

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

رقم الترتيب :

رقم التسلسل :



جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي

كلية العلوم الدقيقة

قسم : الفيزياء



مذكرة تخرج مقدمة لنيل شهادة

ماستر أكاديمي

مجال : علوم المادة

تخصص : فيزياء تطبيقية إشعاع وطاقة

من إعداد : أمال علوش

الموضوع

التشاك الكمي ومراجعة بيل

نوقشت يوم : 2017/6/8.

أمام لجنة المناقشة المكونة من الأساتذة :

رئيسا	أستاذ	قده الحبيب
مناقشا	أستاذ مساعد قسم -أ-	زواري أحمد فاطمة
مناقشا	أستاذ مساعد قسم -أ-	احميم رشيد
مؤطرا	أستاذ	ضو جمال

الموسم الجامعي : 2017/2016.

التشابك الكمي هو ظاهرة كمية تترابط فيها بعض الخصائص الفيزيائية لمجموعة من الأنظمة فيصبح من غير الممكن وصف كل نظام بشكل مستقل عن البقية، وهو ما يعني أن هذه الأنظمة المتشابكة تتواصل ويؤثر بعضها على بعض بشكل آني مهما كانت المسافات الموجودة بينها. متراجحة بيل قدمت الطريقة العملية التي يمكن من خلالها التحقق من صحة التشابك الكمي، فهي لا تكون محققة إن كان هناك تأثير غريب ينتقل بين الأجسام المتشابكة، وهو ما أكدت التجارب اللاحقة وجوده بالفعل.

تناولت هذه المذكرة موضوع التشابك الكمي، فحددت العدة الرياضية التي تصف الأنظمة المتشابكة، وتم فيها تعميم العمليات الفيزيائية التي يمكن أن تخضع لها، أين تم التعرض لعملية القياس والتطور المعممين، وفيها اشتقت المعادلة الرئيسية بشكل ليندبلاد وهي المعادلة التفاضلية الزمنية للأنظمة المتشابكة الماركوفية. إن التأثير اللازمي المنتقل بين الأنظمة المتشابكة يفتح الباب أمام عدد من التطبيقات المذهلة في عالم الاتصالات والمعلوماتية، لكن الاعتماد عليه كمصدر في نظرية المعلومات الكمية يتطلب تحديد مقدار التشابك الموجود بالحالات الكمية المختلفة، ولذا تم التعرض لمقياسي تشابك : انتروبي فان نيومان ومقياس تشابك التكوّن.

الكلمات المفتاحية : التشابك الكمي، متراجحة بيل، المتغيرات الخفية، POVM، مؤثر فائق، المعادلة الرئيسية، البت الكمي، انتروبي فان نيومان، مقياس تشابك التكوّن.

Abstract

Entanglement is a quantum phenomenon that establishes a correlation between certain physical properties of a group of systems, a correlation that has no classical analogue. This correlation makes it impossible to describe each system independently of the others. This means that these entangled systems have some kind of communication that makes them capable to influence each other instantaneously even if they are separated by a large distance. Bell's inequality provides a practical way to check the existence of entanglement, because it is not fulfilled if there are a superluminal effects between the entangled systems. Subsequent experimental tests of Bell inequality proved the existence of entanglement.

This dissertation is addressed to the subject of entanglement and some of its applications and consequences. The necessary mathematical tools to describe entangled systems are given. The generalization of physical operations that these systems might undergo are introduced using the concept of generalized measurement and evolution. For the temporal evolution, the master equation in Lindblad's form has been derived, which is the temporal differential equation for Markovian entangled systems (Markovian approximation). There is a number of interesting applications of entanglement, prominent among them is its use as a resource in quantum information, and therefore the theory requires the determination of the amount of entanglement in different quantum states, for this purpose, two entanglement measures have been considered in this dissertation : Von Neumann Entropy and entanglement of formation.

Keywords : entanglement, Bell inequality, hidden variables, POVM, superoperator, Master equation, qubit, Von Neumann Entropy, entanglement of formation.

الإهداء

يصعب علي أن أفيدكما حقكما... لكما أهدي هذا العمل

أمي وأبي

إلى إخوتي وأخواتي

إلى كل مرفيقتاتي وخاصة عبير وسارة

شكر و تقدير

الحمد لله أولاً ودائماً على جميل إحسانه وحسن توفيقه لي في إنجاز هذا العمل المتواضع، الذي أرجو أن يكون مقبولاً عنده، فلك الحمد مرربي حتى ترضى ولك الحمد إذا مرضيت ولك الحمد على نعمة الحمد .

لا يسعني في هذا المقام، وكل مقام، إلا أن أتقدم بجزيل الشكر والامتنان وأسمى عبارات التقدير إلى من علمني وأثّر لي درب العلم والمعرفة وقدم الكثير والكثير دون كلل أو ملل، الأستاذ المشرف: 'جمال ضو' الذي أسأل الله أن يجزيه خير الجزاء .

كما أتقدم بجزيل الشكر والامتنان للجنة التحكيم، ولقسم الفيزياء بجامعة حمّة الحضر، لكل من ساعدني وأمرشدني، ولكل من قدم لي يد العون ولو بكلمة طيبة .

الفهرس

فهرس الأشكال

فهرس الجداول

01 المقدمة العامة

الفصل الأول

فلسفة ميكانيك الكم ومراجعة بيل

05 1-I تمهيد

05 2-I ما هو القياس

06 1-2-I تصنيف عمليات القياس

07 2-2-I مثال عن عملية القياس : تجربة ستان جارلاش

11 3-2-I ضرورة وجود الكاشف

12 3-I نظرية فان نيومان للقياس

15 4-I تفسير ميكانيك الكم : مدرسة كوبنهاجن

17 1-4-I قطة شرودينجر وصديق ويغندر

19 5-I تفسير ميكانيك الكم : الموقف الواقعي والمتغيرات الخفية

20 1-5-I مثال عن المتغيرات الخفية

22 6-I مفارقة أينشتاين - بودولسكي - روزن (EPR Paradox)

24 7-I مراجعة بيل

29 1-7-I نظرية بيل دون متراجحات

32 8-I ماهي مشكلة تفسير ميكانيك الكم؟

الفصل الثاني

التشابك الكمي : عدة رياضية و معالم فيزيائية

35 1-II تمهيد

35 2-II البت الكمي

36 1-2-II تمثيل السبين 1/2 للبت الكمي

393-II مؤثر الكثافة
431-3-II نظرية جليسون (Gleason's Theorem)
442-3-II مؤثر الكثافة لنظام كمي مكون من قسمين
463-3-II معادلة تطور مؤثر الكثافة في الزمن
494-3-II كرة بلوخ (Bloch Sphere)
514-II تحليل شميت (Schmidt Decomposition)
541-4-II التشابك الكمي
555-II الالتباس في تفسير المجموعة
581-5-II نقل المعلومات بسرعة الضوء
596-II المحو الكمي
611-6-II نظرية GHJW

الفصل الثالث

تعميم العمليات الفيزيائية للأنظمة المتشابكة

651-III تمهيد
652-III القياس المعمم و ال POVM
711-2-III نظرية نويمارك (Neumark's theorem)
742-2-III ال POVM و فضاء الجداء التتسوري
813-2-III دور ال POVM و الهدف منها
833-III المؤثرات الفائقة و تمثيل كراوس (Superoperators and Kraus representation)
841-3-III خصائص المؤثرات الفائقة
852-3-III التمثيل الأحادي للمؤثرات الفائقة
863-3-III المؤثرات الفائقة و المؤثرات الأحادية
894-3-III نظرية تمثيل كراوس (Kraus Representation Theorem)
925-3-III ال POVM و المؤثرات الفائقة
936-3-III أمثلة عن المؤثرات الفائقة : القنوات الكمية
931-6-3-III قناة إزالة الاستقطاب (depolarizing channel)
962-6-3-III قناة تخميد الطور (Phase Damping Channel)
983-6-3-III قناة تخميد السعة (Amplitude Damping Channel)
1014-III المعادلة الرئيسية (The Master Equation)

102	..(The Master Equation in Lindblad Form) شكل ليندبلاد للمعادلة الرئيسية
106III-4-2 مثال : الهزاز التوافقي المتخامد

الفصل الرابع

الاتصالات الكمية : تطبيقات التشابك الكمي

1091-IV تمهيد
1092-IV نقل المعلومات بواسطة الأجسام المتشابكة
1143-IV الترميز المكثف (Dense Coding)
1154-IV نظرية عدم الاستنساخ (No-Cloning Theorem)
1185-IV توزيع المفاتيح الكومي (Quantum Key Distribution)
1231-5-IV متصلص في الجوار
1262-5-IV تصحيح الأخطاء و تضخيم السري
1276-IV النقل الكمي (Quantum Teleportation)

الفصل الخامس

قياس التشابك الكمي

1311-V تمهيد
1312-V مقياس التشابك الكمي
1363-V الحالة ذات التشابك الأقصى
1404-V ضغط المعلومات الكمية (Quantum Data Compression)
1485-V مقياس تشابك الحالة النقية : انتروبي فان نيومان
1546-V الحالة المختلطة : مقياس تشابك التكوّن (Entanglement of Formation)
1571-6-V مقياس تشابك التكوّن لاثنين من البت الكمي

الخاتمة العامة

163
166الملحقات
177المراجع

فهرس الأشكال

الصفحة	عنوان الشكل	ترتيب الشكل
الفصل الأول		
7	رسم تخطيطي لتجربة ستارن جارلاش	(1-I)
27	قياس مركبات السبين وفق هذه المجموعة من المحاور لا يمكن أن يحقق متراجحة بيل.	(2-I)
29	التجربة الفكرية لقياس أربع مركبات سبين لأربع جسيمات متشابكة.	(3-I)
الفصل الثاني		
50	رسم تخطيطي لكرة بلوخ.	(1-II)
الفصل الثالث		
82	طريقة لتنفيذ POVM ذات الثلاث عناصر $\{ \tilde{b}_k\rangle\langle\tilde{b}_k \}$ بواسطة قياس متعامد للأشعة $\{ B_k\rangle\}$ في فضاء ثلاثي البعد.	(1-III)
الفصل الرابع		
120	مخطط لمثال يوضح مبدأ عمل التشفير بواسطة المفتاح الخاص 'Private Key'.	(1-IV)

فهرس الجداول

الصفحة	عنوان الجدول	ترتيب الجدول
الفصل الرابع		
129	جدول يوضح جميع العمليات المتعلقة بالنقل الكمي ونتائجه.	(1-IV)
الفصل الخامس		
145	التحويل الواحدي U المستخدم لضغط الحالات الكمية.	(1-V)

المقدمة العامة



المقدمة العامة

ليس غريبا على ميكانيك الكم أن تتفرد بظواهر غريبة ولا أن تختص بمزايا فريدة، وهي التي ما فتئت تتعرض للانتقادات وتُساق نحوها العراقيل لتعارضها مع العديد من الأفكار الموجودة والمسلّمات المفروغ منها في العالم الكلاسيكي، ونجحت رغم ذلك في الصمود حتى اليوم لقدرتها على تفسير ظواهر العالم الكمي وتناسق توقعاتها مع النتائج التجريبية في العالم الحقيقي.

التشابك الكمي هو ظاهرة غريبة أخرى من ظواهر ميكانيك الكم، ظهر مع بدايات هذه النظرية في أوائل القرن العشرين ومثّل نقطة تحفظ أخرى حولها، ففي سنة 1935 تمكن اينشتاين ومن معه من استخدامها لمهاجمة ميكانيك الكم عندما قاموا بنشر مقال تحت عنوان 'هل يمكن أن يعتبر وصف ميكانيك الكم للواقع الفيزيائي كاملا؟' [1]، في هذا المقال استطاع اينشتاين ومن معه أن يسلطوا الضوء لأول مرة على التشابك الكمي [2]، واستطاعوا استغلال هذه الظاهرة الخاصة بميكانيك الكم فقط ليهاجموها بواسطتها، ومع أن لفظ التشابك الكمي 'entanglement' لم يستخدم صراحة في هذا المقال، إلا أن محاولة إثبات عدم تمام أو كمال ميكانيك الكم جاء من خلال استغلالها ضمنا.

كان شرودينجر هو أول من قدم مصطلح التشابك الكمي سنة 1935، وذلك بعدما نشر اينشتاين ومن معه المقال الفارط في نفس السنة [3]. شرودينجر نشر مقاله في مجلة ألمانية وقدم فيه أول تشخيص لهذه الظاهرة بشكل مباشر، واستخدم لفظ (Verschränkung) باللغة الألمانية والذي ترجم لاحقا إلى (entanglement) باللغة الانجليزية [4]، ليعبر عن التشابك الذي يحدث لأشعة الحالة لنظامين حدثت لهما عملية تفاعل في وقت ما. الأمر الغريب الذي لاحظته شرودينجر هو أنه قد يكون من الممكن تحديد شعاع الحالة لمجموعة من الجسيمات أو الأنظمة لكن المعرفة القصوى بالنظام الكلي كما تقدمها ميكانيك الكم لا تعني دوما المعرفة القصوى بكل أجزائه، أي حتى وإن كان ممكنا وصف النظام الكلي بشعاع حالة فهذا لا يعني دوما أنه من الممكن وصف كل جزء من أجزاء النظام بشعاع حالة منفرد يصف كيفية تطور النظام الجزئي بشكل دقيق، هذه المفارقة الغريبة هي ما تعرض لها شرودينجر في مقاله عندما قدم مصطلح التشابك الكمي [4]، فقال :

'المعرفة القصوى بالنظام الكلي لا تتضمن بالضرورة المعرفة بجميع أجزائه، حتى ولو كانت هذه الاخيرة منفصلة عن بعضها البعض ولا تؤثر على بعضها البعض في الوقت الحاضر'

التشابك الكمي إذن يُوجب التعامل مع الأجسام المتشابكة كوحدة واحدة، أي أنه يقر بوجود ترابط من نوع ما بين الأجسام المتشابكة وإن كانت منفصلة عن بعضها البعض، هذا الترابط الغريب لم يمكن تفسيره لحد الساعة رغم مرور أكثر من ثمانين عاما على أول ظهور لمفهوم التشابك الكمي.

من جهة أخرى، تطورت البنية الرياضية للتشابك الكمي منذ ذلك الوقت بشكل كبير، وقُطعت أشواط طويلة في كيفية استخدام التشابك الكمي وكيفية استغلاله، وهذا تواكب مع تطور نظرية المعلومات الكمية التي تهدف لاستغلال ميكانيك الكم لتقديم نسخة أكثر تطورا من الحواسيب والاتصالات وذلك بالاعتماد بالدرجة الأولى على التشابك الكمي [5]، وهو ما جعل فهم هذا الأخير وفهم كل الجوانب المتعلقة به مطلوبا بشكل عملي.

العمل الحالي يهدف لتقديم قالب الرياضي والفيزيائي للتشابك الكمي، مع محاولة الإحاطة بالموضوع من جميع جوانبه بشكل متكامل قدر الامكان، هذا بالإضافة إلى التعزيز بالأمثلة وإرفاق أغلب النظريات بالبرهان. العمل تمت هيكلته وفق خمس فصول :

الفصل الأول يقدم ما يشبه المدخل التاريخي للتشابك الكمي، أين يتعرض لمدرستين رئيسيتين في فلسفة ميكانيك الكم والرؤية التي تفسر بها كل مجموعة التشابك الكمي، ومن ثم يظهر دور متراجحة بيل في تحويل الفلسفة الفكرية إلى تجربة قابلة للتطبيق والقياس، لتحسم في النهاية قضية وجود التشابك الكمي اللامحلي من عدمها إلى الأبد.

الفصل الثاني يحدد العدة الرياضية اللازمة لوصف الأنظمة المتشابكة، ولأن التشابك الكمي هو حجر الأساس لنظرية المعلومات الكمية فإن الاهتمام غالبا ما يكون مركزا على نظام البت (bit) بنسخته الكمية. كما يُعتمد في هذا الفصل -كما في سائر المذكرة- إلى دراسة الأنظمة المتشابكة المكونة من قسمين بشكل خاص وهذا لأسباب عدة، عدد منها موضح في هذا الفصل.

في الفصل الثالث تتم عملية تعميم للعمليات الفيزيائية المعتادة التي يمكن أن يخضع لها نظام كمي -كعملية التطور الزمنية الواحدية مثلا- إلى الأنظمة المتشابكة، وفيه تقدم عمليات القياس المعممة وعمليات التطور غير الواحدية.

تطبيقات التشابك الكمي هي موضوع الفصل الرابع، وفيه يُستعرض عدد من تطبيقات التشابك الكمي في مجال الاتصالات الكمية، وتتجلى في هذا الفصل القدرة الكامنة للتشابك الكمي والآفاق المستقبلية الواعدة للتقنيات التي تعتمد عليه.

الفصل الأخير يُعنى بتحديد مقدار تشابك الحالات الكمية، وهو موضوع حديث نسبياً ولازال قيد البحث لحد اليوم. يقدم في هذا الفصل مقياساً تشابك واحد للحالة النقية وآخر للحالة المختلطة، أين يمثل مقياس التشابك الأداة التي تحدد مقدار التشابك الذي تحتويه الحالة الكمية.

الفصل الأول

فلسفة ميكانيك الكم
ومتراجحة بيل

I-1- تمهيد

إن دراسة سلوك العالم الذري يعتمد بشكل كامل على ما تتوقعه ميكانيك الكم، فهي النظرية الوحيدة القادرة على التنبؤ بهذا السلوك، وذلك من خلال مجموعة من المسلمات الفيزيائية والأدوات الرياضية (فضاء هيلبرت، المؤثرات الخاصة بالنظام، القيم والأشعة الذاتية لهذه المؤثرات). تشكل هذه المسلمات والأدوات البنية الرياضية لميكانيك الكم، ويمكن القول بأن التحدي الموجود عند محاولة التنبؤ بسلوك أي نظام كمي يكمن في تحديد المقادير الرياضية السابقة (القيم والأشعة الذاتية...). من الناحية العملية تحديد سلوك الجسيمات الكمية واقعيًا يتم من خلال عملية قياس، حيث تسمح بالتعرف على مقادير أو معلومات معينة حول النظام الكمي المقاس، وذلك حسب نوع هذه العملية. المشكلة الوحيدة الموجودة هو أن الصلة بين البنية الرياضية لميكانيك الكم والنتيجة التي تعطيها عملية القياس ليست واضحة تمامًا، العائق الأساسي يكمن في الطبيعة الاحتمالية لبنية ميكانيك الكم الرياضية وبالتالي فهي لا تستطيع وصف سلوك الكمي بطريقة يقينية، وهو ما يطرح تساؤلاً حقيقياً حول تمام ميكانيك الكم. هناك الكثير من الصيغ المقترحة للربط بين ميكانيك الكم والسلوك الحقيقي للنظم التي تدرسها والذي يتضح بعض من معالمه من خلال نتائج القياس، تدعى هذه الصيغ بتفسير ميكانيك الكم وتعنى بإعطاء معنى واقعي للأدوات الرياضية لميكانيك الكم، قبل التطرق إلى تفسير ميكانيك الكم نتطرق أولاً إلى عملية القياس والخصوصية التي تكتسبها هذه العملية في ميكانيك الكم.

I-2- ما هو القياس

القياس هو عملية تهدف للتعرف على سلوك أو خصائص معينة لنظام محدد، ويمكن تعريفه بشكل علمي بأنه نوع خاص من التجارب تتم فيه عملية تفاعل بين جهاز القياس والنظام المُقاس تسفر عن الكشف عن معطيات معينة على جهاز القياس حول النظام المقاس. النظام المُقاس قد يكون ماكروسكوبياً أو ميكروسكوبياً. في الفيزياء الكلاسيكية عملية القياس هي عبارة عن وسيط يتدخل للكشف عن بعض المقادير، وهي عملية ثانوية لا تبدي تحديات في تفسيرها أو تأثيرها على النظام المقاس.

على المستوى الذري الأمر يختلف، إذا كان النظام المقاس هو عبارة عن جسيم مجهري (إلكترون، ذرة، جزيء...) فإن تأثيره يكون صغيراً جداً لئتم رصده، لذلك في هذه الحالة فإن عملية القياس تقوم على جعل أثر التفاعل الحادث بين النظام المُقاس وجهاز القياس يرتقي إلى مستوى 'ظاهرة'، ويجب أن تكون واضحة

كفاية حتى يمكن إدراكها عيانيا، كطريقة جهاز جايجر مولر أو حركة مؤشر جهاز الفولطمتر أو الآثار الموجودة على فيلم حساس للضوء...

في الحقيقة إن ما يجعل من أي تجربة أو تفاعل عملية قياس، هو تلك البيانات أو المعطيات التي يعطيها جهاز القياس، والتي تعبر عن التغيرات التي طرأت عليه إثر تفاعله مع النظام المقاس، ودور الفيزياء هو ترجمة هذه المعطيات إلى حقائق ومعلومات حول النظام الذي تم قياسه [6].

I-2-1- تصنيف عمليات القياس

يمكن تقسيم عمليات القياس وفق طبيعة المعلومات المتحصل عليها من عملية القياس إلى نوعين رئيسيين : عمليات قياس بنيوية وعمليات قياس ظرفية.

المعلومات المتحصل عليها من عمليات القياس البنيوية تكون عبارة عن خصائص عامة ودائمة للنظام المقاس، فلنأخذ على سبيل المثال الإلكترون، كل عمليات القياس التي تهدف إلى معرفة سبين الإلكترون وكتلته وشحنته هي عمليات قياس بنيوية، فكل تلك الخصائص السالفة الذكر هي خصائص ذاتية في الإلكترون لا تتغير بتغير ظروفه، وهي متماثلة لدى جميع الإلكترونات. لكن محاولة قياس دفعه الخطي أو موضعه أو أحد مركبات العزم الزاوي أو عزم السبين تختلف باختلاف ظروف الإلكترون والعمليات التي خضع لها، بعبارة أخرى تاريخ الإلكترون، وحتى إن كان لإلكترونين تاريخ متطابق، أي إلكترونيين تم تحضيرهما في ظروف متماثلة، إلا أن العملية تبقى احتمالية بحتة بالاعتماد على ميكانيكا الكم، لذلك فعلمية قياس أحد الخصائص السابقة تسمى بعملية قياس ظرفية، لا تختلف نتائج عملية القياس هاته من نظام لآخر فحسب، بل وقد تختلف حتى لنفس النظام بين عملية قياس وأخرى.

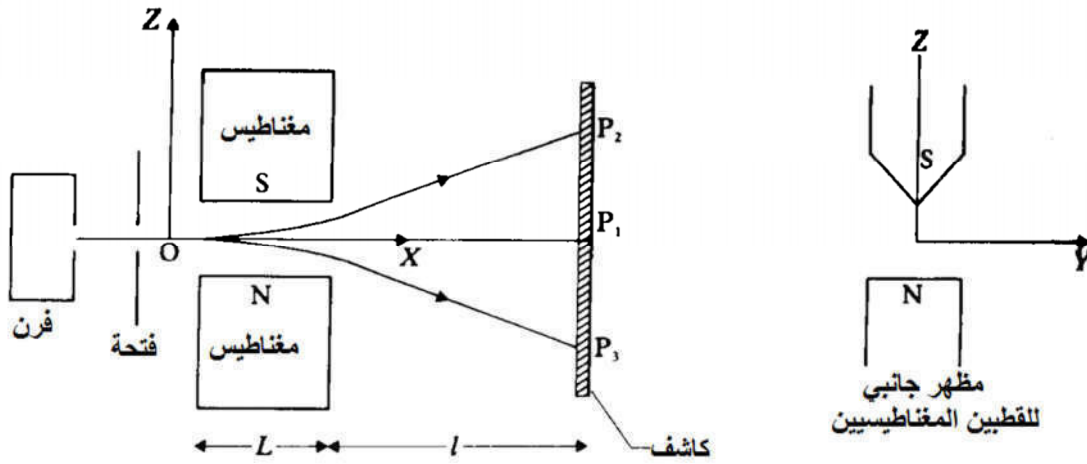
تستطيع ميكانيك الكم أن تتوقع قيمة دقيقة لنتائج عمليات القياس البنيوية، لكنها تعطي مجموعة من التوقعات في حالة القياس الظرفي وباحتمالات مختلفة، بحيث أن نتائج مجموعة من عمليات القياس الظرفية لمجموعة من الجسيمات التي تم تحضيرها في ظروف متماثلة تكون دوماً أحد القيم التي تتوقعها ميكانيك الكم، وتردد ظهور أحدها يكون في توافق جيد مع احتمال تلك القيمة. لذا يمكن من هذا المنطلق طرح تصنيف آخر لعمليات القياس : عملية قياس فردية ويتم فيها القياس مرة واحدة فقط، وعلمية قياس احتمال والتي تكون عبارة عن مجموعة من عمليات القياس الفردية لأنظمة متطابقة، بحيث تردد أحد نتائج القياس يعبر عن احتمال تلك النتيجة كما تتوقعها ميكانيكا الكم. هذا التوافق بين الترددات التجريبية والاحتمالات النظرية

يعطي قياس الاحتمال أهمية خاصة، إذ يمكن بواسطته التعرف على بعض الجوانب المتعلقة بالنظام المدروس ما يساعد في الدراسة النظرية لهذا النظام [6].

I-2-2- مثال عن عملية القياس : تجربة ستارن جارلاش

تجربة ستارن جارلاش هي واحدة من كلاسيكيات عمليات القياس وأكثرها شهرة، تهدف هذه التجربة إلى قياس أحد مركبات العزم الزاوي وفق اتجاه مختار.

في تجربة ستارن جارلاش يتم تنصيب قطبين مغناطيسيين أحدهما مسطح والآخر بشكل وتدي حاد الطرف، فينشأ بينهما حقل مغناطيسي مواز لمحور القطبين ويعتمد في قيمته بشكل كبير على بعده عن أحد القطبين. الجسيمات التي ستدرس بتجربة ستارن جارلاش يتم تسخينها أولاً في فرن به ثقب صغير، تخرج الجسيمات من خلال تلك الفتحة في اتجاهات عشوائية، قبل أن تمر بمُسدّد يوحد مسارات تلك الجسيمات، لتخرج بشكل حزمة مركزة ومتوازية. تعبر الحزمة بعد ذلك منطقة الحقل المغناطيسي غير المتجانس بين القطبين ثم يتم بعد ذلك رصدها بواسطة كاشف، لتحديد تأثير الحقل على الحزمة. رسم تخطيطي لهذه التجربة موضح في الشكل (1-I) [7].



شكل (1-I) : رسم تخطيطي لتجربة ستارن جارلاش. [7]

يمكن معالجة المسألة بشكل كلاسيكي إذا كانت الجسيمات المدروسة ثقيلة نسبياً، لأنها ستكون في شكل حزمة أمواج محلية ويمكن عندها دراسة الحركة عن طريق المسارات الكلاسيكية للجسيمات.

نعتبر إذا جسيمات متعادلة (لتجنب تأثير قوة لورنتز) ولها عزم مغناطيسي $\vec{\mu}$ ، كما نعتبر أن الحقل المغناطيسي موجه باتجاه المحور Oz، الطاقة التي تكتسبها الجسيمات نتيجة تفاعل عزمها المغناطيسي مع الحقل المغناطيسي الخارجي هي :

$$-\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (1.1)$$

القوة التي تخضع لها الجسيمات تكون موازية للمحور Oz نتيجة تعلق الحقل المغناطيسي \vec{B} في جهاز ستارن جارلاش بمركبة الموضع z :

$$F \equiv F_z = - \frac{\partial}{\partial z} (-\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \mu_z \frac{\partial B(z)}{\partial z} \quad (2.1)$$

سنعتبر أن الجسيمات هي ذات سبين 1/2 للتبسيط. إن ذرة ذات سبين غير معدوم تملك عزم ثنائي قطب مغناطيسي $\vec{\mu}$ متناسب مع سبين تلك الذرة، حيث أن مقدار التناسب بينهما هو g ، والذي يدعى بالنسبة المغناطيسية الدورانية :

$$\vec{\mu} = g\vec{S} \quad (3.1)$$

مركبات السبين مكتمة طبعاً حسب ميكانيكا الكم ويمكن أن تأخذ القيمة $+1/2$ أو $-1/2$ (بوحد \hbar)، بالتالي فإن القوة تأخذ قيماً مكتمة وتعتمد قيمتها على قيمة مركبة السبين S_z للجسيم، بحيث :

$$F = \begin{cases} g \frac{\partial B(z)}{\partial z} \frac{\hbar}{2} & \langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \\ -g \frac{\partial B(z)}{\partial z} \frac{\hbar}{2} & \langle S_z \rangle = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.1)$$

وبالتالي فإن الجسيم سينحرف نحو الأعلى أو نحو الأسفل حسب قيمة S_z ، وهكذا فإن حزمة الجسيمات ستنتشر إلى قسمين نتيجة تكميم عزم السبين، والكشف عنها بعد مرورها بالحقل المغناطيسي يظهر لطختين متباعدتين ومتمايزتين على المحور Oz [8].

تلك كانت المقاربة الكلاسيكية للمسألة (أو شبه الكلاسيكية بالأحرى) وهي تتوافق بشكل جيد مع ما تمت ملاحظته في التجربة، أما الآن ستنم دراسة المسألة السابقة بطريقة كمية :

قبل دخول الجسيمات إلى منطقة الحقل المغناطيسي تكون عبارة عن جسيمات حرة، الهاملتون الخاص بها يتكون من مؤثر الطاقة الحركية فقط ومن ثم فإن معادلة شرودينجر المستقلة عن الزمن تكون على الشكل :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi = E \psi \quad (5.1)$$

الدوال الذاتية ψ لمؤثر الهاملتون في هذه الحالة، هي نفسها الدوال الذاتية لمؤثر الدفع الخطي، وهي :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (6.1)$$

حيث $\hbar\vec{k}$ هو الدفع الخطي للجسيم، أما \vec{k} فهو الشعاع الموجي، ويعطى بـ :

$$\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z \quad (7.1)$$

$$.E = \frac{\hbar k^2}{2m} \text{ أما القيم الذاتية للطاقة فهي } k_{x_i} = \frac{n_i \pi}{L} \text{ (} n_i = 0, 1, 2 \dots \infty \text{) أين :}$$

نظرا لأن السبين سيدخل في التفاعل في المرحلة الموالية فمن الأفضل إدراج دواله الذاتية من الآن، بما أن السبين يتبادل مع مؤثر الهاملتون فهو إداً ثابت حركة، ودالة الموجة الكلية يمكن أن تكتب في شكل جداء من الدالة الذاتية للسبين والدالة الذاتية لمؤثر الطاقة، نختار الدوال الذاتية بمركبة السبين S_z ونكتب دالة الموجة الكلية :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} |S_z = \pm 1/2\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{v}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} |\uparrow_z, \downarrow_z\rangle \quad (8.1)$$

في الحقيقة يمكن أن يكون شعاع سبين الجسيم مشكلا من أي مزج خطي من الأشعة الذاتية لـ S_z ، ولكن للتبسيط سنفترض أن حالة الجسيم هي في الحالة الذاتية $|\uparrow_z\rangle$ (أو $|\downarrow_z\rangle$) والمرفقة بالقيمة الذاتية $\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})$. عند دخول الجسيم إلى منطقة الحقل المغناطيسي يدخل في تفاعل معه، ويكون الهاملتون في هذه الحالة من الشكل :

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta - gB(z)S_z \quad (9.1)$$

ستتم دراسة المسألة باستخدام مؤثر التطور، وذلك باعتبار أن التفاعل يتم في المجال الزمني $[0, T]$ ، الهاملتون مستقل عن الزمن خلال هذه المدة لذا فإن عبارة مؤثر التطور هي من الشكل :

$$U(T) = \exp\left(\frac{-iH}{\hbar}T\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + gB(z)S_z\right)T\right) \quad (10.1)$$

نفترض أن مدة التفاعل قصيرة جدا بحيث أن تغير الحقل المغناطيسي الذي يختبره الجسيم يكون صغيرا جدا لذا يمكن الاكتفاء عند نشر مؤثر التطور حول المركبة z بالرتبة الأولى منه، كما يمكن اعتبار أن $\frac{\partial B}{\partial z}$

ثابت نتيجة مدة التفاعل الصغيرة، فتصبح عبارة مؤثر التطور من الشكل :

$$U(T) \approx \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + g(B_0 + z \frac{\partial B}{\partial z}) S_z \right) T \right] \quad (11.I)$$

ومنه

$$U(T) \approx \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + gB_0 S_z \right) T \right) + z \frac{i}{\hbar} \frac{\partial B}{\partial z} S_z g T \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + gB_0 S_z \right) T \right) \quad (12.I)$$

دالة الموجة للجسيم بعد التفاعل هي :

$$\psi(T) = U(T)\psi(0) \quad (13.I)$$

باستخدام عبارة مؤثر التطور (12.I) نجد أن :

$$\psi(T) \approx \left[\exp \left(-i \left(\frac{\hbar k^2}{2m} \mp \frac{g}{2} B_0 \right) T \right) \pm z \frac{\partial B}{\partial z} \frac{i}{2} g T \exp \left(-i \left(\frac{\hbar k^2}{2m} \mp \frac{g}{2} B_0 \right) T \right) \right] \frac{1}{\sqrt{v}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) |\uparrow_z, \downarrow_z\rangle \quad (14.I)$$

هذه العبارة المعقدة يمكن تبسيطها عن طريق العودة بها إلى الشكل الآسي، أي في خطوة معاكسة للنشر الذي تم لمؤثر التطور وذلك باستخدام نفس الفرضية وهو أن $\frac{\partial B}{\partial z}$ صغير جدا.

$$\psi(T) \approx \frac{1}{\sqrt{v}} \exp \left(\frac{-i}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \mp \frac{g\hbar}{2} (B_0 + z \frac{\partial B}{\partial z}) \right) T \right) \cdot \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) |\uparrow_z, \downarrow_z\rangle \quad (15.I)$$

وهي دالة الموجة للجسيم عند نهاية التفاعل مع الحقل المغناطيسي. لفهم هذه النتيجة بشكل أفضل نقوم ببعض الترتيب :

$$\psi(T) \approx \frac{1}{\sqrt{v}} \exp \left(\frac{-i}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \mp \frac{g\hbar}{2} B_0 \right) T \right) \cdot \exp \left(i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \frac{g}{2} \frac{\partial B}{\partial z} T \cdot z \right) \right) |\uparrow_z, \downarrow_z\rangle \quad (16.I)$$

الدالة الآسية الأولى هي عبارة عن فرق طور غير مؤثر ويمكن التخلي عنه دون إضرار بالمسألة، أما الدالة الآسية الثانية فهي عبارة عن دالة ذاتية لمؤثر الدفع الخطي، حيث قيمه الذاتية هي :

$$\vec{P}\psi(T) = \left(\hbar \vec{k} \pm \frac{g\hbar}{2} \frac{\partial B}{\partial z} T \vec{e}_z \right) \psi(T) \quad (17.I)$$

وهكذا فإن ما قام به الحقل المغناطيسي هو تغيير الدفع الخطي للحزمة المارة وذلك حسب القيم الذاتية لـ S_z بالمقدار $\pm \frac{g\hbar}{2} \frac{\partial B}{\partial z} T \vec{e}_z$.

إذاً بعد تجاوز الجسيم منطقة الحقل المغناطيسي يصبح حراً من جديد، ولكن الدفع الخطي لهذا الجسيم يختلف عن دفعه الخطي قبل دخوله منطقة الحقل المغناطيسي، حيث يصبح :

$$\vec{P} = \begin{cases} \hbar\vec{k} + \frac{g\hbar}{2} \frac{\partial B}{\partial z} T \vec{e}_z & \langle \uparrow_z | S_z | \uparrow_z \rangle = \frac{1}{2} \\ \hbar\vec{k} - \frac{g\hbar}{2} \frac{\partial B}{\partial z} T \vec{e}_z & \langle \downarrow_z | S_z | \downarrow_z \rangle = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (18. I)$$

وهكذا تنقسم الحزمة إلى نصفين نتيجة الدفع الخطي المختلف للجسيمات ذات السبين المتعاكس، ما ينتج لظختين متباعدين على الكاشف على طول المحور (Oz).

I-2-3- ضرورة وجود الكاشف

من المهم هنا التنويه إلى نقطة مهمة، وهو اختلاف عملية تفاعل القياس عن أي عملية تفاعل أخرى، فالتجربة السابقة تعد عملية قياس فقط عند وجود كاشف يقوم بإظهار عدد اللطحات وموضعها في النهاية، وهي البيانات التي من خلالها يمكن معرفة قيمة مركبة السبين للجسيمات المقاسة. تفاعل الكاشف مع الجسيم يسمح بظهور نتيجة واحدة في كل مرة، بحيث تختفي على مستواه كل الاحتمالات الأخرى، لذا فإن الفرق بين عملية القياس والتفاعلات الأخرى يظهر جلياً عند وجود الجسيم في حالة تراكب خطي من مجموعة من الحالات المختلفة، فمثلاً القوة التي تؤثر على الجسيمات في تجربة ستارن جارلاش تعتمد على قيمة S_z وهو ما يحدد موضعه قبل عملية الكشف، لكن ماذا لو كانت الجسيم في حالة مزج خطي من الحالتين $|\uparrow_z\rangle$ و $|\downarrow_z\rangle$ ، مثلما يحدث لو كان الجسيم في الحالة $|\uparrow_x\rangle$ - الحالة الذاتية لـ S_x - حيث :

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle) \quad (19. I)$$

تفاعل جسيم مع الحقل المغناطيسي في هذه الحالة يعني أن الجسيم سيكون في حالة مزج خطي في الموضع بين الأعلى والأسفل، تفاعل الكاشف مع هكذا جسيم يعني أنه ستكون له قيمة محددة لعزمه S_z ، فهو سيكون إما في الأعلى أو الأسفل، وبالتالي فإن الكاشف لم يعبر فقط عن حالة الجسيم ولكن تفاعله مع الجسيم قام بالتأثير على حالته أيضاً. لإظهار هذا التأثير بشكل أوضح نقدم التجربة المثالية لويغنر (E. P. Wigner) :

نعتبر جسما في الحالة $|\uparrow_x\rangle$ يعبر جهاز ستارن جارلاش حقله المغناطيسي مواز للمحور Oz، ثم بواسطة مجال مغناطيسي مناسب نجمع المسارين المحتملين للجسيم (لنقل مثلا بواسطة جهاز ستارن جارلاش آخر حقله المغناطيسي هو في الاتجاه المعاكس للحقل الأول)، بعد اجتماع المسارين في مسار واحد يُمرر داخل جهاز ستارن جارلاش آخر حقله مواز للمحور Ox ثم بعد ذلك يتم الكشف عليه [6].

تفاعل الجسيم مع جهاز ستارن جارلاش الأول يعطي دفعا خطيا P'_z متعاكسا للشعاعين الذاتيين لـ S_z ($\psi = \frac{1}{\sqrt{2v}} \left[\exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} + \frac{p'_z}{\hbar}\cdot z\right)\right)|\uparrow_z\rangle + \exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \frac{p'_z}{\hbar}\cdot z\right)\right)|\downarrow_z\rangle \right]$)، ما يتسبب في مسارين مختلفين حسب قيمة S_z ، إعادة جمع المسارين يعني إلغاء تأثير الحقل المغناطيسي الأول وبالتالي امتلاك متجهي S_z المختلفين نفس الدفع الخطي ($\psi = \frac{1}{\sqrt{2v}} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) (|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle)$)، وهكذا تعود دالة الموجة للجسيم إلى حالتها الابتدائية التي كانت قبل مرورها بجهاز ستارن جارلاش الأول، أي إلى الحالة الذاتية $|\uparrow_x\rangle$. الكشف على الجسيم بعد مروره في جهاز ستارن جارلاش الثاني الذي حقله مواز للمحور Ox يظهر أن الجسيم هو في الحالة $|\uparrow_x\rangle$ ، وكأن كل ما سبق من كون الجسيم قد مر في مسارين مختلفين كان بلا أي تأثير. لكن وضع كاشف بعد جهاز ستارن جارلاش الأول يغير الأمر كليا :

الجسيم بعد تفاعله مع الكاشف سيكون في حالة ذاتية محددة لـ S_z ($|\uparrow_z\rangle$ أو $|\downarrow_z\rangle$) وإعادة الجسيم إلى مساره الأول لن يغير هذه الحقيقة، لذلك فقياس المركبة S_x بالجهاز الثاني سيظهر احتمالا متساويا لكون الجسيم في الحالة $|\uparrow_x\rangle$ أو $|\downarrow_x\rangle$ ذلك أن :

$$|\uparrow_z, \downarrow_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_x\rangle \pm |\downarrow_x\rangle) \quad (20.1)$$

I-3- نظرية فان نيومان للقياس

تقوم نظرية فان نيومان على اعتبار أن القياس هو عبارة عن عملية تفاعل بين نظامين، يخضع كلاهما لميكانيك الكم.

