$\varepsilon_r = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - 3r^2(1+\nu)) \quad (II.67)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+\nu)) \quad (II.68)$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\rho\omega^2}{4E}(r_e^2(3+\nu) - 2r^2(1+\nu)) \quad (II.69)$$

Les déplacements $u_r = r\varepsilon_\theta$ et u_z tel que $\frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{zz}$ s'en déduisent :

$$u_r = \frac{\rho\omega^2 r}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+\nu)) \quad (II.70)$$

$$u_z = -\nu z \frac{\rho\omega^2}{4E}(r_e^2(3+\nu) - 2r^2(1+\nu)) \quad (II.71)$$

On la condition de symétrie $u_z = 0$ à $z = 0$ a été utilisée. Les contraintes, déformations et déplacements du disque mince non alésé en rotation sont rassemblées dans le tableau II.2

II.10. Limite d'élasticité

Les contraintes limite en fonction de la vitesse de rotation et du rayon r du disque sont données par :

$$\sigma_{\theta\theta}^{\min} = \sigma_{\theta\theta}(r = r_e) = \frac{\rho\omega^2}{4}(1-\nu)r_e^2 \quad (\text{II.72})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{\max} = \sigma_{\theta\theta}(r = 0) = \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_e^2 \quad (\text{II.73})$$

La vitesse limite est donc donnée par :

$$\rho\omega_e^2 = \frac{8\sigma_u}{r_e^2(3+\nu)} \quad (\text{II.74})$$

Elle est $\sqrt{2}$ fois plus grande que la valeur obtenue dans le cas du disque mince avec un alésage infinitésimal d'après les résultats. En l'absence d'alésage, l'état de contrainte au centre est equibiaxial en $r = 0$:

$$\sigma_r(r = 0) = \sigma_{\theta\theta}(r = 0) \quad (\text{II.75})$$

Tab. II.1 : Récapitulatif des champs de contraintes, de déformations et de déplacements dans un disque mince alésé animé d'une vitesse de rotation ω (expressions simplifiées).

Contraintes :

$$\sigma_r = -\frac{3+\nu}{8} + \frac{\rho\omega^2}{r^2}(r^2 - r_i^2)(r^2 - r_e^2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8} \left((3+\nu) \left(\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} + \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) - (1+3\nu) \right)$$

Déformations :

$$\varepsilon_r = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left(3(\nu^2 - 1) + (3+\nu)((1-\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4}) \right)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left((\nu^2 - 1) + (3+\nu)((1-\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4}) \right)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2 r^2}{4} \left(2(1+\nu) - (3+\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right)$$

Déplacements :

$$u_r = r\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^3}{8E} \left((\nu^2 - 1) + (3+\nu)((1-\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4}) \right)$$

$$u_z = \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2 r^2}{4} z \left(2(1+\nu) - (3+\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right)$$

Tab II.2: Récapitulatif des champs de contraintes, de déformations et de déplacements dans un disque mince non alésé animé d'une vitesse de rotation ω (expressions **simplifiées**).

Contraintes :

$$\sigma_r = \frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8}(r_e^2 - r^2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8}(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu))$$

Déformations :

$$\varepsilon_r = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - 3r^2(1+\nu))$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+\nu))$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\rho\omega^2}{4E}(r_e^2(3+\nu) - 2r^2(1+\nu))$$

Déplacements

$$u_r = \frac{\rho\omega^2 r}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+\nu))$$

$$u_z = -\nu z \frac{\rho\omega^2}{4E}(r_e^2(3+\nu) - 2r^2(1+\nu))$$

II.11. Solution, au sens de Saint Venant, du problème de l'elastostatique d'un disque mince en rotation

Le problème du disque mince (alésé ou non) en rotation est repris ici en restant dans le cadre des contraintes planes ($\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$) mais en acceptant une dépendance en z pour les contraintes radiale et circonférentielle :

$$\sigma = \sigma_r(r, z) e_r \otimes e_r + \sigma_{\theta\theta}(r, z) e_\theta e_\theta \quad (\text{II.76})$$

Une telle dépendance a été reconnue comme nécessaire au cours de la démarche mise en œuvre aux paragraphes précédents. Le disque est d'épaisseur $2H$.

II.12. Expressions générales des contraintes

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho \omega^2 r = 0 \quad (\text{II.77})$$

$$(1+\nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = r \left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} - \nu \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \right) \quad (\text{II.78})$$

La dérivée partielle de σ_{rr} par rapport à r est alors solution de l'équation

$$r \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial^2 r} + 3 \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} + \rho \omega^2 r (3 + \nu) = 0 \quad (\text{II.79})$$

Les expressions générales des contraintes s'en déduisent :

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho \omega^2}{8} (3 + \nu) r^2 + \frac{A(z)}{r^2} + B(z) \quad (\text{II.80})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\rho \omega^2}{8} (1 + 3\nu) r^2 - \frac{A(z)}{r^2} + B(z) \quad (\text{II.81})$$

Où des fonctions A et B ne sont plus constantes mais des fonctions qui dépendent de la variable z seulement.

II.13. Equations de compatibilité

Les équations de compatibilité en coordonnées cylindriques ont une forme complexe. On va procéder d'une manière différente en utilisant certaines relations directes entre déformations et déplacements

Les déplacements non nuls u_r et u_z sont des fonctions de r et z . En particulier, la composante du déplacement u_r n'est autre que $r \varepsilon_{\theta\theta}$. La condition de compatibilité $\varepsilon_{rr} = \partial(r \varepsilon_{\theta\theta}) / \partial r$ en fait déjà été utilisée, de sorte que cette relation est automatiquement satisfaite. Par suite,

$$u_r = r \varepsilon_{\theta\theta} = r(\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}) / E = -\frac{\rho \omega^2}{8E} (1 - \nu^2) r^3 - \frac{A(z)}{Er} (1 + \nu) + B(z) r \frac{(1 - \nu)}{E} \quad (\text{II.82})$$

Le déplacement u_z se déduit de l'état de contraintes déterminé précédemment au travers de la relation.

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{zz} = -\nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\rho \omega^2}{2} \frac{\nu(1 + \nu)}{E} r^2 - 2 \frac{\nu}{E} B(z) \quad (\text{II.83})$$

Qui s'intègre en :

$$u_z = \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \frac{\rho \omega^2}{2} r^2 z - \frac{2\nu}{E} \int B(z) dz + f_z(r) \quad (\text{II.84})$$

La fonction f_z à déterminer ne dépend que de la variable r . La solution recherchée n'admet

pas de cisaillement σ_{rz} :

$$\sigma_{rz} = 2\mu\epsilon_{rz} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \tag{II.85}$$

Cela se traduit par la relation

$$-\frac{A'(z)}{Er}(1+\nu) + B'(z)r \frac{1-\nu}{E} + \frac{\rho\omega^2}{E}\nu(1+\nu)rz + f_z'(z) = 0 \tag{II.86}$$

La dérivation de cette équation par rapport à z permet d'établir que

$$A''(z) = 0 \tag{II.87}$$

$$B(z) = -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} \frac{\rho\omega^2}{2} z^2 + B_1 z + B_0 \tag{II.88}$$

Les fonctions cherchées sont donc de la forme :

$$A(z) = A_1 z + A_0, \quad B(z) = -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} \frac{\rho\omega^2}{2} z^2 + B_1 z + B_0 \tag{II.89}$$

En revenant alors à la relation initiale (Equ. II.49), on obtient :

$$-\frac{1+\nu}{Er} A_1 + \frac{1-\nu}{E} r B_1 + f_z' = 0 \tag{II.90}$$

Ce qui fournit la fonction f_z cherchée :

$$f_z(r) = \frac{1+\nu}{E} A_1 \log \frac{r}{r_i} - B_1 \frac{1-\nu}{2E} (r^2 - r_i^2) \tag{II.81}$$

La constante d'intégration a été prise telle que

$$u_z(r = r_i, z = 0) = 0. \tag{II.92}$$

II.13.1. Détermination complète des contraintes

La détermination complète des contraintes est présentée dans le cas où la solution présente une symétrie par rapport au plan $z = 0$. Cette condition de symétrie implique que

$$u_z(r, z = 0) = 0, \forall r \tag{II.93}$$

La fonction f_z dont on a obtenu l'expression de f_z' trouvée en II.81 conduit alors

$$B_1 = \frac{1}{2} A_1 = 0 \tag{II.94}$$

Les contraintes et déformations présentent donc une dépendance en z^2 et des termes constants, en plus de la dépendance vis-à-vis de r .

A ce stade, il faut distinguer le cas du disque alésé et le cas du disque massif.

II.13.2. Disque alésé

La forme générale des contraintes a été obtenue :

$$\sigma_r = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r^2 + \frac{A}{r^2} + B_2 z^2 + B_0 \quad (\text{II.95})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\rho\omega^2}{8}(1+3\nu)r^2 - \frac{A}{r^2} + B_2 z^2 + B_0 \quad (\text{II.96})$$

Le vecteur contrainte en $r = r_i$ et $r = r_e$ est dirigé selon e_r et prend les valeurs :

$$\sigma_r(r = r_i) = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_i^2 + \frac{A}{r_i^2} + B_2 z^2 + B_0 \quad (\text{II.97})$$

$$\sigma_r(r = r_e) = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_e^2 + \frac{A}{r_e^2} + B_2 z^2 + B_0 \quad (\text{II.98})$$

On voit qu'il n'est pas possible de trouver de constantes A et B_0 permettant de remplir la condition de bord extérieur libre.

$$\sigma_r(r = r_i) = \sigma_{\theta\theta}(r = r_e) = 0 \quad (\text{II.99})$$

à toute cote z . On va donc se contenter de rechercher une solution permettant de remplir cette condition en moyenne seulement.

La condition à la limite $t = 0$ ne sera donc pas remplie point par point sur les bords $r = r_i$ et r_e

mais seulement en résultante sur un secteur infinitésimal du disque $r_i d\theta \times 2H$ ou $r_e d\theta \times 2H$:

$$R = r_e d\theta \int_{r=r_e}^t dz = r_e d\theta \left(\int_{r=r_e} \sigma_r dz \right) e_r = 0 \quad (\text{II.100})$$

$$= r_e d\theta \left(-\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_e^2 2H + \frac{A}{r_e^2} 2H + 2B_2 \frac{H^3}{3} + B_0 2H \right) e_r$$

Une condition analogue doit être écrite en $r = r_i$. Deux équations portant sur les constantes d'intégration A et B_0 s'en déduisent

$$B_0 + \frac{A}{r_i^2} = \frac{\rho\omega^2}{8} (3 + \nu)r_i^2 - B_2 \frac{H^2}{3} \quad (\text{II.101})$$

$$B_0 + \frac{A}{r_e^2} = \frac{\rho\omega^2}{8} (3 + \nu)r_e^2 - B_2 \frac{H^2}{3} \quad (\text{II.102})$$

Il est effectivement possible de remplir la condition de résultante nulle au bord grâce aux valeurs :

$$B_0 = \frac{\rho\omega^2}{8} (3 + \nu)(r_e^2 + r_i^2) - B_2 \frac{H^2}{3} \quad (\text{II.103})$$

$$A = -\frac{\rho\omega^2}{8} (3 + \nu)r_i^2 r_e^2 \quad (\text{II.104})$$

Il faut encore vérifier que le moment résultant sur chacun des bords infinitésimaux est bien nul. Un argument de symétrie permet en fait d'assurer cette condition.