النظام المقاس Q قبل عملية التفاعل لديه دالة الموجة الذاتية به، والتي تتطور وفق معادلة شرودينجر في فضاء هيلبرت الخاص بالنظام H_Q . عملية القياس تهدف لقياس أحد الملاحظات الخاصة بالنظام Q وليكن الملاحظ A مثلا.

جهاز القياس M و الذي يكون غالبا نظاما ماكروسكوبيا، يوصف عادة بالميكانيك الكلاسيكي، لكن لأنه مكون أساسا من الذرات التي تخضع لميكانيك الكم فيمكن أن يوصف من حيث المبدأ بميكانيك الكم، وعليه له دالة موجة ضخمة تصف جميع متغيراته، وهاملتون H_M يتحكم بتطور هذه الدالة عن طريق معادلة شرودينجر، وفضاء هيلبرت H_M تتطور فيه حالته الكمية. جهاز القياس يعطي بعد تفاعله مع نظام القياس معطيات : حركة مؤشر أو لطفة أو مجموعة أرقام على شاشة رقمية...، ومنه نعتبر مؤثر X خاص بجهاز القياس قيمه الذاتية هي المعطيات التي يمكن أن يظهرها الجهاز. قبل التفاعل لا يُظهر جهاز القياس أي معطيات، نصف هذه الحالة بالحالة الحيدانية لجهاز القياس وهي حالة ذاتية للمؤثر X تعطى بـ $|b_0, r'\rangle$ حيث b_0 هي القيمة الذاتية للمؤثر X ، قد تعبر عن مؤشر في حالته الحيدانية أو فيلم حساس للضوء بدون أي آثار أو ترسبات...، أما r' فهي تعبر عن المتغيرات الأخرى الخاصة بجهاز القياس والتي لا تدخل مباشرة في التفاعل.

قبل التفاعل متغيرات كل نظام مستقلة عن الآخر، والهاملتون الكلي للنظامين $M+Q$ هو ببساطة عبارة عن مجموع هاملتون النظام المقاس H_Q وهاملتون جهاز القياس H_M ، أي أن $H_0 = H_Q + H_M$ ، وفضاء هيلبرت للنظام الكلي هو عبارة عن الجداء التنسوري لفضاءي النظامين، أي أن $H = H_Q \otimes H_M$. وبالتالي فإن دالة الموجة الكلية للنظام هي عبارة عن الجداء التنسوري لدالتي الموجة للنظامين.

يبدأ التفاعل عند دخول النظام المقاس المنطقة النشطة في جهاز القياس (مثل منطقة الحقل المغناطيسي في جهاز ستارن جارلاش)، حد الهاملتون الإضافي الناتج عن التفاعل يأتي ليربط متغيرات النظامين ببعضهما، يمكن نمذجة هاملتون التفاعل بالعبارة $H_{int} = -g(t)PA$ ، حيث أن P هو الملاحظ المرافق قانونيا للملاحظ X أي $[X, P] = i\hbar$ ، بهذا التعريف يكون P هو المولد لتغير X (مثلا هو المولد لانسحاب مؤشر على جهاز فولطمتر) وقيمة هذا التغير تتحكم فيه قيمة الملاحظ A ، أما $g(t)$ فهو عامل تفعيل التفاعل وسيتم افتراض أنه معدوم خارج المجال الزمني $[0, \varepsilon]$.

يمكن الآن أن نصف حالة النظام الاجمالي باستخدام المعطيات السابقة، قبل التفاعل (أي عند لحظة t قبل اللحظة 0 بحيث $t \in]t', 0]$) يكون هاملتون النظام مستقلا عن الزمن، مؤثر التطور الذي يصفه هو :

$$U(t - t') = \exp(-iH_0(t - t')/\hbar) \quad (21.1)$$

أما حالة النظام عند لحظة t ، فتعطى بواسطة مؤثر التطور : $|\alpha(t)\rangle = U(t - t')|\alpha(t')\rangle$ ، حيث أن $|\alpha(t')\rangle$ هي حالة النظام الكلي الابتدائية عند t' .

لمزيد من التبسيط سنفترض أن الملاحظ A هو ثابت حركة للنظام المقاس Q ، أي أن A تتبادل مع H_0 ، وأن حالة النظام Q هي حالة ذاتية للملاحظ A وهي الحالة $|a_n, r\rangle$ ، أين $\{a_n\}$ هي مجموعة القيم الذاتية للملاحظ A أما r فهي بقية متغيرات النظام Q التي لا تدخل في التفاعل مباشرة، وعليه تكون حالة النظام الكلية الابتدائية هي :

$$|\alpha(t')\rangle = |a_n, r(t')\rangle \otimes |b_0, r'(t')\rangle \quad (22.1)$$

عند التفاعل أي في المجال الزمني $[0, \varepsilon]$ ، يصبح الهاملتون متعلقا بالزمن بواسطة $g(t)$ الموجود في حد التفاعل بين النظام المقاس وجهاز القياس، وهكذا فإن معادلة مؤثر التطور بين اللحظتين 0 و ε هي :

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t) = H(t)U(t) \quad (23.1)$$

عموما عند تعلق الهاملتون بالزمن لا يصبح حل معادلة مؤثر التطور بسيطا كما في الحالة السابقة، فمؤثر الطاقة يتغير بين لحظة وأخرى في المجال الزمني $[0, \varepsilon]$ ، ما قد يعني أن الهاملتون في لحظة معينة قد لا يتبادل مع الهاملتون في لحظة أخرى. لكن بما أن هذا لا يحدث في هذه الحالة فمن الممكن إثبات أن عبارة مؤثر التطور عندها تكون من الشكل :

$$U(\varepsilon, 0) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \int_0^\varepsilon H(t) dt\right) \quad (24.1)$$

سيتم افتراض أن شدة $g(t)$ كبيرة لدرجة أن تأثير هاملتون التفاعل يكون هو المهيمن في هذا المجال الزمني، بحيث يمكن اعتماد التقريب التالي دون تأثير كبير على الحالات الذاتية :

$$U(\varepsilon) \approx \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^\varepsilon g(t) P A dt\right) = \exp(i\lambda P A / \hbar) \quad (25.1)$$

حيث $\lambda = \int_0^\varepsilon g(t) dt$. إذا حالة النظام الكلي بعد نهاية التفاعل هي :

$$\begin{aligned} \exp(i\lambda P A / \hbar) |\alpha(0)\rangle &= \exp(i\lambda P A / \hbar) |a_n, r(0)\rangle \otimes |b_0, r'(0)\rangle \\ &= |a_n, r(\varepsilon)\rangle \otimes |b_0 + \lambda a_n, r'(\varepsilon)\rangle \end{aligned} \quad (26.1)$$

الحصول على المساواة الأخيرة تم باستخدام نشر تايلور لمؤثر التطور واستغلال علاقة التبادل $[X, P^k] = k P^{k-1}$ لإثبات أن الشعاع الأخير في المساواة السابقة هو شعاع ذاتي للمؤثر X مرفق

بالقيمة $(b_0 + \lambda a_n)$. وهكذا فإن قيمة الملاحظ X في نهاية التفاعل تتغير قيمتها تبعا لقيمة الملاحظ A إلى $b_0 + \lambda a_n$ ، وبالتالي فكل حالة مختلفة للنظام المقاس من حيث قيمة الملاحظ A تعطي نتيجة مختلفة على جهاز القياس ما يُمكن من الكشف عن حالة النظام المقاس Q .

إذا نموذج فان نيومان استطاع وصف عملية القياس ككل في إطار متناسق من ميكانيك الكم، ورغم أن هذا النموذج قام بتبسيط حالة جهاز القياس بشكل غير معقول وغير مبرر، لكن هذه العملية مازالت مقبولة من حيث المبدأ فقط [6]. المشكلة التي يواجهها هذا النموذج هو في حالة تواجد النظام المقاس في حالة مزج خطي من الأشعة الذاتية لـ A من الشكل $\sum_n \mu_n |a_n\rangle$ (تم إهمال إظهار بقية المتغيرات لأنها ليست ذات أهمية في المناقشة الحالية)، في هذه الحال ونظرا لأن معادلة شرودينجر خطية فإن الحالة النهائية بعد التفاعل تكون من الشكل :

$$\sum_n \mu_n |a_n\rangle \otimes |b_0\rangle \rightarrow \sum_n \mu_n |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \quad (27.1)$$

حيث جاء تعويض $(b_0 + \lambda a_n)$ بـ b_n للاختصار وإعطاء صبغة أكثر عمومية.

مشكلة هذه النتيجة واضحة فهي تقترح وجود مزج خطي لحالات ماكروسكوبية مختلفة لجهاز القياس، الأمر الذي لا يحدث على أرض الواقع. هذه النتيجة الغريبة أدت إلى تمييز موقفين أساسيين من تفسير ميكانيك الكم : الأول - وتتبناه مدرسة كوبنهاجن - يؤمن بأن دالة الموجة تقوم بوصف حالة نظام فردي، وهي تمثل الوصف الأقصى للنظام الكمي بحيث لا توجد معرفة أكثر من المعرفة التي تعطيها دالة الموجة. الموقف الثاني يعتبر أن دالة الموجة لا تصف نظاما فرديا وإنما تقوم بوصف خصائص مجموعة من الأنظمة المتطابقة [9].

I-4- تفسير ميكانيك الكم : مدرسة كوبنهاجن

مدرسة كوبنهاجن أو تفسير كوبنهاجن هو في الأساس مجموعة أعمال لنيلز بور (Niels Bhor)، لذلك يسمى أحيانا بتفسير بور. اعتمد تفسير كوبنهاجن على مجموعة من الأطروحات، والتي سيتم عرضها تباعا في الفقرات التالية، شكلت هذه الأطروحات فلسفة هذه المدرسة حيث حاولت من خلالها إعطاء تفسير للعالم الكمي وعلاقته بالعالم الكلاسيكي المعروف.

واحدة من أهم الأطروحات التي اعتمدت عليها هذه المدرسة هو أن الاحتمالات ذاتية في النظرية ليست ناتجة عن جهل أو عدم إحاطة ببعض المتغيرات بل هي أساسية في طبيعة العالم الكمي، أما العالم العياني

فيوصف بالميكانيك الكلاسيكي بما فيه الوسائل والأجهزة التي تتم بها عمليات القياس، والفاصل بين وسائل القياس والنظام الذي يتم قياسه، أي الفاصل بين العالم الكمي والعالم الكلاسيكي هو أمر يعود اختياره للملاحظ فقط. كما تعتبر هذه المدرسة أن عملية الانتقال من عالم الكم الاحتمالي إلى العالم الكلاسيكي ذو الصبغة اليقينية عند عملية القياس يتم بواسطة قفزة كمية يعبر عنها بانهييار شعاع الحالة إلى الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية المقاسة، لا يتبع هذا الانهييار معادلة شرودينجر - كما هو واضح من خلال نظرية فان نيومان للقياس - لذا تحديد آلية هذه القفزة هو أمر خارج نطاق النظرية وأقصى ما تستطيعه هو التنبؤ باحتمال حدوثها. كما تُعد عملية القياس غير عكوسة أي تتم في اتجاه واحد، لا يمكن عكس تأثيرها وتُنشئ توثيقاً لحالة النظام الذي تم قياسه في لحظة معينة. ويعتبر تفسير كوبنهاجن النظرية مطبقة على أجسام فيزيائية منفردة كما تم ذكره سابقاً، بحيث أن دالة الموجة تصف جسماً وحيداً، على عكس مخالفيها الذين يعدون أن دالة الموجة ما هي إلا توصيف احتمالي لمجموعة أنظمة متطابقة [6].

بالإضافة إلى الأطروحات السابقة التي رسمت فلسفة مدرسة كوبنهاجن، وضع هذا التفسير مجموعة من القواعد للتعامل بشكل صحيح مع النتائج التجريبية، والتي تعتبر صلة ضرورية بين الحسابات المتأتية من النظرية والبيانات التي تعطيها التجارب.

في البداية هناك ما يسمى بـ 'قاعدة التكرار' والتي تنص على أنه :

عند تكرار نفس عملية القياس مباشرة بعد القيام بعملية قياس فردي للملاحظ معين A ، فيجب الحصول مجدداً على نفس النتيجة. بتعبير رياضي، إذا كانت حالة النظام المقاس قبل عملية القياس هي $|\psi\rangle$ ، وأظهر جهاز القياس بعد التفاعل

النتيجة a_n ، فإن حالة النظام بعد القياس مباشرة تعطى بـ :

$$E(a_n)|\psi\rangle \quad (28.1)$$

حيث $E(a_n)$ هو المُسقط المرتبط بالقيمة الذاتية المقاسة a_n .

أما توزيع احتمالات النتائج التجريبية فيعطى بالقاعدة التالية :

احتمال العثور على قيمة للملاحظ A في المجال الحقيقي J هو $P(J)$ ، ويُعطى بالقيمة المتوسطة للمُسقط المرتبط بذلك الملاحظ في ذلك المجال، أي :

$$P(J) = \langle \psi | E(J) | \psi \rangle \quad (29.1)$$

القاعدة التي تليها تعبر عن النتيجة المتوقعة لعملية قياس ملاحظ ما، بعدما تمت عملية قياس ملاحظ آخر قبله، هذه القاعدة تعبر عن مفهوم انهيار دالة الموجة :

إن القيام بسلسلة عمليات قياس لملاحظ A على مجموعة من الأنظمة المتطابقة، والتي تم تحضيرها بشكل متماثل لتكون في الحالة $|\psi\rangle$ ، ثم أتبع بعملية قياس لملاحظ B على مجموعة جزئية من المجموعة السابقة تشترك في أن نتيجة القياس الأول أعطت قيمة للملاحظ A في المجال J ، يعطي احتمالاً لإيجاد قيمة B في المجال K شدته :

$$P(K) = \langle \phi | F(K) | \phi \rangle \quad (30.1)$$

أين $F(K)$ هو المسقط المرتبط بالملاحظ B بالمجال K ، أما شعاع الحالة $|\phi\rangle$ والذي انهار إليها شعاع الحالة الابتدائية $|\psi\rangle$ فيعطي $\langle \psi | E(J) | \psi \rangle$ ، حيث C هو ثابت التنظيم وقيمته $C = (\langle \psi | E(J) | \psi \rangle)^{-1/2}$.

هذا الانهيار الحاصل لدالة الموجة يمثل واحدة من المشاكل الكبرى للنظرية، ذلك أنه لا ينبع من معادلة شرودينجر، التي تتوقع وجود مزج خطي من حالات ماكروسكوبية مختلفة نتيجة التفاعل بين النظام المقاس وجهاز القياس. عدا عن ذلك فهذه القاعدة تتوقع بكل دقة الترددات التجريبية لنتائج القياس وهذا في عدد لا يحصى من التجارب. في الحقيقة، إن القاعدتين الأخيرتين تكفيان للممارسة العملية للفيزياء وقد أكدت تجارب كثيرة صحتها وقيمتها العملية [6].

I-4-1- قطة شرودينجر وصديق ويغرنر

وفقاً لتفسير كوبنهاجن، إن كان الجسم الكمي المراد قياسه في حالة مزج خطي من حالات مختلفة، فإن هذه الحالات ستتطور في الزمن وفق معادلة شرودينجر، لكن ما إن تجرى عملية القياس حتى تحصل قفزة كمية للجسم ليحتل حالة واحدة ووحيدة، دون أن يتم معرفة كيف أو لماذا اختار تلك الحالة.

هذا التراكب الكمي وهذه القفزة الكمية لطالما كانت محل جدال ونقاش طويلين، فأينشتاين مثلاً كان يعتقد بوجود متغيرات خفية تستطيع تحديد حالة الجسم بدقة في كل لحظة، وحالة اللاتحديد أو اللايقين الموجودة في النظرية الكمية هو نتيجة عدم أخذ تلك المتغيرات بعين الحسبان، فالنظرية حسبه لا تزال ناقصة وهي بحاجة إما إلى مفاهيم جديدة أو إلى تطوير المفاهيم الموجودة أصلاً لتتخلص من حالة اللايقين التي تعاني

منها. شرودينجر بدوره أوصل هذا التفسير إلى حد التناقض مع المعرفة الأساسية للعالم الحقيقي في تجربته الفكرية الشهيرة والمعروفة بقطة شرودينجر، وهي باختصار :

قطة موجودة في غرفة مغلقة، بها كمية قليلة من مصدر إشعاعي ضعيف، حيث أن احتمال أن تتفكك ذرة واحدة خلال ساعة مساو لاحتمال عدم تفكك أي ذرة خلال تلك الساعة. عندما تتفكك ذرة يتم تشغيل نظام يقوم بإطلاق سم السيانيد السام في الغرفة. بعد مرور ساعة من الزمن يكون المصدر الإشعاعي في حالة تراكب من حالة تفكك ذرة واحدة وحالة عدم تفكك أي ذرة على الإطلاق، والقطة نتيجة لذلك تكون هي أيضا في حالة تراكب بين الموت والحياة :

$$\psi_{cat} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{alive} + \psi_{dead}) \quad (31.I)$$

وعليه لا تكون القطة حية أو ميتة بل في حالة تراكب من الحالتين! وعملية القياس (مثل النظر إلى داخل الغرفة) ستجبر القطة على أن تكون في حالة محددة حسب تفسير كوبنهاجن، أي أن القياس هو من يقتل القطة أو يبقي عليها حية [8,10].

هذه النتيجة غير معقولة طبعا في واقعنا، العالم الذي نعيش فيه يتميز بالاحتمية فالقطة إما حية وإما ميتة سواء كان هناك من ينظر إليها أم لا، لكن ربط القطة بالعالم الكمي الذي يسمح بتراكب الحالات هو ما خلق هذه النهاية الغريبة.

مفارقة صديق ويغنر (Wigner's friend) هي الأخرى تعبر عن تراكب حالات ماكروسكوبية مختلفة وحتى متناقضة، نتيجة التراكب الحاصل على المستوى الكمي، لكن مفارقة صديق ويغنر تزيد على ذلك بتوضيح دور الوعي أو الإدراك في هذه المسألة.

في تجربة ويغنر يكون هناك تجربة قياس لنظام كمي، ولتكن مثلا قطة شرودينجر، يغادر المحرب الغرفة ويترك صديقه هناك ليقوم بعملية القياس ويرسل له النتائج. بالنسبة للمحرب فإن حالة صديقه تكون عبارة عن مزج خطي من حالتين : حالة يكون فيها سعيدا عندما يجد القطة حية، وحالة أخرى يكون فيها حزينا عندما يجد القطة ميتة. السؤال المطروح الآن هو متى يتم تحديد حالة الصديق، هل عندما يعلم المحرب بالنتيجة وذلك عندما يقرأ رسالة صديقه، أم قبل ذلك ؟ هل تدخل المحرب هو من أجبر الصديق على أن يتخذ موقفا محددًا؟ إن كان هذا صحيحا فكل الواقع الذي نعيش فيه لا يتشكل أو لا يتحدد إلا عندما يتدخل الوعي للقياس ولا يمكن وصف شيء لا يتم قياسه تحت وعي المحرب بأنه موجود [6,11].

5-I- تفسير ميكانيك الكم : الموقف الواقعي والمتغيرات الخفية

تملك ميكانيك الكم القدرة على وصف مجموعة إحصائية من أنظمة متطابقة بطريقة دقيقة، فهي تستطيع التنبؤ بدقة بنتيجة قياس فردي لتلك المجموعة بشكل مطابق للواقع بصفة كبيرة عن طريق دالة الموجة أو شعاع الحالة للنظام، بالمقابل فإن دالة الموجة لا تستطيع الجزم بنتيجة قياس فردي لنظام وحيد، وتتوقف عند إعطاء احتمالات للنتائج الممكنة لهذا القياس. هذا التباين في قدرة ميكانيك الكم على وصف الواقع أدى إلى ظهور موقفين رئيسيين في تفسير ميكانيك الكم :

- الموقف الأول يعبر عن تفسير مدرسة كوبنهاجن لميكانيك الكم حيث يعتبر أن دالة الموجة تمثل الوصف الكامل والتام لنظام فردي، ولا يمكن بأي شكل من الأشكال أن يتم تحديد نتيجة قياس لنظام فردي - سوى في حالة عملية القياس البنوية- بشكل قطعي، وبالتالي فإن الاحتمالات طبيعية ذاتية في العالم الكمي ولا يمكن تجاوزها.

- الموقف الثاني يعتبر أن دالة الموجة تصف خصائص مجموعة إحصائية من أنظمة متطابقة، وبالتالي فإن الاحتمالات في ميكانيك الكم ناتجة من اعتبار السلوك المتوسط لهذه المجموعة، أي بذات الطريقة التي تظهر فيها الاحتمالات في الإحصاء التقليدي، ففي المجموعة القانونية الصغرى مثلا كل جسيم يملك خصائص محددة (موضعا ودفعاً خطياً محددًا) لكن التعامل يتم مع معدل مجموعة الحالات الميكروسكوبية الممكنة للنظام، ذلك أن التعامل الفردي مع كل جسيم غير ممكن عمليا وغير مجد نظريا، ومن ثم فإن الحديث يصبح عن احتمال تواجد الجسيم في حالة ما وليس عن تحديد حالة الجسيم الفعلية.

من أبرز القائلين بهذا الرأي أصحاب الموقف الواقعي وعلى رأسهم اينشتاين، حيث يعتقدون بإمكانية وصف حالة جسيم بدقة عن طريق حالات تختلف عن دوال الموجة المعروفة في كونها تستطيع تحديد خصائص الجسيم بدقة في كل لحظة، ويمكن أن تنتبأ هذه الحالات بنتيجة قياس فردي للجسم بشكل جازم، تدعى هذه الحالات بـ ' الحالات الخالية من التشتت'، ولأن النظرية الحالية لميكانيك الكم لم تستطع تحديد هذه الحالات الخالية من التشتت، فقد اعتبرها الموقف الواقعي نظرية ناقصة، فهي تحتاج إلى تعريف مقادير ومتغيرات أخرى تدعى بـ 'المتغيرات الخفية'، تستطيع هذه المتغيرات مع دالة الموجة للجسم تحديد هذه الحالات الخالية من التشتت، فكل قيمة محددة من المتغيرات الخفية (قد يكون متغيرا واحدا أو مجموعة من المتغيرات) تعطي حالة معينة خالية من التشتت،

ومتوسط مجموعة هذه الحالات الممكنة بالنسبة للمتغيرات الخفية يعطي التوقعات الإحصائية لميكانيك الكم [8,9,12,13,14].

I-5-1- مثال عن المتغيرات الخفية :

سنورد مثالا حول صياغة ممكنة للمتغيرات الخفية لنظام محدد، لا ينبغي أن يتم اعتبار هذه الصياغة وصفا حقيقيا للمتغيرات الخفية ولكنها صيغة تظهر بأنه يمكن إدراج أداة إضافية في التحليل الكمي بحيث تعطي نتيجة القياس بدقة للنظام، دون أن تتناقض مع النظرية الحالية لميكانيك الكم.

النظام هو عبارة عن جسيم ذو سبين $1/2$ ، لا يقوم بحركة ودفعه الخطي معدوم، إذاً بعد فضائه هو اثنان. الملاحظات الخاصة بهذا النظام هي مؤثرات هرميتية ذات مصفوفات ثنائية البعد، والتي يمكن التعبير عنها بشكل عام بـ :

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta_z & \beta_x + i\beta_y \\ \beta_x - i\beta_y & \alpha - \beta_z \end{pmatrix} \quad (32.I)$$

حيث أن $(\alpha, \beta_x, \beta_y, \beta_z)$ هي عبارة عن أعداد حقيقية. وبشكل أكثر اختصارا يمكن التعبير عن تلك الملاحظات بـ :

$$\alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma} \quad (33.I)$$

والتي يفهم منها أن $(\vec{\beta} \cdot \vec{\sigma} = \beta_x \sigma_x + \beta_y \sigma_y + \beta_z \sigma_z)$ حيث $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ هي مصفوفات باولي. القيمتان الذاتيتان لهذا الملاحظ هما :

$$\alpha \pm |\vec{\beta}| \quad (34.I)$$

المتغيرات الخفية لهذا الجسيم تسمح بمعرفة القيمة الذاتية التي سيأخذها الجسيم عند القيام بعملية قياس فردي إذا كانت حالته معرفة بمتجه حالة معين $|\psi\rangle$ ، ومنه تكون الحالات الخالية من التشتت هي عبارة عن متجه الحالة للجسيم بالإضافة إلى المتغيرات الخفية، والتي سيعبر عنها في هذا النموذج بعدد حقيقي λ ينتمي إلى المجال $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ، تحدد λ القيمة الذاتية التي سيأخذها شعاع الحالة :

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (35.I)$$

وهي ليست حالة خاصة كما تبدو، إذ يمكن دوما تدوير نظام الإحداثيات بحيث يأخذ أي متجه في فضاء الجسيم الشكل المذكور آنفا، مع الانتباه إلى أن شكل الملاحظ يتغير أيضا تبعا لهذا التدوير. في حالتنا هذه سنحتفظ بنفس شكل الملاحظ، وذلك لأنه يمكن أن يكتب هو الآخر في نظام الإحداثيات الجديد بنفس الشكل العام للعبارة (33.I)، ولكن بقيم α و $\vec{\beta}$ مختلفة ولأنه لم يتم تحديد قيمهم منذ البداية على أي حال، سنحتفظ بالشكل القديم لعبارة الملاحظ.

القيمة الذاتية التي تأخذها الحالة الخالية من التشنت المعرفة سابقا هي :

$$\alpha + |\vec{\beta}| \text{sign} \left(\lambda |\vec{\beta}| + \frac{1}{2} |\beta_z| \right) \text{sign}(X) \quad (36.I)$$

حيث

$$X = \begin{cases} \beta_z & \beta_z \neq 0 \\ \beta_x & \beta_z = 0 \text{ و } \beta_x \neq 0 \\ \beta_y & \beta_z = 0 \text{ و } \beta_x = 0 \text{ و } \beta_y \neq 0 \end{cases} \quad (37.I)$$

أما (sign) فهي دالة الإشارة، وتعرف كالتالي :

$$\text{sign}(X) = \begin{cases} 1 & X \geq 0 \\ -1 & X < 0 \end{cases} \quad (38.I)$$

إذا كل حالة خالية من التشنت مرفقة بقيمة λ تحدد نتيجة قياس الملاحظ بدقة، والقيمة المتوسطة لهذه النتيجة بالنسبة ل λ يجب أن تكون مطابقة للقيمة المتوسطة المتحصل عليها بنظرية ميكانيك الكم.

القيمة المتوسطة للملاحظ بالنسبة للحالة $|\psi\rangle$ في ميكانيك الكم هي :

$$\langle \psi | (\alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}) | \psi \rangle = \alpha + \beta_z \quad (39.I)$$

أما القيمة المتوسطة للملاحظ بالنسبة ل λ فهي

$$\begin{aligned} \langle \alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma} \rangle &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\alpha + |\vec{\beta}| \text{sign} \left(\lambda |\vec{\beta}| + \frac{1}{2} |\beta_z| \right) \text{sign}(X) \right) d\lambda \\ &= \alpha + |\vec{\beta}| \text{sign}(X) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \text{sign} \left(\lambda |\vec{\beta}| + \frac{1}{2} |\beta_z| \right) d\lambda \end{aligned} \quad (40.I)$$

حيث أن قيمة التكامل هي

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \text{sign}\left(\lambda|\vec{\beta}| + \frac{1}{2}|\beta_z|\right) d\lambda = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\left|\lambda|\vec{\beta}| + \frac{1}{2}|\beta_z|\right|}{\lambda|\vec{\beta}| + \frac{1}{2}|\beta_z|} d\lambda$$

$$= \frac{|\beta_z|}{|\vec{\beta}|} \quad (41.I)$$

بتعويض قيمة التكامل في المعادلة (40.I)، نحصل على :

$$\langle \alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma} \rangle = \alpha + |\vec{\beta}| \text{sign}(X) \frac{|\beta_z|}{|\vec{\beta}|} = \alpha + \text{sign}(X) |\beta_z| \quad (42.I)$$

حيث أن

$$\text{sign}(X) |\beta_z| = \begin{cases} \beta_z & \beta_z \neq 0 \\ 0 & \beta_z = 0 \end{cases} \quad (43.I)$$

بالتالي فإن القيمة المتوسطة لنتيجة قياس الملاحظ بالنسبة للمتغير الخفي λ هي :

$$\langle \alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma} \rangle = \alpha + \beta_z \quad (44.I)$$

وهي مطابقة للقيمة المتحصل عليها بواسطة ميكانيك الكم. يجدر التنويه هنا إلى أنه لم يتم اعطاء أي معنى فيزيائي للمتغيرات الخفية في هذا المثال، كما لم يتم تعريف كيفية تطورها خلال الزمن ولا القوانين المتحكمة في تطورها، المثال السابق كان بغرض إظهار أنه يمكن وجود متغيرات تسمح بمعرفة القيمة الدقيقة للقياس دون أن تتعارض مع نتائج ميكانيك الكم الاحتمالية [13].

I-5- مفارقة أينشتاين - بودولسكي - روزن (EPR Paradox)

في سنة 1935 قام كل من أينشتاين، بودولسكي (Podolsky) و روزن (Rosen) بنشر مفارقة EPR المشهورة، التي حاول من خلالها الثلاثي إثبات أن نظرية الكم الحالية غير كاملة، وأن دالة الموجة لا يمكن أن توفر المعرفة الكاملة حول الحالة الحقيقية لنظام فيزيائي، بل يجب أن يتم إلحاق مجموعة من المتغيرات الإضافية بالنظرية حتى تكتمل، وتعيد إليها المبادئ الفلسفية الأساسية حول العالم الحقيقي كاليقينية أو الحتمية والسببية.

مفارقة EPR عبارة عن تجربة فكرية، التجربة التي سيتم عرضها ليست التجربة الأصلية التي تم نشرها سنة 1935، ولكنها نسخة مبسطة عنها قدمها ديفيد بوم (David Bohm).

نفترض وجود جسمين في حالة السبين الأحادية، نتجا في هذه الحالة مثلا بسبب تفكك الميزون π^0 إلى إلكترون وبوزيترون حسب المعادلة :

$$\pi^0 \rightarrow e^- + e^+ \quad (45.I)$$

إذا كان الميزون في البداية في حالة سكون، فإن كل من الإلكترون والبوزيترون عند تفكك الميزون سينطلقان في اتجاهين متعاكسين وبدفع خطي متعاكس، حتى يكون الدفع الخطي الكلي معدوما. كذلك بما أن سبين الميزون π^0 معدوم، فإن الإلكترون والبوزيترون سيكونان في الحالة الأحادية للسبين حتى يتم حفظ الدفع الزاوي. الاهتمام سيكون فقط بسبين الجسمين لذا لن يتم التعامل مع دالة الموجة الكلية بل التعامل سيكون فقط مع جزئها السبيني :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_-\rangle|\downarrow_+\rangle - |\downarrow_-\rangle|\uparrow_+\rangle) \quad (46.I)$$

أين $|\psi\rangle$ هي الحالة الأحادية للسبين و $|\uparrow_-\rangle$ و $|\downarrow_+\rangle$ هو شعاع ذاتي لسبين الإلكترون (البوزيترون) مرفق بالقيمة الذاتية $1/2$ أما $|\downarrow_-\rangle$ و $|\uparrow_+\rangle$ فهو الشعاع الذاتي لسبين الإلكترون (البوزيترون) المرفق بالقيمة الذاتية $-1/2$.

يُترك الجسمان ليبتعدا عن بعضهما بمسافة كافية قبل أن يتم قياس سبين أحدهما لتفادي أي تفاعل قد يحدث بين آلة القياس والجسيم الآخر. إن ما يتوقعه ميكانيك الكم هو أن احتمال أن تكون قيمة سبين الإلكترون $\frac{1}{2} +$ مساوية لاحتمال القيمة $\frac{1}{2} -$ ، والأمر نفسه بالنسبة للبوزيترون، لكن إذا ما تم قياس سبين الإلكترون ووجد أن قيمته هي $\frac{1}{2} +$ فإن قيمة سبين البوزيترون الذي يبعد عدة أمتار (أو عدة سنوات ضوئية الأمر لا يهم ذلك أن المسافة بين الجسمين لا تؤثر على العملية) لابد وأن تكون $\frac{1}{2} -$ ، والعكس بالعكس.

بالنسبة للموقف الواقعي لا غرابة في الأمر، فعند كل تفكك تكون هناك قيمة محددة للمتغير الخفي (أو المتغيرات الخفية) تحدد قيمة سبين الإلكترون والبوزيترون، والقياس يقوم فقط بالكشف عن قيمة السبين المحددة مسبقا. لكن بالنسبة لمدرسة كوبنهاجن الأمر مختلف، فهي تسلم بأن حالة النظام قبل القياس تكون غير محددة وفي حالة تراكب من الحالتين الممكنتين لسبين الإلكترون والبوزيترون، و فقط عند القياس تنهار دالة الموجة للنظام المقاس إلى حالة معينة، أي أنه إذا تم قياس سبين الإلكترون مثلا، فإن قيمة سبينه تتحدد فقط عند القياس، وعملية القياس التي أجريت على الإلكترون تؤثر أنيا على البوزيترون الذي يبعد عن الإلكترون بعدة أمتار أو كيلومترات، فتنهار حالته هو الآخر إلى القيمة المعاكسة للسبين دون أن تجرى

عملية قياس عليه. هذا التأثير البعدي الآني بين نظامين مفصولين مكانيا هو ما اعتبره أينشتاين ومن معه منافيا للعقل، إذ لا يمكن لأي تأثير أن ينتقل بسرعة أكبر من سرعة الضوء حسب النسبية الخاصة، ليستخلص في النهاية أن الوصف الكمي للحقيقة الفيزيائية بواسطة دالة الموجة لا يمكن أن يكون كاملا، إذا ما تم قبول أن التأثيرات المنقلة بسرعة أكبر من سرعة الضوء غير ممكنة. وقد صاغ أينشتاين هذا المفهوم من خلال مبدأ 'المحلية' الذي ينص على أن 'الحالة الفيزيائية الحقيقية لنظام ما لا تتأثر آنيا بنوع القياس الذي يتم على نظام آخر سبق وأن تفاعل معه إذا كان مفصولا عنه مكانيا بشكل كاف' [8,9,12,13].

I-6- متراجعة بيل

كان أينشتاين -ومن وراءه الموقف الواقعي- يؤمن بأن نظرية الكم غير كاملة، ولم يستطع تقبل التفسير الإحصائي لدالة الموجة الذي قدمه بورن، كان يؤمن بشكل عميق بأن المبادئ الفلسفية الأساسية التي يقوم عليها العالم الماكروسكوبي موجودة أيضا على مستوى العالم الميكروسكوبي، فـ 'الله لا يلعب النرد' حسب أينشتاين، وهو تعبير صريح عن رفضه التام للطبيعة الاحتمالية للعالم الكمي التي تؤدي في النهاية إلى تضييع معنى السببية والحتمية في ميكانيك الكم. هو لم يعتقد بأن نظرية الكم خاطئة، فتوقعاتها الإحصائية وصلاحياتها التجريبية لا غبار عليها، لكنه آمن بأن هناك عنصرا مازال غائبا عن النظرية، عنصر يمكن بإضافته إلى ميكانيك الكم أن يصف الحقيقة الفيزيائية بشكل كامل ودقيق، أطلق على هذا العنصر اسم المتغيرات الخفية نظرا لأنه لم تكن هناك طريقة حينها لقياسها أو حسابها. الصراع القائم بين تفسيري بور وأينشتاين بقي قائما حتى سنة 1964، حين استطاع بيل (J. S. Bell) أن ينقل هذا الجدل من الفلسفة إلى التجربة، وأثبت أن أي نظرية متغيرات خفية محلية - بالمعنى الذي طرحه أينشتاين - لا يمكن أن تكون متوافقة مع ميكانيك الكم.

استخدم بيل نسخة Bohm من تجربة EPR بتعديل طفيف، حيث افترض جسيمين لهما سبين $1/2$ في حالة السبين الأحادية ويتحركان بحرية في اتجاهين متعاكسين. تجرى عملية القياس على كل جسيم لأجل قياس مركبات معينة لـ \vec{S}_1 و \vec{S}_2 . لا يُشترط قياس نفس مركبة السبين للجسيمين، بل إن التعميم الذي قام به بيل هو قياس مركبة السبين لجسيم وفق اتجاه شعاع وحدته \vec{a} أما عملية القياس للجسيم الآخر فتكون وفق اتجاه آخر \vec{b} . إن ما تؤكد عليه ميكانيكا الكم هو أنه إذا ما تم قياس مركبة السبين \vec{a} . \vec{S}_1 للجسيم الأول، فإن عملية قياس مركبة السبين للجسيم الآخر وفق نفس الاتجاه ستكون معاكسة للقيمة الأولى.

إذا كانت المتغيرات الخفية λ موجودة، فإنها ستحدد نتيجة عملية القياس لمركبة السبين لكل جسيم. نسمي الدالة التي تحدد نتيجة قياس مركبة سبين الجسم الأول بـ A وتحدد قيمتها بالاتجاه المختار \vec{a} وقيمة المتغير الخفي λ ، أما دالة نتيجة قياس الجسم الثاني فهي B وتحدد قيمتها بـ \vec{b} و λ ، حيث أن :

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1 \quad , \quad B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1 \quad (47.I)$$

لا يهم هنا إن كان λ هو متغير واحد أو مجموعة من المتغيرات، كما لا يهم ان كانت هذه المتغيرات مستمرة أو متقطعة، فهذا لن يؤثر على المسألة المدروسة، لذا سيتم التعامل مع λ كما لو كان متغيرا واحدا مستمرا. إذا لكل حالة سبين أحادية هناك قيمة لـ λ تحدد النتيجة التي سيكون عليها القياس، قد تختلف قيمة λ بين حالة وأخرى، حيث تصف $\rho(\lambda)$ دالة توزيع λ ، احتمالات العثور على كل قيمة.

اعتبار مهم سيتم أخذه في هذه المسألة، يتمثل في مبدأ المحلية : حيث أن نتيجة القياس A تكون مستقلة عن الاتجاه \vec{b} وأيضا نتيجة القياس B مستقلة عن اختيار \vec{a} .

ما قام به بيل هو حساب القيمة المتوسطة لجداء مركبتي السبين المقاستين للجسيمين بالنسبة للمتغير λ :

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) d\lambda \quad (48.I)$$

والذي يجب أن يكون مساويا للقيمة المتوسطة لهذا الجداء بالنسبة لحالة السبين الأحادية في ميكانيك الكم، والتي تساوي :

$$\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{a} \vec{S}_2 \cdot \vec{b} \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b} \quad (49.I)$$

لكن سيتم إثبات أن هذا غير ممكن عموما.

الدالتان A و B مستقلتان، لكنهما تحققان العلاقتين التاليتين مهما كانت قيمة λ :

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda) \quad (50.I)$$

$$A(\vec{a}, \lambda) = B(-\vec{a}, \lambda) \quad (51.I)$$

هاتان العلاقتان تعبران عن حفظ الدفع الزاوي الكلي المعلوم للجسيمين، ويمكن بواسطة العلاقة الأولى أن نعيد صياغة عبارة $P(\vec{a}, \vec{b})$ لتصبح من الشكل :

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) d\lambda \quad (52.I)$$

وإذا كان \vec{c} هو شعاع وحدة آخر فإن :

$$P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) [A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{c}, \lambda)] \quad (53.I)$$

وبما أن $(A(\vec{a}, \lambda))^2 = 1$ حسب العلاقة (47.I)، فإن :

$$P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda)] \quad (54.I)$$

بما أن قيمة الجداء $A(\vec{a}, \lambda)A(\vec{b}, \lambda)$ تتأرجح بين +1 و -1 حسب العلاقة (47.I)، وبما أن كثافة الاحتمال موجبة، فإن :

$$\rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda)] \geq 0 \quad (55.I)$$

وعليه حسب العلاقة (54.I)، تكون

$$- \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda)] \leq P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \quad (56.I)$$

وأيضاً

$$P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda)] \quad (57.I)$$

وهو ما يعني أن

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda)] \quad (58.I)$$

دالة كثافة الاحتمال منظمة إلى الوحدة، وبملاحظة أن الحد الثاني على يمين المتراجحة هو عبارة عن $P(\vec{b}, \vec{c})$ تصير المتراجحة السابقة من الشكل :

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \quad (59.I)$$

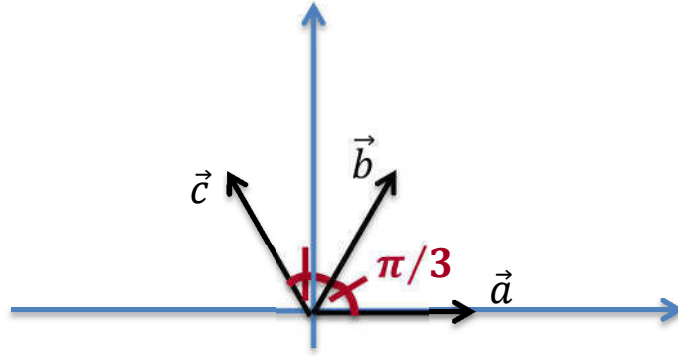
هذه هي متراجحة بيل الشهيرة، التي يجب أن تحققها المتغيرات الخفية 'المحلية'، ذلك لأن هذه المتراجحة ناتجة فقط من افتراض 'وجود' المتغيرات الخفية دون التعرض لطبيعتها أو عددها أو أي أمر آخر يخصها، أي إذا كان هناك متغيرات خفية فعلاً فيجب أن تكون هذه المتراجحة محققة [8,13].

هذه المتراجحة من جهة أخرى ليست متوافقة مع ميكانيك الكم، ويمكن إثبات ذلك من خلال مثال مضاد [10]. خذ مثلا الحالة التي يكون فيها \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} في نفس المستوي وبفصل بين كل شعاعين متتالين الزاوية $\pi/3$ كما هو موضح في الشكل (2-I). ما تتوقعه ميكانيك الكم في هذه الحالة هو أن

$$P(\vec{b}, \vec{c}) = -\frac{1}{2}, \quad P(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{1}{2}, \quad P(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2} \quad (60. I)$$

ولا يمكن لهذه النتائج أن تحقق متراجحة بيل :

$$\left| \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} \right| \not\leq 1 + \frac{-1}{2} \quad (61. I)$$



شكل (2-I) : قياس مركبات السبين وفق هذه المجموعة من المحاور لا يمكن أن يحقق متراجحة بيل.

إن ما أظهرته متراجحة بيل هو أن ميكانيك الكم لا يمكن أن تقبل بمتغيرات إضافية، فوجود هذه المتغيرات لا يمكن أن يكون متناسقا مع النظرية عامة، بغض النظر عن طبيعة هذه المتغيرات أو عددها، وأي محاولة لتحديد حالة نظام كمي بدقة أكبر من تلك التي تعطيها دالة الموجة، سيتناقض مع النتائج المتوقعة من قبل ميكانيك الكم. هذا التضاد الذي أتت به متراجحة بيل يؤدي إلى نتيجة مفاجئة جدا، فإذا ما تم التسليم بأن النظرية الفيزيائية الأساسية ليست عشوائية، فإن ميكانيك الكم إذاً هي نظرية خاطئة ! وإذا ما تم القبول بصحة نظرية ميكانيك الكم فلا مجال للحديث عن أي متغيرات أخرى، بالإضافة إلى الموافقة الضمنية على أن العالم الحقيقي هو 'غير محلي' أساسا، حيث يمكن في هذا العالم لأجسام موجودة على طرفي الكون التأثير على بعضها بعضا بصفة آنية !

لقد أجريت عدة تجارب لاختبار متراجحة بيل، ونتائج كل تلك التجارب كانت دائما متوافقة بشكل ممتاز مع توقعات ميكانيك الكم، أما متراجحة بيل فكانت غير محققة وهذا ليس مفاجئا. إن صحة ميكانيك الكم تشهد

عليها العديد من التجارب التي أجريت من قبل في غير هذا الموضوع، لكن الجديد الذي جاءت به هذه التجارب هو الإثبات الضمني لمبدأ اللامحلية في ميكانيك الكم، ورغم أن هذا الإثبات يخص الجسيمات المتشابكة، وهي الحالة التي تمت معالجتها في متراجحة بيل ومفارقة EPR من قبل، لكنه كاف ليهدد مبدأً فيزيائياً وفلسفياً أساسياً وهو مبدأ السببية. فحسب نظرية النسبية الخاصة، فإن حدثين متزامنين مفصولين مكانياً في معلم عطالي هما حدثان من فئة الاحداث ذات الطبيعة المكانية (space-like events)، ويمكن أن يوجد معلم عطالي يحدث فيه أحد الحدثين قبل الآخر، ومعلم آخر يحدث فيه العكس، لذا لا يمكن لهذين الحدثين أن يكون أحدهما سبباً للآخر.

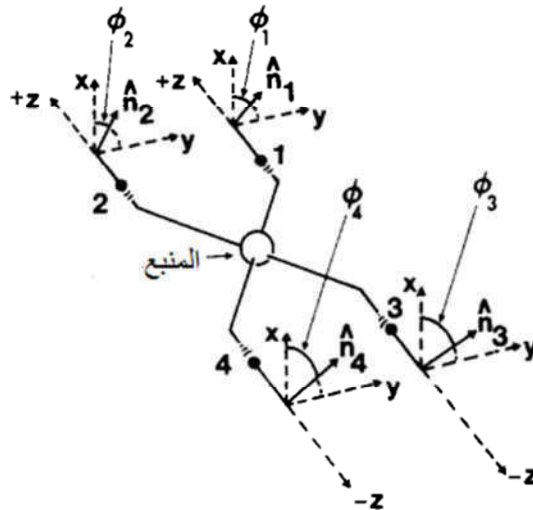
في المقابل، فإن قياس السبين لأحد الجسيمين المترابطين في مفارقة EPR يحدد مركبة السبين أنياً للجسيم الآخر، لكن من جهة أخرى هناك معلم عطالي آخر تتم فيه عملية قياس مركبة السبين للجسيم الثاني قبل الأول، فالإشارة الفوق ضوئية التي تم إرسالها في المعلم الأول تسير في الاتجاه المعاكس في المعلم الثاني، ولا يمكن في هذه الحال وصف أي من الحدثين بأنه مسبب للآخر، بل يمكن القول بأنه لم يعد هناك معنى للسبب والمسبب أصلاً عند اقرار مبدأ اللامحلية في هذا المثال.

من الممكن تدارك هذا الأمر عند ملاحظة أن العلاقة بين الحدثين ليست سببية من الأساس حتى قبل إقرار مبدأ اللامحلية، فقياس السبين لأحدهما لا 'يسبب' ظهور نتيجة 'مختارة' عند قياس الجسم الآخر، ذلك أن المجرّب لا يعلم بداية قيمة السبين للجسم الأول التي ستظهرها عملية القياس حتى يتسبب في ظهور قيمة معينة في جهاز القياس الآخر. صحيح أن عملية القياس الأولى تؤثر على نتيجة القياس الثانية، هذا مؤكد، لكن هذا التأثير ليس سببياً بحيث يختار المجرّب شروطاً مناسبة حتى تظهر نتيجة مقصودة في الطرف الآخر من التجربة وهو المطلوب من تأثير سببي، وبما أن هذا التأثير ليس سببياً فإن الإشارة المنقولة بين الجسيمين لا تحمل معلومات أو طاقة ولا مانع من أن تتجاوز سرعة الضوء حسب النسبية الخاصة، مثلما يحدث في حزمة أمواج حيث يمكن أن تكون سرعة طورها أكبر من سرعة الضوء لكن لا يمكن أن تتجاوز سرعة المجموعة -وهي السرعة التي تنتقل بها الطاقة- سرعة الضوء. مع ذلك يبقى هذا التأثير الذي ينتقل بين الجسيمات المتشابكة غامضاً، وهو نتيجة للانهيّار الآني لدالة الموجة لهاته الجسيمات في كل الفضاء، وكأن كل المسافات التي بينها لا معنى لها... [8]

I-6-1- نظرية بيل دون متراجحات

أثبتت نظرية بيل أن وجود المتغيرات الخفية المحلية غير متوافق مع نتائج وتوقعات ميكانيك الكم، وهذا عن طريق دراسة نموذج من جسيمين متشابكين، لكن عمل غرينبرغر (D. M. Greenberger) ومن معه أثبت أن نظرية المتغيرات الخفية في حالة أكثر من جسيمين متشابكين ليست متناسقة داخليا من البداية. سيتم عرض حالة أربعة جسيمات متشابكة أولا لسهولة النسبية، ثم سيتم الانتقال إلى حالة ثلاث جسيمات مترابطة.

ليكن هناك أربع جسيمات ذات سبين $1/2$ ناتجة عن تفكك ثنائي لجسم ذي سبين 1، في التفكك الأول ينتج جسيمين لكل منهما سبين 1، وفي التفكك الثاني يتحلل كل جسيم من الجسيمين السابقين إلى جسيمين ذوا سبين $1/2$. الدفع الخطي الكلي للجسيمات سيكون معدوما إذا ما كان الجسيم الأولي ساكنا قبل التفكك، نختار الحالة التي يكون فيها الدفع الخطي لجسيمين في الاتجاه الموجب للمحور (Oz) والجسيمان الآخران يتحركان في الاتجاه السالب له، كما هو موضح في الشكل (I-3). الجسيمات تكون مفصولة مكانيا عن بعضها بحيث يمكن الكشف على كل واحد منها بكاشف منفصل.



شكل (I-3) : التجربة الفكرية لقياس أربع مركبات سبين لأربع جسيمات متشابكة [16].

إذا كانت مركبة السبين الأولي معدومة، فإن الحالة الكلية للجسيمات الأربعة بعد التفكك تكون كالتالي [16] :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle|\downarrow_4\rangle - |\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle|\uparrow_4\rangle) \quad (62.I)$$

إذا ما تم قياس مركبة السبين للجسم الأول وفق الاتجاه \vec{n}_1 ، ووفق \vec{n}_2 للجسيم الثاني ووفق \vec{n}_3 و \vec{n}_4 للجسيم الثالث والرابع على التوالي، فإن القيمة المتوسطة لجداء هذه المركبات حسب ما تتوقعه ميكانيك الكم هو :

$$P(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 + \\ - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) \quad (63. I)$$

حيث (θ_i, φ_i) هي الاحداثيات الكروية لشعاع الوحدة \vec{n}_i ، ولغرض التبسيط يمكن أن نختار أن تكون كل أشعة الوحدة \vec{n}_i موجودة في المستوي (X, Y) ، فتصبح العبارة السابقة كما يلي :

$$P(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4) = -\cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) \quad (64. I)$$

وهي تشبه قليلا القيمة المتوسطة لجداء مركبتي السبين في حالة جسيمين مترابطين. الحالتان الحديتان لهذه العبارة والتي تظهران الترابط الحاصل بين الجسيمات الأربعة هما :

$$\begin{cases} P(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4) = 1 & \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = \pi \\ P(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4) = -1 & \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = 0 \end{cases} \quad (65. I)$$

وعلى غرار نظرية بيل، سنفترض وجود أربعة دوال $(A_\lambda(\varphi_1), B_\lambda(\varphi_2), C_\lambda(\varphi_3), D_\lambda(\varphi_4))$ حيث $A_\lambda(\varphi_1)$ تعطي نتيجة قياس مركبة السبين للجسم الأول وفق المتجه \vec{n}_1 المعروف بالزاوية φ_1 ، $B_\lambda(\varphi_2)$ تعطي نتيجة قياس الجسم الثاني وفق المتجه \vec{n}_2 وهكذا، أما λ فهي تعبر عن قيمة المتغيرات الخفية لهذه الحالة. القيم التي يمكن أن تأخذها هذه الدوال هي ± 1 بوحدة $\hbar/2$ ، وقبل المرور لإثبات وجود متراجعة تحققها هذه الدوال ولا تتفق نتائجها مع توقعات ميكانيك الكم، يمكن إثبات أن نموذج المتغيرات الخفية لهذه الحالة متناقض داخليا، وبالتالي يستحيل وجود هذه المتغيرات في حالة أربع جسيمات، حتى في حالة خاصة.

لإثبات هذا التناقض الداخلي لنظرية المتغيرات الخفية في حالة أربع جسيمات، نعود للحالتين السابقتين ونعبر عنهما باستخدام الدوال الأربعة السابقة :

$$\begin{cases} A_\lambda(\varphi_1)B_\lambda(\varphi_2)C_\lambda(\varphi_3)D_\lambda(\varphi_4) = 1 & \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = \pi & (a. 66. I) \\ A_\lambda(\varphi_1)B_\lambda(\varphi_2)C_\lambda(\varphi_3)D_\lambda(\varphi_4) = -1 & \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = 0 & (b. 66. I) \end{cases}$$

هناك عدة طرق لاختيار الزوايا $\{\varphi_i\}$ بحيث تحقق المعادلتين (a. 66. I) و (b. 66. I)، ويمكن أن نسرد مجموعة من الخيارات لكل حالة، فمن الخيارات الممكنة للحالة (b. 66. I) نجد :

$$A_{\lambda}(0)B_{\lambda}(0)C_{\lambda}(0)D_{\lambda}(0) = -1 \quad (a. 67.I)$$

$$A_{\lambda}(\varphi)B_{\lambda}(0)C_{\lambda}(\varphi)D_{\lambda}(0) = -1 \quad (b. 67.I)$$

$$A_{\lambda}(\varphi)B_{\lambda}(0)C_{\lambda}(0)D_{\lambda}(\varphi) = -1 \quad (c. 67.I)$$

$$A_{\lambda}(2\varphi)B_{\lambda}(0)C_{\lambda}(\varphi)D_{\lambda}(\varphi) = -1 \quad (d. 67.I)$$

من المعادلتين (a. 67.I) و (b. 67.I) نجد أن :

$$A_{\lambda}(0)C_{\lambda}(0) = A_{\lambda}(\varphi)C_{\lambda}(\varphi) \quad (a. 68.I)$$

ومن المعادلتين (a. 67.I) و (c. 67.I) نجد أن :

$$A_{\lambda}(0)D_{\lambda}(0) = A_{\lambda}(\varphi)D_{\lambda}(\varphi) \quad (b. 68.I)$$

أما من المعادلتين (a. 68.I) و (b. 68.I) فيمكن أن نستنتج أن :

$$C_{\lambda}(0)/D_{\lambda}(0) = C_{\lambda}(\varphi)/D_{\lambda}(\varphi) \quad (c. 68.I)$$

بما أن $D_{\lambda} = \pm 1$ فإن هذه الدالة ومقلوبها متساويان، وبالتالي تصبح العبارة السابقة كما يلي :

$$C_{\lambda}(0)D_{\lambda}(0) = C_{\lambda}(\varphi)D_{\lambda}(\varphi) \quad (c'. 68.I)$$

بتعويض هذه المعادلة في المعادلة (d. 67.I) نجد :

$$A_{\lambda}(2\varphi)B_{\lambda}(0)C_{\lambda}(0)D_{\lambda}(0) = -1 \quad (69.I)$$

وأخيرا بمقارنة المعادلة السابقة مع المعادلة (a. 67.I) يتضح أن :

$$A_{\lambda}(2\varphi) = A_{\lambda}(0) = cst \quad (70.I)$$

ما تقترحه هذه النتيجة هو أن قيمة السبين التي تحدها دالة نتيجة القياس A_{λ} ثابتة من أجل λ معينة، ولا تتغير مهما كان جهة \vec{n}_1 في المستوي (x,y) ، ونتيجة لمبدأ المحلية الذي تخضع له هذه الدوال فإن جهة \vec{n}_1 لن تؤثر على بقية الدوال، وهو ما ينبئ بخرق محتمل لمبدأ حفظ الدفع الزاوي الكلي. لإظهار هذا الخلل بشكل واضح نستخدم المعادلة (a. 66.I)، حيث يمكن اختيار توجيه أشعة الوحدة بالشكل الموالي :

$$A_{\lambda}(\varphi + \pi)B_{\lambda}(0)C_{\lambda}(\varphi)D_{\lambda}(0) = 1 \quad (71.I)$$

بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (b. 67.I) نجد أن :

$$A_{\lambda}(\varphi + \pi) = -A_{\lambda}(\varphi) \quad (72.I)$$

واضح أن هذه المعادلة متناقضة مع المعادلة (70.I)، وعليه من غير الممكن وجود متغيرات خفية لنظام مكون من 4 أجسام مترابطة، فأى نموذج لهذه المتغيرات سيحوي تناقضا داخليا ذاتيا لا يمكن تجاوزه. إن التجربة السابقة كافية لإظهار أنه لا يمكن وجود نظرية لمتغيرات خفية في حالة ثلاث جسيمات أيضا، ففي المعالجة السابقة تم تثبيت زاوية الدالة B_{λ} لتكون مساوية إلى الصفر، ولم تدخل في إثبات تناقض نظرية المتغيرات الذاتية في حالة 4 أجسام، لذا إذا فرضنا ثلاثة أجسام تم تحضيرها بطريقة ما لتكون في الحالة :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle - |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle) \quad (73.I)$$

فإنه يمكن استخدام نفس المعالجة السابقة لإثبات أن المتغيرات الخفية في حالة ثلاث أجسام مترابطة تعاني من نفس التناقض الداخلي الذي تعاني منه النظرية في حالة أربعة جسيمات مترابطة [16].

I-7- ما هي مشكلة تفسير ميكانيك الكم؟

ما الذي يجري إذا؟ فمن جهة تعمل ميكانيك الكم بطريقة ممتازة ونتائجها -في حدود ما تسمح به- دقيقة بشكل ممتاز، من جهة أخرى محاولة إعطائها معنى وتفسير خلق صراعات عدة ولم يتم الوصول إلى نهاية مرضية إلى حد الآن، لماذا لا يمكن لنظرية تعمل بشكل ممتاز أن تملك معنى وتفسيرا؟

ربما تكون قضية إعطاء معنى وتفسير لميكانيك الكم في النهاية خاضعة لأهوائنا وطريقة تقاعنا مع العالم المجرد الذي نعيش فيه، ربما العالم الكمي فقط لا يتصرف كالعالم الكلاسيكي وعلى عقولنا الكلاسيكية أن تتقبل هذا العالم كما هو دون أن تخضع لأهواء مسبقة ودون أن تحاول أن تُجري عليه الحدس العام المبني على الخبرة اليومية. في واقع الأمر بما أن قضية تفسير ميكانيك الكم لا تؤثر على صلاحية النظرية، فهي لا تشكل عائقا عمليا، ولا تطرح أي مشكلة من الناحية التجريبية، لذا يبدو أحيانا أن كل هذه الخلافات في تفسير ميكانيك الكم غير ذات معنى، ومجرد هرطقة فلسفية لا طائل منها، لكن ما يدعوا للتأمل والتفكير هو أن لكل تفسير مأخذ حقيقية على التفسير الآخر، وهذا بمثابة تلميح خفي على أن ميكانيك الكم ربما لم تظهر كل ما لديها بعد. فبعودة تاريخية نجد أن قانون الجذب العام لنيوتن هو قانون لا محلي يسمح بتأثير آني بين جسمين بعيدين، وأعطى هذا القانون نتائج صحيحة وسمح بتفسير حركة الاجرام السماوية، لكن أينشتاين لم يستطع تقبل هذا التأثير البعدي بين الأجسام، واستطاع أن يثبت أن جاذبية الاجرام السماوية ناتجة عن انحناء نسيج الزمكان وأن انتقال أمواج الثقالة يكون بسرعة الضوء وذلك من خلال النسبية العامة التي أبطل

من خلالها قانون نيوتن للجذب العام. هذه العودة التاريخية تظهر إمكانية حدوث أمر مماثل مع ميكانيك الكم خاصة وأنها غير متوافقة مع النسبية العامة.

الفصل الثاني

التشابك الكمي : عدة رياضية
ومعالم فيزيائية

II-1- تمهيد

أُلقت مفارقة EPR الضوء على خاصية كمية مهمة لم يسبق التعرض لها سابقا بهذا الوضوح، وهي خاصية الترابط الذي ينشأ بين نظامين -أو أكثر- سبق لهما التفاعل بشكل أدى إلى تشابك حالتَيْهما الكمية. حالة التشابك التي تقع بين هذه الأنظمة تجعل التأثير على أحدها يؤثر بصفة آنية على بقية الأنظمة مهما كانت المسافات الموجودة بينها، ورغم غرابة الأمر إلا أن متراجحة بيل قد أثبتت صحته بالفعل ما يفتح الباب واسعا أمام التشابك الكمي كمصدر محتمل في مجال المعلومات والاتصالات الكمية. للانطلاق نحو هذا المسعى وتحديد الآفاق المحتملة التي يفتحها التشابك الكمي سنقوم أولا بتحديد الأدوات الرياضية اللازمة لوصف النظام المتشابك أو جزء منه، ومن ثم تحديد التدايعات الفيزيائية المترتبة عنها. الاهتمام غالبا ما سيكون منصبا على النظام ذو الأهمية البالغة في مجال الاتصالات والمعلوماتية وهو نظام البت (bit)[‡] بنسخته الكمية.

II-2- البت الكمي (Qubit)

البت الكمي هو وحدة المعلومات الكمية أي الوحدة الأساسية للمعلومات في الكمبيوتر الكمي، نظيره في نظرية المعلومات الكلاسيكية هو البت (bit) والذي يمكن أن يأخذ فقط أحد القيمتين {0,1}، أما البت الكمي ونتيجة لمبدأ التراكم في ميكانيك الكم فيمكن أن يكون في شكل أي تركيبة خطية من الحالتين السابقتين :

$$a|0\rangle + b|1\rangle \quad (1. II)$$

أين a و b هما عددا مركبان. البت الكمي إذاً هو أبسط نظام كمي ممكن، بعد فضائه هو اثنان وأساسه هو $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. غالبا ما يعامل البت الكمي رياضيا دون العودة لحقيقته الفيزيائية، ذلك أنه يمكن أن يُسقط على العديد من الأنظمة الفيزيائية مثل : ذرات أو أيونات ذات مستويا طاقة، جسيمات ذات سبين $1/2$ ، استقطاب فوتون وحيد وغيرها [17,18].

[‡] 'bit' هي اختصار لكلمة 'Binary digit'

II-2-1- تمثيل السبين 1/2 للبت الكمي

إذا ما تم تمثيل البت الكمي بجسيم ذو سبين 1/2 (كالإلكترون مثلا)، فإن أشعة الأساس لفضاء البت الكمي ثنائي البعد ستعبر في هذه الحالة عن جهتي استقطاب السبين وفق محور مختار وليكن Oz ما يعني أن شعاعا الأساس هما $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$ ، وأي حالة في هذا الفضاء ستكتب كتركيب خطية من الشعاعين السابقين على شاكلة المعادلة (1.II) :

$$a|\uparrow_z\rangle + b|\downarrow_z\rangle \quad (2. II)$$

a و b عدنان مركبان يعبران عن سعة احتمال الحصول على حالتَي السبين السابقتين. الحالة الكلية للسبين تكون معرفة بفرق طور غير مؤثر فيزيائيا وغالبا ما يؤخذ مساويا للصفر، على عكس فرق الطور النسبي الذي يكون بين العددين المركبين a و b والذي له أهمية فيزيائية خاصة. لكن ما الذي يعنيه فيزيائيا أن يكون البت الكمي في حالة السبين المعرفة بالعبارة (2.II)؟ في الحقيقة، شعاع الحالة الذي تصفه العبارة (2.II) يمثل حالة ذاتية لمركبة السبين وفق اتجاه معين محدد بزواويتين (θ, φ) ، تحدد هاتان الزاويتان عن طريق العددين a و b .

إثبات هذا الأمر يمكن أن يتم بحساب المتجهات الذاتية للسبين وفق اتجاه معين شعاع توجيهه \vec{n} حيث $(\vec{n} = \sin\theta \cdot \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\theta \cdot \sin\varphi \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z)$. هناك عدد من الطرق لإيجاد المتجهات الذاتية لمركبة السبين وفق \vec{n} ، أحد هذه الطرق هو استخدام مؤثر الدوران، حيث أن عملية دوران بزواوية ω حول محور شعاع توجيهه \vec{k} تعطى بواسطة المؤثر الواحدي التالي :

$$R = \exp\left[-\frac{i\omega \vec{k} \cdot \vec{J}}{\hbar}\right] \quad (3. II)$$

\vec{J} هو العزم الزاوي الكلي للنظام، في هذه الحالة فإن العزم الزاوي الكلي مساو للسبين ($\vec{J} = \vec{S}$) والذي يمكن أن يُعبر عنه بواسطة مصفوفات باولي ($\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$)، حيث :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4. II)$$

للحصول على المتجهات الذاتية للسبين وفق المحور الذي شعاع وحدته هو \vec{n} يجب تدوير المتجهات الذاتية للسبين التي هي وفق المحور Oz لتصبح وفق \vec{n} ، من الممكن إثبات أن أي شعاع وحدة \vec{n} يمكن الحصول

عليه انطلقا من الشعاع \vec{e}_z بتدوير هذا الأخير بزاوية معينة θ حول المحور \vec{e}_φ حيث
 $(\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y)$ مؤثر الدوران في هذه الحالة هو :

$$R = \exp\left[-\frac{i\theta \vec{e}_\varphi \cdot \vec{\sigma}}{2}\right] = \exp\left[\frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}\right] \quad (5. II)$$

لمعرفة عمل هذا المؤثر على المتجهات والمؤثرات الأخرى نقوم بنشره باستخدام نشر تايلور، وبملاحظة أن :

$$(-i\vec{e}_\varphi \cdot \vec{\sigma})^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (i\vec{e}_\varphi \cdot \vec{\sigma})^3 = -\begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} \quad (6. II)$$

يمكن بسهولة استنتاج أن :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} + \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \quad (7. II)$$

وعليه فإن مصفوفة الدوران حول المحور الذي شعاع وحدته \vec{e}_φ هي :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -e^{-i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (8. II)$$

إذا عند التأثير بمؤثر الدوران السابق على المتجه الذاتي لـ S_z المرفق بالقيمة الذاتية $\hbar/2$ (أي المتجه

$|\uparrow_z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$)، فإن الشعاع المتحصل عليه - بعد إضافة فرق طور $e^{-i\varphi/2}$ للحالة الكلية- هو :

$$|\psi(\theta, \varphi)\rangle = R|\uparrow_z\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (9. II)$$

المتجه $|\psi(\theta, \varphi)\rangle$ هو متجه ذاتي للمؤثر $\vec{n} \cdot \vec{S}$ مرفق بالقيمة $\hbar/2$ ويمكن التأكد من هذا بسهولة عن طريق عبارة $\vec{n} \cdot \vec{S}$:

$$\vec{n} \cdot \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi} \sin\theta \\ e^{i\varphi} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (10. II)$$

وبهذا يكون الإثبات قد انتهى، وعليه كل حالة للبت الكمي في تمثيل السبين هي حالة ذاتية لمركبة السبين وفق اتجاه معين مرفقة بالقيمة الذاتية $\hbar/2$ ، الاتجاه يحدد من خلال a و b حيث عمدة العدد المركب a (b)

تمثل نصف قيمة الزاوية φ بقيمة سالبة (موجبة)، أما طولته فهي تمثل تجيب (جيب) نصف الزاوية θ [19,20].

كل التحليل السابق تم على افتراض أن حالة السبين معرفة جيدا بالحالة التي توضحها المعادلة (2.II)، لكن في الحالة المعاكسة أين يكون المطلوب هو تحديد حالة البت الكمي أي تحديد المحور الذي تتجه وفقه حالة السبين الذاتية فإن الأمر يصبح مختلفا. في البداية ونتيجة للطبيعة الاحتمالية لميكانيك الكم فإنه لا يمكن أن يتم تحديد الحالة عن طريق قياس وحيد، بل يجب أن تكون هناك عدة قياسات لمجموعة من النسخ المتطابقة من البت الكمي حتى يمكن تحديد حالته. أيضا عملية قياس السبين لا يجب أن تتم وفق محور واحد، فرغم أن عملية قياس السبين وفق المحور Oz تسمح بتحديد قيمتي $|a|$ و $|b|$ لكنها في المقابل لا يمكن أن تعطي قيمة فرق الطور النسبي بينهما والذي يسمح بتحديد توجه المحور \vec{n} - وبالخصوص الزاوية φ - لذا يجب أن يتم قياس السبين وفق ثلاث محاور متعامدة حتى يمكن تحديد اتجاه المحور، فمثلا القيمة المتوسطة لـ S_z هي : $\langle S_z \rangle = \hbar/2 \cdot \cos\theta$ وهي تعطي قيمة الزاوية θ لكن دون تحديد إشارتها ذلك أن تجيب هي دالة زوجية، ومن ثم فإن عملية قياس المركبتين الأخرين للسبين تسمح برفع الالتباس الحاصل على مستوى الإشارة وأيضا بتحديد قيمة الزاوية φ [20,21].

للطور النسبي أهمية خاصة في ظاهرة 'التداخل الكمي'، وهي الظاهرة التي تجعل الاحتمالات في ميكانيكا الكم مختلفة عن الاحتمالات الكلاسيكية، وأشهر مثال عليها هو ظاهرة التداخل التي تبديها الأجسام الكمية في تجربة الشقين، أين لا يكون احتمال مرور الجسيمات من خلال كلا الشقين مساويا لمجموع مرور الجسيمات من كل شق على حدى، بل يكون هناك نمط تداخل مشابه لما يحدث في عملية تداخل الضوء.

لتوضيح تأثير التداخل الكمي في نظرية المعلومات الكمية يمكن أن نأخذ المثال التالي : نأخذ الشعاعين الذاتيين لمركبة السبين S_x

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle) \quad , \quad |\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle) \quad (11. II)$$

فرق الطور النسبي في الحالة الذاتية لـ S_x المرفقة بـ $-\hbar/2$ هو π ، أما في الحالة الذاتية المرفقة بـ $\hbar/2$ فهو صفر. احتمال العثور على السبين في الحالة $|\uparrow_z\rangle$ أو $|\downarrow_z\rangle$ متساوي في كلتا الحالتين الذاتيتين لـ S_x وهو $1/2$. نأخذ الآن الحالة التالية :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_x\rangle + |\downarrow_x\rangle) \quad (12. II)$$

حسب النظرية الكلاسيكية للاحتتمالات سيكون احتمال العثور على السبين في الحالة $|\uparrow_z\rangle$ أو $|\downarrow_z\rangle$ متساويا في هذه الحالة، فكل من الحالتين $|\uparrow_x\rangle$ أو $|\downarrow_x\rangle$ يحملان احتمالا متساويا لوجود السبين في الحالة $|\uparrow_z\rangle$ أو $|\downarrow_z\rangle$ ، لذا فإن نظرية المعلومات الكلاسيكية ستقرر أن البت (الكلاسيكي) هو إما في الحالة $|\uparrow_z\rangle$ أو في الحالة $|\downarrow_z\rangle$ باحتمال متساو، لكن بالنسبة للبت الكمي الأمر يختلف كليا، فالحالة السابقة الموضحة بالعبارة (12.II) هي حالة ذاتية لـ S_z (وبالضبط الحالة $|\uparrow_z\rangle$) وبالتالي فإن قياس السبين على المحور Oz سيظهر أنه في الحالة $|\uparrow_z\rangle$ بشكل قاطع أي باحتمال مكافئ للوحدة!! [20]

II-3- مؤثر الكثافة

إن كل ما يمكن توقعه من نظام معين موجود في شعاع حالته، فهو يعطي التوزيع الاحتمالي للمقادير الفيزيائية لذلك النظام، لكن هناك عدة حالات لا يمكن فيها تحديد حالة النظام أي لا يمكن أن يوصف هذا النظام بشعاع حالة منفرد، مثلما يحدث في الحالات المترابطة للسبين كحالة السبين الأحادية :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle_1|\downarrow_z\rangle_2 - |\downarrow_z\rangle_1|\uparrow_z\rangle_2) \quad (13. II)$$

في هذه الحالة لا يمكن إيجاد شعاع حالة للجسيم الأول فقط، والأمر نفسه للجسيم الثاني، فتشابك حالتي الجسيمين جعل من المستحيل وصف أي من النظامين بشكل منفصل عن الآخر، رغم أن شعاع الحالة الكلية للنظام موجود، لذا فإن وصف نظام هو في حالة ترابط مع نظام آخر (أو أنظمة أخرى) غير ممكن بشعاع حالة منفصل عن النظام المترابط معه. تبرز تبعات هذا الأمر بشكل واضح عندما يكون من غير الممكن الوصول إلى الجسيم الثاني أو إجراء عملية قياس عليه، لذا يجب تعميم الوصف الكمي وهكذا أنظمة حتى يصبح من الممكن دراسة أنظمة جزئية حتى في حالة غياب معلومات كافية عن النظام الكلي. الحالة التي يكون فيها ممكنا وصف نظام شعاع حالة ينتمي إلى فضاء هيلبرت تسمى بالحالة النقية (pure state)، في هذه الحالة تكون حالة النظام معرفة بشكل كامل، أما في حالة غياب المعرفة الكاملة بالنظام فإن الحالة تسمى بالحالة المختلطة (Mixed state) [22,23].

إن التعامل مع شعاع الحالة النقية $|\psi\rangle$ مكافئ للتعامل مع المُسقط $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ لتلك الحالة، إذ يمكن بواسطته حساب القيمة المتوسطة لأي مؤثر A ، حيث :

$$\begin{aligned}
\langle A \rangle &= \langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_{n,m} \langle \psi | n \rangle \langle n | A | m \rangle \langle m | \psi \rangle \\
&= \sum_{n,m} \langle m | \psi \rangle \langle \psi | n \rangle \langle n | A | m \rangle \\
&= \sum_m \langle m | \rho_\psi A | m \rangle = \text{tr}(\rho_\psi A) \quad (14. II)
\end{aligned}$$

أين تم استغلال علاقة تمام الأساس في اشتقاق العلاقة السابقة، أما $\text{tr}(\cdot)$ فهي ترمز لعملية أخذ الأثر للمصفوفة. ومنه القيمة المتوسطة لكل مؤثر بالنسبة لحالة معينة يمكن حسابها بواسطة مُسقط تلك الحالة، ما يعني أنه من الممكن إعادة صياغة علاقات ميكانيك الكم باستخدام المُسقط للحالة النقية بدلا من شعاع الحالة، والفائدة المباشرة التي يمكن أن نجنيها من استخدامه هي في التخلص من الطور الكلي العشوائي للحالات الكمية. من الممكن إثبات أنه توجد عبارة ماثلة للعبارة الأخيرة (14. II) في الحالة المختلطة أيضا، لكن من أجل مؤثر يختلف قليلا عن مُسقط الحالة النقية ρ_ψ ، لذا يُعمم هذا المؤثر في الحالتين النقية والمختلطة ويسمى بـ 'مؤثر الكثافة' ويُرمز له بـ ρ ، إذاً مؤثر الكثافة للحالة النقية هو عبارة عن مُسقط على الفضاء الجزئي وحيد البعد الذي يحوي الحالة النقية $|\psi\rangle$. يتميز مؤثر الكثافة في الحالة النقية بمجموعة من الخصائص التي يشترك فيها مع مؤثر الكثافة للحالة المختلطة وهي :

1. مؤثر الكثافة هو مؤثر هرميتي $\rho^\dagger = \rho$.
2. أثر مؤثر الكثافة مساو للواحد $\text{tr}(\rho) = 1$.
3. مؤثر الكثافة هو مؤثر موجب، أي أن جميع قيمه الذاتية موجبة أو بشكل مكافئ $\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle \geq 0$ وذلك من أجل كل شعاع $|\varphi\rangle$ من فضاء هيلبرت.

لكن مؤثر الكثافة في الحالة النقية يتميز بخاصية إضافية أخرى. فيما أنه عبارة عن مسقط فهو يحقق الخاصية :

$$4. \rho^2 = \rho$$

تختلف الحالة المختلطة عن الحالة النقية في أنه لا يمكن وصف الأولى بشعاع حالة، رغم أنه من الممكن في حالة الأنظمة المتشابكة إيجاد نظام أكبر يشمل النظام المقصود وتكون فيه حالة النظام الكلي نقية، مثل حالة السبين الأحادية $|0\rangle_{12}$ فحالة الجسيمين معا نقية لكن حالة أحدهما بمفرده مختلطة، فلا

يمكن أن يُسند شعاع حالة منفرد للجسيم الأول مثلا، مع ذلك تبقى هناك طريقة لوصف هذا الجسيم بطريقة تختلف عن شعاع الحالة وذلك بواسطة مؤثر الكثافة، فاحتمال أن يجد المراقب الجسيم الأول في الحالة $|\uparrow_z\rangle_1$ هو :

$$|{}_1\langle\uparrow_z|0\rangle_{12}|^2 = \frac{1}{2} {}_2\langle\downarrow_z|\downarrow_z\rangle_2 = \frac{1}{2} \quad (15. II)$$

واحتمال أن يجده في الحالة $|\downarrow_z\rangle_1$ هو أيضا $1/2$ وذلك باتباع نفس الطريقة السابقة، ولوصف حالة هذا الجسيم يمكن التفكير في مجموعة متطابقة من ذات الجسيمات نصفها في الحالة $|\uparrow_z\rangle$ والنصف الآخر في الحالة $|\downarrow_z\rangle$ ، يدعى هذا التصور بوصف المجموعة للحالة المختلطة.

على العموم يمكن التعبير عن أي حالة مختلطة بمجموعة من الأنظمة المتطابقة لها أشعة حالة مختلفة، في هذه الحالة لا يمكن التعبير عن المجموعة ككل بمتجه وحيد في فضاء هيلبرت. الحالات المختلفة التي تشغلها عناصر المجموعة $\{|\psi_i\rangle\}$ تتردد في المجموعة بوزن احتمالي $\{w_i\}$ ، لذا فإن القيمة المتوسطة لمؤثر A بالنسبة لمجموعة مختلطة $\{w_i, |\psi_i\rangle\}$ هي :

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_i w_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle = \sum_{i,n,m} w_i \langle \psi_i | n \rangle \langle n | A | m \rangle \langle m | \psi_i \rangle \\ &= \sum_{n,m} \langle m | \left[\sum_i w_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right] | n \rangle \langle n | A | m \rangle \\ &= \sum_m \langle m | \rho A | m \rangle = tr(\rho A) \end{aligned}$$

ومنه

$$\langle A \rangle = tr(\rho A) \quad (16. II)$$

إذاً في الحالة المختلطة القيمة المتوسطة لأي مؤثر تعطى بأثر مصفوفة الجداء بين المؤثر المعني ومؤثر الكثافة، حيث أن مؤثر الكثافة في الحالة المختلطة هو :

$$\rho = \sum_i w_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (17. II)$$

أين $\{|\psi_i\rangle\}$ هي الحالات الموجودة في المجموعة المختلطة وهي حالات منظمة إلى الوحدة لكنها ليست متعامدة بالضرورة، أما $\{w_i\}$ فهي الأوزان الاحتمالية لتلك الحالات حيث :

$$\sum_i w_i = 1 \quad (18. II)$$

إن مجموع جميع الأوزان الاحتمالية هو الواحد، وهذا يضمن أن يكون المجموع على كل الحالات $\{|\psi_i\rangle\}$ مساويا لعدد عناصر المجموعة. في الحالة النقية يكون هناك وزن احتمالي واحد بحيث $w_1 = 1$ فيعود مؤثر الكثافة ليمثل مُسقَطاً من جديد.