La solution obtenue est une solution acceptable au sens de Saint-Venant si le disque est suffisamment mince :

$$\frac{H}{r_e} \ll 1 \quad ; \quad \frac{H}{r_i} \ll 1$$

En effet, les surfaces sur lesquelles les résultantes ont été calculées possèdent alors deux dimensions caractéristiques, à savoir H et $r_{i,e} d\theta$, qui sont faibles devant la dimension $r_e - r_i$ du disque. Les expressions que nous allons proposer sont alors proches de la solution réelle pour $r_i \ll r \ll r_e$, c'est-à-dire en tout point assez loin des bords du disque alésé, en vertu du principe de Saint-Venant.

Voici enfin les expressions complètes des contraintes régnant dans un disque mince alésé, en régime élastostatique :

$$\sigma_r = -\frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8r^2}(r^2 - r_i^2)(r^2 - r_e^2) + \rho\omega^2 \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} \left(\frac{H^2}{3} - z^2\right) \quad (\text{II.105})$$

$$\sigma_\theta = -\frac{\rho\omega^2}{8r^2}((1+3\nu)r^4 - (3+\nu)((r_i^2 + r_e^2)r^2 + r_i^2 r_e^2)) + \rho\omega^2 \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} \left(\frac{H^2}{3} - z^2\right) \quad (\text{II.106})$$

II.13.3 Disque non alésé

Dans le cas du disque massif, les expressions des contraintes sous la forme (II.58) et (II.59) sont valables à condition de prendre $A = 0$, c'est à dire d'exclure toute singularité en $r = 0$. A nouveau il n'est pas possible de satisfaire la condition de bord libre en tout point (r_e, z) du bord extérieur. Il est possible toutefois de trouver une constante B_0 permettant d'annuler le torseur résultant sur tout secteur infinitésimal $(r_e, d\theta)$ du bord extérieur :

$$B_0 = \frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8} r_e^2 - B_2 \frac{H^2}{3} \quad (\text{II.107})$$

La solution proposée ici est acceptable pour les disques minces

$$H/r_e \ll 1 \quad (\text{II.108})$$

en vertu du principe de Saint-Venant. Voici enfin les expressions des contraintes qui s'établissent dans un disque mince de rayon r_e et d'épaisseur $2H$:

$$\sigma_r = -\frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8} (r_e^2 - r^2) + \rho\omega^2 \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} \left(\frac{H^2}{3} - z^2 \right) \quad (\text{II.109})$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho\omega^2}{8} ((3+\nu)r_e^2 - (1+3\nu)r^2) + \rho\omega^2 \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} \left(\frac{H^2}{3} - z^2 \right) \quad (\text{II.110})$$

Il apparaît clairement que les contributions en z^2 et H^2 sont numériquement négligeables dans les expressions précédentes par rapport aux autres contributions, dès lors que $H/r_e \ll 1$.

Ce fait justifie a posteriori la pertinence des expressions simplifiées des contraintes données dans les tableaux Tab. II.1 et Tab. II.2.

II.13.4 Déformations et déplacements

Voici les déformations et déplacements au sein d'un disque mince alésé en rotation :

TAB. II.3: Déformations et déplacements au sein d'un disque mince sans alésage en rotation.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\rho \omega^2 r^2}{8E} \left((3\nu^2 - 1) + (3 + \nu)(1 - \nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1 + \nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right) \\ &\quad + \frac{\rho \omega^2}{2E} \nu(1 + \nu) \left(\frac{H^2}{3} - z^2 \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\rho \omega^2 r^2}{8E} \left((\nu^2 - 1) + (3 + \nu)(1 - \nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1 + \nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right) \\ &\quad + \frac{\rho \omega^2}{2E} \nu(1 + \nu) \left(\frac{H^2}{3} - z^2 \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\rho \omega^2 r^2}{8E} \left((\nu^2 - 1) + (3 + \nu)(1 - \nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1 + \nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right) \\ &\quad + \frac{\rho \omega^2}{2E} \nu(1 + \nu) \left(\frac{H^2}{3} - z^2 \right) \\ u_r &= \frac{\rho \omega^2 r^3}{8E} \left((\nu^2 - 1) + (3 + \nu)(1 - \nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1 + \nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right) \\ &\quad + \frac{\rho \omega^2}{2E} \nu(1 + \nu) \left(\frac{H^2}{3} - z^2 \right) r \\ u_z &= \frac{\nu \rho \omega^2 r^2}{E} \left(2(1 + \nu) + (3 + \nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) z - \frac{\rho \omega^2 \nu(1 + \nu)}{E(1 - \nu)} \left(\frac{H^2}{3} - z^2 \right) z \end{aligned}$$

TAB. II.4: Déformations et déplacements au sein d'un disque mince sans alésage en rotation.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\rho \omega^2}{8E} (1 + \nu)(3 + \nu) r^2 - 3(1 + \nu) r^2 + \frac{\rho \omega^2}{2E} \nu(1 + \nu) \left(\frac{H^2}{3} - z^2 \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\rho \omega^2}{8E} (1 + \nu)(3 + \nu) r^2 - (1 + \nu) r^2 + \frac{\rho \omega^2}{2E} \nu(1 + \nu) \left(\frac{H^2}{3} - z^2 \right) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu \rho \omega^2}{4E} ((3 + \nu) r^2 - 2(1 + \nu) r^2) - \frac{\rho \omega^2 \nu(1 + \nu)}{E(1 - \nu)} \left(\frac{H^2}{3} - z^2 \right) \\ u_r &= \frac{\rho \omega^2}{8E} ((1 + \nu)(3 + \nu) r^2 - (1 + \nu) r^2) r + \frac{\rho \omega^2 \nu(1 + \nu)}{2E} \left(\frac{H^2}{3} - z^2 \right) r \\ u_z &= \frac{\rho \omega^2 \nu(1 + \nu)}{E(1 - \nu)} \left(\frac{H^2}{3} - z^2 \right) z \end{aligned}$$



Il apparaît clairement que les contributions en z^2 et H^2 sont numériquement négligeables dans les expressions précédentes par rapport aux autres contributions, dès lors que : $H / r_e \ll 1$. Ce fait justifie a posteriori la pertinence des expressions simplifiées des déformations et déplacements donnés dans les tableaux Tab II.1 et Tab II.2.

II.14 : Vibrations

II.14.1 Recherche de l'équation du mouvement

- Equation différentielle du mouvement d'un disque mince stationnaire.

Un disque mince, homogène et isotrope d'épaisseur uniforme, encastré à son contour intérieur et libre à son contour extérieur est présenté en (Fig.II.1).

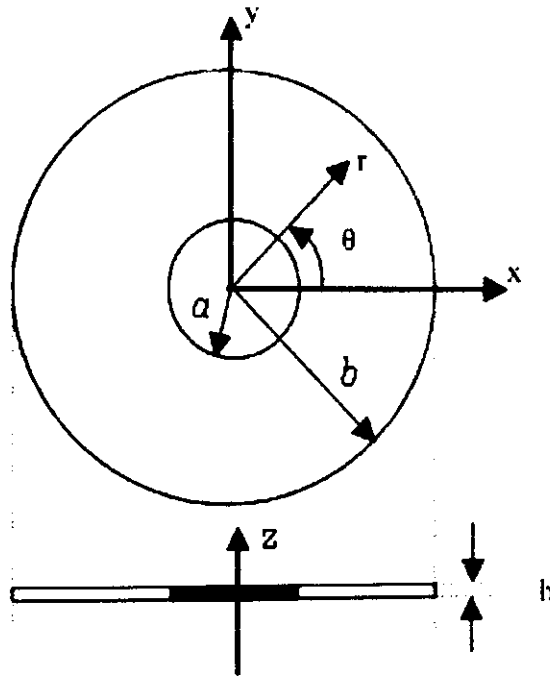


Fig. II.7: Disque circulaire

Avec: a rayon intérieur, b rayon extérieur, h épaisseur, E module d'Young, ρ masse volumique, ν coefficient de poisson.

Le plan x - y défini le plan moyen de la plaque et z représente la distance d'un point de la plaque au plan moyen. La plaque étant supposée mince, les effets secondaires sont négligés.

Le déplacement d'un point du plan moyen suivant z est noté w et les expressions classiques des déformations s'écrivent :

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{Equ.II.1})$$

Les déformations sont reliées aux contraintes par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = D \varepsilon \quad (\text{Equ. II.2})$$

L'expression générale de l'énergie de déformation est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int \varepsilon' \sigma d\tau \quad (\text{Equ. II.3})$$

L'énergie cinétique, pour une épaisseur constante, est donnée :

$$T = \frac{\rho h}{2} \int \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (\text{Equ. II.4})$$

Avec $L = T - U$ Lagrangien du système et w degré de liberté.

$$L = \frac{1}{2} \int \left[\rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - D \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (\text{Equ. II.5})$$

L'application du Lagrangien pour un élément du disque, libre de chargement est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial w'} \right] - \frac{\partial L}{\partial w} = 0 \quad (\text{Equ. II.6})$$

Ceci donne l'équation différentielle du mouvement transverse d'un élément du disque stationnaire en coordonnées cartésiennes :

$$D \left[\frac{d^4 w(x,y,t)}{dx^4} + \frac{d^4 w(x,y,t)}{dy^4} + 2 \frac{d^4 w(x,y,t)}{dx^2 dy^2} \right] + \rho h \frac{d^2 w(x,y,t)}{dt^2} = 0 \quad (\text{Equ. II.7})$$

Expression qui peut s'écrire sous la forme :

$$D \nabla^4 w(x,y,t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{Equ. II.8})$$

Où $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$: Opérateur bi harmonique.

Cette équation différentielle peut être également exprimée en coordonnées polaires :

$$D \nabla^2 \nabla^2 w(r,\theta,t) + \rho h \frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{Equ. II.9})$$

Avec :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (\text{Equ. II.10})$$

II.14.2 Extraction des fréquences propres

La solution générale de l'équation (Equ.II.10) peut être donnée par :

$$w(r, \theta, t) = R_n(r)(\cos(n\theta) + \sin(n\theta))\sin(\alpha t) \quad (\text{Equ.II.11})$$

Où :

$$R_n(r) = \eta_{1,n}J_n(\alpha r) + \eta_{2,n}Y_n(\alpha r) + \eta_{3,n}I_n(\alpha r) + \eta_{4,n}K_n(\alpha r)$$

et :

$$\alpha^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad (\text{Equ.II.12})$$

On applique les conditions aux limites, pour trouver les valeurs de α .

Le contour intérieur ($r = r_i$) est encastré, ce qui induit un déplacement et une pente nuls. Soit :

$$w(r, \theta, t) \Big|_{r=r_i} = 0 \quad (\text{Equ.II.13})$$

$$\frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_i} = 0 \quad (\text{Equ.II.14})$$

Le contour extérieur ($r = r_e$) est libre. Cette condition aux limites se traduit par un moment et une force transverse, définis par les conditions de Kirchhoff nulles. Exprimée en fonction de la flèche w il vient :

$$\left(\frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} \right) \right) \Big|_{r=r_e} = 0 \quad (\text{Equ.II.15})$$

$$\left(\frac{\partial \nabla_r^2 w(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial \theta} \right) \right) \Big|_{r=r_e} = 0 \quad (\text{Equ.II.16})$$

L'ensemble des conditions aux limites peut s'écrire sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{1,n} \\ \eta_{2,n} \\ \eta_{3,n} \\ \eta_{4,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Equ.II.17})$$

Où:

$$[M]_n \cdot \{\eta\}_n = 0 \quad (\text{Equ.II.18})$$

Il faut donc chercher les valeurs de α_n pour lesquelles le déterminant de la matrice des conditions aux limites $[M]_n$ s'annule :

$$\det([M]_n) = 0 \quad (\text{Equ.II.19})$$

Les valeurs propres de la matrice $[M]_n$, notées α_{mn} sont cherchées numériquement. Elles sont reliées à la pulsation propre ω_{mn} du disque :

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D \alpha_{mn}^4}{\rho h}} \quad (\text{Equ.II.20})$$

Les fréquences propres sont alors, données par :

III.1 Démarches suivies dans ANSYS Workbench pour notre simulation

Fig III.1: Schéma du projet crée dans ANSYS Workbench.

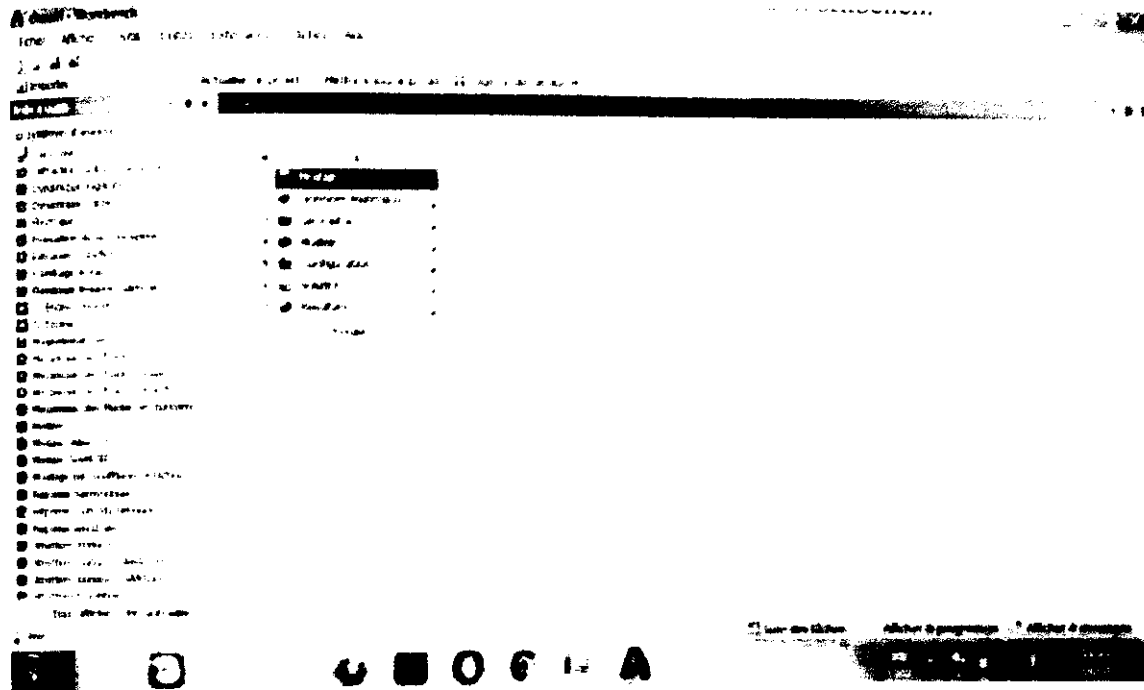


Fig. III.2: Fixation des propriétés du matériau du disque, sa masse volumique, module de Young et coefficient de poisson.

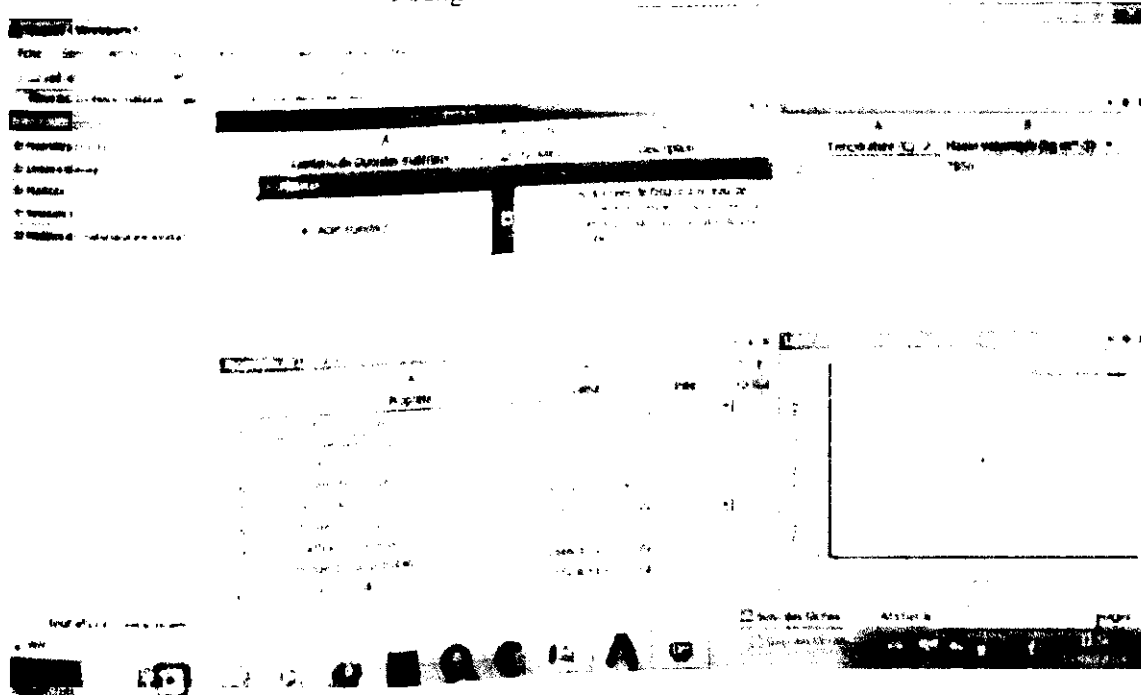


Fig. III.3: Création ou importation du modèle géométrique du disque dans le module de dessin design modeler



Fig.III.4: Création ou importation du modèle géométrique du disque

Dans le module de résolution



Fig. III.5. Schéma du modèle de simulation et les conditions de chargement
Support du rotor dans l'alignement du disque (step) et la condition de chargement

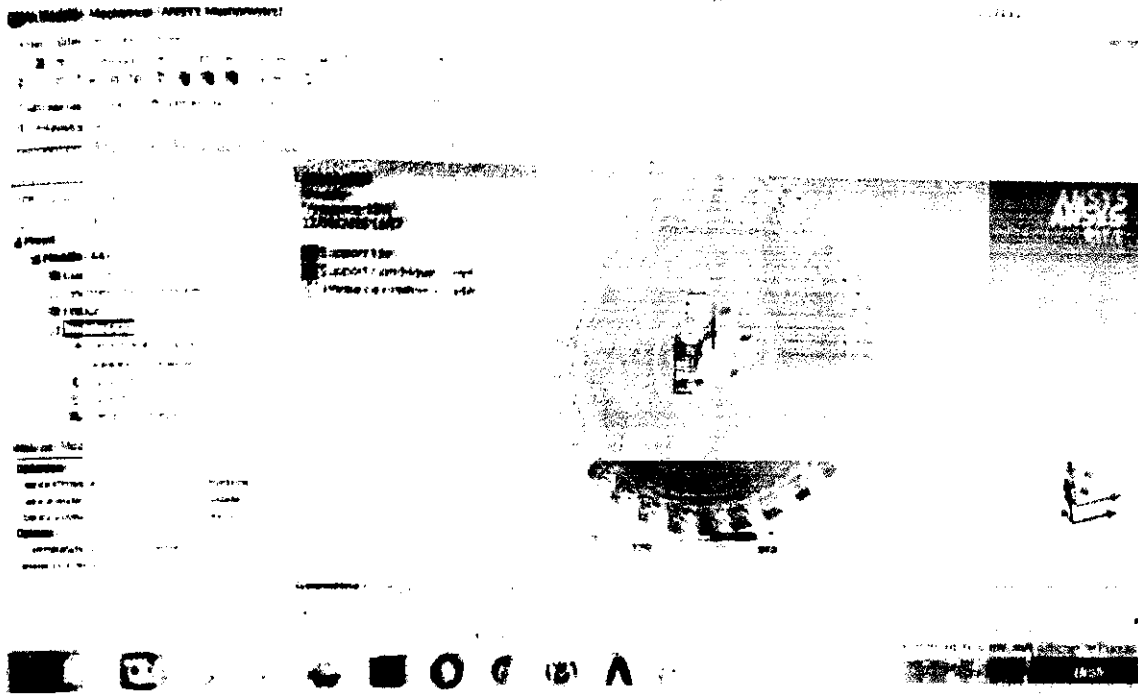


Fig. III.6. Disque avec la condition de chargement

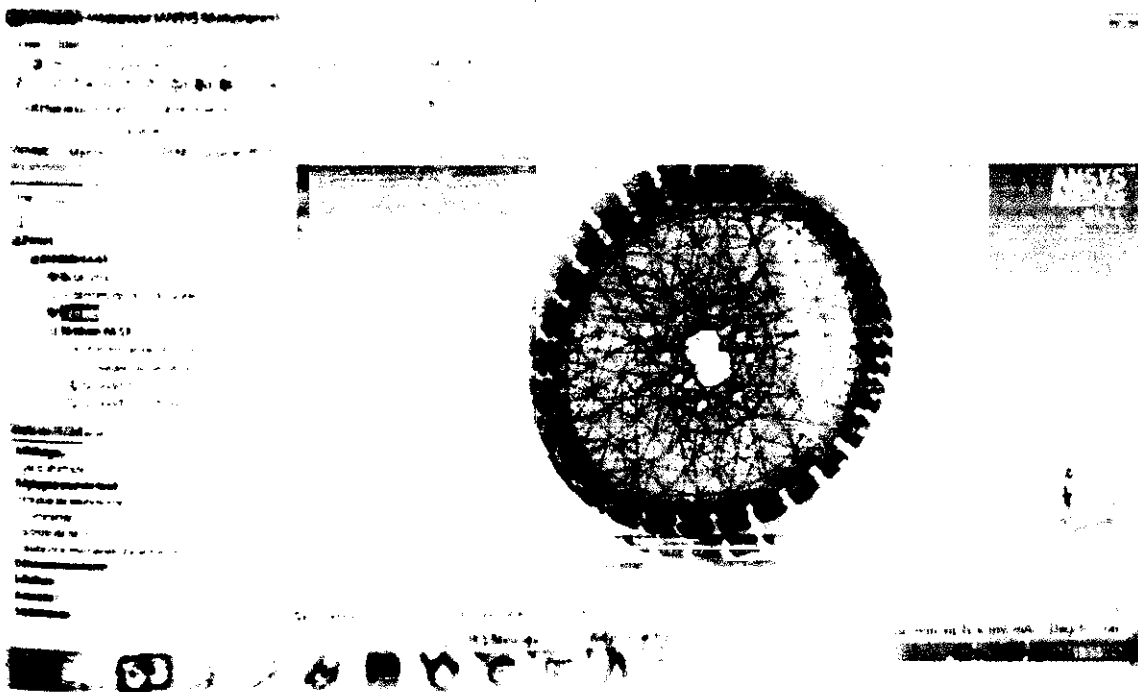


Fig. III.7: Solution visualisant les déformées modales ainsi que les fréquences propres en Hz