من السهل التأكد من أن عبارة ρ في الحالة المختلطة تستوفي الخصائص الثلاث الأولى السابقة التي تميز مؤثر الكثافة في الحالة النقية، لكنها لا تستوفي الخاصية الأخيرة ذلك أن $\rho^2 \neq \rho$. وعليه للتمييز بين مجموعة نقية وأخرى مختلطة يكفي حساب أثر مربع مصفوفة الكثافة، ففي الحالة النقية يكون $Tr(\rho^2) = 1$ أما في الحالة المختلطة يكون $Tr(\rho^2) < 1$ ، النتيجة الأولى يمكن استخلاصها من الخاصية 4 و 2 لمؤثر الكثافة في الحالة النقية، أما الثانية فتستخلص من عبارة مؤثر الكثافة للحالة المختلطة (17. II). تجدر الإشارة هنا إلى أن شكل مصفوفة الكثافة ليس وحيدا بل يعتمد على الأساس الذي تكتب فيه مصفوفة الكثافة، لكن في المقابل أثر المصفوفة هو خاصية لها ومستقل عن اختيار الأساس وهو ما يعطي العلاقة (16. II) أهميتها، إذ أن حساب القيمة المتوسطة لمؤثر مستقل عن الأساس المختار لفضاء هيلبرت [17,19,22,24].

ما يمكن استخلاصه من الدراسة السابقة لمؤثر الكثافة هو أنه وسيلة بديلة لشعاع الحالة في الحالة النقية وهو بالإضافة إلى ذلك يقدم فائدة التخلص من العشوائية المرافقة لأشعة الحالة، ورغم أنه مجرد أداة اختيارية في الحالة النقية إلا أنه يصبح أداة ضرورية في الحالة المختلطة، أين تم التعرض فيها لحالة نظام متشابك مع نظام آخر. الأنظمة المتشابكة ليس الوضعية الوحيدة للحالة المختلطة، فهذه الأخيرة تبرز بشكل طبيعي في الإحصاء الكمي، أين تكون هناك حاجة لدراسة مجموعة إحصائية من أنظمة متطابقة يملك كل منها شعاع حالة معين، ولا يكون شعاع الحالة لعنصر من المجموعة مماثلا بالضرورة لشعاع الحالة لعنصر آخر. في هذه الوضعية يصبح استخدام مؤثر الكثافة ضروريا لأنه الوحيد القادر على وصف مجموعة من الأنظمة المتطابقة في نفس الوقت، وهذه الميزة هي ما جعل مؤثر الكثافة أداة لا بديل لها في الإحصاء الكمي.

II-3-1- نظرية جليسون (Gleason's Theorem)

تتص مسلمات ميكانيك الكم على أن القيمة المتوسطة لملاحظ M للنظام الذي شعاع حالته $|\psi\rangle$ هي

$$\langle M \rangle = \langle \psi | M | \psi \rangle \quad (19. II)$$

لكن عند التعرض إلى الحالات المترابطة مثل الحالة (13.II) أو الأنظمة الجزئية من أنظمة أكبر، كانت عبارة الاحتمال مختلفة لأن وصف النظام بشعاع حالة لم يكن ممكنا عندها، ما انجر عنه تعريف القيمة المتوسطة بواسطة مؤثر الكثافة :

$$\langle M \rangle = \text{tr}(M\rho) \quad (20. II)$$

السؤال الآن هل هذه هي الصيغة الوحيدة للقيمة المتوسطة؟ أي هل هناك صياغة أخرى للقيم المتوسطة في الحالة المختلطة أين لا يمكن وصف النظام بشعاع حالة؟

ما أثبتته نظرية Gleason فعليا هو أنه لا يوجد بديل لعبارة القيمة المتوسطة (20.II) إذا كان بعد فضاء هيلبرت أكبر من 2. المبدأ الذي اعتمد عليه Gleason هو أن أقصى اختبار يمكن تطبيقه للتعرف على شعاع الحالة لنظام معين يتمثل في قياس هذا الأخير وفق أساس منظم ومتعامد من فضاء هيلبرت، وتتمثل مهمة ميكانيك الكم في إرفاق احتمال لكل شعاع من أشعة ذلك الأساس، وبما أن الأشعة الذاتية لملاحظ ما تشكل أساسا لفضاء هيلبرت فيمكن إذا إرفاق احتمال لكل قياس ممكن لأي ملاحظ [25].

إن تعيين احتمال العثور على حالة النظام في شعاع حالة معين يعني تعيين القيمة المتوسطة لمسقط ذلك الشعاع، ولإيجادها يجب تحديد التطبيق الذي يرفق كل مسقط E لشعاع من أشعة الأساس باحتمال العثور عليه في تلك الحالة، أي تعيين :

$$E \rightarrow p(E) ; \quad 0 \leq p(E) \leq 1 \quad (21. II)$$

هذا التطبيق يجب أن يحقق الخصائص التالية :

$$.I \quad p(0) = 0$$

$$.II \quad p(I) = 1$$

$$.III \quad \text{إذا كان } E_1 E_2 = 0 \text{ فإن } p(E_1 + E_2) = p(E_1) + p(E_2)$$

تعتبر هذه الخصائص عما يمكن توقعه عند قياس ملاحظ ما، فكل مسقط يُرفق باحتمال ومجموع جميع الاحتمالات مساو للواحد (الخاصيتان الأولى والثانية)، أما الخاصية الثالثة فهي تلزم الاحتمالات المسندة

لمسقطين متعامدين أن تكون تجميعية، وهذه الأخيرة ليست بالبساطة التي تبدو عليها فهناك عدة طرق لتفكيك المجموع إلى مسقطين متعامدين، فمثلا لو أخذنا شعاعين متعامدين $|u\rangle$ و $|v\rangle$ مسقطاهما E_u و E_v على الترتيب، وكان E_{uv} هو مجموع هذين المسقطين ($E_{uv} = E_u + E_v$) فإن مجموع مسقطي الشعاعين المتعامدين :

$$|x\rangle = (|u\rangle + |v\rangle)/\sqrt{2} \quad ; \quad |y\rangle = (|u\rangle - |v\rangle)/\sqrt{2} \quad (22. II)$$

هو أيضا E_{uv} ، ما يعني أن :

$$p(E_u) + p(E_v) = p(E_x) + p(E_y) \quad (23. II)$$

ولهذه النتيجة مضمون فيزيائي مهم ومن الممكن اختياره تجريبيا.

على العموم استطاع Gleason أن يثبت أنه من أجل أي تطبيق يوفي بالشروط الثلاثة السابقة، فإن هناك مؤثرا موجبا ρ هرميتي وأثره مساو للوحدة بحيث :

$$p(E) = tr(E\rho) \quad (24. II)$$

إذا كان بعد الفضاء أكبر من اثنين، أين ρ لا تعتمد على المُسقط المختار بل على حالة النظام وحسب. إذا المؤثر ρ هو فعلا مؤثر الكثافة وهو يظهر بشكل آلي إذا أردنا الحصول على الاحتمالات المسندة للحالات المختلفة ما يظهر أن مؤثر الكثافة ليس فقط أداة نتجت من الحسابات ولكنه بالفعل ضروري وأساسي لحساب الاحتمالات. أما النظام ذو بعد فضاء ثنائي فهو لا يعدوا كونه حالة خاصة لا تظهر فيها قوة الشرط (III) كما تظهر في فضاء ذو بعد أكبر [20,25].

II-3-2- مؤثر الكثافة لنظام كمي مكون من قسمين

كتطبيق على الدراسة السابقة سنحاول إيجاد مؤثر الكثافة لنظام كمي مكون من قسمين، فائدة هذا النظام تكمن في إمكانية تعميم هذه الدراسة لتشمل العديد من الأنظمة، فعلى العموم فقط الأنظمة المعزولة يمكن وصفها بشعاع حالة نقي، أما بقية الأنظمة فغالبا ما تكون قد دخلت في تفاعل مع محيطها ما يعني أن حالتها ستكون مختلطة، ولدراستها يمكن تقسيم النظام الكلي إلى قسمين : القسم الأول A يمثل النظام المراد دراسته أما القسم الثاني B فهو يمثل كل ما تفاعل معه القسم الأول، قد يكون جسيما واحدا فقط كما يمكن أن يكون عددا كبيرا من الأنظمة والجسيمات ويمكن أن نعبر عنه باختصار بأنه بقية العالم.

فضاء هيلبرت للنظام الكلي هو عبارة عن الجداء التتسوري للفضاءين الجزئيين لـ A و B ، بحيث أن أي حالة (نقية طبعاً) في هذا الفضاء تكون من الشكل التالي :

$$|\psi\rangle = \sum_{i,k} a_{ik} |i\rangle_A \otimes |k\rangle_B \quad (25. II)$$

حيث $\{|i\rangle_A\}$ هي أشعة الأساس للنظام الأول A و $\{|k\rangle_B\}$ هي أشعة أساس النظام الثاني B ، أما a_{ik} فهي معاملات النشر المركبة. إن كانت الحالة الكلية $|\psi\rangle$ هي عبارة عن الجداء التتسوري لشعاعي حالة النظامين A و B فإن الحالة غير متشابكة وكل من النظامين A و B هو في حالة نقية.

بما أن الحالة $|\psi\rangle$ نقية فإن مؤثر الكثافة للنظام الكلي هو عبارة عن المُسقط :

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{i,k,j,l} a_{ik} a_{jl}^* |i\rangle_A \langle j|_A \otimes |k\rangle_B \langle l|_B \quad (26. II)$$

إن الغاية المراد تحقيقها هنا هي إيجاد مؤثر كثافة النظام A فقط، بعبارة أخرى كيف يمكن وصف حالة النظام A عند تجاهل النظام B ؟

لاستخراج عبارة مؤثر الكثافة للنظام A يجب أولاً حساب القيمة المتوسطة لمؤثر M_A يؤثر على النظام A فقط بالنسبة للحالة النقية $|\psi\rangle$. المؤثر M_A يؤثر حصراً على النظام A دون النظام B ما يعني أن عبارة هذا المؤثر في فضاء هيلبرت الكلي هي :

$$M_A \otimes I_B \quad (27. II)$$

حيث I_B هو المؤثر الحيادي الخاص بفضاء هيلبرت الجزئي لـ B . ومنه القيمة المتوسطة لـ M_A بالنسبة لـ $|\psi\rangle$ هي :

$$\begin{aligned} \langle M_A \rangle &= \sum_{i,k,j,l} a_{ik} a_{jl}^* \langle j| M_A |i\rangle_A \langle l| I_B |k\rangle_B \\ &= \sum_{i,k,j,l} a_{ik} a_{jl}^* \langle j| M_A |i\rangle_A \delta_{l,k} = \sum_{i,j,k} a_{ik} a_{jk}^* \langle j| M_A |i\rangle_A \end{aligned} \quad (28. II)$$

استخراج عبارة مؤثر الكثافة لـ A يتم باستغلال العبارة الأخيرة بنفس الطريقة التي تم بها الحصول على مؤثر الكثافة في الحالة المختلطة وذلك باستخدام علاقة تمام الأساس :

$$\begin{aligned}\langle M_A \rangle &= \sum_{i,j,k,s} a_{ik} a_{jk}^* \langle s | M_A | i \rangle_A \langle j | s \rangle_A \\ &= \sum_s \langle s | \left(M_A \sum_{i,j,k} a_{ik} a_{jk}^* | i \rangle_A \langle j | \right) | s \rangle_A\end{aligned}$$

وعليه فإن

$$\langle M_A \rangle = \text{tr}(M_A \rho_A) \quad (29. II)$$

أين

$$\rho_A = \sum_{i,j,k} a_{ik} a_{jk}^* | i \rangle_A \langle j | \quad (30. II)$$

إن مقارنة عبارة ρ_A مع عبارة ρ في المعادلة (26.II) توضح أن مؤثر كثافة A ما هو إلا مؤثر الكثافة الكلي بعد أخذ الأثر الجزئي له بالنسبة إلى B (لذلك يسمى أيضا بمؤثر الكثافة المختزل) :

$$\rho_A = \text{tr}_B(\rho) = \text{tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) \quad (31. II)$$

وعليه الوزن الاحتمالي w_i ، الذي ظهر عند دراسة الحالة المختلطة لنظام متشابك، ناتج عن أخذ الأثر الجزئي لمصفوفة الكثافة للحالة الكلية النقية بالنسبة لذلك القسم من النظام الإجمالي الذي لا يدخل في الدراسة (والذي غالبا ما يكون من المستحيل قياسه أو الوصول إليه).

يمكن دائما اختيار أساس $\{|i\rangle_A\}$ تكون فيه المصفوفة ρ_A قطرية، وإذا كانت حالة النظام A مختلطة فعلا فإن المصفوفة سيكون بها أكثر من عنصر واحد، تمثل القيم الذاتية لمصفوفة الكثافة احتمال العثور على النظام A في الحالة الذاتية لمؤثر الكثافة الموافقة لتلك القيمة الذاتية، يظهر هنا أن هناك تشابها بين القيم الذاتية لمؤثر الكثافة ومعاملات النشر للحالة النقية، لكن الاختلاف يكمن في أنه على عكس الحالة النقية لا يمكن للمجرب الوصول إلى الطور النسبي الذي يكون بين الحالات المختلفة في الحالة المختلطة، لذا يعبر عن مؤثر الكثافة بأنه تراكب غير متناسق لحالات مختلفة، وذلك لتميزه عن التراكب الذي يكون في الحالة النقية والذي يكون عبارة عن تراكب متناسق لحالات مختلفة [17,20,22].

II-3-3- معادلة تطور مؤثر الكثافة في الزمن

حتى يكتمل وصف مؤثر الكثافة لأي نظام فيزيائي مغلق يجب تحديد آلية تطوره في الزمن، نأخذ أولا الحالة النقية :

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \quad (32. II)$$

باستخدام معادلة شرودينجر لشعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$ نجد أن

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \rho &= i\hbar \left(\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right) \langle \psi(t)| + i\hbar |\psi(t)\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t)| \right) \\ &= H |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| - |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| H \end{aligned}$$

وعليه فإن

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho = [H, \rho] \quad (33. II)$$

المعادلة الأخيرة هي معادلة مؤثر الكثافة والتي تدعى أيضا بمعادلة ليوفيل-فان نيومان (Liouville - von Neumann equation)، وهي المعادلة التي تتحكم في التطور الزمني لمؤثر الكثافة في الأنظمة المغلقة، وهي عبارة عامة تخص الحالة المختلطة أيضا وهذا كما يمكن إثباته بسهولة باستخدام المعادلة (17.II) حيث :

$$\rho(t) = \sum_i w_i |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)| \quad (34. II)$$

وبتكرار نفس الخطوات المتبعة في الحالة النقية نجد أن :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho = \sum_i w_i \left[\left(i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_i(t)\rangle \right) \langle \psi_i(t)| - i\hbar |\psi_i(t)\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle \psi_i(t)| \right) \right]$$

وعليه فإن المعادلة التفاضلية لتطور مؤثر الكثافة للحالة المختلطة هي :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho = H\rho - \rho H = [H, \rho] \quad (35. II)$$

إذاً معادلة مؤثر الكثافة في المعادلة (33.II) صحيحة من أجل الحالة المختلطة أيضا، هذا طبعا باعتبار أن التفاعل الذي جعل من حالة هذا النظام مختلطة قد انتهى وأن الهاملتون الوحيد الذي يؤثر على حالة النظام هو فقط هاملتون النظام [19,22,26].

للتعرف على التطور الزمني لمؤثر الكثافة في الحالتين النقية والمختلطة بواسطة مؤثر التطور نعود من جديد لدراسة نظام مكون من قسمين، الشكل العام لهاملتون النظام المركب AB هو :

$$H_{AB} = H_A \otimes I_B + H_B \otimes I_A + H_I \quad (36. II)$$

أين H_A هو هاملتون النظام الجزئي A ، أي أن H_A هو ذلك الجزء من الهاملتون الكلي H_{AB} الذي يؤثر حصرا على النظام الجزئي A ، و H_B هو هاملتون النظام الجزئي B ، أما H_I فهو حد هاملتون التفاعل الذي يصف عملية التفاعل بين النظامين A و B . إذا اعتبرنا أن النظامين غير متفاعلين أو أن التفاعل قد حصل في وقت سابق وسبب ترابط حالتي النظام ثم انتهى إما لابتعاد النظامين عن بعضهما أو لأي سبب آخر، فإن هاملتون النظام الكلي سيكون عبارة عن مجموع هاملتون النظامين الجزئيين، أي أن كل نظام يتطور في الزمن بشكل مستقل عن الآخر ومؤثر تطور النظام الكلي في ظل هذا الاعتبار هو :

$$U_{AB}(t) = U_A(t) \otimes U_B(t) \quad (37. II)$$

حالة النظام الكلي نقية ومؤثر كثافتها هو عبارة عن مسقط هذه الحالة النقية، إذا اعتبرنا أن $\rho_{AB}(0)$ هو مؤثر الكثافة عند اللحظة $t = 0$ فإن مؤثر الكثافة يتطور بعد مدة زمنية t إلى المؤثر $\rho_{AB}(t)$:

$$\rho_{AB}(t) = U_{AB}(t) \rho_{AB}(0) U_{AB}^\dagger(t) \quad (38. II)$$

أين ρ_{AB} هو مسقط الحالة النقية $|\psi\rangle_{AB}$ حيث :

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} a_{i\mu} |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B \quad (39. II)$$

حيث $\{|i\rangle_A\}$ و $\{|\mu\rangle_B\}$ هما أساسان متعامدان ومتجانسان لفضاء هيلبرت للنظام A و B على الترتيب. مؤثر كثافة النظام الجزئي A عند اللحظة t نحصل عليه بأخذ الأثر الجزئي لمؤثر الكثافة $\rho_{AB}(t)$ بالنسبة للنظام B وعليه :

$$\rho_A(t) = tr_B \left(U_{AB}(t) \rho_{AB}(0) U_{AB}^\dagger(t) \right) = U_A(t) tr_B \left(U_B(t) \rho_{AB}(0) U_B^\dagger(t) \right) U_A^\dagger(t) \quad (40. II)$$

باستغلال خواص الأثر وواحدية المؤثر $U_B(t)$ نجد أن :

$$\rho_A(t) = U_A(t) tr_B \left(\rho_{AB}(0) U_B^\dagger(t) U_B(t) \right) U_A^\dagger(t) = U_A(t) \rho_A(0) U_A^\dagger(t) \quad (41. II)$$

إذا تطور مؤثر كثافة النظام A يحدده مؤثر تطور هذا النظام فقط بغض النظر عن كيفية تطور النظام B المكمل له وهذا طبعا تحت الاعتبار السابق فقط، أما كيفية تطور مؤثر كثافة نظام جزئي في الحالة العامة فسيتم التعرض له في الفصل القادم.

II-3-4- كرة بلوخ (Bloch sphere)

نسلط الآن الضوء على البت الكمي في ظل الدراسة السابقة لمؤثر الكثافة. مصفوفة الكثافة للبت الكمي ثنائية البعد وبما أنها هرميتية فإن الشكل العام لها هو :

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \quad (42. II)$$

مصفوفات باولي كما هو معروف ذات أثر معدوم، لذا وجب اختيار معامل مصفوفة الوحدة I ليكون $1/2$ حتى يكون أثر مصفوفة الكثافة مساويا للواحد. مركبات الشعاع \vec{n} حقيقية ويمكن إعادة كتابة مصفوفة الكثافة ρ بواسطتها كما يلي :

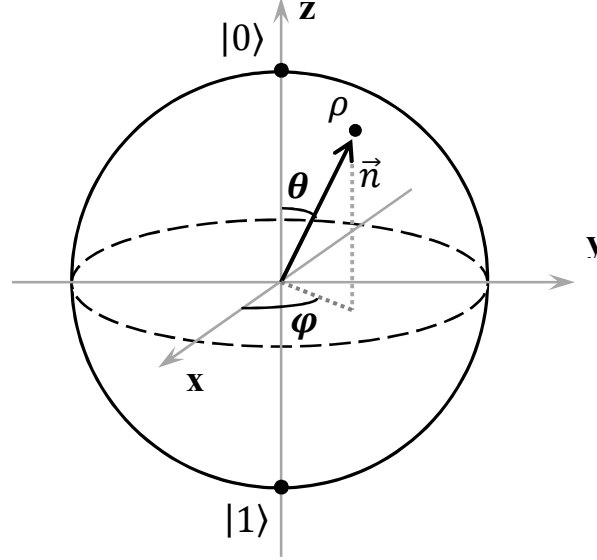
$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & 1 - n_3 \end{pmatrix} \quad (43. II)$$

محدد مصفوفة الكثافة هو $\frac{1}{4}(1 - \vec{n}^2)$ وبما أن مصفوفة الكثافة موجبة فيجب أن يكون محددها موجبا أيضا وذلك باعتباره جداء جميع قيمها الذاتية، ولهذا فإن طول الشعاع \vec{n} يجب أن لا تتجاوز الواحد : $0 \leq |\vec{n}| \leq 1$ ، هذا الشرط مع شرط الأثر كاف لضمان قيم ذاتية موجبة لمصفوفة الكثافة ثنائية البعد، لأن المحدد هو جداء هاتين القيمتين الذاتيتين والأثر مجموعهما، وإذا كان جداءهما موجبا فهذا قد يعني أن كليهما سالب لكن مجموع عددين سالبين لا يمكن أن يكون موجبا، ولهذا فإن شرط الأثر يضمن أن تكون كلا القيمتين الذاتيتين موجبتين وبالتالي أن يكون مؤثر الكثافة موجبا.

تحدد مصفوفة الكثافة بتحديد قيمة الشعاع \vec{n} ، لذا يُعتمد إلى تخيل كرة نصف قطرها واحد كل شعاع ينطلق من مركز الكرة إلى أحد نقاطها يمثل قيمة محتملة للشعاع \vec{n} ، تسمى هذه الكرة بـ'كرة بلوخ'. سطح كرة بلوخ الخارجي والموافق لـ $|\vec{n}| = 1$ يعبر عن حالة نقية للبت الكمي، ذلك أن محدد مصفوفة الكثافة في هذه الحالة يكون معدوما وعليه لا بد من أن تكون إحدى قيمتيه الذاتيتين معدومة، وهو ما يعني أن مؤثر الكثافة صار يمثل مُسقطا ما يوافق حالة نقية للنظام. إذا اعتبرنا أن مؤثر الكثافة لهذه الحالة يعبر عن مجموعة إحصائية فإن كل عناصر المجموعة لها نفس شعاع الحالة وتدعى هذه المجموعة بمجموعة مستقطبة كليا.

في الحالة التي يكون فيها \vec{n} معدوما أي النقطة الموافقة لمركز كرة بلوخ فإن مصفوفة الكثافة تصبح من الشكل $\rho = I/2$ وبالتالي فإن احتمال وجود البت الكمي في كلتا الحالتين متساوي، ومنه الحالة مختلطة والمجموعة غير مستقطبة. في الحالة البينية أين تكون قيمة $|\vec{n}|$ محصورة بين الصفر والواحد

($0 < |\vec{n}| < 1$) فإن الحالة تكون مختلطة أيضا لكن المجموعة في هذه الحالة تكون مستقطبة جزئيا بحيث أن وجود عناصر المجموعة في أحد الحالتين أكبر من احتمال وجوده بالأخرى [17,20,22].



شكل (II-1) : رسم تخطيطي لكرة بلوخ.

سبق وتمت الإشارة إلى أن كل حالة نقية للبت الكمي في تمثيل السبين هي متجه ذاتي لمركبة السبين وفق اتجاه معين، في كرة بلوخ الحالات النقية للبت الكمي تمثل بنقاط السطح الخارجي لكرة بلوخ والتي توافق $|\vec{n}| = 1$. يمكن إثبات أن كل نقطة من السطح الخارجي لكرة بلوخ والتي توافق شعاعا \vec{n} معيناً هي متجه ذاتي لمركبة السبين وفق نفس الشعاع \vec{n} أي أنها شعاع ذاتي لمركبة السبين $\vec{n} \cdot \vec{S}$:

$$\vec{n} \cdot \vec{S} \rho(\vec{n}) = \frac{\hbar}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \left(\frac{1}{2} (I + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \right) \quad (44. II)$$

باستغلال خواص مصفوفات باولي وخاصة $\sigma_i^2 = I$ نجد أن $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = I$ ما يعني أن :

$$\vec{n} \cdot \vec{S} \rho(\vec{n}) = \frac{\hbar}{2} \rho(\vec{n}) \quad (45. II)$$

وبالتالي فإن الحالة النقية المعرفة بالمسقط $\rho(\vec{n})$ (أين $|\vec{n}| = 1$) هي شعاع ذاتي للسبين وفق المحور الذي شعاع وحدته \vec{n} .

II-4- تحليل شميت (Schmidt Decomposition)

واحدة من أكثر النظريات فائدة عند التعامل مع نظام كمي مكون من قسمين هو تحليل Schmidt (نسبة لـ E. Schmidt) للحالة النقية لهذه الأنظمة. تتص نظرية تحليل Schmidt على أنه [24,27] :

من أجل كل حالة نقية $|\psi\rangle$ لنظام مركب من قسمين AB توجد مجموعة أشعة متعامدة ومنظمة $\{|i\rangle_A\}$ من فضاء هيلبرت للنظام A ، ومجموعة أشعة متعامدة ومنظمة $\{|i'\rangle_B\}$ من فضاء هيلبرت للنظام B بحيث :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \sqrt{w_i} |i\rangle_A \otimes |i'\rangle_B \quad (46. II)$$

أين $\{\sqrt{w_i}\}$ هي مجموعة أعداد حقيقية وموجبة تماما وتحقق الشرط $\sum_i w_i = 1$ ، أما العدد N فهو يعبر عن عدد الحدود التي يحتويها تحليل Schmidt وتكون قيمته أقل من أو تساوي بعد الفضاء الأقل بعدا من بين الفضاءين H_A و H_B :

$$N \leq \min(\dim H_A, \dim H_B) \quad (47. II)$$

الإثبات

كل حالة نقية من فضاء النظام المركب من قسمين $H_{AB} = H_A \otimes H_B$ يمكن أن تكتب على شكل تركيبية خطية من أشعة أساسه :

$$|\psi\rangle = \sum_{i,k} a_{ik} |\hat{i}\rangle_A \otimes |\hat{k}\rangle_B \quad (48. II)$$

أين $\{|\hat{i}\rangle_A\}$ هي أساس متعامد ومتجانس للفضاء H_A و $\{|\hat{k}\rangle_B\}$ هي أساس متعامد ومتجانس للفضاء H_B . تمهيدا لكتابة $|\psi\rangle$ على شكل تحليل Schmidt، يتم إعادة كتابة أشعة الفضاء H_B لتصبح من الشكل $|\tilde{i}\rangle_B = \sum_k a_{ik} |\hat{k}\rangle_B$ ، حيث أن هذه الأشعة ليست بالضرورة متعامدة أو منظمة، وباستخدامها يمكن إعادة صياغة عبارة $|\psi\rangle$ كالتالي :

$$|\psi\rangle = \sum_i |\hat{i}\rangle_A \otimes |\tilde{i}\rangle_B \quad (49. II)$$

مؤثر الكثافة للنظام A هو مؤثر الكثافة الكلي للحالة النقية بعد أخذ الأثر الجزئي بالنسبة للنظام B :

$$\begin{aligned}\rho_A &= tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{i,j} |\hat{i}\rangle_{AA} \langle\hat{j}| Tr_B(|\tilde{i}\rangle_{BB} \langle\tilde{j}|) \\ &= \sum_{i,j} {}_B\langle\tilde{j}|\tilde{i}\rangle_B |\hat{i}\rangle_{AA} \langle\hat{j}| \end{aligned} \quad (50. II)$$

المساواة الأخيرة هي نتيجة لعلاقة تمام الأساس للفضاء H_B ، حيث

$$\sum_l {}_B\langle l|\tilde{i}\rangle_B {}_B\langle\tilde{j}|l\rangle_B = \sum_l {}_B\langle\tilde{j}|l\rangle_B {}_B\langle l|\tilde{i}\rangle_B = {}_B\langle\tilde{j}|\tilde{i}\rangle_B \quad (51. II)$$

الخطوة التالية هي الخطوة المهمة : بما أنه يوجد أساس في فضاء هيلبرت H_A تكون فيه مصفوفة الكثافة المختزلة قطرية فإنه يوجد تحويل واحد ينقل المصفوفة من الأساس $\{|\hat{i}\rangle_A\}$ إلى ذلك الأساس $\{|i\rangle_A\}$ بحيث تصبح

$$\rho_A = \sum_i w_i |i\rangle_{AA} \langle i| \quad (52. II)$$

بمقارنة عبارة مصفوفة الكثافة ρ_A القطرية مع العبارة العامة لهذه المصفوفة كما توضحها المعادلة (50.II)، نجد أنه في حالة اختيار الأساس الذاتي للمصفوفة ρ_A فإن الأشعة المرافقة لها $\{|\tilde{i}\rangle_B\}$ من الفضاء H_B يجب أن تحقق :

$${}_B\langle\tilde{j}|\tilde{i}\rangle_B = \delta_{ij} w_i \quad (53. II)$$

ما يعني أن الأشعة $\{|\tilde{i}\rangle_B\}$ متعامدة فيما بينها هي الأخرى، ولتنظيمها يكفي اختيار :

$$|i'\rangle_B = \sqrt{w_i} |\tilde{i}\rangle_B \quad (54. II)$$

إذًا باستخدام مجموعة الأشعة المنظمة والمتعامدة $\{|i'\rangle_B\}$ للنظام B يصبح من السهل استنتاج تحليل Schmidt للحالة الكلية، حيث أن :

$$\rho_A = Tr_B \left(\sum_i w_i |i\rangle_{AA} \langle i| \otimes |i'\rangle_{BB} \langle i'| \right) \quad (55. II)$$

ومنه فإن حالة النظام الكلي هي :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \sqrt{w_i} |i\rangle_A \otimes |i'\rangle_B \quad (56. II)$$

$\sqrt{w_i}$ هي معاملات Schmidt أما N فهو عدد Schmidt، وهو عدد أشعة كل مجموعة من المجموعتين $\{|i\rangle_A\}$ و $\{|i'\rangle_B\}$ (ذات w_i غير معدوم)، وتعتمد قيمته على شعاع الحالة $|\psi\rangle$ لكن أقصى حد يمكن أن تبلغه هو بعد الفضاء ذي البعد الأقل من بين الفضاءين الجزئيين H_A و H_B . إن مجموعة الأشعة $\{|i\rangle_A\}$ و $\{|i'\rangle_B\}$ لتحليل Schmidt تعتمد فقط على الحالة الكلية للنظام $|\psi\rangle$ ويُصطلح على اختيار طور هذه الأشعة بالشكل الذي تكون فيه معاملات Schmidt حقيقية وموجبة، وعلى العموم تختلف هذه الأشعة باختلاف الحالة النقية $|\psi\rangle$ [20,24,27].

نقطة مهمة يجب الإشارة إليها هنا وهو أن مجموعة الأشعة $\{|i'\rangle_B\}$ والتي نتجت عند تحويل مصفوفة الكثافة ρ_A إلى شكلها القطري هي ذات الأشعة التي تجعل مصفوفة الكثافة ρ_B قطرية من أجل نفس الحالة $|\psi\rangle$ ، حيث :

$$\begin{aligned} \rho_B = tr_A(|\psi\rangle\langle\psi|) &= tr_A\left(\sum_i w_i |i\rangle_{AA}\langle i| \otimes |i'\rangle_{BB}\langle i'|\right) \\ &= \sum_i w_i |i'\rangle_{BB}\langle i'| \end{aligned} \quad (57. II)$$

إذاً ليس فقط أن الأشعة $\{|i'\rangle_B\}$ هي أشعة ذاتية لمصفوفة الكثافة ρ_B ولكن القيم الذاتية $\{w_i\}$ لـ ρ_A هي أيضاً قيم ذاتية لـ ρ_B ، ما يعني أن لكلا مصفوفتي الكثافة المختزلتين نفس القيم الذاتية غير المعدومة.

يمكن وضع طريقة عملية لتحديد تحليل Schmidt من أجل أي حالة نقية لنظام كمي مكون من قسمين وذلك باتباع الخطوات التالية :

1. حساب أو تحديد مصفوفة الكثافة المختزلة لأحد النظامين الجزئيين.
2. حساب القيم والمتجهات الذاتية لمصفوفة الكثافة المختزلة، تمثل القيم الذاتية مربع معاملات Schmidt أما المتجهات الذاتية فهي أساس Schmidt للنظام الجزئي المختار.
3. كتابة الحالة النقية للنظام الكلي باستخدام أساس Schmidt الجزئي للنظام المختار، يكشف آلياً عن أساس Schmidt الجزئي للنظام الآخر.

إذا كانت القيم الذاتية لمؤثر الكثافة المختزل غير منحلة فإن تحليل Schmidt للحالة النقية سيكون وحيداً، أما إن كان هناك انحلال في أحد القيم الذاتية فإنه لن يكون هناك أساس Schmidt وحيد للحالة النقية بسبب وجود أكثر من شعاع ذاتي مرفق بنفس القيمة الذاتية وبالتالي فإنه سيكون هناك نوع من الحرية في اختيار شكل الأشعة المنحلة، في هذه الحالة كل اختيار للأشعة المنحلة سيقود إلى شكل معين من تحليل

Schmidt للحالة النقية، تؤدي في النهاية إلى نفس مؤثرات الكثافة. لذا إذا كانت الانطلاقة من مؤثري الكثافة المختزلين في عملية أو تجربة ما فإنه يلزم أكثر من المعلومات التي يوفرها ρ_A و ρ_B لتحديد تحليل Schmidt للحالة النقية $|\psi\rangle$ التي تؤدي إلى مؤثري الكثافة ρ_A و ρ_B ، لأنه لن يكون من الممكن حينها تحديد أي تركيبة من الأشعة المرفقة بالقيمة المنحلة من الفضاء H_A التي يجب أن تزوج مع الأشعة الذاتية لـ ρ_B ، لأن هناك أكثر من شعاع مرفق بنفس القيمة الذاتية [20].

II-4-1- التشابك الكمي

إن المقصود بالتشابك هو حالة الترابط التي تنشأ بين مجموعة من الأنظمة التي تفاعلت مع بعضها البعض فتشابكت الحالات الكمية لهذه الأنظمة بحيث صار من غير الممكن وصف أحدها بمنأى عن الآخر، أي لا يمكن إيجاد حالة نقية لنظام إذا كان في حالة تشابك كمي مع أنظمة أخرى. ميزة التشابك الكمي أنه لا نظير كلاسيكي له فلا يوجد أي مفهوم في الفيزياء الكلاسيكية يضاهاه التشابك الموجود في ميكانيك الكم، ولهذا فقد أثار العديد التساؤلات حول تمام ميكانيك الكم، وقد استخدمه اينشتاين في مفارقة EPR ليحاول إثبات عدم اكتمال نظرية ميكانيك الكم لكن متراجحة بيل جاءت لتؤكد صحة التشابك الكمي وغرابة التأثير الذي ينقله كما سبق ونوقش في الفصل الأول.

لربط مفهوم التشابك بالدراسة السابقة نعود لقضية نظام مركب من قسمين، فإذا أمكن كتابة الحالة الكلية للنظام على شكل جداء تنسوري لحالة كل نظام جزئي على حدى، فإن النظامين غير متشابكين وحالة كل منهما هي حالة نقية وحالة النظام في هذه الحالة قابلة للفصل أو غير متشابكة. في الحالة المعاكسة أين يكون من غير الممكن فصل حالة النظام الكلي إلى حالتي قسميه فإن هذه الحالة تدعى بالحالة المتشابكة [27,28,29].

من خلال نظرية تحليل Schmidt يمكن التمييز بين الحالتين بسهولة، حيث أن :

الحالة المتشابكة : هي الحالة التي يكون فيها N عدد Schmidt أكبر تماما من الواحد.

الحالة غير المتشابكة : وهي الحالة التي يكون فيها N عدد Schmidt مساويا للواحد [20].

II-5- الالتباس في تفسير المجموعة

تفسير المجموعة أو ما يسمى أيضا بالتفسير الإحصائي لميكانيك الكم -والذي يجب أن يتم التمييز بينه وبين تفسير بورن لدالة الموجة (Born rule)- هو تفسير جاء كبديل عن تفسير مدرسة كوبنهاجن الذي اعتبره كثيرون غير مرض على أقل تقدير. تفسير المجموعة يعتبر أن الوصف الكمي (دالة الموجة في الحالة النقية ومؤثر الكثافة في الحالة المختلطة) لا يصف نظاما وحيدا بل يصف مجموعة إحصائية من أنظمة متطابقة، حيث أن المجموعة هي عبارة عن بنية نظرية تكون عناصرها عبارة عن نسخ متطابقة من النظام المدروس يملك كل منها شعاع حالة معين، بحيث أن حساب القيمة المتوسطة لملاحظ معين لنظام موصوف بميكانيك الكم يؤول إلى حساب متوسط ذلك المقدار بالنسبة لعناصر تلك المجموعة، وبعبارة أخرى تطابق القيمة المتوسطة المتوقعة بميكانيك الكم القيمة المتوسطة بالنسبة لعناصر المجموعة. في الحالة النقية المجموعة معروفة ووحيدة، فلجميع عناصر المجموعة نفس شعاع الحالة وهو شعاع الحالة النقية، لكن في الحالة المختلطة -وكما سنرى لاحقا- فإن المجموعة الإحصائية لا تُحدد بشكل فريد وهو ما يخلق نوعا من الالتباس المرافق لهذا التفسير [20,30,31].

قبل التعرض لتحديد المجموعة الإحصائية نعود قليلا إلى مؤثر الكثافة، يحقق مؤثر الكثافة ثلاثة شروط أساسية وهي : أن يكون قرينا لذاته أو هرميتيا، موجبا وأثره مساو للواحد. في الحقيقة كل مؤثر يستوفي تلك الشروط هو مؤثر كثافة لحالة معينة، ونتيجة لذلك يمكن لمؤثر كثافة معين ρ أن يكتب بدلالة مؤثرات كثافة أخرى فمثلا :

$$\rho(\alpha) = \alpha \rho_1 + (1 - \alpha) \rho_2 \quad (58. II)$$

حيث α عدد حقيقي يحقق المتراجحة $0 \leq \alpha \leq 1$ وذلك لضمان أن يكون ρ موجبا، ρ_1 و ρ_2 هما مصفوفتا كثافة وبما أن أثرهما مساو للواحد فهذا يعني أن ρ أثرها مساو للواحد أيضا، ونتيجة لهرميتية ρ_1 و ρ_2 فإن ρ هرميتي أيضا، إذاً ρ هو بالفعل مؤثر كثافة.

رياضيا نقول أن ρ هو عبارة عن تركيبة خطية محدبة من ρ_1 و ρ_2 ، حيث نعني بتركيبة خطية محدبة كل تركيبة خطية من مجموعة عناصر كل معاملاتها موجبة ومجموع هذه المعاملات مساو للواحد، ونتيجة لهذه الخاصية فإن مصفوفة الكثافة تنتمي إلى مجموعة جزئية محدبة من الفضاء الشعاعي على مجموعة الأعداد

الحقيقية للمصفوفات الهرميتية، حيث أن المقصود بالمجموعة المحدبة هو المجموعة التي كل تركيبة خطية محدبة من عناصرها تنتمي إلى ذات المجموعة [14,32,33].

إن انتماء مؤثر الكثافة إلى مجموعة محدبة يعني أنه من الممكن أن يكتب في شكل تركيبة خطية محدبة من عناصر أخرى من تلك المجموعة، لكن من السهل إثبات أن هذا صحيح من أجل الحالات المختلطة فقط أما إذا كان مؤثر الكثافة يعبر عن حالة نقية فإنه لا يمكن أن يكتب في شكل تركيبة محدبة من مؤثرات كثافة أخرى، لإثبات هذا اعتبر المسقط $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ والشعاع $|\varphi\rangle$ العمودي على $|\psi\rangle$ حيث :

$$\langle\varphi|\rho|\varphi\rangle = \alpha\langle\varphi|\rho_1|\varphi\rangle + (1 - \alpha)\langle\varphi|\rho_2|\varphi\rangle = 0 \quad (59. II)$$

بما أن ρ_1 و ρ_2 موجبان ومعاملتهما موجبة، فإن المجموع في المعادلة (58-II) ينعدم (عند استثناء الحالتين البسيطتين $\alpha = 0$ و $\alpha = 1$) إذا كان كل حد فيه معدوما وبما أن $|\varphi\rangle$ يمكن أن يكون أي شعاع عمودي على $|\psi\rangle$ فإن ρ_1 و ρ_2 لابد أن يكونا عموديين على كامل مجموعة الأشعة $\{|\varphi\rangle\}$ العمودية على الشعاع $|\psi\rangle$ وبالتالي فإن $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. الأشعة (والتي هي في هذه الحالة مؤثرات الكثافة) التي تتمتع بهذه الخاصية، أي التي لا يمكن كتابتها في شكل تركيبة محدبة من عناصر أخرى من المجموعة المحدبة تدعى بالنقاط القصى للمجموعة، ومنه فإن مؤثرات الكثافة للحالة النقية هي النقاط القصى للمجموعة المحدبة [20].