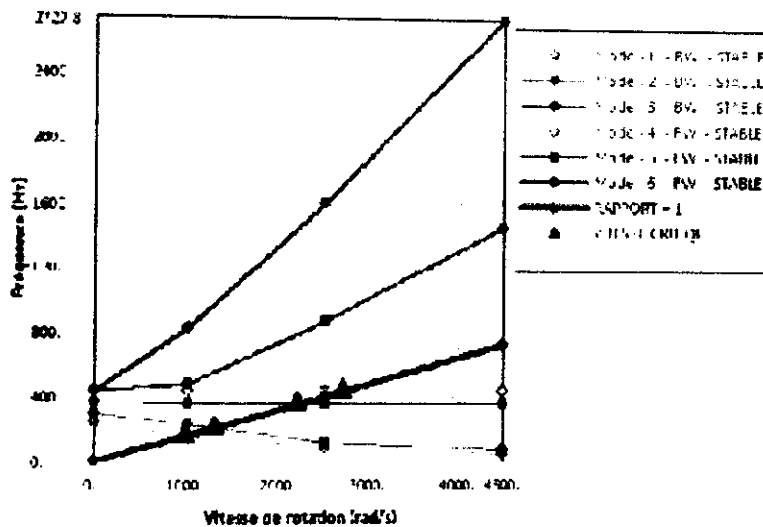
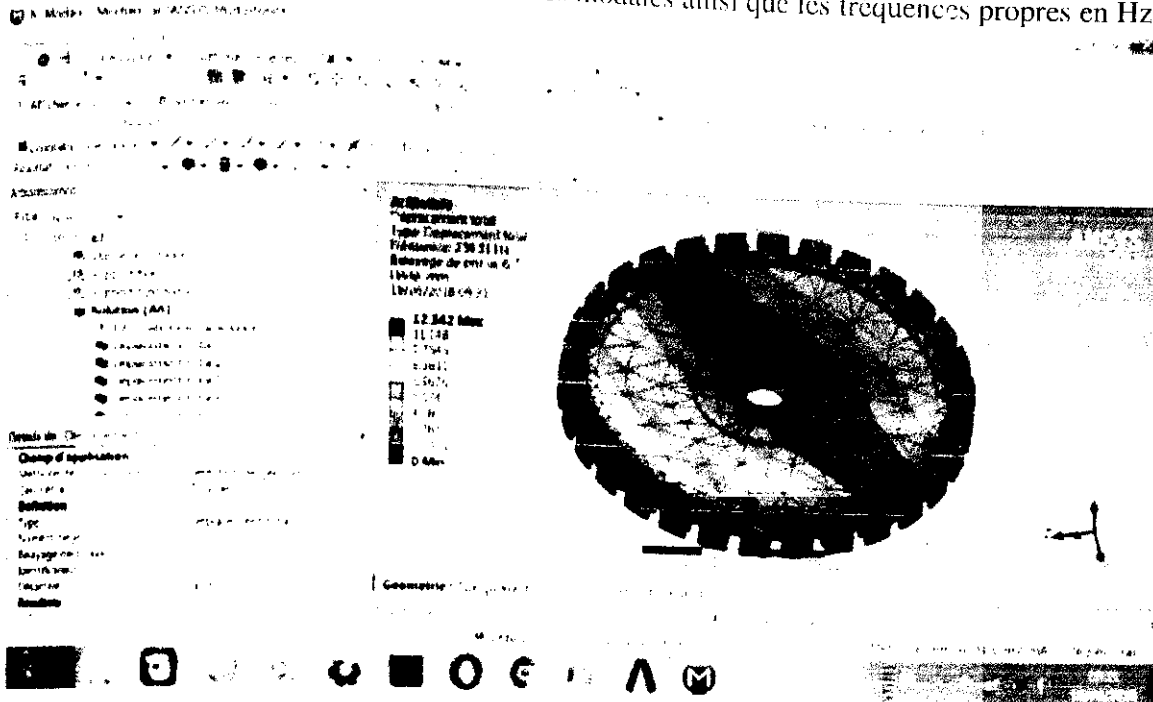


Fig. III.8: Exemple d'insertion et de visualisation du diagramme de Campbell dans la solution trouvée.

Les valeurs des vitesses critiques, les modes concernés et la stabilité des modes sont récapitulés dans un tableau qui suit le diagramme de Campbell. (Voir partie simulation).

III.2 Simulation du disque de turbine

III.2.1 Modèle géométrique du disque :

A cause de la complexité des formes des logements des aubes, le modèle géométrique du disque n'a pas été conçu dans le module de dessin Design Modeler d'ANSYS pour cela, on eu recours au logiciel CATIA, puis on a importé ce modèle sous forme d'un fichier CATPART.

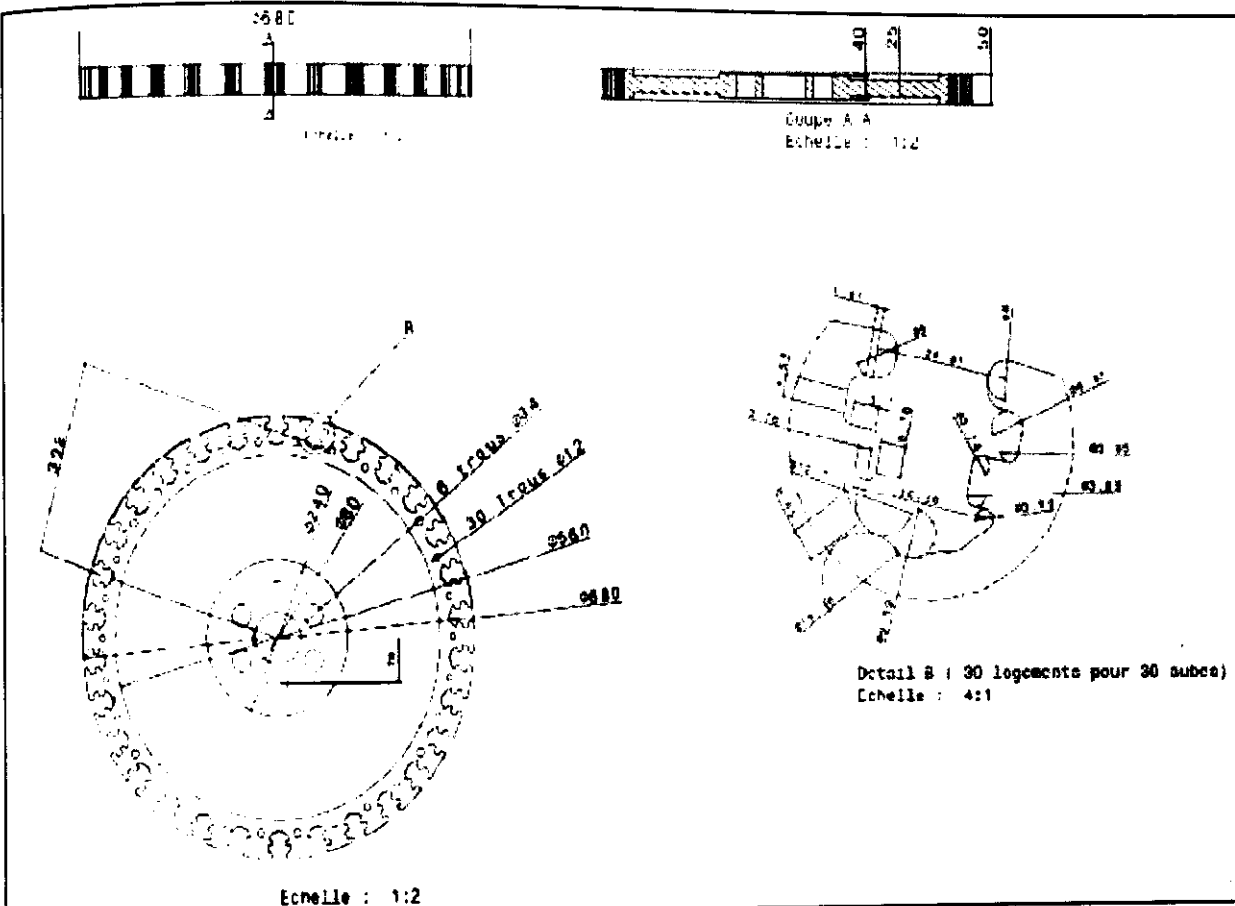


Fig.III.9 Mise en plan du disque modélisé

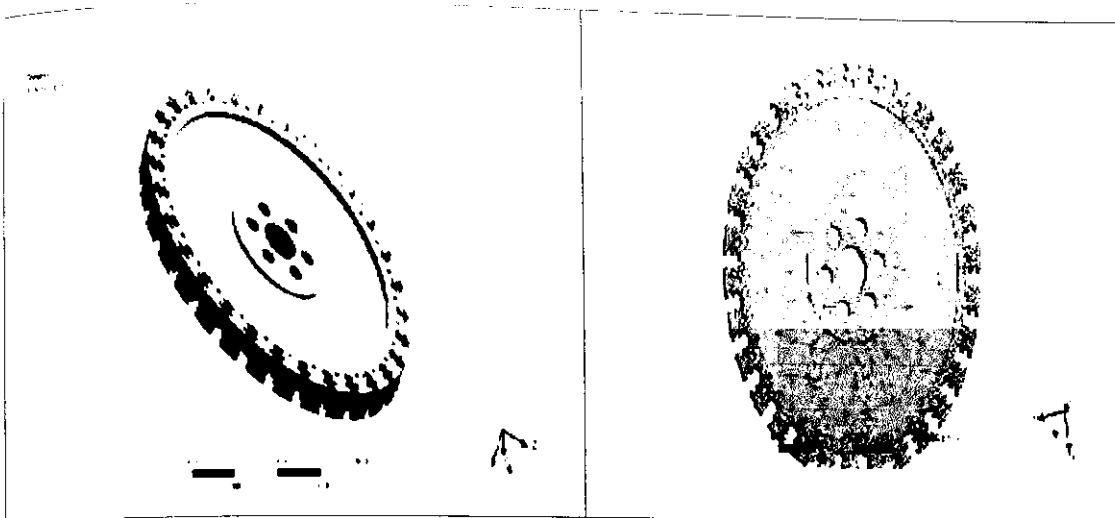


Fig. III.10 gauche: Le modèle 3D du disque importé. A droite : Disque maillée

(Nombre de nœuds : 112241; nombre d'éléments : 60809)

Données relatives aux matériaux :

Matériaux	Alliage d'aluminium
Masse volumique	4450 kg/m ³
Module de Young	$E = 2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson	0.3

Conditions initiales et chargement :

Vitesse de rotation	0 à 4500 rad/s.
Charges	Support cylindrique au trou central du disque.

Le tableau suivant récapitule les valeurs des fréquences propres correspondant à tous les modes pour les quatre vitesses de rotation du disque.

Tab.III.1 Tableau récapitulant toutes les fréquences propres du disque pour les différentes vitesses de rotation.