إن التعرّيج على طبيعة المجموعة التي تنتمي إليها مؤثرات الكثافة جاء لغاية مهمة، فلهذه الرؤية معنى فيزيائي مهم، إن انتماء مؤثرات الكثافة إلى مجموعة محدبة يعني أن أي مؤثر كثافة - باستثناء ذلك الخاص بحالة نقية - يمكن أن يكتب في شكل تركيبة خطية محدبة من عناصر تلك المجموعة، بحيث :

$$\rho = \sum_i \alpha_i \rho_i \quad (60. II)$$

مع وجود الشرطين : $\sum_i \alpha_i = 1$ و $\alpha_i > 0$.

في الحقيقة هناك طرق لانهاية لكتابة مؤثر كثافة لحالة مختلطة على الشكل السابق، وكل تركيبة تعطي نفس القيمة المتوسطة التي يعطيها مؤثر الكثافة ρ لأي مؤثر M :

$$\langle M \rangle = \sum_i \alpha_i \text{tr}(M \rho_i) = \text{tr} \left(M \sum_i \alpha_i \rho_i \right) = \text{tr}(M \rho) \quad (61. II)$$

وبالتالي هناك طرق لانهائية لتحضير نفس الحالة المختلطة ρ تعطي كلها نفس النتائج التجريبية، بحيث لا يمكن للمجرب أن يحدد مجموعة إحصائية محددة $\{\alpha_i, \rho_i\}$ من مجموعة التركيبات الممكنة التي أعطت النتائج المتحصل عليها بالتجربة، وهذا هو منشأ اللبس في قضية اختيار المجموعة الإحصائية، فمن جهة لا بد من أن مجموعة الأنظمة المتطابقة قد تم تحضيرها وفق طريقة معينة ومن جهة أخرى لا يمكن لمن يقيس تلك المجموعة أن يحدد وفق أي طريقة قد تم تحضيرها، وهذه نقطة اختلاف أخرى بين نظرية المعلومات الكمية والكلاسيكية، فعند تحضير مجموعة من حالات البت الكلاسيكي لا يمكن أن يكون هناك التباس لدى من يقيس تلك المجموعة في التعرف عليها، فهناك نسبة $P\%$ من البت في الحالة 0 ونسبة $(100-P)\%$ من البت في الحالة 1، وهناك طريقة وحيدة لتحضير هذه المجموعة الكلاسيكية ولا التباس في تحديد المجموعة كما يحدث في الحالة الكمية المختلطة.

في الحالة النقية، تكون مؤثرات الكثافة في هذه الحال هي النقاط القصوى للمجموعة المحدبة لمؤثرات الكثافة، وبالتالي لا يمكن لها أن تُكتب بدلالة مؤثرات كثافة أخرى، ما يعني أن هناك طريقة وحيدة لتحضير المجموعة الإحصائية الخاصة بالحالة النقية، وهي خاصية أخرى تنفرد بها هذه الحالة.

يمكن لمؤثر الحالة المختلطة أن يكتب بدلالة حالات نقية متعامدة وذلك باستخدام أشعته الذاتية. على العموم تكون هناك طريقة واحدة لكتابة مؤثر الكثافة بدلالة أشعته الذاتية -إن لم تكن هناك قيم ذاتية منحلة- وذلك حسب ما تنص عليه نظرية التحليل الطيفي [34] :

$$\rho = \sum_i w_i |i\rangle\langle i| \quad (62. II)$$

خذ على سبيل المثال مؤثر الكثافة للبت الكمي، إذا ما تم اختيار مركز كرة بلوخ لتحديد مؤثر الكثافة فإن المجموعة ستكون غير مستقطبة أو ما يطلق عليه بالحالة المختلطة القصوى. مؤثر الكثافة في هذه الحالة هو :

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I \quad (63. II)$$

هذا المؤثر لا يعبر عن حالة مختلطة وحسب وإنما قيمه الذاتية منحلة أيضاً، ولا يوجد في هذه الحالة صياغة واحدة فقط لكتابته بدلالة الحالات النقية بل هناك طرق لانهائية كما سنرى لاحقاً.

ما هي إذاً المجموعة التي يعبر عنها مؤثر الكثافة هذا؟ إذا كان مكتوباً في الأساس $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$ فإن مؤثر الكثافة بدلالة الحالات النقية هو :

$$\rho = \frac{1}{2} |\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z| + \frac{1}{2} |\downarrow_z\rangle\langle\downarrow_z| \quad (64. II)$$

وبالتالي لتحضير المجموعة الإحصائية يجب أن تحضر نصف مجموعة الأنظمة في الحالة $|\uparrow_z\rangle$ ونصفها الآخر في الحالة $|\downarrow_z\rangle$ ، لكن هذه الطريقة الوحيدة للحصول على مؤثر الكثافة ذي العبارة (63.II)، فمؤثر الكثافة يمكن أن يكون أيضا من الشكل :

$$\rho = \frac{1}{2} |\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x| + \frac{1}{2} |\downarrow_x\rangle\langle\downarrow_x| \quad (65. II)$$

هذا المؤثر يعطي نفس العبارة الموضحة بالمعادلة (63.II) لمؤثر الكثافة وهذا نتيجة لعلاقة تمام الأساس رغم أنه من الواضح أن طريقة تحضير المجموعة الإحصائية في هذه الحالة مختلفة تماما عن الحالة الأولى، لكن لا سبيل للمجرب أن يعرف هنا أي طريقة أخذت لتحضير المجموعة التي يقوم بقياسها. في الحقيقة بما أن كل قيم المصفوفة ρ منحلة فإن كل شعاعين متعامدين ومنظمين من فضاء هيلبرت ثنائي البعد هما شعاعان ذاتيان لمصفوفة الكثافة ρ وبالتالي هناك طرق لانتهائية لكتابة ρ بدلالة الحالات النقية المتعامدة ، بحيث

$$\rho = \frac{1}{2} |\uparrow_{\vec{n}}\rangle\langle\uparrow_{\vec{n}}| + \frac{1}{2} |\downarrow_{\vec{n}}\rangle\langle\downarrow_{\vec{n}}| \quad (66. II)$$

حيث $|\uparrow_{\vec{n}}\rangle$ ($|\downarrow_{\vec{n}}\rangle$) هو شعاع ذاتي لـ $\vec{S} \cdot \vec{n}$ مرفق بالقيمة $\hbar/2$ ($-\hbar/2$) [20].

II-5-1- نقل المعلومات بسرعة الضوء

نعود الآن إلى النقطة التي أثبتت سابقا حول إمكانية نقل معلومات بسرعة أكبر من الضوء والتي تبدو وكما لو أنها ممكنة نتيجة وجود التشابك الكمي. لتحليل إمكانية هذا النقل ندرس نظاما مركبا من اثنين من البت الكمي في حالة تشابك، حالة النظام الكلي نقيه ولتكن مثلا الحالة :

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle_A |\uparrow_z\rangle_B + |\downarrow_z\rangle_A |\downarrow_z\rangle_B) \quad (67. II)$$

لنقل المعلومات تحضر مجموعة كبيرة من نسخ ثنائيات البت الكمي في الحالة $|\psi_{AB}\rangle$ ، وفي كل مرة يتم فيها تحضير هذه الحالة يتم فصل البت الكمي الأول عن البت الثاني، بحيث يكون البت الأول موجود في المختبر الأول عند المرسل والثاني في مختبر آخر عند المستقبل والذي يبتعد بمسافات كبيرة عن المختبر الأول.

السؤال المطروح الآن هو كيف يمكن نقل رسالة من المرسل إلى المستقبل وكل ما يمكن للمستقبل أن يلاحظه هو نتائج قياس مركبة السبين وفق أي اتجاه يختاره؟ لو قام المرسل بقياس قيمة السبين وفق المحور Oz فإن المستقبل لن يستطيع أن يقرأ رسالته، فليس من الممكن للمرسل أن يحدد نتيجة قياس البيت الكمي الذي عنده حتى يستطيع إرسال ترتيب معين لقيم السبين للبيت الثاني حتى يتمكن من تشفير رسالته عبره، لأن العملية عشوائية تماما حسب ميكانيك الكم، كما أن المستقبل لن يستطيع التحديد إن كان المرسل قد أرسل رسالته أم لا، فهو لن يستطيع أن يفرق إن كان البيت الذي يقيسه هو في حالة نقية أم مختلطة، إذاً فهذا الطريق مسدود.

إن مؤثر الكثافة المختزل الذي تنتجه الحالة $|\psi_{AB}\rangle$ هو نفس المؤثر الموضح بالعبارة (63.II) وهو $\rho = I/2$ ، وبما أن القيم الذاتية لمؤثر الكثافة كلها منحلة فإنه لا يوجد شكل وحيد لـ $|\psi_{AB}\rangle$ في تحليل Schmidt بل يمكن لـ $|\psi_{AB}\rangle$ أن تأخذ الشكل العام التالي :

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_{\vec{n}}\rangle_A |\uparrow_{\vec{n}}\rangle_B + |\downarrow_{\vec{n}}\rangle_A |\downarrow_{\vec{n}}\rangle_B) \quad (68. II)$$

فإذا اختار المرسل قياس مركبة السبين وفق اتجاه معين شعاع توجيهه \vec{n} فإن البيت الكمي عند المستقبل سيكون هو الآخر في حالة ذاتية للسبين وفق نفس المحور وب نفس القيمة الذاتية التي حصل عليها المرسل. تبدو هذه كطريقة محتملة لإرسال المعلومات فبدلاً من التشفير عبر قيم السبين يتم التشفير وفق اتجاه السبين. فمثلاً لو أن المرسل أراد إرسال بيت واحد من المعلومات فإنه يحدد اتجاهها بقياس السبين ثم يقيس كل البيت الذي عنده وفق ذلك الاتجاه، هذا الاختيار يحدد المجموعة التي ستكون عند المستقبل $\{|\downarrow_{\vec{n}}\rangle_B, |\uparrow_{\vec{n}}\rangle_B\}$ وبالتالي يمكنه نقل رسالة عبر تحديد المجموعة التي ستكون عند المستقبل، لكن واضح مما سلف أن هذا مستحيل فلا يمكن للمستقبل تحديد المجموعة التي لديه، فمهما كان اتجاه \vec{n} شكل مؤثر الكثافة لدى المستقبل سيبقى نفسه ولن يتغير، ولن يمكن للمستقبل معرفة الاتجاه الذي اختاره المرسل إلا إذا حمل هاتفًا واتصل به... [20,21]

II-6- المحو الكمي (Quantum Erasure)

دخول نظام في حالة تفاعل مع نظام آخر غالباً ما يسبب تشابك حالتي النظامين، هذا التشابك يتسبب في عدم تناسق حالة كل نظام على حدى بشكل لا يسمح بتحديد الطور النسبي الذي يكون بين الحالات المختلفة التي يمكن أن يحتلها النظام. من جهة أخرى، الحالة النقية لنظام معين يمكن أن تكتب كتركيبية خطية من

مجموعة من الحالات النقية الأخرى، التراكب الحاصل في الحالة النقية يدعى بالتراكب المتناسق لأن الطور النسبي بين الحالات المختلفة يمكن رصده تجريبياً، فهو يتسبب في عملية تداخل بين تلك الحالات، على عكس الحالة المتشابكة أين لا يمكن أن يحدث تداخل بين حالات نظام متشابك مع نظام آخر [20,22].

يحدث التداخل عندما تكون حالة نقية في حالة تراكب ولا يمكن تحديد الحالة التي تحتلها من بين الحالات المتراكبة، وأشهر مثال على ذلك هي تجربة الشقين فعندما يمر إلكترون دون تحديد الشق الذي عبره يظهر نمط تداخل على الكاشف كالذي يكون عند تداخل الموجات الضوئية، لكون حالة الإلكترون عبارة عن تراكب من الحالتين (مرور ب) الشق العلوي و(مرور ب) الشق السفلي باحتمال متساوي. لكن لو وضع مصدر ضوئي بالقرب من كل شق فإن الإلكترون قد يعكس فوتونا من ذلك المصدر، وعند الكشف على الفوتون المنعكس يمكن اكتشاف الشق الذي دخل منه الإلكترون وتحديد حالته، لكن هذا في المقابل يتسبب في اختفاء نمط التداخل من على الشاشة، لذا تحديد حالة الإلكترون ومعرفة مساره دمر عملية التداخل في هذه الحال. عند مقارنة التجريبتين نرى بأن عملية قياس المسار أو الطريق دمرت التراكب المتناسق في التجربة الثانية ما ألغى عملية التداخل [35].

المحو الكمي يعمل على مسح تلك المعرفة التي تلغي التداخل أي المعرفة بـ 'أي طريق' (which way) أو أي حالة من حالات التراكب يتواجد النظام فعلاً، أي أنه يعمل على استعادة التناسق لتراكب حالة النظام. سبق التعرض لحالة محو كمي في تجربة Wigner المثالية في الفصل الأول، وملخصها في عجالة هو أن حزمة من الجسيمات في الحالة $|\uparrow_x\rangle$ تمر بجهاز ستارن جارلاش موجه وفق Oz، يعاد تركيز الحزمة دون أن يتم الكشف عليها لتمر في جهاز ستارن جارلاش ثاني موجه وفق المحور Ox، عند الكشف عليها يظهر أنها في الحالة $|\uparrow_x\rangle$ من جديد. إن مرور الحزمة بجهاز ستارن جارلاش الأول يسمح بتحديد أي من الحالتين $|\uparrow_z\rangle$ أو $|\downarrow_z\rangle$ يحتلها كل جسيم من الحزمة، أي يمكن كسر التراكب المتناسق بالنسبة لتلك الحالتين عند الكشف على الحزمتين الخارجيتين من الجهاز الأول، لكن إعادة تركيز الحزمة ومرورها بجهاز ستارن جارلاش الثاني مسح تلك المعرفة تماماً وسمح بتراكب حالتين $|\uparrow_z\rangle$ و $|\downarrow_z\rangle$ من جديد بشكل متناسق.

حالة أخرى للمحو الكمي يمكن التعرض لها من خلال تفسير المجموعة. اعتبر مجموعة من البت الكمي الثنائي المتشابك في نفس الحالة التي درست في العنصر السابق، أين مؤثر الكثافة لكل مجموعة جزئية هو $\rho = I/2$ ، ولا يمكن لكل من المرسل والمستقبل أن يلاحظ أي تداخل بين $|\uparrow_z\rangle$ و $|\downarrow_z\rangle$ (أو أي شعاعين آخرين متعامدين) بسبب وجود التشابك الذي يفرض تراكباً غير متناسق بين الحالات، لكن يمكن باستخدام

المحو الكمي استعادة التراكب المتناسق لتلك الحالات، وذلك حين يقوم المرسل بقياس مركبة السبين وفق المحور Ox ثم يدون نتائجه، مجموعة المُستقبل أصبحت في الحالة $\{|\downarrow_x\rangle, |\uparrow_x\rangle\}$ لكن المستقبل لا يتفطن لذلك لأن مؤثر الكثافة لديه مازال في نفس الحالة $\rho = I/2$ ، لكن عندما يتصل به المرسل ويخبره بالاتجاه الذي اختاره للقياس والنتائج التي تحصل عليها لكل بت كمي، يمكن للمستقبل فجأة أن يعلم حالة كل بت لديه دون أن يقوم بأي عملية قياس، فيقوم تاليا بفصل مجموعة البت الكمي التي لديه حسب حالته الكمية إلى قسمين، فيصبح عند المستقبل مجموعتان جزئيتان في الحالة النقية $|\uparrow_x\rangle$ والحالة النقية $|\downarrow_x\rangle$ ، وبالتالي استطاع أن يستعيد حالة التراكب المتناسق بالنسبة للحالتين $|\uparrow_z\rangle$ و $|\downarrow_z\rangle$ في كل مجموعة جزئية.

إذا عملية التراكب غير المتناسق التي سببها التشابك، والتي أصبح ممكنا من خلالها التعرف على حالة مجموعة المستقبل من خلال قياس مجموعة المرسل، أمكن تجاوزها بواسطة عملية قياس لمجموعة المرسل بالنسبة للمحور Ox، حيث سمحت عملية القياس هاته بمسح المعرفة بحالة مجموعة المرسل بالنسبة للمحور Oz وباستعادة جزئية للتراكب المتناسق في مجموعة المستقبل بالنسبة للحالتين $|\uparrow_z\rangle$ و $|\downarrow_z\rangle$.

إن اختلاف المعرفة بالنظام الكمي للمستقبل قبل الاتصال وبعده يطرح تساؤلا حول مدى قدرة مؤثر الكثافة على وصف كل المقادير الفيزيائية للنظام، فمؤثر الكثافة لم يتغير قبل الاتصال وبعده لكن مما لا شك فيه أن المعرفة بالنظام بعد الاتصال قد تغيرت بشكل لا يمكن لمؤثر الكثافة أن يصفه أو يحدده، مما يوحي بأن مؤثر الكثافة قد لا يعطي وصفا كاملا للحالة الفيزيائية ! لكن قبل التوصل لهذا حكم يجب التذكير بأن المعلومات التي تحصل عليها المستقبل ناتجة عن عملية قياس في مجموعة المرسل، أي أنها ناتجة من عملية فيزيائية خارج إطار المجموعة التي لدى المستقبل، وبالتالي المعرفة التي قدمها المرسل للمستقبل هي بالفعل ذات طبيعة فيزيائية وساهمت في التعرف على حالة المجموعة التي لدى المستقبل، خلاصة القول أن حالة النظام الموصوف فقط بـ $\rho = I/2$ تختلف عن حالة النظام الموصوف بـ $\rho = I/2$ بالإضافة إلى 'حالة المعرفة' المكتسبة [20,21,36].

II-6-1- نظرية GHJW

التعامل مع عملية المحو الكمي كان في البداية مع بت كمي وحيد ثم مع نظام مركب من اثنين من البت الكمي، أما الآن فسيتم تعميمها لتشمل أي نظام مركب من قسمين عن طريقة نظرية GHJW.

إن مؤثر الكثافة لحالة مختلطة يمكن أن يُركب من مؤثرات كثافة لحالات نقية بطرق لانهائية، لكن دون أن تكون هذه الحالات النقية متعامدة فيما بينها، لأن هناك طريقة واحدة فقط لكتابة مؤثر الكثافة بدلالة حالات نقية متعامدة إذا كانت كل قيمه الذاتية غير منحلة، فمثلا مؤثر الكثافة ρ_A لحالة مختلطة هو

$$\rho_A = \sum_i w_i |\psi_i\rangle_A \langle \psi_i| \quad (69. II)$$

وهو يعبر عن المجموعة $\{w_i, |\psi_i\rangle_A\}$ التي تتكرر فيها الحالة النقية $|\psi_i\rangle_A$ بالاحتمال w_i ، لكن وجود أكثر من طريقة لكتابة ρ_A بدلالة الحالات النقية يعني وجود العديد من المجموعات $\{p_i, |\varphi_i\rangle_A\}$ التي تعبر عن نفس الحالة ρ_A ، والعلاقة الموجودة بين هذه المجموعات المختلفة والتي لها نفس مؤثر الكثافة تحدها النظرية التالية.

نظرية 1 :

إن أي مجموعتين $\{w_i, |\psi_i\rangle\}_{i=1}^m$ و $\{p_i, |\varphi_i\rangle\}_{i=1}^n$ تمثلان بنفس مؤثر الكثافة إذا و فقط إذا كان هناك مصفوفة

واحدية U بحيث :

$$\sqrt{p_i} |\varphi_i\rangle = \sum_{j=1}^m U_{ij} \sqrt{w_j} |\psi_j\rangle \quad (70. II)$$

من السهل التأكد من أن $\rho = \sum_{i=1}^m w_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \sum_{i=1}^n p_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$ وذلك نتيجة لواحدية المصفوفة U $[\sum_i U_{ki}^\dagger U_{ij} = \delta_{jk}]$.

إذا كانت ρ_A تعبر عن حالة مختلطة لنظام جزئي من نظام مركب ثنائي فمن الممكن تشكيل حالة نقية لـ ρ_A ، فمؤثر الكثافة ρ_A تم الحصول عليه عن طريق أخذ الأثر الجزئي لمؤثر الكثافة للحالة النقية بالنسبة للنظام الثاني B ، إذا الحالة ρ_A يمكن أن تنتج من أي حالة نقية للنظام الثنائي $|\phi_1\rangle_{AB}$ من الشكل :

$$|\phi_1\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{w_i} |\psi_i\rangle_A \otimes |\alpha_i\rangle_B \quad (71. II)$$

حيث $\{|\alpha_i\rangle_B\}$ هي مجموعة أشعة منظمة ومتعامدة في فضاء هيلبرت H_B ، هذه الحالة تحقق نفس عبارة ρ_A في المعادلة (69.II) :

$$\rho_A = tr_B(|\phi_1\rangle_{AB} \langle \phi_1|) = \sum_i w_i |\psi_i\rangle_A \langle \psi_i| \quad (72. II)$$

إذا ما تم تغيير المجموعة الإحصائية للنظام A لتصير $\{p_i, |\phi_i\rangle\}$ ، وذلك من دون تغيير مؤثر الكثافة ρ_A فإن الحالة النقية في هذه الحالة ستكون من الشكل :

$$|\phi_2\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i} |\phi_i\rangle_A \otimes |\beta_i\rangle_B \quad (73. II)$$

أين $\{|\beta_i\rangle_B\}$ هي من جديد مجموعة أشعة منظمة ومتعامدة فيما بينها من H_B . كلتا الحالتين $|\phi_1\rangle_{AB}$ و $|\phi_2\rangle_{AB}$ تؤديان إلى نفس عبارة مؤثر الكثافة للنظام الجزئي A ، فماهي العلاقة الموجودة بينهما [20] ؟

نظرية GHJW :

أي حالتين نقيتين لنظام مركب ثنائي $|\phi_1\rangle_{AB}$ و $|\phi_2\rangle_{AB}$ تنتميان إلى $H_B \otimes H_A$ وتشابك فيهما حالتا النظامين الجزئيين سيملكان نفس مؤثر الكثافة المختزل للنظام الجزئي A :

$$\rho_A = tr_B(|\phi_1\rangle_{AB} \langle \phi_1|) = tr_B(|\phi_2\rangle_{AB} \langle \phi_2|) \quad (74. II)$$

إذا فقط إذا كان هناك مؤثر واحد U_B يؤثر على النظام الجزئي B بحيث :

$$|\phi_2\rangle_{AB} = (I_A \otimes U_B) |\phi_1\rangle_{AB} \quad (75. II)$$

إذا تغيير المجموعة الإحصائية على مستوى النظام الجزئي A يرافقه تحويل واحد على مستوى النظام الجزئي الآخر B ، ما يعني أن اختيار قياس النظام B وفق أساس معين $\{|\beta_i\rangle_B\}$ يؤدي إلى اختيار مجموعة النظام A ألياً، وبهذه الطريقة يمكن استخلاص حالة نقية وتراكب متناسق لمجموعة جزئية من A عبر قياس B . الأمر هو أنه قبل إجراء عملية القياس للنظام B تكون حالة النظام A في حالة تراكب غير متناسق لأنه في الإمكان معرفة أي حالة يحتلها A عن طريق قياس النظام الآخر B ، لكن عند إجراء قياس B وفق أساس محدد $\{|\beta_i\rangle_B\}$ فإن هذا القياس يحو المعرفة بحالة النظام A التي تترتب عن طريق قياس B وفق أساس آخر $\{|\alpha_j\rangle_B\}$ ما يسمح باسترداد التناسق جزئياً لحالات النظام، وبهذا لا تكون نظرية GHJW سوى تعميم لظاهرة المحو الكمي حتى تمتد لأي نظام مركب ثنائي [20,38,39].

الفصل الثالث

تعميم العمليات الفيزيائية
للأنظمة المتشابكة

III-1- تمهيد

تخضع الأنظمة إلى مجموعة من العمليات الفيزيائية المتنوعة التي تؤثر على حالة هذه الأنظمة وتغيرها، لذا فإن وصف الأنظمة المتشابكة لا يكتمل عند تحديد الأدوات الرياضية اللازمة لوصفها فقط بل يجب تحديد كيفية تطور هذه الأدوات في ظل العمليات الفيزيائية المعروفة وخاصة عملية القياس وعملية التطور، ما يستلزم تعميم عمليات القياس وعمليات التطور الواحدية للأنظمة المغلقة لتشمل الأنظمة المتشابكة مع أنظمة أخرى، ومن ثم استخراج المعادلة التفاضلية الزمنية التي تحكم التطور الزمني لهذه الأنظمة.

III-2- القياس المعمم والـPOVM

اقترح نموذج فان نيومان للقياس تصورا لعملية القياس يمكن من خلاله ربط القيمة الذاتية المراد قياسها للنظام الكمي بمتغير عياني على جهاز القياس، مع ذلك لا يمكن القول بأن هذا النموذج قد نجح في وصف عملية القياس بشكل مرضٍ ذلك أن هناك العديد من التعقيدات التي تجاوزها وتساهل معها، وكذا الكثير من المشاكل التي لم يتمكن من حلها، فعلى سبيل المثال لم يحدد هذا النموذج كيفية قياس المتغير العياني على جهاز القياس، ومع أن هذا قد يبدو مبتذلا قليلا فالقياس في العالم الكلاسيكي لا يسبب أية مشكلة إلا أنه في نموذج فان نيومان للقياس يسبب مشكلة بالفعل، لأنه يسلم بأن جميع الأنظمة بما فيها الماكروسكوبية تخضع إلى ميكانيك الكم!

على العموم إذا كان هناك نظام A توصف حالته بمؤثر الكثافة ρ_A فإن احتمال العثور على هذا النظام في حالة معينة $|a\rangle$ مسقطها E_a هو :

$$P(a) = \text{tr}(E_a \rho_A) \quad (1. \text{III})$$

وعند إجراء عملية القياس على النظام والعثور على الحالة $|a\rangle$ فإن مؤثر الكثافة سيتغير تبعا لعملية القياس هذه إلى الحالة :

$$\frac{E_a \rho_A E_a}{\text{tr}(E_a \rho_A)} \quad (2. \text{III})$$

المعامل $\text{tr}(E_a \rho_A)$ في المقام جاء لتنظيم مؤثر الكثافة الجديد.

يمكن إجراء عملية القياس دون أن تتم قراءة أو معرفة نتائج القياس من قبل المجرّب، في هذه الحالة يتم إسقاط ρ_A على مجموعة الأشعة الذاتية للملاحظ المقاس $\{|a\rangle\}$ والتي تشكل أساساً لفضاء هيلبرت لهذا النظام، تدعى عملية القياس في هذه الحالة بالقياس المتعامد مثل القيام بقياس مركبة السبين S_z لجسيم ذو سبين $1/2$ فضاؤه ثنائي البعد بواسطة جهاز ستارن جارلاش، في هذه الحالة يتم إسقاط حالة النظام على الأشعة $\{|\uparrow\rangle_z, |\downarrow\rangle_z\}$ والتي -كما هو واضح- تشكل أساساً لهذا الفضاء. إن عملية القياس وفق الأساس $\{|a\rangle\}$ تسقط حالة النظام على أشعة هذا الأساس حسب احتمال العثور على النظام في كل حالة من الحالات الموصوفة بأشعة هذا الأساس، لذا فإن مؤثر الكثافة ρ_A يتغير بعد عملية القياس هذه إلى :

$$\rho_A \rightarrow \sum_a \text{tr}(E_a \rho_A) \frac{E_a \rho_A E_a}{\text{tr}(E_a \rho_A)} = \sum_a E_a \rho_A E_a \quad (3. III)$$

حيث $\{E_a\}$ هي مجموعة مُسقطي أشعة الأساس $\{|a\rangle\}$.

عملية القياس المتعامد على نظام معين هي حالة خاصة من القياس، يمكن تطبيقها بنجاح إذا كان النظام المقاس مغلقاً، لكن إذا كان النظام A مفتوحاً على نظام آخر B وتمت عملية القياس المتعامد للنظام الكلي AB ، فإنه لا يمكن أن نتوقع أن يتغير مؤثر الكثافة الجزئي ρ_A نتيجة عملية القياس هاته بنفس الطريقة التي يتغير فيها مؤثر الكثافة الكلي وذلك كما تصفه المعادلة (3.III)، فعملية القياس المتعامد في $H_A \otimes H_B$ ليست بالضرورة متعامدة في الفضاء الجزئي H_A ، لذا يجب إيجاد صياغة لتعميم النتائج المترتبة عن عملية القياس (المعادلتان (1.III) و (3.III)) لتشمل الأنظمة المفتوحة بدورها. لكن قبل الانطلاق لتعميم هذه النتائج للأنظمة الجزئية من أنظمة أكبر فضاءها الكلي له بنية الجداء التتسوري $H_A \otimes H_B$ ، نبدأ أولاً بالفضاء المشكل بواسطة عملية الجمع المباشر لفضاءين جزئيين، لأن نتائجه أقرب من نتائج القياس المتعامد ما سيسهل عملية الانتقال لفهم تأثير هذه العملية على الفضاء الجزئي من فضاء الجداء التتسوري.

نعتبر إذاً فضاء هيلبرت H الذي بعده N ، يمكن تقسيم هذا الفضاء إلى فضاءين جزئيين بواسطة عملية الجمع المباشر :

$$H = H_A \oplus H_A^\perp \quad (4. III)$$

عملية الجمع المباشر للفضاءين الجزئيين يمكن أن تتم باختيار عدد من أشعة أساس معين لـ H لتشكيل أساساً للفضاء الجزئي H_A ، أما بقية أشعة ذلك الأساس فهي تشكل أساس الفضاء المكمل لـ H_A في H أي

الفضاء الجزئي H_A^\perp ، ومنه فإن بعد الفضاء الكلي H هو مجموع بعدي فضاءيه الجزئيين (H_A و H_A^\perp). سنفترض أن المجرب لا يمكنه الوصول إلا إلى اشعة الفضاء H_A ولا يستطيع التعامل إلا مع الملاحظات $\{M_A\}$ التي تؤثر حصراً على هذا الفضاء بحيث أن :

$$M_A|\psi_a^\perp\rangle = \langle\psi_a^\perp|M_A = 0 \quad (5. III)$$

وذلك من أجل كل $|\psi_a^\perp\rangle$ تنتمي إلى H_A^\perp ، كما سنفترض أنه تم تحضير مؤثر الكثافة ρ_A ليصف المجموعة $\{w_i, |\varphi_i\rangle\}$ والتي تنتمي كل أشعتها إلى الفضاء H_A فقط، بعد الانتهاء من تحضير ρ_A تتم عملية القياس المتعامد في الفضاء H عبر مجموعة المسقطات $\{E_a\}$ أين $E_a = |u_a\rangle\langle u_a|$ ، و $|u_a\rangle$ هو شعاع منظم من H وله تقسيم وحيد إلى فضاءيه الجزئيين :

$$|u_a\rangle = |\tilde{\psi}_a\rangle + |\tilde{\psi}_a^\perp\rangle \quad (6. III)$$

حيث $|\tilde{\psi}_a\rangle$ و $|\tilde{\psi}_a^\perp\rangle$ هما شعاعان متعامدان ينتميان إلى H_A و H_A^\perp على التوالي ولكنهما غير منظمين. بعد عملية قياس المسقط E_a يتحول مؤثر الكثافة ρ_A إلى $|u_a\rangle\langle u_a|$ وذلك باحتمال قدره :

$$p(a) = \text{tr}(E_a\rho_A) = \langle u_a|\rho_A|u_a\rangle \quad (7. III)$$

أين استخدمت علاقة تمام الأساس في المساواة الأخيرة، وبما أن ρ_A يعيش في H_A فإن :

$$p(a) = \langle u_a|\rho_A|u_a\rangle = \langle\tilde{\psi}_a|\rho_A|\tilde{\psi}_a\rangle \quad (8. III)$$

لكن بالنسبة للمجرب الذي لا يستطيع الوصول إلا إلى ملاحظات الفضاء H_A فإن كل ما يستطيع رؤيته هو شق الشعاع $|u_a\rangle$ الذي يعيش في الفضاء الجزئي H_A ، أي أن عملية قياس E_a في الفضاء الكلي H حضرت الحالة $|\psi_a\rangle$ عند المجرب، أين $|\psi_a\rangle$ هو الشعاع $|\tilde{\psi}_a\rangle$ بعد تنظيمه ($|\tilde{\psi}_a\rangle = \sqrt{\lambda_a}|\psi_a\rangle$)، لكن احتمال الحصول على الحالة $|\psi_a\rangle$ عند المجرب مماثل لاحتمال الحصول على $|u_a\rangle$ في عملية القياس المتعامد لـ H بواسطة المسقطات $\{E_a\}$. إذا باختصار عملية قياس E_a في H تنتج الحالة $|\psi_a\rangle\langle\psi_a|$ في الفضاء الجزئي H_A وذلك باحتمال قدره $\langle\tilde{\psi}_a|\rho_A|\tilde{\psi}_a\rangle$.

لربط هذه النتيجة بالنتائج المتحصل عليها في عملية القياس المتعامد وخاصة المعادلتان (1.III) و (3.III) نعرف المؤثرات $\{F_a\}$ والتي تمثل المؤثرات الناتجة عن إسقاط المؤثرات $\{E_a\}$ نحو الفضاء الجزئي H_A :

$$F_a = E_A E_a E_A = |\tilde{\psi}_a\rangle\langle\tilde{\psi}_a| = \lambda_a |\psi_a\rangle\langle\psi_a| \quad (9. III)$$

أين E_A هو المؤثر الذي يُسقط أي شعاع من H نحو الفضاء الجزئي H_A . المؤثر F_a موجب وهرميتي ومن السهل التفتن إلى أن :

$$p(a) = \langle \tilde{\psi}_a | \rho_A | \tilde{\psi}_a \rangle = \text{tr}(F_a \rho_A) \quad (10. III)$$

تماثل عبارة الاحتمال هذه عبارة الاحتمال للقياس المتعامد بشكل كبير، لكن الفرق الوحيد بينهما هو أن F_a ليس مُسقَطاً إلا إن كان $\lambda_a = 1$. علاوة على ذلك :

$$\sum_a F_a = E_A \left(\sum_a E_a \right) E_A = E_A = I_A \quad (11. III)$$

ومنه مجموع المؤثرات F_a هو مؤثر الوحدة للفضاء H_A .

تدعى مجموعة المؤثرات $\{F_a\}$ بالمؤثرات الموجبة مقدرة القياس أو POVM اختصاراً لـ (Positive Operator Valued Measure)، وهي تعبر عن تداعيات عملية القياس المتعامد لنظام ما على جزء من ذلك النظام. تكون المؤثرات $\{F_a\}$ موجبة حتى تضمن أن يكون الاحتمال الذي عُرِّف بواسطتها (العبارة (10.III)) موجبا، وتحقق الخاصية $\sum_a F_a = I$ حتى يكون مجموع جميع الاحتمالات الممكنة مساويا للواحد.

رغم أن المؤثرات $\{F_a\}$ تعرف احتمالات القياس المعمم بشكل واضح، لا يكون الشكل الذي تغير إليه الـ POVM حالة النظام الجزئي معروفا دائما ولا توجد طريقة عامة توضح كيفية تأثيرها على حالة النظام، لكن في الحالة الخاصة التي نحن بصددتها أين يملك الفضاء الكلي بنية الجمع المباشر لفضاءين جزئيين وتكون الـ POVM أحادية البعد (أي لها قيمة ذاتية وحيدة) كان تأثيرها على حالة النظام واضحا، فالقياس المتعامد في النظام الكلي يغير مؤثر الكثافة على مستوى النظام الجزئي كالتالي :

$$\begin{aligned} \rho \rightarrow \rho' &= \sum_a \langle \tilde{\psi}_a | \rho | \tilde{\psi}_a \rangle | \psi_a \rangle \langle \psi_a | = \sum_a \lambda_a \langle \psi_a | \rho | \psi_a \rangle | \psi_a \rangle \langle \psi_a | \\ &= \sum_a (\sqrt{\lambda_a} | \psi_A \rangle \langle \psi_A |) \rho (\sqrt{\lambda_a} | \psi_A \rangle \langle \psi_A |) = \sum_a \sqrt{F_a} \rho \sqrt{F_a} \end{aligned} \quad (12. III)$$

هذه النتيجة مشابهة لنتيجة القياس المتعامد أين يقوم القياس بتغيير مؤثر الكثافة إلى $\sum_a E_a \rho E_a$ [20].

أمثلة

المثال الأول : POVM البت الكمي الوحيد

في هذا المثال نريد التعرف أكثر على POVM أحادية البعد في فضاء ثنائي البعد أو فضاء البت الكمي، عناصر POVM أحادية البعد تكون من الشكل :

$$F_a = |\tilde{\psi}_a\rangle\langle\tilde{\psi}_a| = \lambda_a|\psi_a\rangle\langle\psi_a| \quad (13. III)$$

أين $0 \leq \lambda_a \leq 1$ وذلك حتى تكون المؤثرات $\{F_a\}$ موجبة ومجموعها مساويا لمؤثر الوحدة، هذا يعني أن المؤثر F_a متناسب مع المسقط $E_a = |\psi_a\rangle\langle\psi_a|$ ، ومن دراستنا السابقة للبت الكمي نعلم أن الشكل العام لهذا المسقط هو :

$$E_a = \frac{1}{2}(I + \vec{n}_a \cdot \vec{\sigma}) \quad (14. III)$$

أين \vec{n}_a هو شعاع وحدة وفق الاتجاه الذي يكون فيه الشعاع $|\psi_a\rangle$ شعاعا ذاتيا لمركبة السبين $\vec{S} \cdot \vec{n}_a$ وذلك حسب تمثيل السبين للبت الكمي. وعليه المؤثر F_a هو :

$$F_a = \lambda_a E_a = \frac{1}{2}(\lambda_a I + \lambda_a \vec{n}_a \cdot \vec{\sigma}) \quad (15. III)$$

عناصر POVM تحقق الخاصية $\sum_a F_a = I$ ما يعني أن :

$$\sum_a \frac{1}{2}(\lambda_a I + \lambda_a \vec{n}_a \cdot \vec{\sigma}) = I \quad (16. III)$$

وحتى تتحقق هذه المعادلة يجب أن يكون :

$$\sum_a \lambda_a = 2 , \quad \sum_a \lambda_a \vec{n}_a = \vec{0} \quad (17. III)$$

وهما الشرطان الضروريان حتى تكون مجموعة المؤثرات $\{F_a\}$ بالفعل POVM. وبالتالي فإن كل مجموعة مؤثرات من الشكل :

$$F_a = \lambda'_a (I + \vec{n}_a \cdot \vec{\sigma}) = 2\lambda'_a E_a \quad (18. III)$$

تعرف POVM في فضاء البت الكمي إذا كان $\sum_a \lambda'_a \vec{n}_a = \vec{0}$ و $\sum_a \lambda'_a = 1$ ، أين قيم λ'_a معرفة بالمتراجحة $0 \leq \lambda'_a \leq \frac{1}{2}$.