Vitesses de rotation en rd/s	Numéro du mode	Fréquence amortie [Hz]
0 (disque stationnaire)	1.	174.44
	2.	210.51
	3.	174.44
	4.	210.51
	5.	276.17
	6.	289.95
1000	1.	369.17
	2.	375.88
	3.	791.05
	4.	799.17
	5.	1258.2
	6.	1302.5
2500	1.	1311.9
	2.	1413.2
	3.	1421.9
	4.	1597.5
	5.	1629.1
	6.	1874.6
4500	1.	1904
	2.	2152.8
	3.	2173.9
	4.	2461.1
	5.	2473.3
	6.	2751.8

III.2.2 Déformées modales, déplacements max, fréquences et nombre de diamètres et de cercles nodaux

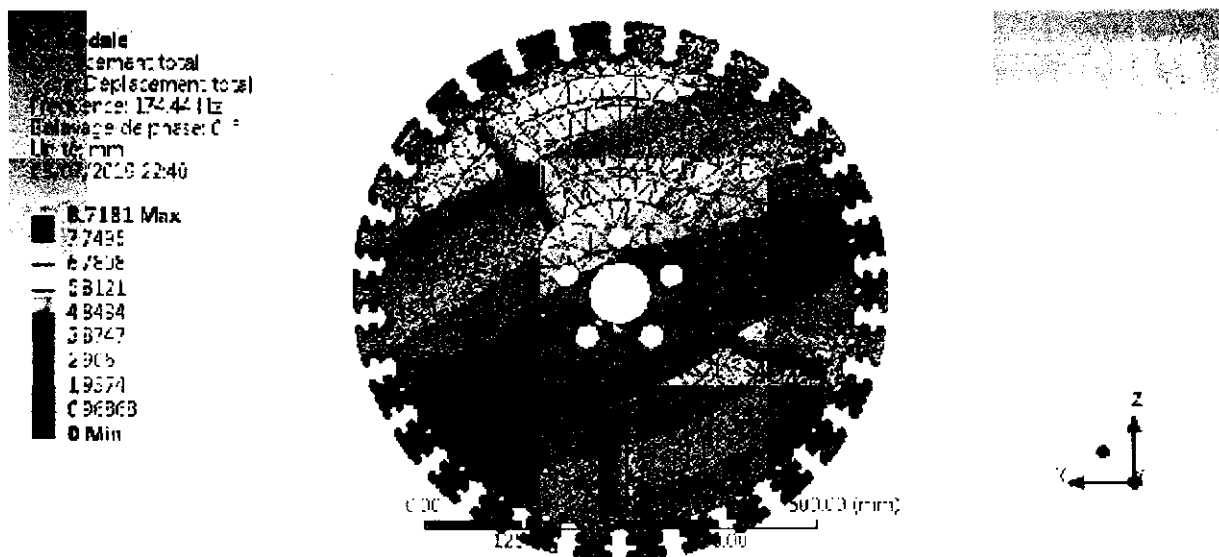


Fig.III.11 Déformée du mode 1 pour le disque stationnaire (vitesse de rotation nulle)

Déplacement max.= 8.7181 mm, fréquence=147.44 Hz,

(nb. Diamètres nodaux: 1, nb. Cercles nodaux: 0)

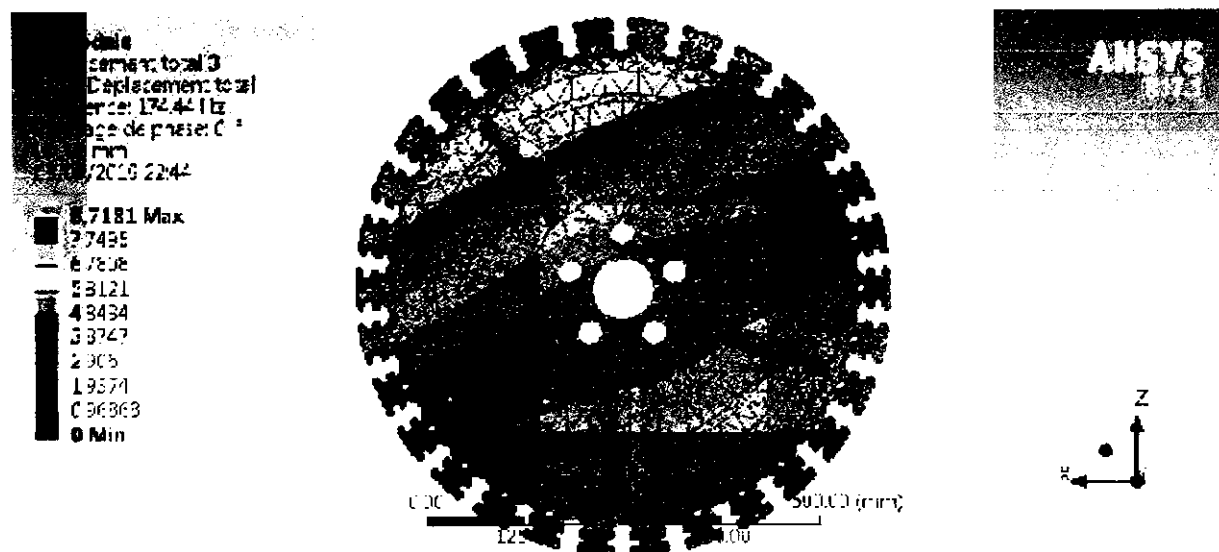


Fig.III.12 Déformée du mode 3 pour le disque stationnaire (vitesse de rotation nulle)

Déplacement max.= 8.7181 mm, fréquence=174.44 Hz,

(nb. Diamètres nodaux: 0, nb. Cercles nodaux: 0)

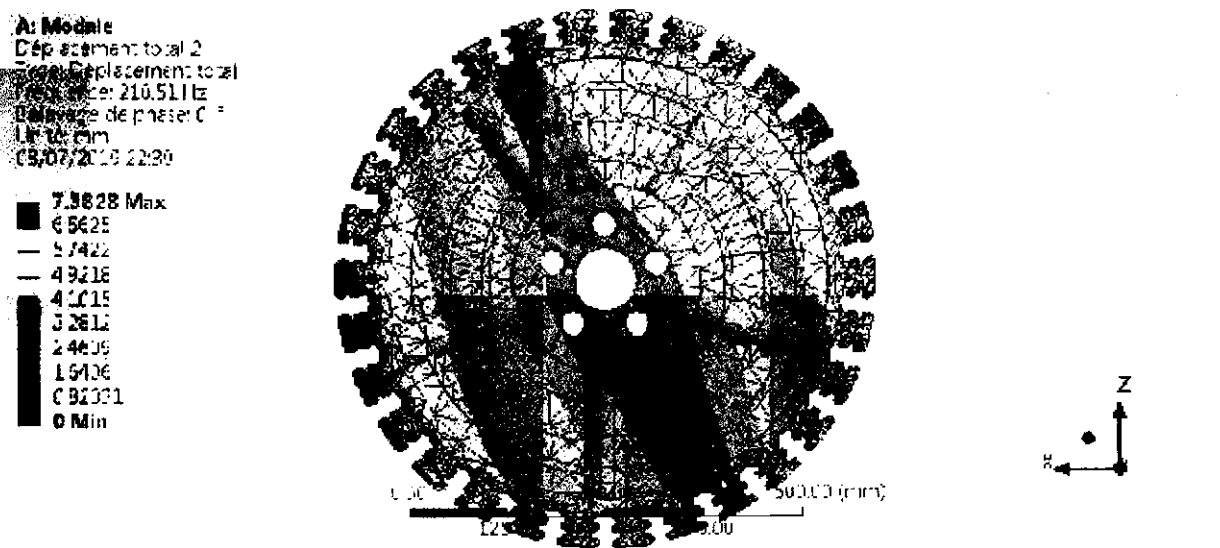


Fig.III.13 Déformée du mode 4 pour le disque stationnaire (vitesse de rotation nulle)
Déplacement max.= 7.3828 mm, fréquence=210.51 Hz,
(nb. Diamètres nodaux: 2, nb. Cercles nodaux: 0)

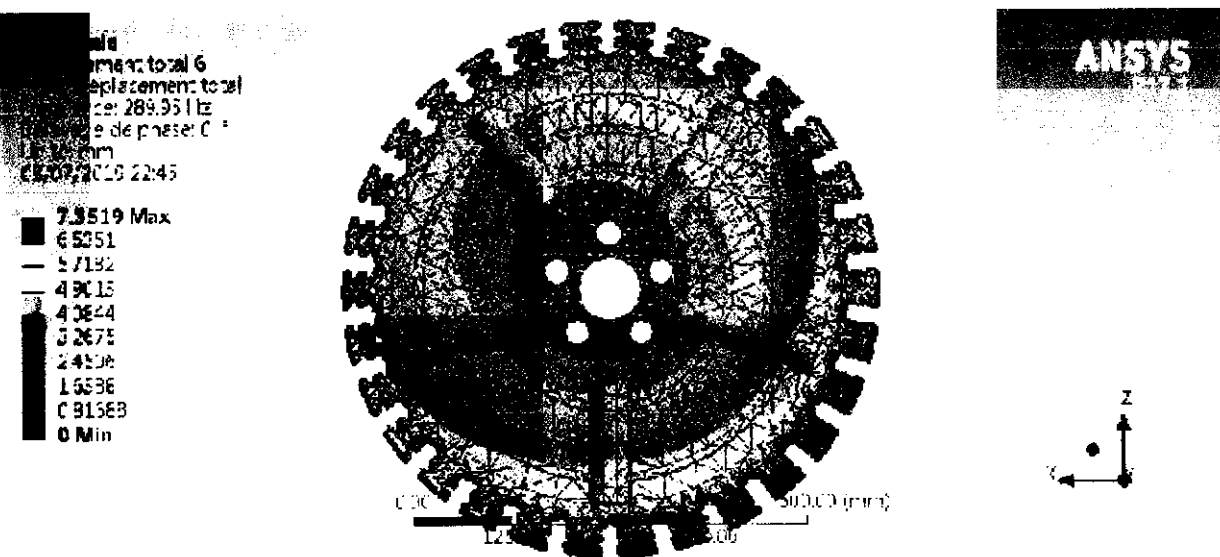


Fig.III.14 Déformée du mode 6 pour le disque stationnaire (vitesse de rotation nulle)
Déplacement max.= 7.3519 mm, fréquence=289.95 Hz,
(nb. Diamètres nodaux: 0, nb. Cercles nodaux: 0)

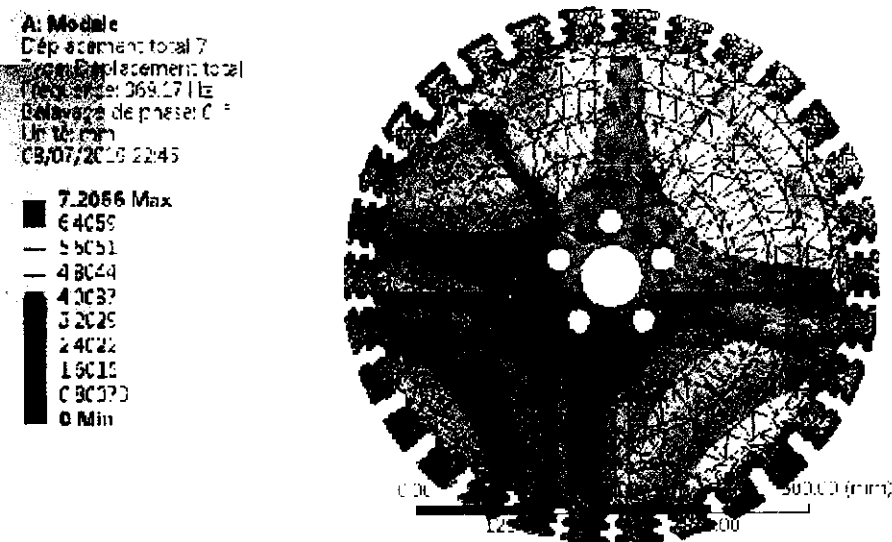


Fig.III.15 Déformée du mode 1 pour la vitesse de rotation 1000 rd/s
Déplacement max.= 7.2066 mm, fréquence=369.17 Hz,
(nb. Diamètres nodaux: 1, nb. Cercles nodaux: 0)

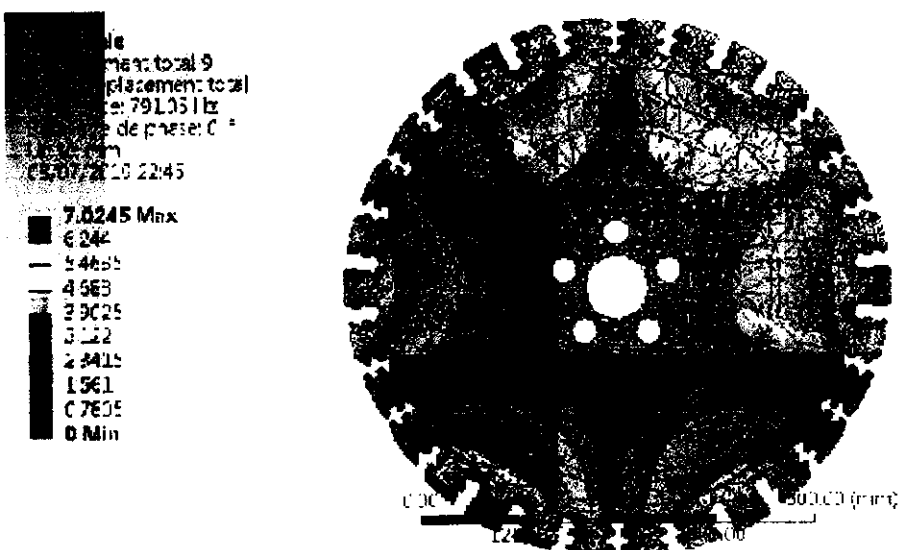


Fig.III.16 Déformée du mode 3 pour la vitesse de rotation 1000 rd/s
Déplacement max.= 7.0245 mm, fréquence=791.05 Hz,
(nb. Diamètres nodaux: 0, nb. Cercles nodaux: 0)

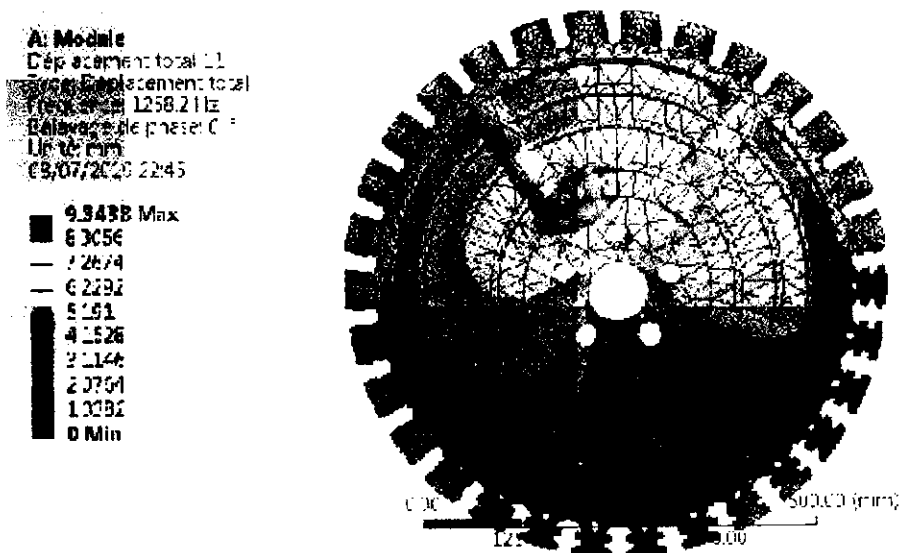


Fig.III.17 Déformée du mode 5 pour la vitesse de rotation 1000 rd/s
 Déplacement max.= 9.3438 mm, fréquence=1258.2 Hz,
 (nb. Diamètres nodaux: 1, nb. Cercles nodaux: 0)

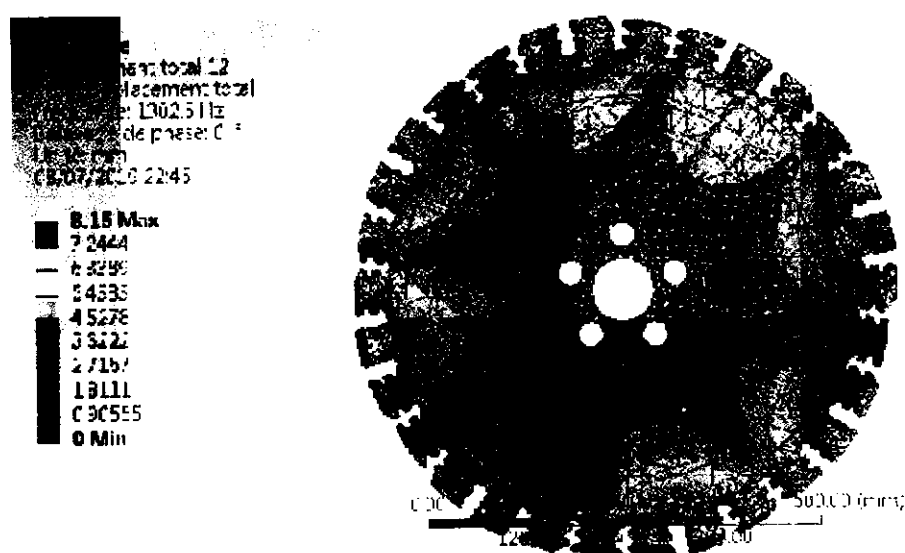


Fig.III.18 Déformée du mode 6 pour la vitesse de rotation 1000 rd/s
 Déplacement max.= 8.15 mm, fréquence=1302.5 Hz,
 (nb. Diamètres nodaux: 2, nb. Cercles nodaux: 0)

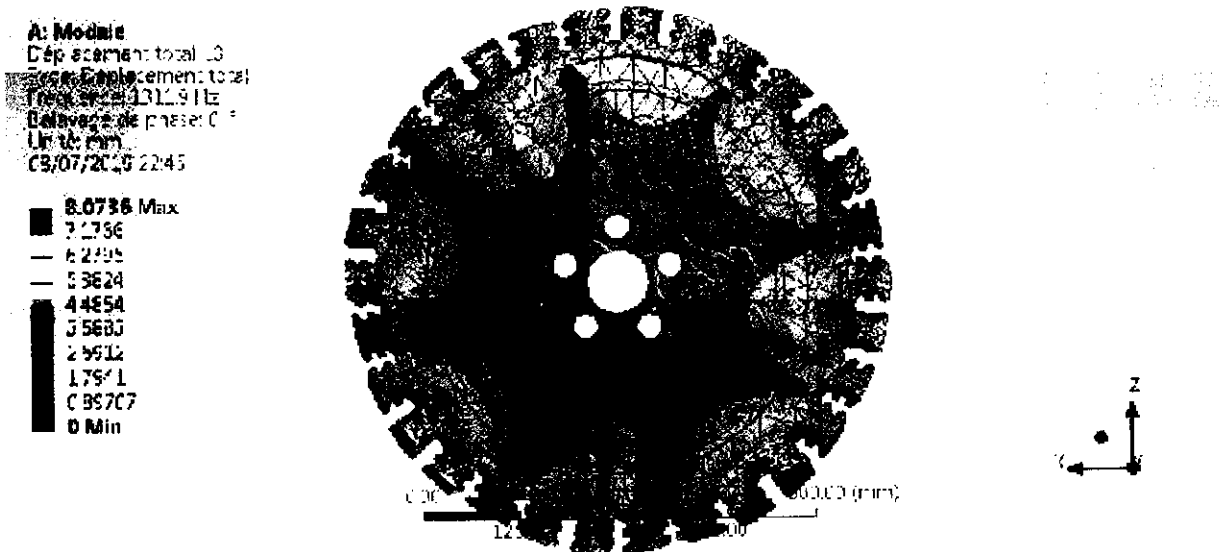


Fig.III.19 Déformée du mode 1 pour la vitesse de rotation 2500 rd/s
 Déplacement max.= 8.0736 mm, fréquence=1311.9 Hz,
 (nb. Diamètres nodaux: 1, nb. Cercles nodaux: 0)

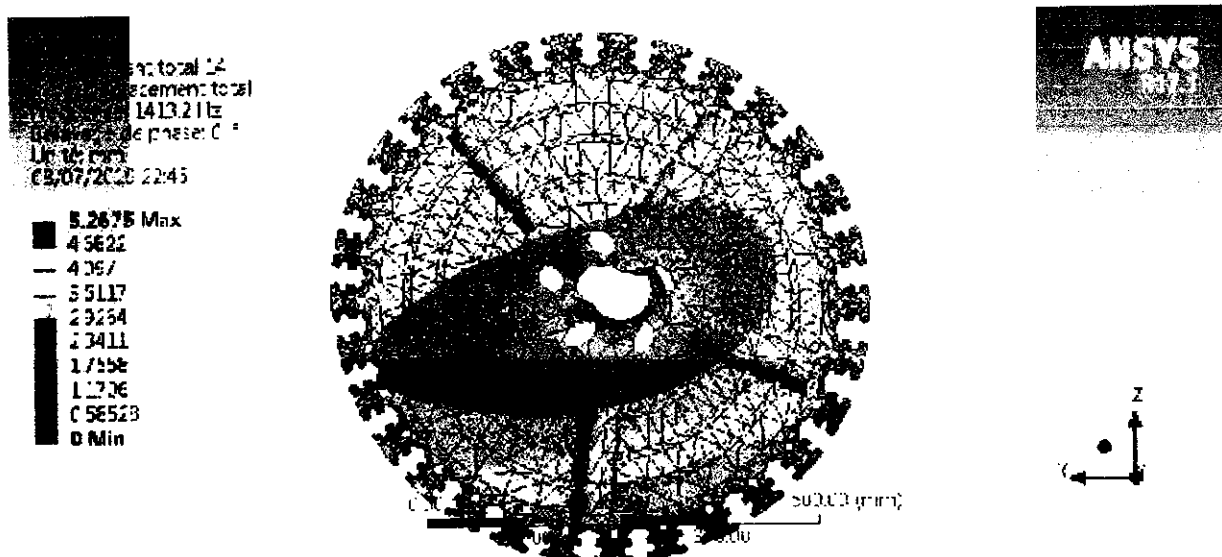


Fig.III.20 Déformée du mode 2 pour la vitesse de rotation 2500 rd/s
 Déplacement max.= 5.2675 mm, fréquence=1413.2 Hz,
 (nb. Diamètres nodaux: 2, nb. Cercles nodaux: 0)