إذا كان عدد عناصر الـ POVM هو اثنان فإن $\lambda'_1 = \lambda'_2 = 1/2$ و $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 = \vec{0}$ وبهذا تكون الـ POVM عبارة عن عملية قياس متعامد للسبين وفق المحور الذي شعاعا وحدتاه المتعاكسان هما \vec{n}_1 و \vec{n}_2 . في الحالة التي يكون فيها عدد عناصر الـ POVM هو ثلاثة مع اختيار أن تكون $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 = \vec{0}$ فإن $\lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda'_3 = \frac{1}{3}$ وتصبح عبارة المؤثرات $\{F_a\}$ كالتالي :

$$F_a = \frac{1}{3}(I + \vec{n}_a \cdot \vec{\sigma}) = \frac{2}{3}E_a \quad (19. III)$$

من الممكن من حيث المبدأ اختيار أي عدد (أكبر أو يساوي 2) ليكون عدد عناصر الـ POVM في حالة البت الكمي، وهذا يفضي إلى نتيجة مهمة وهو أن عدد أشعة حالة النظام التي يتم الحصول عليها بواسطة تطبيق الـ POVM على نظام معين أكبر عموماً من بعد فضاء النظام، وهو ما لا يمكن تحقيقه بواسطة قياس متعامد أين تكون الأشعة الناتجة هي الأشعة الذاتية للمؤثر المقاس والتي عددها مساو لبعد فضاء النظام. هذه الخاصية هي ما يمنح الـ POVM كما سنرى أهمية خاصة [20].

▪ المثال الثاني

هذا المثال واحد من الأمثلة المعروفة التي تظهر قوة الـ POVM والخيارات الجديدة التي تمنحها عملية من هذا النوع. يتعلق الأمر ببت كمي تم تحضيره ليكون في إحدى الحالتين :

$$\left\{ |\psi_b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), |\psi_a\rangle = |0\rangle \right\} \quad (20. III)$$

المجرب لا يعرف أي الحالتين هي حالة البت الكمي، وبما أن الشعاعين غير متعامدين فهو لا يستطيع أن يتعرف يقيناً على الحالة $|0\rangle$ بواسطة أي عملية قياس متعامد. الآن نعرف الـ POVM التالية :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} |1\rangle\langle 1| \\ F_2 &= \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \frac{(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|)}{2} \\ F_3 &= I - F_1 - F_2 \end{aligned} \quad (21. III)$$

تحتوي هذه الـ POVM على 3 عناصر وهذا أكبر من بعد الفضاء الثنائي، إذا ما قام المجرب بتحقيق هذه الـ POVM فإن حصوله على النتيجة 1 (ممثلة بـ F_1) يعني أن حالة النظام قبل القياس هي قطعاً $|\psi_b\rangle$ لأنه لا يمكن الحصول على هذه النتيجة إذا كانت حالة البت الكمي هي $|\psi_a\rangle$ لأن احتمال هذه النتيجة

معدوم لهذه الحالة $P(1) = \langle \psi_a | F_1 | \psi_a \rangle = 0$ ، أما إذا كانت النتيجة هي 2 (الممثلة بـ F_2) فإن حالة النظام قبل القياس هي $|\psi_a\rangle$ يقينا لأن $\langle \psi_b | F_2 | \psi_b \rangle = 0$ ، أما إن كانت النتيجة هي 3 فلا يمكن تحديد حالة النظام على وجه الدقة. الإضافة التي قدمتها هذه الـ POVM هو القدرة على تحديد حالة النظام يقينا وبشكل قطعي إذا كانت النتيجة هي 1 أو 2 وهو ما لم ليس ممكنا بواسطة أي قياس متعامد للبت الكمي!! [24,29]

III-2-1- نظرية نيمارك (Neumark's theorem)

عند التعرض للقياس المعمم وجدنا أن القياس المتعامد على فضاء معين يمكن نمذجته بـ POVM على مستوى فضاء جزئي من ذلك الفضاء، التساؤل المطروح الآن هو هل كل POVM (أي كل تقسيم لمؤثر الوحدة إلى مجموعة مؤثرات موجبة وهرميتية) تعبر عن عملية قياس متعامد في فضاء أكبر؟

إجابة هذا التساؤل تكمن في نظرية Neumark (نسبة لـ Mark Neumark) التي تنص على أن أي POVM يمكن تحقيقه بتطبيق قياس متعامد على فضاء أكبر. لإثبات ذلك نفترض أن هناك مجموعة مؤثرات موجبة وأحادية البعد $\{F_a\}$ عددها n وتحقق العلاقة $\sum_a F_a = I$ ، تعمل هذه المؤثرات في فضاء هيلبرت H بعده N أين $n \geq N$ ، لذا كل مؤثر F_a يمكن كتابته على الشكل :

$$F_a = |\tilde{\psi}_a\rangle\langle\tilde{\psi}_a| = \lambda_a |\psi_a\rangle\langle\psi_a| \quad (22. III)$$

الأشعة $\{|\psi_a\rangle\}$ منظمة وليست متعامدة أما $\{\lambda_a\}$ فهي مجموعة أعداد حقيقية موجبة وتحقق المتراجحة $0 \leq \lambda_a \leq 1$. مجموع المؤثرات $\{F_a\}$ هو مؤثر الوحدة I وذلك حسب العلاقة $\sum_a F_a = I$ والتي يمكن كتابتها باستخدام العناصر المصفوفية لـ F_a كالتالي :

$$\sum_{a=1}^n (F_a)_{ji} = \sum_{a=1}^n \tilde{\psi}_{ai}^* \tilde{\psi}_{aj} = \delta_{ij} \quad (23. III)$$

الآن بدلا من التفكير في أنه يوجد n شعاع $|\psi_a\rangle$ في فضاء بعده N ، يمكن التفكير في N شعاع $\{|U_i\rangle\}$ في فضاء بعده n مركباته $(U_{ai} \equiv \tilde{\psi}_{ai})$ ، هذه الأشعة منظمة ومتعامدة كما تفيد به العلاقة السابقة :

$$\sum_{a=1}^n U_{ai}^* U_{aj} = \delta_{ij} \quad (24. III)$$

تذكر هذه المعادلة بالعلاقة التي تحققها المؤثرات الواحدية، فكل مصفوفة واحدية V تحقق العلاقة :

$$V^\dagger V = V V^\dagger = I \quad (25. III)$$

والتي تكتب باستخدام العناصر المصفوفية لـ V كالتالي :

$$\sum_j V_{ij}^\dagger V_{jk} = \sum_j V_{ji}^* V_{jk} = \delta_{ik} \quad (26. III)$$

ما يوحي بأن هناك مصفوفة مربعة واحدية U بعدها n في الفضاء الموسع، حيث N عمود من هذه المصفوفة يشكل بمركبات الأشعة $\{|U_i\rangle\}$ ، أي أن هناك $N.n$ عنصرا مصفوفيا معروفا للمصفوفة U :

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & \cdots & U_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n1} & \cdots & U_{nn} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{11} & \cdots & \tilde{\psi}_{1N} & U_{1,N+1} & \cdots & U_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\psi}_{n1} & \cdots & \tilde{\psi}_{nN} & U_{n,N+1} & \cdots & U_{nn} \end{pmatrix} \quad (27. III)$$

أما بقية عناصر المصفوفة U فهناك عدة طرق لاختيارها، حيث لا يشترط عند اختيارها سوى أن تحافظ المصفوفة U على خاصيتها الواحدية (العلاقة (25.III)) :

$$\sum_{j=1}^n U_{ji}^* U_{jk} = \sum_{j=1}^n U_{ij}^* U_{kj} = \delta_{ik} \quad (28. III)$$

وما تعنيه هذه العلاقة هو أن أسطر المصفوفة U تشكل مجموعة أشعة متعامدة ومنظمة وكذلك أعمدتها.

نريد الآن إجراء عملية قياس في الفضاء الموسع للشعاع $|U_a\rangle$ الذي مركباته (U_{ai}) أي السطر a من المصفوفة U ، هذا الشعاع يمكن تفكيكه إلى قسمين :

$$|U_a\rangle = |\tilde{\psi}_a\rangle + |\tilde{\psi}_a^\perp\rangle \quad (29. III)$$

حيث $|\tilde{\psi}_a\rangle$ تقع في الفضاء الأصلي H أما $|\tilde{\psi}_a^\perp\rangle$ فهي تقع في الفضاء المكمل لـ H في الفضاء الموسع. مصفوفة الكثافة ρ المشكلة من أشعة الفضاء H فحسب لا تؤثر سوى على الشعاع $|\tilde{\psi}_a\rangle$ ، ما يعني أن تحضير الحالة $|U_a\rangle$ في الفضاء الموسع مكافئ لتحضير الحالة $|\psi_a\rangle$ بالنسبة للمراقب الذي ليس له وصول سوى لملاحظات الفضاء H ، وذلك باحتمال قدره :

$$\langle U_a | \rho | U_a \rangle = \langle \tilde{\psi}_a | \rho | \tilde{\psi}_a \rangle \equiv tr(F_a \rho) \quad (30. III)$$

وبهذا نكون قد حققنا الـPOVM المطلوبة في الفضاء H ، إذاً أي POVM ذات عناصر أحادية البعد يمكن تحقيقها بواسطة عملية قياس متعامد في فضاء أوسع، وبهذه النتيجة ينتهي إثبات نظرية Neumark [25,40].

■ مثال

نستمر في أمثلتنا عن البت الكمي، في هذا المثال نود استغلال نظرية Neumark من أجل التعرف على الفضاء الموسع الذي يتم فيه القياس المتعامد وأشعة الأساس الذي يتم قياسه في ذلك الفضاء [20]، وذلك للـPOVM ذي الثلاث عناصر التالية :

$$F_a = \frac{2}{3} |\uparrow_{\vec{n}_a}\rangle\langle\uparrow_{\vec{n}_a}| = |\tilde{\psi}_a\rangle\langle\tilde{\psi}_a| \quad (31. III)$$

$|\uparrow_{\vec{n}_a}\rangle$ هو شعاع ذاتي وفق الاتجاه \vec{n}_a ، أين :

$$\vec{n}_1 = (0,0,1), \quad \vec{n}_2 = (\sqrt{3}/2, 0, -1/2), \quad \vec{n}_3 = (-\sqrt{3}/2, 0, -1/2) \quad (32. III)$$

حسب العلاقة (18. III) تكون $\lambda'_a = 1/3$ ، وعليه يصبح من السهل التحقق من أن $\sum_{a=1}^3 \lambda'_a = 1$ وأن $\sum_{a=1}^3 \vec{n}_a = \vec{0}$ ، ما يعني أن مجموعة المؤثرات $\{F_a\}$ تشكل بالفعل POVM في فضاء البت الكمي. باستخدام عبارة الأشعة الذاتية وفق المتجهات $\{\vec{n}_a\}$ (العبارة (9.II)) نجد أن :

$$|\tilde{\psi}_1\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\tilde{\psi}_2\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{1/6} \\ \sqrt{1/2} \end{pmatrix}, \quad |\tilde{\psi}_3\rangle = \begin{pmatrix} -\sqrt{1/6} \\ \sqrt{1/2} \end{pmatrix} \quad (33. III)$$

عدد عناصر الـPOVM هو 3 ما يعني أن بعد الفضاء الموسع هو 3، أشعة الأساس التي تتم عليها عملية القياس في هذا الفضاء حسب نظرية Neumark هي :

$$|U_1\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ 0 \\ U_{13} \end{pmatrix}, \quad |U_2\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{1/6} \\ \sqrt{1/2} \\ U_{23} \end{pmatrix}, \quad |U_3\rangle = \begin{pmatrix} -\sqrt{1/6} \\ \sqrt{1/2} \\ U_{33} \end{pmatrix} \quad (34. III)$$

المقادير (U_{13}, U_{23}, U_{33}) يتم الحصول عليها بواسطة شرطي التنظيم والتعامد فنجد :

$$|U_1\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ 0 \\ \sqrt{1/3} \end{pmatrix}, |U_2\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{1/6} \\ \sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/3} \end{pmatrix}, |U_3\rangle = \begin{pmatrix} -\sqrt{1/6} \\ \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/3} \end{pmatrix} \quad (35. III)$$

III-2-2- الـ POVM وفضاء الجداء التتسوري

نعود الآن إلى الحالة الأكثر واقعية والتي يكون فيها فضاء النظام الكلي عبارة عن جداء تتسوري، فإذا ما افترضنا أن هناك نظامين مستقلين A و B فإن حالة النظام الكلي AB ستعيش في فضاء هيلبرت H_{AB} الذي هو عبارة عن الجداء التتسوري للفضاءين الجزئيين $H_{AB} = H_A \otimes H_B$. القياس المتعامد لهذه الحالة يتم وفق أساس متعامد ومنظم للفضاء H_{AB} وليكن عبر مجموعة المسقطات $\{E_a\}$ التي تحقق :

$$E_a E_b = \delta_{ab} E_a \quad , \quad \sum_a E_a = I_{AB} \quad (36. III)$$

إذا افترضنا أن حالة النظام AB قد تم تحضيرها لتكون في الحالة غير المتشابكة $\rho_A \otimes \rho_B$ فإن احتمال الحصول على النتيجة a هو :

$$P(a) = tr_{AB}(E_a(\rho_A \otimes \rho_B)) = tr_A(F_a \rho_A) \quad (37. III)$$

أين

$$F_a = tr_B(E_a \rho_B) \quad (38. III)$$

تمثل العبارة (38.III) تعريف الـ POVM للنظام A عندما يكون الفضاء الكلي عبارة عن جداء تتسوري، وإذا كان $\{|i\rangle_A\}$ و $\{|\mu\rangle_B\}$ أساسين لـ H_A و H_B على الترتيب، فإن العناصر المصفوفية لـ F_a يمكن استنتاجها من المعادلة (38.III) كما يلي :

$$(F_a)_{ij} = \sum_{k,\mu,\vartheta} (E_a)_{i\vartheta,k\mu} (\rho_B)_{\mu\vartheta} \delta_{kj} \quad (39. III)$$

أين $(E_a)_{i\vartheta,k\mu} = {}_A\langle i | \otimes {}_B\langle \vartheta | E_a | k \rangle_A \otimes |\mu \rangle_B$ ، ومنه فإن

$$(F_a)_{ji} = \sum_{\mu,\vartheta} (E_a)_{j\vartheta,i\mu} (\rho_B)_{\mu\vartheta} \quad (40. III)$$

المؤثرات $\{F_a\}$ تعمل في الفضاء H_A وتتميز بالخصائص الثلاث التالية :

1- هرميتية :

أي أن $F_a^\dagger = F_a$ وهذا ناتج من هرميتية ρ_B و E_a حيث أن :

$$(F_a)_{ij}^* = \sum_{\mu,\vartheta} (E_a)_{i\vartheta,j\mu}^* (\rho_B)_{\mu\vartheta}^* = \sum_{\mu,\vartheta} (E_a)_{j\mu,i\vartheta} (\rho_B)_{\vartheta\mu} = (F_a)_{ji} \quad (41. III)$$

ومنه $(F_a)_{ij}^* = (F_a)_{ji}$ وبالتالي المؤثر F_a هرميتي.

2- موجبة :

F_a مؤثر موجب، أي أن $\langle \psi | F_a | \psi \rangle_A \geq 0$ من أجل كل $|\psi\rangle_A$ من H_A . لإثبات ذلك نقوم بالاستعانة بمجموعة الأشعة الذاتية $\{|\mu\rangle_B\}$ لمؤثر الكثافة ρ_B ، حيث أن القيمة المتوسطة لـ F_a من أجل أي شعاع

$|k\rangle_A$ هي :

$$\begin{aligned} {}_A\langle k | F_a | k \rangle_A &= (F_a)_{kk} = \sum_{\mu,\vartheta} (E_a)_{k\vartheta,k\mu} (\rho_B)_{\mu\vartheta} \\ &= \sum_{\mu,\vartheta} (E_a)_{k\mu,k\vartheta} p_\mu \delta_{\mu\vartheta} = \sum_{\mu} p_\mu (E_a)_{k\mu,k\mu} \geq 0 \end{aligned} \quad (42. III)$$

وعليه يكون F_a مؤثرا موجبا نتيجة لكون المسقط E_a موجبا.

3- تامة :

حيث أن مجموعة المؤثرات F_a تحقق :

$$\begin{aligned} \sum_a F_a &= \sum_a tr_B(E_a \rho_B) = tr_B \left(\sum_a E_a \rho_B \right) \\ &= tr_B(I_{AB} \rho_B) = I_A \end{aligned} \quad (43. III)$$

إذاً

$$\sum_a F_a = I_A \quad (44. III)$$

يمكن ملاحظة أن خصائص المؤثرات $\{F_a\}$ مماثلة لخصائص المسقطات، لكن الاختلاف الرئيسي بين الـ POVM والمسقطات يكمن في أن عناصر الـ POVM غير متعامدة فيما بينها، أي أن القياس المتعامد في H_{AB} ليس بالضرورة متعامدا في الفضاء الجزئي H_A ، فمثلا المسقطان $E_1 = |1\rangle_{AA}\langle 1| \otimes |1\rangle_{BB}\langle 1|$ و $E_2 = |1\rangle_{AA}\langle 1| \otimes |2\rangle_{BB}\langle 2|$ متعامدان في H_{AB} لكن F_1 و F_2 في H_A ليسا متعامدين إذا استثنينا الحالة التي يكون فيها $tr_B(|1\rangle_{BB}\langle 1| \rho_B) = 0$ أو $tr_B(|2\rangle_{BB}\langle 2| \rho_B) = 0$. عدم تعامد عناصر الـ POVM يفضي إلى خاصية مهمة أخرى لها وهي عدم تكرار نتيجة القياس لقياسين متتابعين لنفس المؤثر في H_{AB} على مستوى النظام الجزئي A ، فالحالة الكلية في H_{AB} تنهار إلى شعاع ذاتي للمؤثر المقاس والذي يكون عموديا على بقية الأشعة الذاتية لنفس المؤثر، ما يؤدي إلى الحصول على نفس القيمة الذاتية عند تكرار القياس مباشرة في H_{AB} ، لكن على مستوى النظام الجزئي A يكون هناك احتمال لأن تتغير الحالة في H_A لعدم تعامد عناصر POVM فيما بينها بالضرورة.

من المهم أيضا الإشارة إلى أن عدد عناصر POVM غالبا ما يكون أكبر من بعد الفضاء H_A وهذا نتيجة لارتباطه المباشر بعدد المسقطات $\{E_a\}$ للفضاء الكلي H_{AB} من تعريفه بالمعادلة (38.III)، لكن هذا لا يعني دائما أن عدد عناصر الـ POVM مساو لعدد المسقطات $\{E_a\}$ فبعض عناصره قد تكون معدومة، لكن العدد الأعظمي الممكن لعناصر POVM هو بعد الفضاء H_{AB} . وهذه نقطة اختلاف أخرى بين الـ POVM والمسقطات، فعدد المسقطات المتعامدة في الفضاء هو دوما مساو لعدد ذلك الفضاء [22,29,40,41].

نظرية Neumark أثبتت أن كل POVM ينتج عن عملية قياس متعامد في فضاء أوسع، وفي فضاء الجداء التنسوري تم إثبات أن كل عملية قياس متعامد تنتج POVM في الفضاء الجزئي، السؤال الآن هو هل من الممكن انطلاقا من POVM يعمل على فضاء معين H_A بعده N اختيار الفضاء H_B ، بحيث يملك الفضاء الموسع H_{AB} الذي تجري فيه عملية القياس المتعامد بنية الجداء التنسوري $H_A \otimes H_B$ ؟ وهل يمكن اختيار مصفوفة كثافته ρ_B ومجموعة المسقطات $\{E_a\}$ التي يتم قياسها في H_{AB} وذلك مع المحافظة على قيم الاحتمال :

$$P(a) = tr_{AB}(E_a(\rho_A \otimes \rho_B)) = tr_A(F_a \rho_A) \quad (45. III)$$

دون تغيير؟ مع عدم الاكتراث للكيفية التي تغير فيها عملية القياس هذه مؤثر الكثافة ρ_A . الإجابة هي نعم إذا كانت كل عناصر POVM أحادية البعد.

لإثبات هذا نبدأ بمجموعة مؤثرات $\{F_a\}$ ، مشكلة من n مؤثر هرميتي موجب وأحادي البعد من الشكل $F_a = |\tilde{\psi}_a\rangle_{AA} \langle \tilde{\psi}_a|$ وتحقق علاقة التمام $\sum_{a=1}^n F_a = I_A$. حسب Neumark، يوجد n شعاع $|U_a\rangle$ له n مركبة بحيث :

$$|U_a\rangle = |\tilde{\psi}_a\rangle + |\tilde{\psi}_a^\perp\rangle \quad (46. III)$$

لمتابعة الإثبات نعتبر الحالة الخاصة التي يكون فيها $n=r.N$ أين N هو بعد الفضاء H_A و r هو عدد صحيح موجب، تسهل هذه الحالة الانتقال إلى فضاء الجداء التتسوري H_{AB} إذ يكفي اختيار أن يكون بعده n لينتج آليا أن بعد الفضاء H_B هو r ، ومن هذه الحالة الخاصة يمكن استنتاج بقية الحالات الأخرى كما سنرى لاحقا.

نقسم الشعاع $|U_a\rangle$ إلى r شعاع ذي N مركبة بواسطة عملية الجمع المباشر مع الإبقاء على $|\tilde{\psi}_a\rangle$ كأحد هذه الأشعة :

$$|U_a\rangle = |\tilde{\psi}_a\rangle + |\tilde{\psi}_{1,a}^\perp\rangle + |\tilde{\psi}_{2,a}^\perp\rangle + \dots + |\tilde{\psi}_{r-1,a}^\perp\rangle = |\tilde{\psi}_a\rangle + \sum_{\mu=1}^{r-1} |\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle \quad (47. III)$$

حيث أن $|\tilde{\psi}_a\rangle$ تمثل الـ N مركبة الأولى للشعاع $|U_a\rangle$ ، $|\tilde{\psi}_{1,a}^\perp\rangle$ تمثل الـ N مركبة الثانية لـ $|U_a\rangle$ وهكذا. ومن شرط التنظيم والتعامد للأشعة $|U_a\rangle$ نجد :

$$\langle U_b|U_a\rangle = \langle \tilde{\psi}_b|\tilde{\psi}_a\rangle + \sum_{\mu=1}^{r-1} \langle \tilde{\psi}_{\mu,b}^\perp|\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle = \delta_{ab} \quad (48. III)$$

أين $0 = \langle \tilde{\psi}_{\vartheta,b}^\perp|\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle$ من أجل $\mu \neq \vartheta$ لأن الأشعة التي تنتمي إلى فضاءات جزئية مختلفة من فضاء الجمع المباشر تكون متعامدة، هذه النتيجة تقود إلى الطريقة التي يمكن فيها اختيار أشعة الأساس التي يتم قياسها في الفضاء H_{AB} ، وذلك بتحديد أساس متعامد ومتجانس للفضاء H_B ذي البعد r :

$$\{|\mu\rangle_B\} ; \mu = 0, 1, \dots, r-1 \quad (49. III)$$

من المعادلة (48.III) نجد أن أساسا متعامدا ومتجانسا لفضاء الجداء التتسوري H_{AB} يمكن أن يتم باختيار الأشعة :

$$|\tilde{\psi}_a\rangle = |\tilde{\psi}_a\rangle_A |0\rangle_B ; |\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle = |\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle_A |\mu\rangle_B \quad (50. III)$$

إذا الأشعة $|\phi_a\rangle_{AB}$ المعرفة بالاختيار السابق تمثل أساسا متعامدا ومتجانسا للفضاء H_{AB} حيث :

$$|\phi_a\rangle_{AB} = |\tilde{\psi}_a\rangle_A |0\rangle_B + \sum_{\mu=1}^{r-1} |\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle_A |\mu\rangle_B \quad (51. III)$$

بقي الآن أن نثبت أن قياس مسقطات هذه الأشعة هي التي تنتج الـ POVM المقصودة في الفضاء H_A والتي عناصرها هي $F_a = |\tilde{\psi}_a\rangle_A \langle \tilde{\psi}_a|$ ، لذا نقوم بحساب احتمال الحصول على النتيجة a في الفضاء H_{AB} لمؤثر الكثافة المختار كالتالي :

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes |0\rangle_B \langle 0| \quad (52. III)$$

احتمال الحصول على النتيجة a المرفقة بمسقط الشعاع $|\phi_a\rangle_{AB}$ هو :

$${}_{AB} \langle \phi_a | \rho_{AB} | \phi_a \rangle_{AB} = {}_A \langle \tilde{\psi}_a | \rho_A | \tilde{\psi}_a \rangle_A \equiv tr(F_a \rho_A) \quad (53. III)$$

وهكذا فقد كان اختيار الفضاء H_B ومؤثر الكثافة ρ_B والأساس الذي تم عليه القياس المتعامد في H_{AB} مناسباً للحصول على الـ POVM $\{F_a\}$ المطلوبة في الفضاء H_A .
مؤثر الكثافة ρ_A يتغير بعد عملية القياس المتعامد لأشعة الأساس $\{|\phi_a\rangle_{AB}\}$ التي مسقطاتها $\{E_a\}$ إلى المؤثر :

$$\begin{aligned} \rho'_A &= \sum_{a=1}^n tr_B(E_a \rho_A \otimes \rho_B E_a) \\ &= \sum_{a=1, \mu=0}^n {}_B \langle \mu | (|\phi_a\rangle_{AB} {}_{AB} \langle \phi_a| \rho_A \otimes |0\rangle_B \langle 0| {}_{AB} \langle \phi_a|) | \mu \rangle_B \\ &= \sum_{a=1, \mu=0}^n {}_B \langle \mu | \phi_a \rangle_{AB} {}_A \langle \tilde{\psi}_a | \rho_A | \tilde{\psi}_a \rangle_A {}_{AB} \langle \phi_a | \mu \rangle_B \\ &= \sum_{a=1} |\tilde{\psi}_a\rangle_A \langle \tilde{\psi}_a| \rho_A | \tilde{\psi}_a\rangle_A \langle \tilde{\psi}_a| + \sum_{a, \mu=1} |\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle_A \langle \tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp| {}_A \langle \tilde{\psi}_a | \rho_A | \tilde{\psi}_a \rangle_A \langle \tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp| \quad (54. III) \end{aligned}$$

واضح أن مؤثر الكثافة الجديد ρ'_A لا يتعلق بعناصر POVM فقط، بل يتعلق أيضا ببقية مركبات الأشعة $\{|\phi_a\rangle_{AB}\}$ من المجموعة $\{|\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle_A\}$:

$$\rho'_A = \sum_a F_a \rho_A F_a + \sum_{a,\mu=1} |\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle_{AA} \langle \tilde{\psi}_a | \rho_A | \tilde{\psi}_a \rangle_{AA} \langle \tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp| \quad (55. III)$$

العبرة الأخيرة لـ ρ'_A مختلفة تماما عن العبرة التي تم الحصول عليها لـ ρ'_A في الحالة التي كان فيها للفضاء الكلي بنية الجمع المباشر (العبرة (12.III))، وهذا يظهر أن اختيار الفضاء الموسع يؤثر على الشكل النهائي لمؤثر الكثافة للنظام رغم أن الـ POVM هو نفسه في كلتا الحالتين، لكن هذا لا يطرح إشكالا كبيرا خاصة وأن الاحتمالات $P(a)$ متماثلة، لأن الاهتمام غالبا ما يكون باحتمالات القياس ونتائجها لا بالحالة التي صار عليها النظام بعد عملية القياس، خاصة وأن معظم عمليات القياس تقوم بإفناء النظام المقاس [20,24].

نعود الآن للحالة العامة من أجل تعميم النتائج المتحصل عليها، في الحالة التي لا يكون فيها عدد عناصر الـ POVM من مضاعفات N بعد الفضاء H_A فإن n يمكن كتابتها من الشكل $n = r \cdot N - C$ أين $0 < C < N$ ، في هذه الحالة لا يمكن أن تكون n هي بعد فضاء الجداء التتسوري لأنها ليست من مضاعفات N لذا نختار أن يكون بعد الفضاء H_{AB} هو $r \cdot N$ ثم نتبع نفس الخطوات السابقة، الفرق هنا هو أن نظرية Neumark تزودنا بـ n شعاع $|U_a\rangle$ له n مركبة لأن هذه الأشعة تعيش في الفضاء الذي بعده n ما يعني أن هذه الأشعة لا يمكن أن تكون أساسا لـ H_{AB} ، مع ذلك مازال بإمكاننا الاستفادة من هذه الأشعة، تكمن الحيلة في نقل هذه الأشعة إلى الفضاء H_{AB} وذلك بتزويدها بـ C مركبة إضافية معدومة والتي نختارها لتكون الـ C مركبة الأخيرة من الشعاع $|\tilde{\psi}_{r-1,a}^\perp\rangle_A$ ، تحافظ هذه الأشعة $\{|U_a\rangle\}$ على تعامدها وتنظيمها في الفضاء H_{AB} لكنها مازالت لا ترقى لأن تكون أساسا له لأن عددها أقل من بعد الفضاء H_{AB} لذا نزود هذه المجموعة بـ C شعاع إضافي من الشكل :

$$|e_i\rangle_A |r-1\rangle_B ; i = N - C + 1, \dots, N \quad (56. III)$$

أين $|e_i\rangle_A$ هو الشعاع الذي كل مركباته معدومة ماعدا المركبة i التي تأخذ القيمة واحد، ما يضمن أن تكون هذه الأشعة متعامدة مع $|\tilde{\psi}_{r-1,a}^\perp\rangle_A$ وبالتالي مع كامل الأشعة $|U_a\rangle$ ، بإضافة هذه الأشعة تصبح المجموعة $\{|U_a\rangle\}$ هي الأساس المناسب الذي عند إجراء عملية القياس المتعامد عليه في H_{AB} نتحصل على POVM في الفضاء الجزئي H_A . لاحظ أن احتمال قياس أحد هذه الأشعة الإضافية $\{|e_i\rangle_A |r-1\rangle_B\}$ من أجل حالة النظام المعرفة سابقا $|0\rangle_B \otimes \rho_A |0\rangle_B$ معدوم، وكذلك المؤثرات F_a الناتجة عن أخذ الأثر الجزئي بالنسبة لها وبهذا تتم المحافظة على عدد عناصر الـ POVM دون تغيير أو زيادة.

■ مثال

لتوضيح الطريقة التي يتم فيها اختيار الفضاء H_B والمسقطات $\{E_a\}$ ومصفوفة الكثافة ρ_B بشكل عملي، نأخذ POVM بت كمي وحيد [20] :

$$F_a = \frac{2}{3} |\uparrow_{\vec{n}_a}\rangle \langle \uparrow_{\vec{n}_a}| , \quad a = 1,2,3 \quad (57. III)$$

وهو ذات الـ POVM الذي تمت معالجته سابقا في مثال حول نظرية Neumark، أين تم تحديد الأشعة $\{\sqrt{2/3} |\uparrow_{\vec{n}_a}\rangle\}$ بالعلاقات (33.III) أما الأشعة $\{|U_a\rangle\}$ فقد تم حسابها وتحديدها بالعلاقات (35.III).

عدد عناصر هذه الـ POVM هو ثلاثة لذا فإن بعد فضاء الجداء التتسوري H_{AB} هو 4 ويجب إضافة مركبة أخرى (معدومة) إلى الأشعة $\{|U_a\rangle\}$ ، وبالتالي بعد الفضاء H_B هو اثنان ما يعني أن تحقيق هذه الـ POVM يتم بعملية قياس متعامد على نظام مكون من اثنين من البت الكمي. أشعة الأساس التي يجب أن تجرى عليها عملية القياس المتعامد في فضاء الجداء التتسوري من أجل الحصول على الـ POVM المطلوبة هو حسب العلاقة (51.III) - وباستخدام العلاقات (35.III) - :

$$|\phi_1\rangle_{AB} = \sqrt{\frac{2}{3}} |\uparrow_{\vec{n}_1}\rangle_A |0\rangle_B + \left(\sqrt{\frac{1}{3}} |0\rangle_A + 0 |1\rangle_A \right) |1\rangle_B \quad (58. III)$$

$$|\phi_2\rangle_{AB} = \sqrt{\frac{2}{3}} |\uparrow_{\vec{n}_2}\rangle_A |0\rangle_B - \sqrt{\frac{1}{3}} |0\rangle_A |1\rangle_B \quad (59. III)$$

$$|\phi_3\rangle_{AB} = \sqrt{\frac{2}{3}} |\uparrow_{\vec{n}_3}\rangle_A |0\rangle_B + \sqrt{\frac{1}{3}} |0\rangle_A |1\rangle_B \quad (60. III)$$

أما الشعاع الإضافي فهو حسب العلاقة (56.III) :

$$|\phi_4\rangle_{AB} = |1\rangle_A |1\rangle_B \quad (61. III)$$

مؤثر الكثافة الابتدائي للحالة الكلية هو $|0\rangle_B \langle 0| \otimes \rho_A$ ومن السهل التأكد من أن هذا الاختيار يحافظ على قيم الاحتمال التي تعطيها الـ POVM :

$${}_{AB} \langle \phi_a | \rho_{AB} | \phi_a \rangle_{AB} = \frac{2}{3} {}_A \langle \uparrow_{\vec{n}_a} | \rho_A | \uparrow_{\vec{n}_a} \rangle_A = tr(F_A \rho_A) \quad (62. III)$$

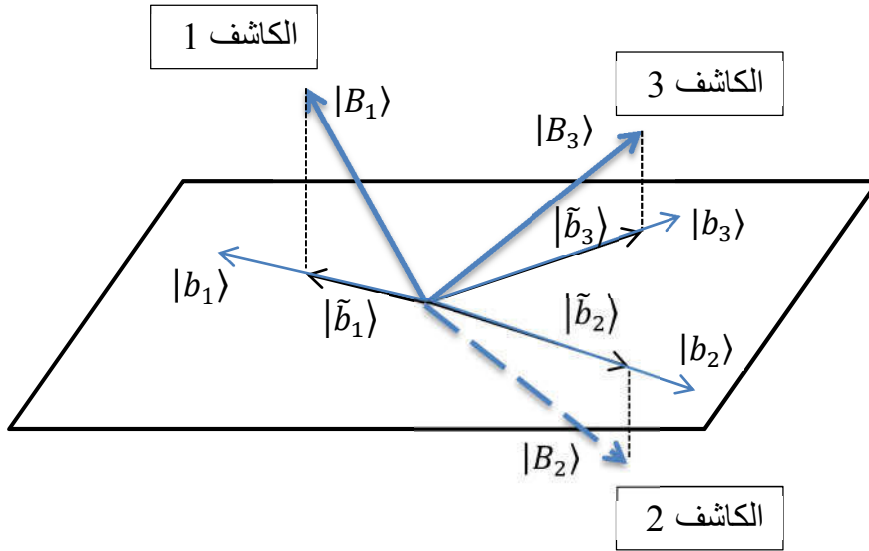
III-2-3- دور الـ POVM و الهدف منها

تعمل الـ POVM كنوع من القياس المعمم، مع ذلك من الممكن وصفها بعملية قياس متعامد على نظام أكبر حسب نظرية Neumark. الفضاء الموسع قد تكون له بنية الجداء التتسوري أو الجمع المباشر، رغم أن هذا الأخير من الصعب تنفيذه عمليا. فائدة الـ POVM تكمن في الخيارات الجديدة التي تطرحها والتي لا تستطيع أي عملية قياس متعامد أن تحققها، وهذا نتيجة للقيود الذي يقع من عملية القياس المتعامد عند قياس الـ POVM ألا وهو شرط التعامد. عموما يكون قياس الـ POVM مفيدا من أجل تمييز الحالات النقية أو وصف تطور حالة الأنظمة الجزئية إذا خضع النظام الكلي لعملية قياس متعامد وهو الجانب الذي يهتما من عملية قياس الـ POVM، إذ أنها تمنح وصفا لحالة الأنظمة المتشابكة (كلا على حدى) بعد عملية قياس متعامد للنظام الكلي، لذلك سيكون من المفيد توضيح جوانب إضافية عن عملية قياس الـ POVM .

تنفيذ عملية قياس الـ POVM على نظام معين يمكن أن يتم بتطبيق عملية قياس متعامد على فضاء أوسع، لكن يجب أولا تحديد النظام الموسع الذي ستنتم فيه عملية القياس المتعامد والأساس الذي سيتم قياسه في الفضاء الموسع والذي يؤدي إلى الـ POVM المقصودة، ما يعني تحديد الملاحظ A الذي سيتم قياسه للنظام الكلي. ما يقوم به جهاز القياس هو تحديد قيمة المؤثر A للنظام الموسع المقاس والتي تكون أحد القيم الذاتية $\{a_k\}$ لهذا المؤثر ويمكن تخيل هذه العملية -ولو تمثيليا فقط- بوضع مجموعة من الكواشف يقوم كل منها بالكشف عن شعاع معين من الأشعة الذاتية للمؤثر A وعند الحصول على نتيجة a_k في كاشف معين تنهار حالة النظام الكلي إلى الشعاع الذاتي المقاس $|a_k\rangle$ الموافق للقيمة الذاتية a_k . الشكل (III-1) يمثل تصورا لكيفية انبثاق الـ POVM في فضاء ثنائي -فضاء البت الكمي- نتيجة لقياس متعامد في فضاء ثلاثي البعد.

من الضروري هنا التشديد على أن نتائج قياس الـ POVM ليست قيما ذاتية لملاحظ في النظام الجزئي ولا الأشعة التي يمكن أن تصير عليها حالة النظام الجزئي هي كلها أشعة ذاتية لملاحظ في الفضاء الجزئي والشكل (III-1) يوضح هذه الفكرة جيدا، فالكواشف تقوم بالكشف على أشعة النظام الموسع لا على أشعة النظام الجزئي، فلا توجد عملية ممكنة في الفضاء الجزئي تسمح بقياس الأشعة الثلاثة $\{|b_k\rangle\}$ معا لأن أقصى ما يمكن قياسه في ذلك الفضاء هو شعاعان متعامدان بواسطة عملية القياس المتعامد المعتادة، ولهذا كان الانتقال إلى الفضاء الموسع ضروريا من أجل تنفيذ عملية قياس الـ POVM. قد يطرح السؤال الآن لماذا قد تكون عملية الـ POVM مهمة إذا أو ذات أي أهمية أصلا، فالمعلومات التي تعطيها عن النظام

ليست فيزيائية بالنسبة للنظام الجزئي وحتى الاحتمالات التي تعرفها تعبر عن احتمال العثور قيمة ذاتية معينة في النظام الموسع لا الجزئي؟ حسناً، الإجابات هنا متعددة فغالبا ما تكون الـ POVM وسيلة وليست غاية بمعنى أنها تستخدم لتخدم هدفاً معيناً لا من أجل قياس الـ POVM فقط، ولعل من أهم غاياتها هو تمييز الحالة النقية والتعرف عليها، خاصة إن كانت الحالات الممكنة للنظام غير متعامدة فيما بينها مثلما حدث في المثال الذي أخذ سابقاً، والأبحاث في مجال تمييز الحالة النقية أثبتت أن الـ POVM هي أفضل عملية قياس يمكن استخدامها للتفريق بين الحالات النقية غير المتعامدة، حيث عند اختيارها بشكل مناسب تكون نسبة الفشل في تحديد الحالة النقية أقل من أي عملية قياس متعامد أو حتى سلسلة من القياسات المتعامدة لذات النظام [40].



الشكل (1-III) : طريقة لتنفيذ الـ POVM ذات الثلاث عناصر $\{|b_k\rangle\langle b_k|\}$ بواسطة قياس متعامد للأشعة $\{|B_k\rangle\}$ في فضاء ثلاثي البعد.