A: Mod 3
Déplacement total: 4.8138 mm
Fréquence: 1421.9 Hz
Déplacement de phase: 0°
Unité: mm
09/07/2010 22:45

4.8138 Max
4.2785
3.744
3.2092
2.6742
2.1394
1.6046
1.0697
0.53465
0 Min

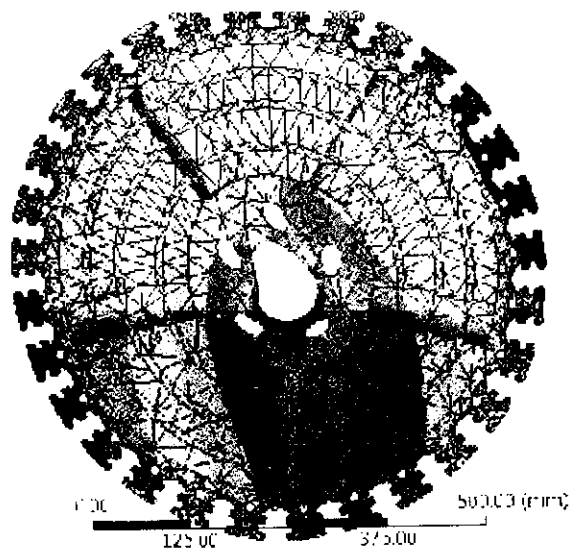


Fig.III.21 Déformée du mode 3 pour la vitesse de rotation 2500 rd/s
Déplacement max.= 4.8138 mm, fréquence=1421.9 Hz,
(nb. Diamètres nodaux: 0, nb. Cercles nodaux: 0)

total: 16
Déplacement total: 8.26 mm
Fréquence: 1597.5 Hz
Déplacement de phase: 0°
Unité: mm
09/07/2010 22:45

8.26 Max
7.3423
6.4245
5.5067
4.5889
3.6711
2.7533
1.8356
0.91778
0 Min

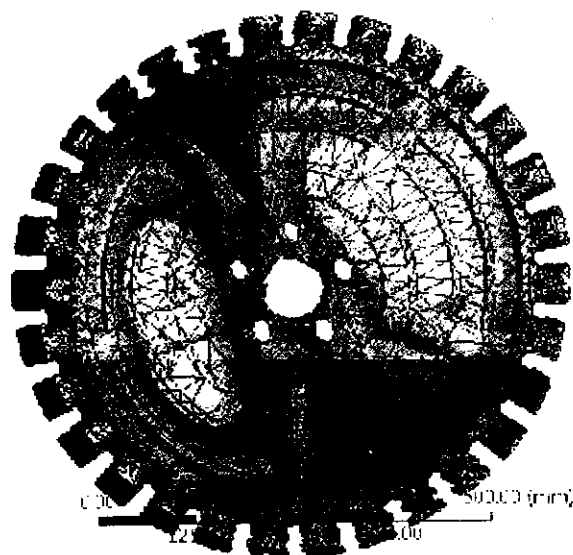


Fig.III.22 Déformée du mode 4 pour la vitesse de rotation 2500 rd/s
Déplacement max.= 8.26 mm, fréquence=1597.5 Hz,
(nb. Diamètres nodaux: 0, nb. Cercles nodaux: 0)

A: Modale
 Déplacement total: 17
 Fréquence: 1629.1 Hz
 Balayage de phase: C
 Unité: mm
 03/07/2010 22:45

11.408 Max
 10.14
 8.8726
 7.905
 6.9275
 5.97
 4.9025
 3.935
 2.9675
 1.999
 0 Min

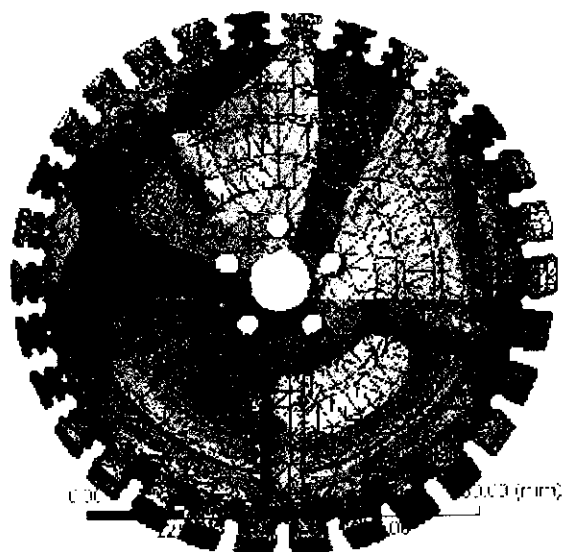


Fig.III.23 Déformée du mode 5 pour la vitesse de rotation 2500 rd/s
 Déplacement max.= 11.408 mm, fréquence=1629.1 Hz,
 (nb. Diamètres nodaux:1, nb. Cercles nodaux: 0)

total: 18
 ément: total
 1874.6 Hz
 Balayage de phase: C
 Unité: mm
 03/07/2010 22:46

11.093 Max
 9.9604
 8.8278
 7.9955
 6.1627
 4.9332
 3.9576
 2.4651
 1.2325
 0 Min

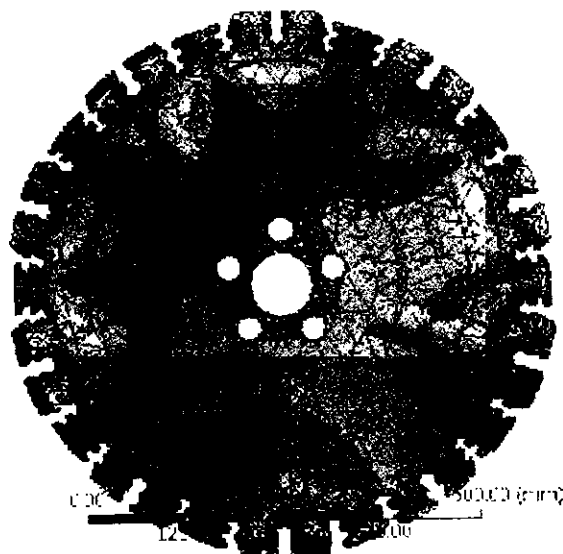


Fig.III.24 Déformée du mode 6 pour la vitesse de rotation 2500 rd/s
 Déplacement max.= 11.093 mm, fréquence=1874.6 Hz,
 (nb. Diamètres nodaux: 2, nb. Cercles nodaux: 0)

A: Mode 1
Déplacement total: 19
Type: Déplacement total
Fréquence: 1904.0 Hz
Déplacement de phase: 0°
Unité: mm
09/07/2010 22:46

10.969 Max
9.7532
8.5214
7.3127
6.0636
4.8751
3.5552
2.4576
1.2136
0 Min

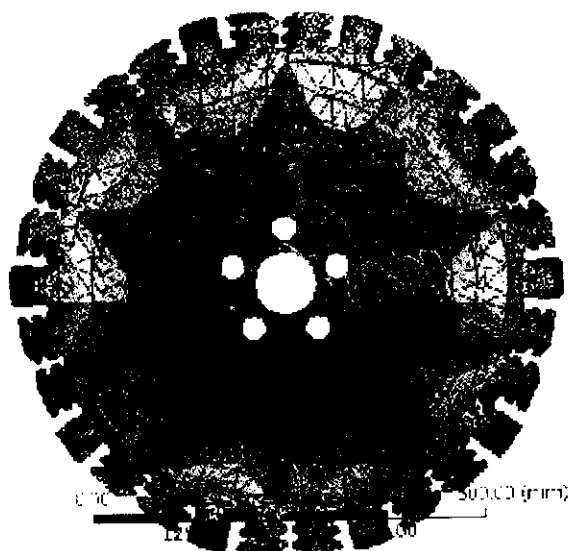


Fig.III.25 Déformée du mode 1 pour la vitesse de rotation 4500 rd/s
Déplacement max.= 10.969 mm, fréquence=1904.0 Hz,
(nb. Diamètres nodaux: 1, nb. Cercles nodaux: 0)

total 20
Déplacement total
Fréquence: 2152.8 Hz
Déplacement de phase: 0°
Unité: mm
09/07/2010 22:46

10.87 Max
9.5625
8.4547
7.2499
6.0391
4.8313
3.5235
2.4156
1.2076
0 Min

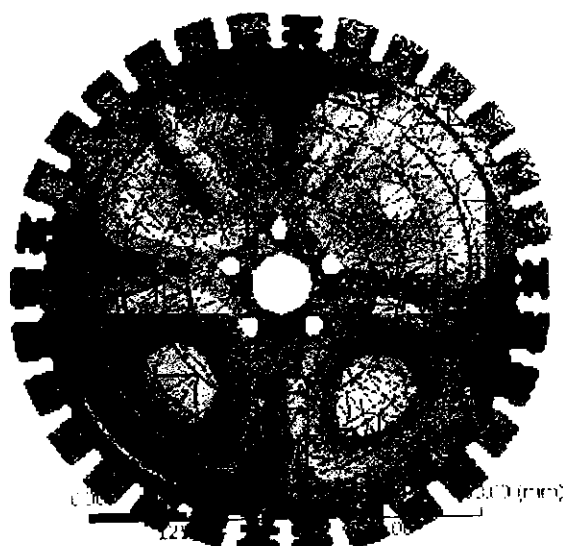


Fig.III.26 Déformée du mode 2 pour la vitesse de rotation 4500 rd/s
Déplacement max.= 10.87 mm, fréquence=2152.8 Hz,
(nb. Diamètres nodaux: 2, nb. Cercles nodaux: 0)

A: Modale
Déplacement total: 21
Type: Déplacement total
Fréquence: 2173.9 Hz
Déphasage de phase: 0°
Unité: mm
09/07/2010 22:46

9.1681 Max
8.1454
7.1237
6.112
5.0934
4.0747
3.055
2.0375
1.0187
0 Min

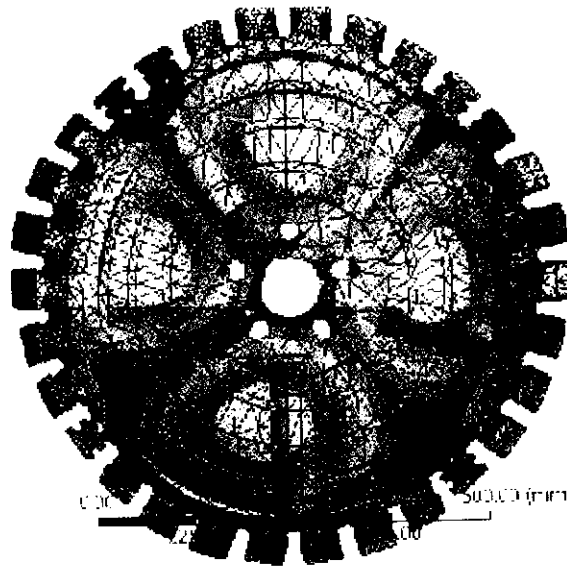


Fig.III.27 Déformée du mode 3 pour la vitesse de rotation 4500 rd/s
Déplacement max.= 9.1681 mm, fréquence=2173.9 Hz,
(nb. Diamètres nodaux: 0, nb. Cercles nodaux: 0)

total 22
Déplacement total: 22
Type: Déplacement total
Fréquence: 2461.1 Hz
Déphasage de phase: 0°
Unité: mm
09/07/2010 22:46

10.674 Max
9.4584
8.3022
7.1155
5.9202
4.7442
3.5581
2.3721
1.185
0 Min

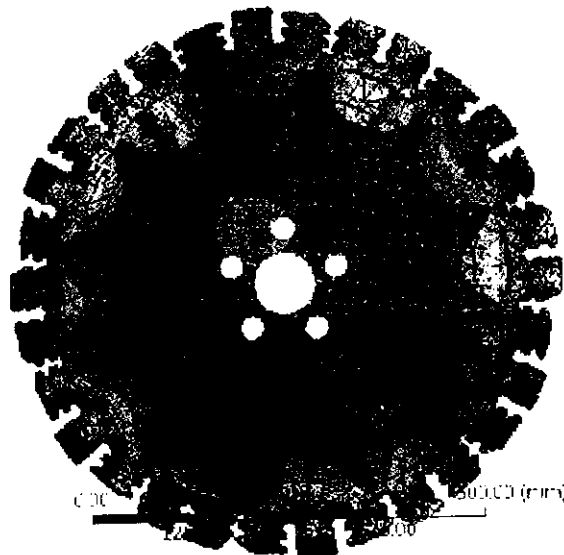


Fig.III.28 Déformée du mode 4 pour la vitesse de rotation 4500 rd/s
Déplacement max.= 10.674 mm, fréquence= 2461.1 Hz,
(nb. Diamètres nodaux: 0, nb. Cercles nodaux: 0)

A: Modale
Déplacement total 20
Type: Déplacement total
Fréquence: 2473.3 Hz
Décalage de phase: 0°
Unité: mm
09/07/2010 22:46

10.404 Max
5.2483
3.0522
6.9592
5.7832
4.5241
2.4631
2.3121
1.155
0 Min

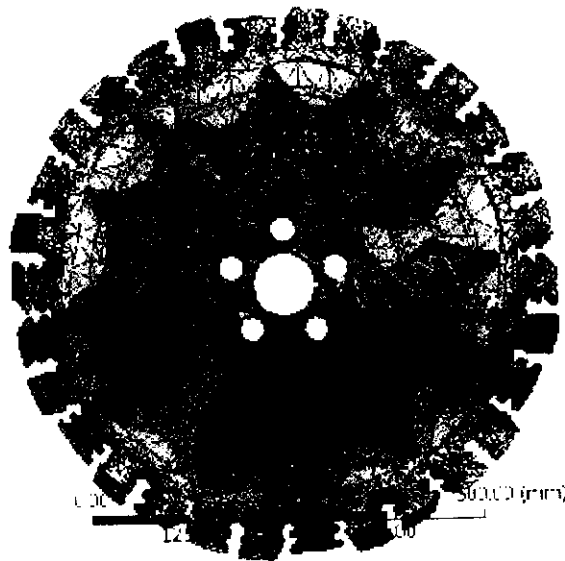


Fig.III.29 Déformée du mode 5 pour la vitesse de rotation 4500 rd/s
Déplacement max.= 10.404 mm, fréquence=2473.3 Hz,
(nb. Diamètres nodaux: 1, nb. Cercles nodaux: 0)

total 24
Déplacement total
Fréquence: 23.733 Hz
Décalage de phase: 0°
Unité: mm
09/07/2010 22:46

6.643 Max
5.9049
5.1268
4.4287
3.6606
2.9525
2.2143
1.4752
0.73811
0 Min

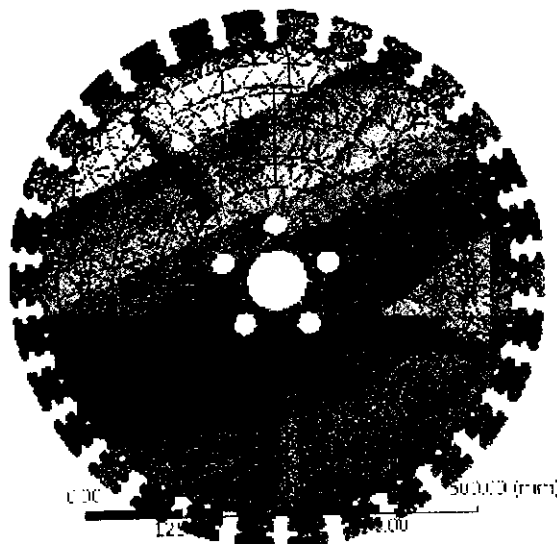
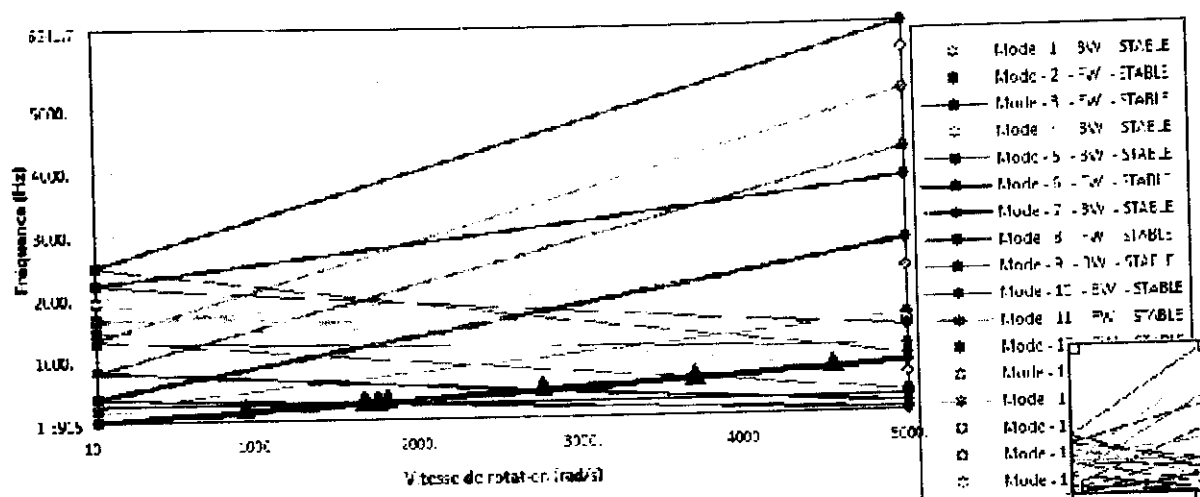


Fig.III.30 Déformée du mode 6 pour la vitesse de rotation 4500 rd/s,
Déplacement max.= 6.643 mm, fréquence=23.733 Hz,
(nb. Diamètres nodaux: 2, nb. Cercles nodaux: 0)

III.3. Diagramme :Fréquence- Fréquence de rotation

Fig.III.31 Diagramme de Campbell et vitesses critiques relatives au rapport 1.



Le tableau suivant récapitule les fréquences des différents modes pour les 4 fréquences de rotation ainsi que les vitesses critiques relatives à ces modes et les direction des ondes vibratoires.

Tab.III.2 Tableau récapitulant les vitesses critiques pour les 6 modes relatifs aux différentes vitesses de rotation du disque.

Mode	Vitesse critique en rd/s	0. rad/s	1000. rad/s	2500. rad/s	4500. rad/s
1	961.79	239.31 Hz	149.65 Hz	80.457 Hz	47.647 Hz
2	1286.7	287.05 Hz	225.58 Hz	116.79 Hz	68.546 Hz
3	2189.2	359.67 Hz	346.58 Hz	348.91 Hz	349.17 Hz
4	2699.6	426.53 Hz	429.65 Hz	429.65 Hz	429.65 Hz
5	-	427.48 Hz	473.01 Hz	863.04 Hz	1448.2 Hz
6	-	429.65 Hz	814.05 Hz	1592.2 Hz	2727.8 Hz

III.4 Conclusion

On constate sur la **Tab.III.2** que la vitesse critique minimale est celle de l'onde rétrograde (BW) du premier mode. Cette vitesse vaut 961.79 rd/s ce qui équivaut à $N = 9189.07$ tr/mn.

La deuxième vitesse critique correspondant à l'onde rétrograde (BW) du deuxième mode, vaut 1286.7 rd/s où $N = 12293.31$ tr/mn.

La troisième vitesse critique provoquée par l'onde arrière (BW) du troisième mode a une valeur est de 2189.2 rd/s soit un nombre de tours $N = 20915.92$ tr/mn.

La quatrième vitesse critique générée par l'onde avant (FW) du quatrième mode a une valeur est de 2699.6 rd/s soit un nombre de tours égal à 25792.35 tr/mn.

Ces quatre nombres de tours sont à éviter, mais à partir de 25792.35 tr/mn, il n'y a plus de vitesse critique du fait que le rapport 1 sur le diagramme de Campbell donne les vitesses critiques les plus élevées.

Conclusion générale

Dans ce travail, on a fait un état de l'art sur les problèmes rencontrés dans les disques minces. Par la suite, on a exposé la théorie régissant son comportement vibratoire en invoquant les lois de la mécanique d'un milieu continu élastique et déformable. Le but de cette partie est de déterminer les champs de déplacements, de contraintes et de déformations dans différentes configurations : Disques annulaires et disques massifs, et on a terminé cette partie par la détermination de la condition de non éclatement du disque en fonction des caractéristiques du matériau (σ_0 , ν , ρ) et celle géométrique (r_e).

La partie qui suit faisait l'objet de la simulation numérique du comportement vibratoire d'un disque de turbomachine, au début de laquelle, on a exposé les étapes à suivre pour faire une simulation réussie en exploitant le code Ansys.

Les résultats de cette simulation nous ont permis d'extraire les modes propres du disque à diverses vitesses rotation. Ces modes sont matérialisés par la représentation de la déformée modale et deux ondes qui se propagent dans la matière du disque : une dans le même sens de rotation (onde FW), c'est onde qui s'amplifie et une autre dans le sens inverse (onde BW), c'est onde s'amortie . Tous ce résultats se résument par le digramme de campbell (digramme fréquence--nombre de tours) qui donne les vitesses de rotation critiques à éviter pendant le travail avec ce disque.

Dans ce travail, on s'est limité à l'extraction des vitesses critiques relatives au rapport 1, ce qui conclut que d'autres vitesses critiques plus basses peuvent être extraites en répétant la simulation par les rapport 2, 3,...

En conclusion, on peut affirmer que la résolution du problème de cassure des disques n'est pas limité uniquement à la recherche des fréquences de résonance mais aussi à la vérification des conditions de non éclatement.

Références bibliographiques

- [1]. M. P. MIGNOLET, D. EICK, M. V. HARISH. Free vibration of flexible rotating disks. Journal of Sound and Vibration "1996.
- [2]. NICOLAS MOËS. Mécanique des milieux continus. Cours. École centrale de Nantes.
- [3]. DE SILVA, CLARENCE W. "Frontmatter" Vibration: Fundamentals and Practice. Boca Raton: CRC Press. LLC, 2000.
- [4]. SAMUEL FOREST, MICHEL AMESTOY, GILLES DAMAMME, SERGE KRUCH, VINCENT MAUREL, MATTHIEU MAZIERE. Mécanique des milieux continus. Ecole des mines de paris. 2009–2010.
- [5]. ABDUL HAMID MOHAMAD. Réponse forcée des ensembles tournants de turbomachines application au cas d'une turbine à gaz. Thèse de doctorat INSA de Lyon. 2002.