III-3- المؤثرات الفائقة وتمثيل كراوس

(Superoperators and Kraus representation)

قدمت الـ POVM الطريقة التي يمكن بها تحديد تأثير عملية القياس المعمم على الأنظمة المفتوحة، الفكرة الأساسية كانت في اعتبار أن النظام المفتوح هو جزء من نظام أكبر مغلق، بحيث يمكن تطبيق القوانين والمسلمات المعروفة لميكانيك الكم في النظام الموسع ثم الانتقال بعد ذلك إلى النظام الجزئي بتغيير المتغيرات الإضافية عن النظام الأصلي. الهدف الآن هو تحديد تأثير تطور واحدي لحالة النظام الكلي على حالة نظام جزئي منه، أي كيف تتطور حالة النظام الجزئي إذا خضعت حالة النظام الكلي لتأثير مؤثر واحدي؟

من الطبيعي التفكير بأن تطور حالة النظام الجزئي A لن يكون واحديا بالضرورة، لتأكيد هذا الحدس نفترض أن النظام الكلي يمر بتطور واحدي ناتج عن تأثير المؤثر الواحد U ، يتشكل النظام الكلي من النظام A ونظام آخر سندعوه بالمحيط والذي يعبر عن محيط النظام A ، حالة النظام الكلي يتم تحضيرها لتكون في الحالة $|0\rangle_E \langle 0| \otimes \rho_A$ ثم يقوم U بعد ذلك بالتأثير عليها :

$$U : \rho_A \otimes |0\rangle_E \langle 0| \rightarrow U(\rho_A \otimes |0\rangle_E \langle 0|)U^\dagger \quad (63. III)$$

مصفوفة الكثافة لـ A بعد عملية التطور الواحدي نحصل عليها بأخذ الأثر الجزئي لمصفوفة الكثافة الكلية بالنسبة للمحيط :

$$\rho'_A = tr_E(U(\rho_A \otimes |0\rangle_E \langle 0|)U^\dagger) = \sum_{\mu} \langle \mu|U(\rho_A \otimes |0\rangle_E \langle 0|)U^\dagger|\mu\rangle_E \quad (64. III)$$

وبالتالي

$$\rho'_A = \sum_{\mu} \langle \mu|U|0\rangle_E \rho_{AE} \langle 0|U^\dagger|\mu\rangle_E \quad (65. III)$$

أين $\{|\mu\rangle_E\}$ هو أساس متعامد ومتجانس لفضاء هيلبرت للمحيط H_E . المؤثر $\langle \mu|U|0\rangle_E$ يؤثر فقط على فضاء هيلبرت للنظام A ، إذا اصطلحنا عليه بالرمز :

$$M_{\mu} = \langle \mu|U|0\rangle_E \quad (66. III)$$

فإن مصفوفة الكثافة ρ'_A تُكتب بواسطته كالتالي :

$$\rho'_A = \sum_{\mu} M_{\mu} \rho_A M_{\mu}^{\dagger} \quad (67. III)$$

نتيجة لواحدية المؤثر U ، فإن المؤثرات $\{M_{\mu}\}$ تحقق علاقة التمام الآتية :

$$\sum_{\mu} M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu} = \sum_{\mu} {}_E \langle 0|U^{\dagger}|\mu\rangle_E \langle \mu|U|0\rangle_E = {}_E \langle 0|U^{\dagger}U|0\rangle_E = I_A \quad (68. III)$$

إذا انطلقا من المعادلة (67.III) يمكن تعريف التطبيق الخطي التالي :

$$K : \rho_A \rightarrow \rho'_A = \sum_{\mu} M_{\mu} \rho_A M_{\mu}^{\dagger} \quad (69. III)$$

إذا كانت مجموعة المؤثرات $\{M_{\mu}\}$ تحقق الخاصية (68.III) فإن التطبيق الخطي K يدعى بـ'المؤثر الفائق'، والمعادلة (69.III) تعبر عن 'تمثيل Kraus' لهذا المؤثر الفائق ويدعى أيضا بتمثيل المجموع للمؤثر (operator sum representation)، أما المؤثرات $\{M_{\mu}\}$ فتدعى بمؤثرات Kraus. يعطي المؤثر الفائق مؤثر كثافة النظام بعد عملية تطور واحدة على مستوى النظام الكلي دون توضيح خصائص ومتغيرات المحيط صراحة، حيث أن تأثير المحيط متضمن في مؤثرات Kraus [37,42,43]. يجدر التنويه إلى أن تمثيل Kraus للمؤثر الفائق ليس وحيدا، وهذا ناتج عن حرية اختيار أساس الفضاء H_E الذي يتم أخذ الأثر الجزئي بالنسبة له (تذكر أن شكل مؤثرات Kraus يعتمد على الأساس المختار $(M_{\mu} = {}_E \langle \mu|U|0\rangle_E)$ ، لكن من الممكن إثبات أن مؤثرات Kraus لتمثيلي Kraus مختلفين لنفس المؤثر الفائق يرتبطان بالعلاقة $N_{\vartheta} = \sum_{\mu} V_{\vartheta\mu} M_{\mu}$ ، حيث V هو مؤثر واحد يعمل في H_E :

$$\rho'_A = \sum_{\vartheta} N_{\vartheta} \rho_A N_{\vartheta}^{\dagger} \quad (70. III)$$

أما العلاقة بين أساس H_E اللذين تم أخذ الأثر الجزئي بالنسبة لهما فهي : $|\vartheta\rangle_E = \sum_{\mu} V_{\vartheta\mu}^* |\mu\rangle_E$

III-3-1- خصائص المؤثرات الفائقة

إن تأثير المؤثر الفائق على مؤثر كثافة يعطي دوما مؤثر كثافة نتيجة الخصائص التالية التي يتميز بها المؤثر الفائق [43] :

1- عندما يؤثر على مؤثر هرميتي فإن المؤثر الناتج يكون هرميتيا :

$$\rho_A^{\dagger} = \sum_{\mu} (M_{\mu} \rho_A M_{\mu}^{\dagger})^{\dagger} = \sum_{\mu} M_{\mu} \rho_A^{\dagger} M_{\mu}^{\dagger} = \rho'_A \quad (71. III)$$

2- يحافظ على الأثر :

$$tr(\rho'_A) = \sum_{\mu} tr(M_{\mu}\rho_A M_{\mu}^{\dagger}) = tr\left(\sum_{\mu} \rho_A M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu}\right) = tr(\rho_A) = 1 \quad (72. III)$$

3- عند تأثيره على مؤثر موجب فإن الناتج هو مؤثر موجب أيضا :

$$\langle \psi | \rho'_A | \psi \rangle = \sum_{\mu} \langle \psi | M_{\mu} \rho_A M_{\mu}^{\dagger} | \psi \rangle \geq 0 \quad (73. III)$$

III-3-2- التمثيل الواحدي للمؤثر الفائق

سبق وأوضحنا أن كل تطور واحد لنظام مركب ثنائي ينتج عنه تمثيل Kraus للمؤثر في النظام الجزئي، من الممكن أيضا إثبات العكس أي أن كل تمثيل Kraus لمؤثر فائق لنظام معين هو ناتج عن تطور واحد في نظام موسع يشمل النظام الأول.

إذا كان لدينا تمثيل Kraus لمؤثر فائق معين، نفترض أن هناك نظاما آخر B أساسه $\{|\mu\rangle_B\}$ وبعده مساو لعدد مؤثرات Kraus ثم نعرف مؤثرا U يعمل على الحالات $\{|\psi\rangle_A | 0\rangle_B\}$ كالتالي :

$$U|\psi\rangle_A | 0\rangle_B = \sum_{\mu} M_{\mu} |\psi\rangle_A |\mu\rangle_B \quad (74. III)$$

أين $\{M_{\mu}\}$ هي مؤثرات Kraus للمؤثر الفائق. المؤثر U يحفظ الجداء الداخلي نتيجة خاصية التمام (68.III) التي تحققها مؤثرات Kraus :

$$\begin{aligned} {}_A\langle \varphi | {}_B\langle 0 | U^{\dagger} U | \psi \rangle_A | 0 \rangle_B &= \sum_{\mu, \vartheta} {}_A\langle \varphi | {}_B\langle \vartheta | M_{\vartheta}^{\dagger} M_{\mu} | \psi \rangle_A |\mu\rangle_B \\ &= {}_A\langle \varphi | \sum_{\mu} M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu} | \psi \rangle_A = {}_A\langle \varphi | \psi \rangle_A \end{aligned} \quad (75. III)$$

حفظ الجداء الداخلي هو خاصية للمؤثرات الواحديّة لذا يمكن تمديد تأثير U ليعمل على كامل الفضاء $H_A \otimes H_B$ ، ومن السهل التحقق من أن U هو فعلا مؤثر التطور الذي يؤدي إلى تمثيل Kraus :

$$\begin{aligned} tr_B(U \rho_A \otimes |0\rangle_B \langle 0| U^{\dagger}) &= \sum_{\mu, \vartheta, \theta} {}_B\langle \mu | (M_{\vartheta} \rho_A \otimes |\vartheta\rangle_B \langle \theta| M_{\theta}^{\dagger}) | \mu \rangle_B \\ &= \sum_{\mu} M_{\mu} \rho_A M_{\mu}^{\dagger} \end{aligned} \quad (76. III)$$

وهو المطلوب، إذًا يمكن استخراج مؤثر التطور للنظام الكلي انطلاقًا من تمثيل Kraus [20,43,44].

III-3-3- المؤثرات الفائقة والمؤثرات الواحدية

تصف المؤثرات الفائقة عملية تطور واحدية للنظام الكلي على نظام جزئي، لذا يمكن اعتبار المؤثرات الواحدية حالة خاصة من المؤثرات الفائقة عندما يمتد النظام الجزئي ليحتل كامل النظام الذي تجري عليه عملية التطور الواحدية، وهو ما يبرر التشابه بين المؤثرات الفائقة والواحدية في بعض الخصائص رغم اختلافهما في خصائص أخرى. فعلى سبيل المثال إن كان هناك مؤثران فائقان K_1 و K_2 فإن تركيب هذين المؤثرين الفائقين $K = K_1 \circ K_2$ هو مؤثر فائق آخر يعرف بـ $K = K_1(K_2)$ ، وهي بهذا تماثل المؤثرات الواحدية في هذه الخاصية إذ أن تركيب مؤثرين واحديين هو مؤثر واحد أيضًا.

على صعيد آخر، لا يكون مقلوب مؤثر فائق مؤثرًا فائقًا سوى في الحالة التي يكون فيها المؤثر الفائق واحديًا أيضًا، وهذه نقطة اختلاف جوهرية بين المؤثرات الفائقة والمؤثرات الواحدية، وتحمل في طياتها معنى فيزيائيا دقيقا ومهما، فإن كانت حالة النظام الجزئي معروفة فإن هذه المعرفة غير كافية لتعطي معلومات عن حالة النظام قبل عملية التطور، أي أن هناك خسارة غير عكوسة للمعلومات على مستوى النظام إثر عملية التطور إن تم تجاهل حالة المحيط. هذه الظاهرة تعرف بفك التماسق (decoherence) أي الانتقال من حالة نقية إلى حالة مختلطة، هذا الانتقال يسمح المعرفة بالطور النسبي بين الحالات. تظهر أهمية مفهوم فك التماسق بشكل قوي في الحالات الماكروسكوبية، فهي توضح سبب عدم تواجد الاجسام الماكروسكوبية في حالة تراكب، فكما سنرى لاحقا يكون فك التماسق سريعا في هذه الحالات [43].

نعود الآن لخاصية قلب المؤثرات الفائقة. لإثبات أن واحدية المؤثر الفائق شرط ضروري حتى يكون قابلا للقلب يكفي أن نثبت أنه إذا كان هناك مؤثر فائق M مقلوبه هو مؤثر فائق آخر N ، فلا بد أن يكون المؤثر N هو المرافق الهرميتي للمؤثر الفائق M .

لإثبات هذا الخاصية نستغل تمثيل Kraus للمؤثرات الفائقة، تأثير M على الحالة النقية $|\psi\rangle\langle\psi|$ حسب تمثيل Kraus يعطى بـ :

$$M(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{\mu} M_{\mu}|\psi\rangle\langle\psi|M_{\mu}^{\dagger} \quad (77. III)$$

بما أن المؤثر الفائق N هو مقلوب المؤثر الفائق M فإن :

$$N(M(|\psi\rangle\langle\psi|)) = \sum_{a,\mu} N_a M_{\mu}|\psi\rangle\langle\psi|M_{\mu}^{\dagger} N_a^{\dagger} = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (78. III)$$

أين $\{M_\mu\}$ و $\{N_a\}$ هي مؤثرات Kraus للمؤثرين الفائقين M و N على التوالي. نختار أساساً للفضاء يكون الشعاع $|\psi\rangle$ هو أحد أشعته، نسمي هذا الأساس بـ $\{|\varphi_j\rangle\}$ أين $|\psi\rangle \equiv |\varphi_i\rangle$. انطلاقاً من العلاقة السابقة نجد أن :

$$\sum_{a,\mu} \langle \varphi_j | N_a M_\mu | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | M_\mu^\dagger N_a^\dagger | \varphi_j \rangle = \sum_{a,\mu} |\langle \varphi_j | N_a M_\mu | \varphi_i \rangle|^2 = \delta_{ij} \quad (79. III)$$

المجموع السابق هو مجموع أعداد موجبة ولا يمكن أن يكون معدوماً إلا إذا كان كل حد من المجموع معدوماً، ما يعني أن $\langle \varphi_j | N_a M_\mu | \varphi_i \rangle = 0$ لما $(i \neq j)$ ، وبما أن الشعاع $|\psi\rangle$ يمكن أن يكون أي شعاع من فضاء هيلبرت، فإن ما نستنتجه هو أن المصفوفات الممثلة للمؤثرات $\{N_a M_\mu\}$ هي مصفوفات قطرية، فكل عناصرها المصفوفية غير القطرية معدومة، ليس هذا وحسب بل هي قطرية في أي أساس ممكن لفضاء هيلبرت.

المصفوفات $\{N_a M_\mu\}$ قطرية في أي أساس يعني أنها تتبادل مع أي مُسقط E_k على فضاء هيلبرت (وبالتالي مع أي تركيبة خطية من المُسقطات)، ذلك أنه يمكن دوماً كتابتها من الشكل :

$$N_a M_\mu = \sum_i \alpha_i E_i \quad (80. III)$$

أين مجموعة المؤثرات $\{E_i\}$ تمثل مُسقطات أشعة أساس ما حيث $\sum_i E_i = I$ ، أما $\{\alpha_i\}$ فهي مجموعة أعداد مركبة. يمكن بسهولة استخدام العلاقة الأخيرة لإثبات أن $[N_a M_\mu, E_k] = 0$ ، وعلاقة التبادل الأخيرة هذه كافية لإثبات أن المؤثر $N_a M_\mu$ متناسب مع مؤثر الوحدة I ، فبشكل عام يمكن كتابة المصفوفة (المربعة) الممثلة لأي مؤثر T من الشكل [45] :

$$T = A + iB \quad (81. III)$$

المؤثر T ليس هرميتياً بالضرورة لكن المؤثرين A و B هرميتيان (في الحقيقة $A = \frac{1}{2}(T + T^\dagger)$ و $B = \frac{-i}{2}(T - T^\dagger)$)، وهو ما يعني أنه يمكن كتابة كل منهما بدلالة مُسقطات أشعتهما الذاتية حسب نظرية التحليل الطيفي، وبالتالي يمكن كتابة أي مؤثر T يعمل على فضاء هيلبرت بواسطة مجموعة من المسقطات. وعليه يكون المؤثر $N_a M_\mu$ متبادلاً مع جميع المؤثرات التي تعمل في فضاء هيلبرت لأنه متبادل مع جميع المسقطات على نفس الفضاء، إذ لا بد من أن يكون :

$$N_a M_\mu = \lambda_{a\mu} I \quad (82. III)$$

أين $\lambda_{a\mu}$ هو مجرد عدد مركب.

المؤثر M^\dagger هو المرافق الهرميتي للمؤثر الفائق M ، تأثيره على مسقط الحالة النقية $|\psi\rangle\langle\psi|$ يعطى بـ :

$$M^\dagger(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{\mu} M_{\mu}^{\dagger}|\psi\rangle\langle\psi|M_{\mu} \quad (83. III)$$

ومنه

$$M^\dagger(M(|\psi\rangle\langle\psi|)) = \sum_{\vartheta, \mu} M_{\vartheta}^{\dagger}M_{\mu}|\psi\rangle\langle\psi|M_{\mu}^{\dagger}M_{\vartheta} \quad (84. III)$$

إن المؤثرات $\{M_{\vartheta}^{\dagger}M_{\mu}\}$ تتناسب بدورها مع مؤثر الوحدة I ، وهذا نتيجة للمعادلة (82.III) وعلاقة التنظيم التي تخضع لها مؤثرات Kraus $\{N_a\}$ ، حيث أن :

$$M_{\vartheta}^{\dagger}M_{\mu} = \sum_a M_{\vartheta}^{\dagger}N_a^{\dagger}N_aM_{\mu} = \sum_a \lambda_{a\vartheta}^*\lambda_{a\mu} I \equiv \beta_{\vartheta\mu} I \quad (85. III)$$

ما يعني أن :

$$M^\dagger(M(|\psi\rangle\langle\psi|)) = \sum_{\vartheta, \mu} M_{\vartheta}^{\dagger}M_{\mu}M_{\mu}^{\dagger}M_{\vartheta}|\psi\rangle\langle\psi| \quad (86. III)$$

من خلال المعادلة (85.III) نجد أن $M_{\mu}^{\dagger}M_{\mu} = \beta_{\mu\mu}I$ أين $\beta_{\mu\mu}$ هو عدد موجب حسب تعريفه بنفس

العلاقة، وبالتالي فإن المؤثر $\frac{M_{\mu}^{\dagger}}{\sqrt{\beta_{\mu\mu}}}$ هو مقلوب المؤثر $\frac{M_{\mu}}{\sqrt{\beta_{\mu\mu}}}$ ، وعليه فإن :

$$\frac{M_{\mu}^{\dagger}}{\sqrt{\beta_{\mu\mu}}} \cdot \frac{M_{\mu}}{\sqrt{\beta_{\mu\mu}}} = \frac{M_{\mu}}{\sqrt{\beta_{\mu\mu}}} \cdot \frac{M_{\mu}^{\dagger}}{\sqrt{\beta_{\mu\mu}}} = I \quad (87. III)$$

إدًا

$$\sum_{\mu} M_{\mu}^{\dagger}M_{\mu} = \sum_{\mu} M_{\mu}M_{\mu}^{\dagger} = I \quad (88. III)$$

ما يعني أن تركيب المؤثرين $M^\dagger \circ M$ ما هو إلا مؤثر الوحدة I :

$$M^\dagger(M(|\psi\rangle\langle\psi|)) = \sum_{\vartheta} M_{\vartheta}^{\dagger} \left(\sum_{\mu} M_{\mu}M_{\mu}^{\dagger} \right) M_{\vartheta}|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (89. III)$$

وبهذا نكون قد وصلنا للنتيجة المطلوبة، لا يكون مقلوب أي مؤثر فائق M مؤثرًا فائقًا آخر N إلا في الحالة التي يكون المؤثر الفائق M واحدًا.

III-3-4- نظرية تمثيل كراوس (Kraus Representation Theorem)

كل مؤثر فائق لديه تمثيل Kraus الخاص به الذي يمكن من خلاله إيجاد تمثيله الواحد الذي يعبر بشكل أوضح عن عملية التطور الواحدية التي تتم في الفضاء الموسع، لكن تحت أي ظروف يمكن لمؤثر ما أن يملك تمثيل Kraus؟ أي ما هي الخصائص الواجب على مؤثر معين أن يمتلكها حتى يكون مؤثرا فائقا؟

نظرية تمثيل Kraus

أي تطبيق $\rho_1 \rightarrow \rho'_1$: K في بالمطلبات التالية

$$1- \text{خطي : أي أن } K(a\rho_1 + b\rho_2) = aK(\rho_1) + bK(\rho_2)$$

2- يحفظ الهرميتية .

3- يحفظ الأثر .

4- موجب تماما .

يمكن أن يكتب على الشكل :

$$K(\rho_1) = \sum_{\mu} M_{\mu} \rho_1 M_{\mu}^{\dagger} , \quad \sum_{\mu} M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu} = I_1 \quad (90. III)$$

أن يكون K موجبا تماما يعني أن $K \otimes I_E$ هو مؤثر موجب مهما كان الفضاء الموسع المختار. الإيجابية التامة شرط أقوى من شرط الإيجابية وضرورة استيفاء هذه الخاصية له دافع فيزيائي، فلو حدث تطور واحد لنظام مكون من نظامين جزئيين A و B وكان هناك نظام آخر C لا يتفاعل مع النظام AB وغير متشابك معه، ولم تتطور حالته خلال تلك العملية فمن البديهي أن نطلب من المؤثر الفائق لـ A أن يكون موجبا على الفضاء الثلاثي، أي أن يحقق شرط الإيجابية التامة حتى يكون مؤثر الكثافة الذي ينتجه موجبا تحت هذه الظروف [22,43].

إن الخصائص التي اشتراطتها نظرية تمثيل Kraus وهي أن يكون التطبيق K موجبا وهرميتيا ويحافظ على الأثر ضرورية حتى ينقل هذا التطبيق مصفوفة الكثافة الابتدائية إلى مؤثر آخر هو أيضا مصفوفة كثافة، لكن بالإضافة إلى هذه الشروط الثلاثة اشتراطت النظرية خاصية أخرى، وهو أن يكون هذا المؤثر خطيا

أيضا، ولكن لماذا يجب على التطبيق K أن يكون خطيا؟ خاصة وأن هذه الخاصية ليست بغرض المحافظة على خصائص مؤثر الكثافة.

في الحقيقة لا توجد إجابة مقنعة تماما لهذا التساؤل، لكن يمكن القول بأن عدم تمتع هذا المؤثر بخاصية الخطية يفضي إلى نتائج غير متوقعة وغريبة وأحيانا متناقضة، أحدها أن غياب الخطية عن المؤثر K يُضيق تفسير المجموعة لمؤثر الكثافة، فإذا كان :

$$K(\rho(\lambda)) = K(\lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2) = \lambda K(\rho_1) + (1 - \lambda)K(\rho_2) \quad (91. III)$$

فإن مؤثر التطور K متوافق في هذه الحالة مع تفسير المجموعة، فهناك احتمال λ لتحضير الحالة الابتدائية ρ_1 والتي تتطور إلى الحالة $K(\rho_1)$ بذات الاحتمال، وهناك احتمال $(1 - \lambda)$ لتحضير الحالة ρ_2 في البداية والتي تتطور إلى الحالة $K(\rho_2)$ بنفس الاحتمال، أما إن اعتبرنا أن المؤثر K غير خطي فلا يمكن فهم مؤثر الكثافة الناتج في ظل تفسير المجموعة، إذ أن الحالة الناتجة حينها لن تتعلق بشكل واضح وخطي بالحالات الابتدائية [20,22].

لإثبات نظرية تمثيل Kraus نستخدم 'طريقة الحالة النسبية' (relative-state method)، تقوم هذه الطريقة بتحديد تأثير مؤثر ما M_A يعمل في فضاء هيلبرت H_A على أي حالة في هذا الفضاء، إذا ما تم تحديد تأثير هذا المؤثر على الحالة النقية ذات التشابك الأقصى من الفضاء $H_A \otimes H_B$ ، على شرط أن يكون $(\dim H_A = N \leq \dim H_B)$. الحالات ذات التشابك الأقصى في $H_A \otimes H_B$ هي من الشكل :

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N |i\rangle_A \otimes |i'\rangle_B \Rightarrow |\tilde{\psi}\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^N |i\rangle_A \otimes |i'\rangle_B \quad (92. III)$$

حيث $\{|i\rangle_A\}$ و $\{|i'\rangle_B\}$ هما أساسان متعامدان ومتجانسان لـ H_A و H_B على الترتيب. الحالة $|\psi\rangle_{AB}$ هي حالة تشابك قصوى، ذلك أن مصفوفة الكثافة المختزلة في H_A هي I_A/N (في الحقيقة تكون $|\psi\rangle_{AB}$ حالة تشابك قصوى إذا كان $\dim H_B = N$ حتى تكون $\rho_B = I_B/N$)، سنعود لتفصيل هذا الأمر في الفصل الأخير. الآن أي حالة $|\varphi\rangle_A$ من H_A يمكن الحصول عليها بالجاء الداخلي الجزئي التالي :

$$\langle \varphi^* | \tilde{\psi} \rangle_{AB} = |\varphi\rangle_A \quad (93. III)$$

حيث

$$|\varphi\rangle_A = \sum_{i=1}^N a_i |i\rangle_A \quad \& \quad |\varphi^*\rangle_B = \sum_{i=1}^N a_i^* |i'\rangle_B \quad (94. III)$$

تدعى $|\varphi\rangle_A$ بالحالة النسبية لـ $|\varphi^*\rangle_B$. إذا كان هناك أي مؤثر M_A يؤثر في H_A وأمكن تعيين تأثير $M_A \otimes I_B$ على الحالة $|\tilde{\psi}\rangle_{AB}$ بطريقة ما، فإنه من الممكن تحديد تأثير M_A على أي حالة $|\varphi\rangle_A$ من H_A :

$$\langle \varphi^* | M_A \otimes I_B | \tilde{\psi} \rangle_{AB} = M_A |\varphi\rangle_A \quad (95. III)$$

نعود الآن إلى التطبيق K المعرف في النظرية، إذا أثر $K \otimes I_B$ على مؤثر الكثافة (غير المنظم) $\rho_{AB} = |\tilde{\psi}\rangle_{AB} \langle \tilde{\psi}|_{AB}$ فإن المؤثر الناتج ρ'_{AB} هو مؤثر كثافة بالتأكيد (غير منظم أيضا) ينتمي إلى نفس الفضاء نتيجة مجموعة الخصائص من 1 إلى 4 التي يحققها K فنكتب :

$$K \otimes I_B (|\tilde{\psi}\rangle_{AB} \langle \tilde{\psi}|_{AB}) = \sum_{\mu} q_{\mu} |\tilde{\Phi}_{\mu}\rangle_{AB} \langle \tilde{\Phi}_{\mu}|_{AB} \quad (96. III)$$

حيث $\{q_{\mu}, |\tilde{\Phi}_{\mu}\rangle_{AB}\}$ هي واحدة من المجموعات التي تعبر عن مؤثر الكثافة ρ'_{AB} ، باستخدام طريقة الحالة النسبية نجد أن :

$$\begin{aligned} K(|\varphi\rangle_A \langle \varphi|) &= {}_B \langle \varphi^* | K \otimes I_B (|\tilde{\psi}\rangle_{AB} \langle \tilde{\psi}|_{AB}) | \varphi^* \rangle_B \\ &= \sum_{\mu} q_{\mu} {}_B \langle \varphi^* | \tilde{\Phi}_{\mu} \rangle_{AB} \langle \tilde{\Phi}_{\mu} | \varphi^* \rangle_B \end{aligned} \quad (97. III)$$

نعرف الآن المؤثرات $\{M_{\mu}\}$ حيث :

$$M_{\mu} |\varphi\rangle_A = q_{\mu} {}_B \langle \varphi^* | \tilde{\Phi}_{\mu} \rangle_{AB} \quad (98. III)$$

ويمكن التحقق من أن المؤثرات $\{M_{\mu}\}$ خطية وتحقق الخاصية :

$$\sum_{\mu} M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu} = I_A \quad (99. III)$$

وهذا نتيجة حفظ K للأثر، حيث :

$$\begin{aligned} tr_A(K(|\varphi\rangle_A \langle \varphi|)) &= tr_A \left(\sum_{\mu} M_{\mu} |\varphi\rangle_A \langle \varphi| M_{\mu}^{\dagger} \right) \\ &= tr_A \left(\sum_{\mu} |\varphi\rangle_A \langle \varphi| M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu} \right) = tr_A(|\varphi\rangle_A \langle \varphi|) \end{aligned}$$

ومنه

$$\sum_{\mu} M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu} = I_A \quad (100. III)$$

المؤثرات $\{M_{\mu}\}$ يمكن تشكيلها من أجل أي حالة $|\varphi\rangle_A$ من H_A وبما أن K خطية يمكن استنتاج تمثيل Kraus $\perp K$ من أجل أي مؤثر كثافة في H_A ، إذًا :

$$K(\rho_A) = \sum_{\mu} M_{\mu} \rho_A M_{\mu}^{\dagger} \quad (101. III)$$

وبهذا ينتهي إثبات نظرية Kraus [20].

III-3-5- الـ POVM والمؤثرات الفائقة

سبق وتم إثبات أن بعض الـ POVM تغير مصفوفة الكثافة كالتالي :

$$\rho_A \rightarrow \rho'_A = \sum_a \sqrt{F_a} \rho_A \sqrt{F_a} \quad (102. III)$$

وبما أن $\sum_{\mu} F_a = I_A$ فإن هذه الـ POVM لا تعدوا كونها نوعا خاصا من المؤثرات الفائقة تكون فيها مؤثرات Kraus هرميتية أين $\{M_{\mu} = \sqrt{F_{\mu}}\}$.

من الممكن أيضا اثبات أن أي عملية تطور واحدي في الفضاء $H_A \otimes H_B$ تقوم بعملية تشابك بين حالتي النظامين A و B ثم تتبع بعملية قياس متعامد في H_B توصف بواسطة POVM في H_A .

في البداية المؤثر الواحدي يؤثر على الحالة الابتدائية للنظامين $|\psi\rangle_A |0\rangle_B$ وذلك وفق المعادلة (74.III) :

$$U|\psi\rangle_A |0\rangle_B = \sum_{\mu} M_{\mu} |\psi\rangle_A |\mu\rangle_B \quad (103. III)$$

القياس المتعامد للنظام B وفق الأساس $\{|\mu\rangle_B\}$ بعد عملية التطور يكون وفق الاحتمالات $P(\mu)$ حيث :

$$\begin{aligned} P(\mu) &= tr_{AB} \left(\sum_{\mu, \vartheta} M_{\mu} |\psi\rangle_A |\mu\rangle_B \langle \psi|_B \langle \vartheta| M_{\vartheta}^{\dagger} \right) \\ &= tr_A (M_{\mu} |\psi\rangle_A \langle \psi| M_{\mu}^{\dagger}) = tr_A (M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu} |\psi\rangle_A \langle \psi|) \end{aligned} \quad (104. III)$$

وهي مماثلة لعبارة الاحتمالات التي حصلنا عليها في حالة قياس POVM أين $F_\mu = M_\mu^\dagger M_\mu$ وبما أنها موجبة وهرميتية وتحقق العلاقة :

$$\sum_{\mu} F_{\mu} = \sum_{\mu} M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu} = I_A \quad (105. III)$$

فإن $\{F_\mu = M_\mu^\dagger M_\mu\}$ هي بالفعل POVM. نفس النتيجة يمكن الحصول عليها إذا افترضنا أن حالة النظام A مختلطة وذلك بالانطلاق من مؤثر الكثافة $\rho_A = \sum_i p_i |\psi_i\rangle_A \langle \psi_i|$ [20,22].

III-3-6- أمثلة عن المؤثرات الفائقة : القنوات الكمية

لدراسة تأثير عملية تطور غير واحدة لبِت كمي وحيد بواسطة مؤثر فائق نأخذ ثلاثة أمثلة عن ثلاث قنوات كمية، تُخضع هذه القنوات الكمية لبِت الكمي لتطور غير واحد نتيجة تفاعله مع محيطه، تسمية القنوات الكمية جاءت من نظرية المعلومات الكلاسيكية لقنوات نقل المعلومات الكلاسيكية، ورغم أن القنوات الكمية للأمثلة المدروسة لا تعبر بالضرورة عن عملية نقل (فقد تعبر عن تطور في الزمن لحالة لبِت الكمي) لكنها تمثل منطلقاً جيداً لفهم خسارة المعلومات الناتجة عن بعض العمليات الكمية، بشكل مماثل لما يحدث عند نقل المعلومات الكلاسيكية أو ما يطلق عليه مصطلح 'الضجيج'.

III-3-6-1- قناة إزالة الاستقطاب (depolarizing channel)

في هذه القناة يمكن أن تبقى حالة لبِت الكمي دون تغيير باحتمال $(1 - p)$ كما يمكن أن تتعرض حالته لـ'خطأ' باحتمال p ، الأخطاء التي يمكن أن يتعرض لها لبِت الكمي ثلاثة :

- قلب الحالة : أين $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ و $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ ، أي أن الحالة $|\psi\rangle$ تتحول إلى الحالة $\sigma_x |\psi\rangle$ حيث

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- قلب الطور كالتالي : $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$ و $|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$ ، أي أن الحالة $|\psi\rangle$ تتغير إلى $\sigma_z |\psi\rangle$ حيث

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- خطأ مركب : ويجتمع فيه قلب الحالة والطور معا $(|0\rangle \rightarrow i|1\rangle$ و $|1\rangle \rightarrow -i|0\rangle)$ بحيث الحالة $|\psi\rangle$ تتحول إلى $\sigma_y |\psi\rangle$ أين

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

هذه الأخطاء الثلاثة يمكن أن تقع باحتمالات متساوية، وبما أن الاحتمال الكلي للخطأ هو p فإن احتمال أي خطأ من الأخطاء السابقة هو $p/3$ ، ومنه فإن حالة البت الكمي ρ'_A بعد مروره بالقناة هي :

$$\rho'_A = K(\rho_A) = (1 - p)\rho_A + \frac{p}{3}(\sigma_x \rho_A \sigma_x + \sigma_y \rho_A \sigma_y + \sigma_z \rho_A \sigma_z) \quad (106. III)$$

مؤثرات Kraus في هذه الحالة هرميتية وهي :

$$M_0 = \sqrt{1-p} I_A, \quad M_1 = \sqrt{p/3} \sigma_x, \quad M_2 = \sqrt{p/3} \sigma_y, \quad M_3 = \sqrt{p/3} \sigma_z \quad (107. III)$$

ويمكن التحقق من أنها تستوفي علاقة التمام للمعادلة (68.III) بسهولة، التمثيل الواحد للمؤثر الفائق حسب العلاقة (74.III) هو [46] :

$$U_{AE} |\psi\rangle_A |0\rangle_E \rightarrow \sqrt{1-p} |\psi\rangle_A |0\rangle_E + \sqrt{\frac{p}{3}} (\sigma_x |\psi\rangle_A |1\rangle_E + \sigma_y |\psi\rangle_A |2\rangle_E + \sigma_z |\psi\rangle_A |3\rangle_E) \quad (108. III)$$

إذا حالة محيط البت الكمي A تتطور إلى أحد الحالات الأربعة $\{|\mu\rangle_E, \mu = 0, 3\}$ المتعامدة والمنظمة، بحيث أنه من الممكن من ناحية المبدأ قياس المحيط على ذلك الأساس الذي يشمل الحالات الأربعة السابقة من أجل تحديد نوع الخطأ الذي حصل للبت الكمي على مستوى القناة ومن ثم عكس الخطأ وتصحيحه. يمكن القول هنا أن المحيط يحوي توثيقاً للتفاعل الذي حصل بينه وبين البت الكمي، والذي نتج عنه الخطأ أو التغيير في حالة البت الكمي على مستوى القناة، واسترجاع هذا التوثيق يسمح بإزالة التشويش من القناة الكمية.

كرة بلوخ التي تعبر عن جميع الحالات الممكنة للبت الكمي تتأثر عند مرور البت الكمي بالقناة، للتعرف على هذا التأثير نعود للشكل العام لمصفوفة الكثافة للبت الكمي :

$$\rho = \frac{1}{2} (I + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \quad (109. III)$$

حيث \vec{n} هو اتجاه استقطاب السبين للبت الكمي، إذا ما تم اختيار Oz ليكون موازياً له فإن $\vec{n} = n\vec{e}_z$ ، باستخدام خواص مصفوفات باولي ($\sigma_z^3 = \sigma_z, \sigma_x \sigma_z \sigma_x = \sigma_y \sigma_z \sigma_y = -\sigma_z$) وتمثيل Kraus ρ' نجد أن :

$$\rho' = \frac{1}{2} (I + \left(1 - \frac{4}{3}p\right) n \cdot \sigma_z) \quad (110. III)$$

وبما أنه يمكن اختيار المحور Oz ليكون وفق أي اتجاه فإن كل شعاع \vec{n} من كرة بلوخ سيضرب في المعامل $(1 - \frac{4}{3}p)$ ، لذا يصير مؤثر الكثافة ρ' من الشكل :

$$\rho' = \frac{1}{2}(I + (1 - \frac{4}{3}p)\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \equiv \frac{1}{2}(I + \vec{n}' \cdot \vec{\sigma}) \quad (111.III)$$

إذا ما تقوم به القناة هو اختزال كل أشعة الاستقطاب بالمعامل $(1 - \frac{4}{3}p)$ ، ومن هنا جاءت تسميتها بقناة إزالة الاستقطاب، هذه العملية تنقل البت الكمي من حالة نقية إلى حالة مختلطة أي تحدث له عملية فك للتناسق، وتختلف شدته من قناة إلى أخرى حسب احتمال حدوث الخطأ p ، فمثلا القناة ذات $p = 3/4$ هي أسوأ قناة ممكنة، تنتج حالة عشوائية تماما ($\rho' = \frac{1}{2}I$) وذلك بغض النظر عن الحالة الابتدائية التي دخلت إلى هذه القناة، وفيها تنكمش كرة بلوخ إلى نقطة هي المبدأ أو مركز الكرة.

الآن هو وقت مناسب لرؤية إن كانت كل المؤثرات الفائقة قابلة للقلب أم لا : قناة إزالة استقطاب بمعامل خطأ محدد p تقلص شعاع الاستقطاب \vec{n} بالمعامل $(1 - \frac{4}{3}p)$ ، لعكس تأثير هذه القناة يمكن تخيل وجود مؤثر فائق معين يقوم بتمديد كل شعاع استقطاب من كرة بلوخ حتى يعود إلى حالته قبل مروره بالقناة، أي يقوم بتمديد كل شعاع من كرة بلوخ بالمعامل $\frac{3}{3-4p}$ ، لكن السؤال المهم الآن هو هل يوجد مؤثر فائق (يستوفي كل شروط المؤثرات الفائقة) يقوم بهذه المهمة؟

في الحقيقة لا يمكن لمؤثر فائق أن يقوم بفعل كهذا لأن هذا العملية تستوجب أن يكون المؤثر الذي يقوم بها سالبا، ذلك أن تأثير هذا المؤثر الفائق المزعوم ليس حصرا على مؤثرات الكثافة التي تعبر القناة بل يمكن أن يؤثر على أي مؤثر كثافة آخر، وعلى وجه الخصوص هذا المؤثر ينقل كل مؤثر كثافة شعاع استقطابه \vec{n} أين $|\vec{n}| > 1 - \frac{4}{3}p$ إلى مؤثر سالب، لأنه يضخم شدة هذا الشعاع لتصبح أكبر تماما من الواحد $|\vec{n}'| > 1$ ، ما يعني وجود قيمة ذاتية سالبة لمؤثر الكثافة لأن محددها يصبح سالبا تماما (تذكر أن محدد مصفوفة الكثافة للبت الكمي هو $(\frac{1}{4}(1 - \vec{n}'^2))$ وهذا طبعا غير مقبول أبدا، ومنه فإن هذا المؤثر لا يقوم بنقل أي مؤثر كثافة إلى مؤثر كثافة آخر فهو بالتالي ليس مؤثرا فائقا. وعليه لا يمكن أن يكون هناك مؤثر فائق يقوم بعكس تأثير هذه القناة [20,22,24,47].

III-3-6-2- قناة تخميد الطور (Phase Damping Channel)

قناة تخميد الطور هي عملية تصف تطورا غير واحد لبِت كمي، يتم فيها فقدان معلومات كمية لكن دون أن ترافق هذه الخسارة في المعلومات خسارة في الطاقة، تتمذج هذه العملية وفق التمثيل الواحد لعملية التطور كالتالي :

$$U_{AE}|0\rangle_A|0\rangle_E = \sqrt{1-p}|0\rangle_A|0\rangle_E + \sqrt{p}|0\rangle_A|1\rangle_E \quad (112. III)$$

$$U_{AE}|1\rangle_A|0\rangle_E = \sqrt{1-p}|1\rangle_A|0\rangle_E + \sqrt{p}|1\rangle_A|2\rangle_E \quad (113. III)$$

بمطابقة هذه العبارة مع التمثيل الواحدي المعرف بالعبارة (74.III) يمكن استخراج مؤثرات Kraus التالية :

$$M_0 = \sqrt{1-p} I_A, \quad M_1 = \sqrt{p}|0\rangle_A\langle 0|, \quad M_2 = \sqrt{p}|1\rangle_A\langle 1| \quad (114. III)$$

مؤثرات Kraus في هذه الحالة هرميتية أيضا، وهي تحقق علاقة التمام (68.III) ومنه تمثيل Kraus للمؤثر الفائق يكون كالتالي :

$$K(\rho_A) = M_0\rho_A M_0 + M_1\rho_A M_1 + M_2\rho_A M_2 = \begin{pmatrix} \rho_{00} & (1-p)\rho_{01} \\ (1-p)\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \quad (115. III)$$

إذا المؤثر الفائق K يقوم فقط بالتأثير على العناصر غير القطرية لمؤثر الكثافة ρ_A ، تذكر أن العناصر غير القطرية لمؤثر الكثافة هي المسؤولة عن التداخل الكمي وبالتالي ما يقوم به K هو محاولة فك التناسق للحالة ρ_A ، ولذلك سميت القناة بقناة تخميد الطور لأنها تحاول مسح الطور النسبي بين حالات التراكب المتناسق للحالة النقية.

إذا طبق المؤثر K مرتين نجد أن :

$$K^2(\rho_A) = K(K(\rho_A)) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & (1-p)^2\rho_{01} \\ (1-p)^2\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \quad (116. III)$$

لو اعتبرنا أن تطور الحالة زمني وأن احتمال أن يحدث خطأ p في مدة زمنية قصيرة جدا Δt متناسب مع زمن حدوث عملية التطور Δt بحيث $p = \Gamma\Delta t$ ، فإنه بعد مدة زمنية $t = n\Delta t$ ($n \gg 1$) تختزل الحدود اللاقطرية لمصفوفة الكثافة ρ_A بالمعامل :

$$(1-p)^n = (1-\Gamma\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} \rightarrow e^{-\Gamma t} \quad (\Delta t \rightarrow 0) \quad (117. III)$$

بحيث تتطور المصفوفة ρ_A إلى :

$$K^n(\rho_A) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & e^{-\Gamma t} \rho_{01} \\ e^{-\Gamma t} \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \quad (118. III)$$

وعليه لو كانت مصفوفة الكثافة تعبر في البداية عن حالة نقية $(a|0\rangle_A + b|1\rangle_A)$ ، فإنه بعد مدة زمنية كافية $(t \gg 1/\Gamma)$ ستتحول حالة النظام إلى حالة تراكب غير متناسق من $|0\rangle_A$ و $|1\rangle_A$:

$$|a|^2|0\rangle_{AA}\langle 0| + |b|^2|1\rangle_{AA}\langle 1| \quad (119. III)$$

غالبا ما يتم تصوير هذه الحالة بجزئية غبار تتعرض لمجموعة من التصادمات مع فوتونات الوسط، التصادم مع الفوتونات لا يؤثر على طاقة الجزيئة نظرا لكتلتها الكبيرة (من وجهة نظر ميكروسكوبية) في المقابل تتغير حالة فوتونات نتيجة لمجموعة التصادمات المرنة التي تعرضت لها. نأخذ أن حالة جزيئة الغبار في البداية كانت في حالة تراكب متناسق من متجهي موضع مختلفين :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-x\rangle \quad (120. III)$$

بمرور الزمن تأخذ الجزيئة في التصادم مع الفوتونات، فالحالة $|x\rangle$ ترسل الفوتونات إلى الحالة $|1\rangle_E$ أما $|-x\rangle$ فترسلها إلى $|2\rangle_E$ ، إذا كانت الحالتان $(|x\rangle$ و $|-x\rangle)$ مفصولتان مكانيا بشكل كافي أي أن $|2x|$ كبيرة كفاية، فإن حالتني الوسط الناتجتين ستكونان متعامدتين لأن التشبت يكون محدودا مكانيا، ما يعني أن تداخل الحالتين سيكون معدوما تقريبا بحيث يكون $\langle 2|1\rangle_E \approx 0$.

بعد مرور مدة زمنية $(t \sim \Gamma^{-1})$ يزول التراكب المتناسق لحالتني جزيئة الغبار، يدعى هذا الزمن بزمن فك التناسق (τ_{dec}) وتعتمد قيمته على Γ التي تعبر عن احتمال حدوث تصادم في وحدة الزمن، وكما هو معلوم يتناسب هذا المقدار مع المقطع الفعال للتصادم σ الذي يتناسب بدوره مع كتلة الجزيء، حيث $(\sigma \propto R^2 \propto M^{2/3})$ وبالتالي فإن :

$$\tau_{dec} \approx \Gamma^{-1} \propto M^{-2/3} \quad (121. III)$$

لذا كلما كان الجسم أثقل كلما كان فك التناسق أسرع، وهذه النتيجة مهمة جدا فمثلا عند مقارنة τ_{dec} مع المقادير الزمنية المميزة للجسيم مثل زمن التخماد τ_{dam} الذي يرمز إلى الزمن اللازم لجزيء الغبار لينقل مقدارا من دفعه الخطي إلى الفوتونات، وهو ما يحدث بعد عدة عمليات تصادم بينهما، نجد أن زمن فك التناسق أقصر من زمن التخماد بكثير لأن τ_{dec} متناسبة مع زمن حدوث تصادم واحد.

قد تفسر هذه النتيجة ما يحدث مع قطة شرودينجر والأجسام الماكروسكوبية بشكل عام، فالفاعل الذي يحدث بين القطة ومحيطها هو المسؤول عن عدم ملاحظتها في حالة تراكب متناسق لأن عملية فك التناسق تحدث بشكل سريع جداً، فتكون القطة في أحد الحالتين وليس في كليهما فهي إما حية وإما ميتة، خاصة وأن التفاعل بين القطة والمحيط خارج الصندوق أمر لا مناص منه عملياً (فحتى لمس القطة للصندوق يرسل موجات اهتزازية تنتقل إلى الوسط الخارجي) وبالتالي فإن المعلومات حول حالة التراكب ستسرب إلى المحيط. كذلك بالنسبة لتجربة شقي يونغ فالتداخل يظهر ما دام الزمن اللازم للجسيم للانتقال من الشقين إلى الكاشف أقل من زمن فك التناسق τ_{dec} لذلك تظهر الأجسام الخفيفة كالإلكترونات نمط التداخل بينما لا يظهر في الأجسام الأثقل [22,24].

* كرة بلوخ

للتعرف على تأثير قناة تخميد الطور على كرة بلوخ نقوم بنفس الخطوات المتبعة في المثال السابق، وذلك بتحديد بتأثير S على العبارة العامة لمؤثر كثافة البت الكمي :

$$K(\rho) = \sum_{i=0}^2 M_i \left[\frac{1}{2}(I + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \right] M_i = \frac{1}{2}(I + \vec{n}' \cdot \vec{\sigma}) \quad (122.III)$$

أين

$$\vec{n}' = (1-p)n_x \vec{e}_x + (1-p)n_y \vec{e}_y + n_z \vec{e}_z \quad (123.III)$$

إذاً بعد مرور البت الكمي بقناة تخميد الطور تتحول كرة بلوخ إلى مجسم اهليجي له نفس المركز وأنصاف أبعاد محاوره الرئيسية هي $(1-p, 1-p, 1)$.

III-3-6-3- قناة تخميد السعة (Amplitude Damping Channel)

بعد التعرض لقناة تخميد الطور التي تصف عملية تطور غير واحدي لبِت كمي دون تغيير طاقته، يتم الآن التقدم خطوة أخرى وذلك بالتعرض لعملية تطور غير واحدي لبِت كمي لكن بطاقة غير محفوظة هذه المرة. تسمى القناة الكمية التي تصف عملية التطور هاته بقناة تخميد السعة، تخدم هذه القناة في دراسة عملية تبديد الطاقة للأنظمة الكمية مثل عملية الإصدار التلقائي لفوتون في ذرة مثارة ذات مستويي طاقة. في هذه القناة يكون هناك احتمال p لأن تُصدر الذرة المثارة فوتوناً وتعود إلى حالتها الأساسية، وإن كانت الذرة

في الحالة الأساسية منذ البداية فإن حالتها لن تتغير عند مرورها بالقناة، وعليه يكون التمثيل الواحدى لعملية التطور هاته هو :

$$U_{AE}|0\rangle_A|0\rangle_E = |0\rangle_A|0\rangle_E \quad (124. III)$$

$$U_{AE}|1\rangle_A|0\rangle_E = \sqrt{1-p}|1\rangle_A|0\rangle_E + \sqrt{p}|0\rangle_A|1\rangle_E \quad (125. III)$$

مؤثرات Kraus في هذه الحالة هي :

$$M_0 = |0\rangle_{AA}\langle 0| + \sqrt{1-p}|1\rangle_{AA}\langle 1|, \quad M_1 = \sqrt{p}|0\rangle_{AA}\langle 1| \quad (126. III)$$

لاحظ أن مؤثر Kraus M_0 هرميتي لكن المؤثر M_1 ليس هرميتيا، وهو يعبر عن قفزة كمية من الحالة $|1\rangle_A$ إلى الحالة $|0\rangle_A$.

تمثيل Kraus للمؤثر الفائق في هذه الحالة هو :

$$\begin{aligned} K(\rho_A) &= M_0\rho_A M_0 + M_1\rho_A M_1^\dagger = \begin{pmatrix} \rho_{00} + p\rho_{11} & \sqrt{1-p}\rho_{01} \\ \sqrt{1-p}\rho_{10} & (1-p)\rho_{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - (1-p)\rho_{11} & \sqrt{1-p}\rho_{01} \\ \sqrt{1-p}\rho_{10} & (1-p)\rho_{11} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (127. III)$$

أين أستخدمت علاقة أثر مصفوفة الكثافة في المساواة الأخيرة، وعلى شاكلة المثال السابق يمكن أخذ p من الشكل $\Gamma\Delta t$ أين Δt هي مدة زمنية قصيرة جدا تحدث خلالها عملية التطور، حالة مؤثر الكثافة بعد n عملية تطور متتالية ($n \gg 1$) هي :

$$\begin{aligned} K^n(\rho_A) &= \begin{pmatrix} 1 - (1-p)^n\rho_{11} & (1-p)^{n/2}\rho_{01} \\ (1-p)^{n/2}\rho_{10} & (1-p)^n\rho_{11} \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 - e^{-\Gamma t}\rho_{11} & e^{-\Gamma t/2}\rho_{01} \\ e^{-\Gamma t/2}\rho_{10} & e^{-\Gamma t}\rho_{11} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (128. III)$$

حيث $t = n\Delta t$ هو الزمن اللازم لمرور البت الكمي ب n قناة كمية. إذاً كما في قناة تخميد الطور تقوم قناة تخميد السعة بعملية فك التماسق حيث أن العناصر غير القطرية لمصفوفة الكثافة تنهار أسياً مع الزمن، زمن فك التماسق في هذه القناة هو $\tau_{dec} = \Gamma/2$ حيث Γ هي احتمال إصدار فوتون خلال واحدة الزمن، لكن الملاحظ في هذه القناة هو أن ρ_{11} ينهار بشكل أسرع من العناصر غير القطرية، ومنه تفكك الذرة إلى

الحالة الأساسية يكون بشكل أسي في الزمن وفق المعامل $e^{-\Gamma t}$ ، وهكذا بعد مرور زمن كافي يصير مؤثر الكثافة في الحالة النقية التي تمثل الحالة الأساسية للذرة :

$$\rho'_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (129. III)$$

* كرة بلوخ

مرور البت الكمي بقناة تخميد الطور يؤثر على مصفوفة الكثافة $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{n} \cdot \vec{\sigma})$ كالتالي :

$$K(\rho) = \sum_{i=0}^1 M_i \left[\frac{1}{2}(I + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \right] M_i^\dagger = \frac{1}{2}(I + \vec{n}' \cdot \vec{\sigma}) \quad (130. III)$$

حيث

$$\vec{n}' = \sqrt{1-p} n_x \vec{e}_x + \sqrt{1-p} n_y \vec{e}_y + ((1-p)n_z + p) \vec{e}_z \quad (131. III)$$

ما يعني أن كرة بلوخ بعد مرور البت الكمي بقناة تخميد السعة تتحول إلى مجسم إهليجي مركزه هو $(0,0,p)$ وأنصاف أبعاد محاوره الرئيسية هي $(\sqrt{1-p}, \sqrt{1-p}, 1-p)$. إذاً على عكس المثالين السابقين تتحرك كرة بلوخ في قناة تخميد السعة نحو الأعلى أين توجد الحالة الأساسية $|0\rangle_A$ مثلما يمكن توقعه من الدراسة السابقة.

* المؤثر الفائق POVM في نظام البت الكمي

سابقاً تم إثبات أن التطور الواحد لنظام مركب الذي يجعل حالتي النظامين الجزئيين متشابكة ثم يتبع بعملية قياس متعامد في أحد النظامين الجزئيين يمكن تمثيلها بـ POVM في النظام الجزئي الآخر، سيتم الآن استخدام قناة تخميد السعة كمثال عملي على هذا.

في البداية نفترض أن حالة النظام الكلي قبل بدء عملية التطور الواحد هي :

$$(a|0\rangle_A + b|1\rangle_A) \otimes |0\rangle_E \quad (132. III)$$

تأثير المؤثر الواحد U_{AE} على هذه الحالة، حسب العلاقة (74. III)، ينقلها إلى الحالة :

$$(a|0\rangle_A + b\sqrt{1-p}|1\rangle_A) \otimes |0\rangle_E + \sqrt{p}|0\rangle_A \otimes |1\rangle_E \quad (133. III)$$

لو تمت عملية رصد فوتون في الوسط (أي قياس الحالة $|1\rangle_E$) فإن النظام A بعد القياس سيكون في الحالة $|0\rangle_A$ ، لكن عدم رصد أي فوتون ينقله إلى الحالة (غير المنظمة) :

$$a|0\rangle_A + b\sqrt{1-p}|1\rangle_A \quad (134. III)$$

وبالتالي عدم رصد فوتون يزيد من احتمال أن تكون الذرة في الحالة الأساسية ويقلل من احتمال تواجدها في الحالة المثارة، بشكل عام عملية القياس المتعامد للمحيط في الأساس $\{|0\rangle_E, |1\rangle_E\}$ تعرف الـ POVM التالية للنظام A :

$$F_0 = M_0^\dagger M_0 = |0\rangle_{AA}\langle 0| + (1-p)|1\rangle_{AA}\langle 1| \quad (135. III)$$

$$F_1 = M_1^\dagger M_1 = p|1\rangle_{AA}\langle 1| \quad (136. III)$$

أين تحدد F_1 احتمال العثور على النتيجة 1 أي احتمال رصد فوتون في الوسط، أما F_0 تحدد احتمال الحصول على النتيجة 0 أي عدم رصد فوتون.

III-4- المعادلة الرئيسية (Master Equation)

تصف المعادلة الرئيسية التطور الزمني للأنظمة المفتوحة، تطوّر ليس واحدياً بالضرورة بحيث لا يمكن وصفه بمعادلة شرودينجر أو بمعادلة ليوفيل-فان نيومان لمؤثر الكثافة، وهذا نتيجة ارتباط وتفاعل النظام المفتوح مع محيطه. قبل التعرض للمعادلة الرئيسية يجب أولاً وضع مجموعة من التقريبات التي تسمح بوجود هذه المعادلة التفاضلية من الأساس.

يمكن دائماً تصور نظام مفتوح على أنه نظام جزئي من نظام أكبر مغلق، النظام المكمل للنظام المفتوح والذي اصطلاحاً عليه سابقاً بالمحيط يتفاعل مع النظام الرئيسي المدروس، فتتغير حالتا النظامين نتيجة لهذا التفاعل الذي يقوم بنقل معلومات عن النظام إلى المحيط. إذاً حالة المحيط الجديدة تحوي معلومات عن الحالة القديمة للنظام، وهكذا تطبع الحالات القديمة للنظام تغييرات في حالة المحيط بسبب التفاعل الحاصل بينهما، مثلاً عند دراسة الذرة ذات مستويي طاقة في قناة تخميد السعة من الممكن معرفة أن الذرة كانت في حالة إثارة سابقاً عند رصد فوتون في الوسط.

الآن يأتي المنعطف الأهم، غالباً ما تُوصف الأنظمة المفتوحة بأنها أنظمة مبددة، أي أنها تفقد طاقة ومعلومات إلى المحيط، لكن في الواقع ليس هناك مانع فيزيائي لحدوث العكس أي يمكن للمحيط أن ينقل طاقة ومعلومات إلى النظام بواسطة نفس التفاعل السابق، لذا حالة المحيط (المتغيرة بواسطة تفاعل سابق مع النظام) تتفاعل مع النظام وتنقل إليه معلومات وطاقة، الآن المعلومات المنقولة إلى النظام قد تكون في الأساس معلومات أتت من النظام نفسه!!، فعند العودة إلى المثال السابق الفوتون الذي أصدرته الذرة

المثارة يمكن أن يعود ليثير الذرة من جديد، هذه الظاهرة تسمى بتأثير الذاكرة حيث يقوم المحيط بحفظ معلومات عن حالة النظام القديمة والتي يمكن أن تؤثر على حالة النظام الحالية، في هذه الحالة لا يمكن وصف التطور الزمني لمؤثر الكثافة للنظام بمعادلة تفاضلية (من الدرجة الأولى) أي أن $d\rho_A/dt$ لن تعتمد على $\rho_A(t)$ فقط بل على ρ_A في أزمنة سابقة أيضا، بعبارة أخرى لا يمكن تحديد $\rho_A(t + dt)$ بواسطة $\rho_A(t)$ فقط وبالتالي التطور الزمني ليس محليا في الزمن.

من هنا نستنتج أنه حتى يكون للمعادلة الرئيسية وجود يجب إهمال تأثير الذاكرة على تطور حالة النظام، وهذا يعني أن نقبل بأن المحيط ينسى المعلومات المنقولة إليه بشكل سريع جدا مقارنة بالمقياس الزمني للنظام الذي يكون فيه تطور حالة النظام معتبرا، يدعى هذا التقريب بتقريب ماركوف (Markovian approximation) ويكون فيه تطور الأنظمة المفتوحة محليا في الزمن.

لكن أي الأنظمة تخضع لتقريب Markov؟ وهل يمكن أن يكون تطور نظام مفتوح محليا في الزمن؟ وبالتالي يمكن إيجاد مؤثر كثافته في أي لحظة زمنية إذا كان من الممكن إيجاده في لحظة زمنية معينة عن طريق معادلة تعتمد فقط على متغيرات النظام وبدون أخذ أي اعتبار لتأثير المحيط!!

في الواقع لتقريب Markov أرضية فيزيائية قوية، فالمحيط غالبا ما يكون نظاما أكبر بكثير من النظام المفتوح، وهو ما يعني أن التغييرات في حالة المحيط الناتجة عن تفاعله مع النظام المفتوح هي بالفعل مهمة تماما، وتتبدد بسرعة في درجات الحرية اللانهائية للمحيط دون أن يكون لها تأثير معتبر على التطور المستقبلي للنظام المفتوح، لذلك يُستبدل مصطلح المحيط بمصطلح الخزان لإظهار أن النظام المكمل للنظام المفتوح في النظام الكلي المغلق في تقريب Markov هو عبارة عن نظام ضخم بدرجات حرية لانهاية وفي حالة توازن حراري، وهو بذلك مطابق لمفهوم الخزان في الفيزياء الاحصائية [19,20,22,48,49,50].

III-4-1- شكل ليندبلاد للمعادلة الرئيسية

(Master Equation in Lindblad Form)

معادلة Lindblad هي الشكل الأكثر عمومية للمعادلة الرئيسية الماركوفية، التي تتعامل مع عمليات غير واحدة وغير عكوسة كالتبدد، فك التناسق وعمليات القياس [51].

في الأنظمة المغلقة يوصف تطور مؤثر الكثافة بالمعادلة التفاضلية :

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] \quad (137. III)$$

حيث H هو هاميلتون النظام و \hbar أخذت مساوية للواحد. الحل العام لهذه المعادلة عندما يكون الهاميلتون غير متعلق بالزمن هو :

$$\rho(t) = e^{-iHt} \rho(0) e^{iHt} \quad (138. III)$$

حيث e^{-iHt} هو مؤثر التطور الزمني الواحد الذي يولده الهاميلتون H .

المطلوب الآن هو إيجاد شكل المعادلة التفاضلية التي تصف عملية التطور في الأنظمة المفتوحة، فإذا اعتبرنا أن هناك نظامًا مغلقًا يحتوي النظام المفتوح، فإن المعادلة التفاضلية للنظام المفتوح يمكن الحصول عليها بأخذ الأثر الجزئي للمعادلة التفاضلية الكلية بالنسبة للمحيط :

$$\dot{\rho}_A = \text{tr}_E(-i[H_{AE}(t), \rho_{AE}(t)]) \quad (139. III)$$

لكن من غير المحتمل أن تعتمد $\dot{\rho}_A$ في هذه الحالة على $\rho_A(t)$ فحسب، لذلك سنلجأ لتقريب Markov الذي سنفترض أنه مطبق على هذا النظام المفتوح. إذا حسب تمثيل Kraus تتطور حالة النظام من اللحظة $t = 0$ إلى اللحظة t كالتالي :

$$\rho(t) = \sum_{\mu} M_{\mu}(t) \rho(0) M_{\mu}^{\dagger}(t) \quad (140. III)$$

إذا أخذنا الزمن الذي تمت فيه عملية التطور ليكون قصيرا جدا (dt) فمن المتوقع ألا يتغير مؤثر الكثافة بشكل كبير. إن dt تعبر عن زمن أقصر بكثير من زمن التطور الطبيعي للنظام أي الزمن اللازم لحالة النظام لتتغير فيه بشكل ملحوظ، من جهة أخرى dt أكبر بكثير أيضا من زمن الاسترخاء لتأثير الذاكرة، وهو الزمن اللازم للمحيط لكي ينسى المعلومات التي حصل عليها من النظام، وذلك حتى يكون من الممكن استخدام تقريب Markov لكتابة $\rho(dt)$ بدلالة $\rho(0)$ فقط :

$$\rho(dt) = \rho(0) + dt \dot{\rho} \equiv \rho(0) + O(dt) \quad (141. III)$$

عند مقارنة المعادلة السابقة بمعادلة تمثيل Kraus نجد أنه لا بد أن يكون أحد مؤثرات Kraus من الشكل : $M_0 = I + O'(dt)$ ، حيث أن إضافة حدود من رتبة dt للمؤثر M_0 هو من أجل ضمان أن تحقق مؤثرات Kraus علاقة التمام للمعادلة (68.III)، أما بقية مؤثرات Kraus فهي من رتبة \sqrt{dt} وهي المسؤولة عن حدوث عملية تغير أو انتقال في حالة النظام، ومنه يمكن كتابة مؤثرات Kraus كالتالي :

$$M_0 = I + (-iH + T)dt \quad (142. III)$$

$$M_{\mu} = \sqrt{dt} L_{\mu} \quad (143. III)$$

H هو هاملتون النظام المفتوح الهدف من إضافته هو الحصول على معادلة مماثلة جزئياً لمعادلة الأنظمة المغلقة باعتبارها حالة خاصة من الأنظمة المفتوحة، أما المؤثر T فقد أضيف لغرض التنظيم لذا سنعتبر أنه هرميتي، ولتحديده سنستخدم العلاقة (68.III) :

$$\sum_{\mu=0} M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu} = I + dt \left(2T + \sum_{\mu=1} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \right) = I \quad (144. III)$$

وبالتالي فإن

$$T = -\frac{1}{2} \sum_{\mu=1} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \quad (145. III)$$

إذا بالعودة لتمثيل Kraus $\rho(dt)$ نجد أن عبارة $\dot{\rho}$ عند $t = 0$ من المعادلة (141.III) هي :

$$\dot{\rho}(0) = -i[H, \rho(0)] + \sum_{\mu=1} \left(L_{\mu} \rho(0) L_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \rho(0) - \frac{1}{2} \rho(0) L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \right) \quad (146. III)$$

الآن ما الذي يمنع تعميم هذه العبارة من أجل كل لحظة زمنية t ؟ أي ما الذي يمنع كخطوة أولى - أن تكون

$$\rho(2dt) - \rho(dt) = \dot{\rho}(dt) dt$$

$$\dot{\rho}(dt) = -i[H, \rho(dt)] + \sum_{\mu=1} \left(L_{\mu} \rho(dt) L_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \rho(dt) - \frac{1}{2} \rho(dt) L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \right) \quad (147. III)$$

في الواقع، لن يكون هذا صحيحاً إلا إن تحقق شرطان :

- الأول أن تكون الحالة الكمية للمحيط والنظام قابلة للفصل عند اللحظة $t = dt$ أي يمكن كتابتها من الشكل $\rho \otimes \rho_E$ ، وهذا حتى يمكن أن يوجد تمثيل Kraus للمؤثر الفائق بين اللحظتين $(dt, 2dt)$.
- الشرط الثاني هو أن لا يعتمد المؤثر الفائق الذي يصف عملية التطور بين اللحظتين $(dt, 2dt)$ على اللحظة الزمنية الابتدائية التي تُطبق فيها المؤثر الفائق، وإنما فقط على طول المجال الزمني الذي يُطبق فيه، هذا يضمن أن تكون مؤثرات Kraus متماثلة في المجالين الزمنيين $[0, dt]$ و $[dt, 2dt]$ وهذا مطلوب حتى يمكن كتابة المعادلة الأخيرة باستخدام نفس المؤثرات $\{L_{\mu}\}$ [22].

في الحقيقة، إن استخراج المعادلة الرئيسية لن يكون ممكناً إلا إن كان هذان الشرطان محققين، لذا لا مفر من الاستنتاج بتقريب Markov من جديد. في اللحظة $t = 0$ كانت حالة (المحيط + النظام) قابلة للفصل،

ثم بسبب التطور الزمني الذي حدث تشابكت حالتها، في تقريب Markov المعلومات التي انتقلت ما بين النظام والمحيط، والتي تسببت في تشابك حالتها، يتم فقدانها على مستوى المحيط بشكل أسرع بكثير من الزمن الذي يلزم لتغيير حالة النظام من جديد، ما يعني أن التشابك الذي حدث بسبب التفاعل بين المحيط والنظام يتم محوه بسرعة، بحيث تعود حالتها لتكون قابلة للفصل من جديد قبل أن يطرأ تغير -معتبر- على حالة النظام مرة أخرى. ضمناً، عند التعامل مع النظام زمنياً لا توجد استمرارية في الزمن t ، بل عند الانتقال من لحظة زمنية إلى أخرى يجب أن يكون الفرق بينهما على الأقل أكبر أو يساوي dt -كما عرفت في الفقرات الأولى من هذا العنصر- أي لا يجب الوصول إلى مقياس زمني يكون فيه محو تأثير الذاكرة بطيئاً، وهذا مأخوذ بعين الاعتبار سلفاً لأن المقياس الزمني للنظام أكبر بكثير من المقياس الزمني لعملية محو الذاكرة.

الشرط الثاني الذي يخص المؤثر الفائق ومؤثرات Kraus يمكن تبريره أيضاً بفضل تقريب Markov. إن مؤثرات Kraus تحمل في طياتها تغيرات حالة المحيط في المجال الزمني الذي يؤثر فيه المؤثر الفائق، لذلك عند أخذ مجالين زمنيين متتاليين ورغم أن العملية الواحديّة التي تصف التطور الزمني للجملة (المحيط + النظام) قد لا تتعلق سوى بطول المجال الزمني الذي تتم فيه العملية، إلا أن مؤثرات Kraus حسب تعريفها لا تعتمد على المؤثر الواحد فقط بل على الحالة الابتدائية للمحيط أيضاً حسب المعادلة (66.III)، لكن تقريب Markov يضمن أن ينسى المحيط ما حل به بشكل سريع جداً، وعملية المحو أو النسيان تعني أن يعود المحيط لحالته الابتدائية قبل التفاعل أو التطور، لذا تكون مؤثرات Kraus متماثلة في المجالين الزمنيين $[0, dt]$ و $[dt, 2dt]$.

استيفاء الشرطين السابقين يعني أنه يمكن تعميم عبارة ρ بالمعادلة (146.III) إلى المعادلة (147.III) بكل أمان، بحيث تصبح عبارتها صالحة في المجال الزمني $[0, dt]$ ، والتعميم إلى أي لحظة زمنية t مباشر عن طريق تركيب المجالات الزمنية كما حدث مع المجالين $[0, dt]$ و $[dt, 2dt]$ ، وعليه فإن المعادلة التفاضلية الزمنية لـ ρ هي :

$$\dot{\rho}(t) = -i[H, \rho(t)] + \sum_{\mu=1} \left(L_{\mu} \rho(t) L_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \right) \quad (148. III)$$

وهي المعادلة التفاضلية التي تصف التطور الزمني للأنظمة المفتوحة الماركوفية، تدعى المعادلة (148.III) بمعادلة Lindblad أو شكل Lindblad للمعادلة الرئيسية، والمؤثرات $\{L_{\mu}\}$ تدعى بمؤثرات Lindblad أو مؤثرات القفزة الكمية [14,20,22,50].

III-4-2- مثال : الهزاز التوافقي المتخامد

لدراسة المعادلة الرئيسية نأخذ كمثال عليها الهزاز التوافقي المتخامد. النظام المدروس له مستويات طاقة لا نهائية، يتفاعل هذا الهزاز مع حقل كهرومغناطيسي مكتم والذي يمثل الخزان. بغرض التبسيط نفترض أن كامل النظام هو في درجة حرارة صفر كلفن، وبالتالي لا فوتونات في الوسط ولا يمكن للهزاز أن يمتص فوتونا منه، إذًا العملية الوحيدة التي يمكن أن تحدث للهزاز هو أن يقوم بإصدار فوتونات وعليه يوجد مؤثر Lindblad وحيد يتناسب مع مؤثر الإفناء a :

$$L_1 = \sqrt{\Gamma} a \quad (147. III)$$

معادلة Lindblad لهذا الهزاز هي :

$$\dot{\rho} = -i[H_0, \rho] + \Gamma(a\rho a^\dagger - \frac{1}{2}a^\dagger a\rho - \frac{1}{2}\rho a^\dagger a) \quad (148. III)$$

حيث H_0 هو مؤثر الطاقة للهزاز $H_0 = \omega a^\dagger a$ ، لدراسة تطور مقادير النظام ننتقل إلى تمثيل التفاعل والذي يكون مفيدا في دراسة مثل هذه الحالات، في هذا التصور مؤثر الكثافة ρ_I والافناء a_I يعرفان ب :

$$\rho(t) = e^{-iH_0 t} \rho_I(t) e^{iH_0 t} \quad (149. III)$$

$$a(t) = e^{-iH_0 t} a_I(t) e^{iH_0 t} \quad (150. III)$$

وباستخدامهما تصبح معادلة Lindblad من الشكل :

$$\dot{\rho}_I = \Gamma(a_I \rho_I a_I^\dagger - \frac{1}{2}a_I^\dagger a_I \rho_I - \frac{1}{2}\rho_I a_I^\dagger a_I) \quad (151. III)$$

الحدود المتبقية في المعادلة هي الحدود التي تصف التفاعل بين الخزان والهزاز وهذه هي الفائدة التي نجنيها من استخدام تمثيل التفاعل، يمكن تبسيط المعادلة السابقة وذلك بالتعويض بقيمتي a_I و a_I^\dagger حيث أن $a_I = e^{-i\omega_0 t} a$ (الإثبات موجود في الملحق (أ)) :

$$\dot{\rho}_I = \Gamma \left(a \rho_I a^\dagger - \frac{1}{2} a^\dagger a \rho_I - \frac{1}{2} \rho_I a^\dagger a \right) \quad (152. III)$$

نود الآن معرفة كيف تتغير القيمة المتوسطة للمؤثر $n = a^\dagger a$ وهو المؤثر الذي يعبر عن عدد الفوتونات في النظام :

$$\frac{d}{dt} \langle n \rangle = \frac{d}{dt} \text{tr}(n_I \rho_I) = \frac{d}{dt} \text{tr}(n \rho_I) = \text{tr}(n \dot{\rho}_I) \quad (153. III)$$

بتعويض $\dot{\rho}_I$ بقيمتها من المعادلة (152.III) واستغلال خواص الأثر نجد أن :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle n \rangle &= \Gamma \text{tr}(a^\dagger a a \rho_I a^\dagger - \frac{1}{2} a^\dagger a a^\dagger a \rho_I - \frac{1}{2} a^\dagger a \rho_I a^\dagger a) \\ &= \Gamma \text{tr}(a^\dagger [a^\dagger, a] a \rho_I) = -\Gamma \text{tr}(a^\dagger a \rho_I) = -\Gamma \langle n \rangle \end{aligned} \quad (154. \text{III})$$

نكامل الآن العبارة الأخيرة :

$$\langle n(t) \rangle = e^{-\Gamma t} \langle n(0) \rangle \quad (155. \text{III})$$

هذه النتيجة مماثلة للنتيجة المتحصل عليها في قناة تخميد السعة غير أن الحديث حينها كان عن ρ_{11} والتي تعبر عن احتمال وجود الذرة في الحالة المثارة أما الآن فالحديث هو تطور عدد فوتونات الهزاز في الزمن والذي يعبر عنه بالمؤثر n ، لكن النتيجة واحدة : يتخامد الهزاز إلى الحالة الأساسية بشكل أسي في الزمن وزمن التخامد في هذه الحالة هو Γ^{-1} [20,22].

الفصل الرابع

الاتصالات الكمية : تطبيقات
التشابك الكمي

IV-1- تمهيد

لا شك في أن التشابك الكمي يصور الغرابة التي تكتنف العالم الكمي في أكثر مظاهرها جلاء، خاصة وأن هذه الخاصية الكمية ليس لها من مثيل كلاسيكي وهو ما يجعل منها موردا جديدا يمكن من خلاله تنفيذ أمور بدت سابقا مستحيلة. الأمر المثير بشأن التشابك الكمي هو السبل الجديدة التي يفتحها، والآفاق الممكنة لاستغلاله تبدوا وكأنها ضرب من ضروب الخيال العلمي، ورغم أن التأثير الذي ينقله لا يمكن أن يحمل معلومات أو طاقة، إلا أن القدرة على التأثير على جسمين منفصلين في نفس الوقت ومهما كانت المسافات الموجودة بينهما تمثل فرصة مغرية، والاستفادة من هذه القدرة في مجال الاتصالات والمعلوماتية حرك الكثير من العقول للبحث عن الطرق الممكنة للاستفادة من التشابك الكمي كمصدر حديث في هذا المجال، وهو ما نتج عنه عدد من التطبيقات المذهلة بكل حق.

IV-2- نقل المعلومات بواسطة الأجسام المتشابكة

تستهدف نظرية المعلومات الكمية التشابك الكمي للحصول على مورد له القدرة على أن يفوق المصادر الكلاسيكية في هذا المجال، ومن أجل تحقيق هذه الغاية يجب أولا تحديد كيفية استخراج المعلومات عند نقل البتات الكمية وخاصة المتشابكة منها.

إذا أردنا تحديد المعلومات التي تنقلها الأجسام غير المتشابكة فالأمر لا يختلف إن كان الحديث هنا عن بت كمي واحد أو مجموعة من البتات الكمية، ذلك أنه يمكن معالجة كل منها على حدى دون التأثير على حالة بقية البتات الكمية. البت الكمي الوحيد لا يمكنه أن يحمل أكثر من معلومة واحدة عند نقله، ورغم أن عدد الحالات التي يمكن أن يحتلها البت الكمي لا نهائي لكن تحديد أي حالة يحتلها لا يمكن أن يتم عن طريق عملية قياس وحيدة، إلا إذا كان لدى المستقبل معرفة سابقة تعلمه وفق أي محور تم تحضير حالة البت الكمي، وعليه البت الكمي في هذه الحالة ليس أكثر فائدة من البت الكلاسيكي. على هذه الحال فإن اثنين من البت الكمي غير المتشابك سيحويان معلومتين اثنتين بشكل مماثل للحالة الكلاسيكية، لكن ماذا عن اثنين من البت الكمي المتشابك هل يمكن أن يتمتعا بخاصية التشابك ويحملا معلومتين في نفس الوقت؟

نأخذ الحالة المتشابكة القسوى لاثنتين من البت الكمي :

$$|\phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}) \quad (1. IV)$$

يمكن التفكير في أنه عند التعامل مع كلا البت الكميين وقياسها معا وفق الأساس الذي يشمل الشعاعين $|00\rangle_{AB}$ و $|11\rangle_{AB}$ ، فإنه يمكن نقل معلومتين بهذه الطريقة كما تُنقل في حالة اثنين من البت الكمي غير المتشابك، لكن هذا غير ممكن لسبب بسيط وهو أنه من غير الممكن تحديد الشعاع الذي سينهار إليه الشعاع $|\phi^+\rangle_{AB}$ عند قياسه وفق الأساس السابق، وبالتالي من المستحيل نقل أي معلومة بهذه الطريقة. بالمقابل من الممكن قياسهما وفق الأساس الذي يشمل الشعاع $|\phi^+\rangle_{AB}$ نفسه وهو الأساس :

$$\begin{aligned} |\phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle) \\ |\psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle) \end{aligned} \quad (2. IV)$$

جميع أشعة هذا الأساس هي حالات متشابكة قصوى، يمكن تحضير أحدها عند المرسل ثم تنقل إلى المستقبل الذي يقوم بقياسها وفق هذا الأساس ليستخرج معلومتين اثنتين : الأولى هي بت التكافؤ وتحدد إن كان سبين الجسيمين متراصفا أو غير متراصف (0 للشعاعين $|\phi^\pm\rangle$ و 1 للشعاعين $|\psi^\pm\rangle$)، والمعلومة الثانية هي بت الطور وتحدد قيمة الطور النسبي لأشعة هذا الأساس (0 للشعاعين $|\phi^+\rangle$ و $|\psi^+\rangle$ و 1 للشعاعين $|\phi^-\rangle$ و $|\psi^-\rangle$) ومنه فإنه من الممكن نقل معلومتين اثنتين باستخدام اثنين من البت الكمي المتشابك.

لكن ماذا إن تم فصل ثنائية البت الكمي هل مازال من الممكن نقل معلومتين في هذه الحالة؟ عند فصل ثنائية البت الكمي في حالة التشابك القصوى فإن مصفوفة الكثافة للبت الكمي A (B) هي $\rho_A = \frac{1}{2}I_A$ (ويشكل مماثل $\rho_B = \frac{1}{2}I_B$)، ولتحديد بت التكافؤ وبت الطور معا يجب تحديد شعاع الحالة المتشابكة لهذه الثنائية من بين أشعة الأساس (2. IV)، لكن هذا غير ممكن انطلاقا من مصفوفتي الكثافة ρ_B و ρ_A فقط، ذلك أن كل شعاع من أشعة ذلك الأساس يعطي نفس مصفوفتي الكثافة المختزلتين ρ_B و ρ_A ، ليس هذا وحسب بل إن كل شعاع ينتج من تحويل واحد لتلك الأشعة في أحد الفضاءين الجزئيين H_A أو H_B هو شعاع يؤدي إلى نفس مصفوفتي الكثافة ρ_B و ρ_A . مثلا في الحالة الخاصة التي يكون فيها التحويل الواحد هو أحد مصفوفات باولي، فإن ما ستقوم به هو نقل كل شعاع من أشعة الأساس (2. IV) إلى شعاع آخر من نفس الأساس :

$$\begin{aligned} \sigma_x^A |\phi^\pm\rangle &= \pm |\psi^\pm\rangle \\ \sigma_z^A |\phi^\pm\rangle &= |\phi^\mp\rangle \end{aligned} \quad (3. IV)$$

أي أن تطبيق تحويل واحد على مستوى البت الكمي A يغير شعاع الحالة المتشابكة دون أن يكون ذلك مرئياً على مستوى البت الكمي الآخر B ولا حتى على مستوى البت الكمي A نفسه لأن مصفوفة الكثافة لكل منهما لا تتغير بسبب هذا التحويل. كيف يمكن إذاً تحديد الحالة المتشابكة لثنائية البت الكمي؟

من الواضح أنه لا يمكن تحديد الحالة المتشابكة عن طريق عمليات وحيدة محلية على مستوى كل منهما، ولإثبات هذا بشكل نهائي نعود إلى أشعة الأساس (2.IV)، هذه الأشعة هي أشعة ذاتية للمؤثر $\sigma_x^B \sigma_x^A$:

$$\begin{aligned}\sigma_x^B \sigma_x^A |\phi^\pm\rangle &= \pm |\phi^\pm\rangle \\ \sigma_x^B \sigma_x^A |\psi^\pm\rangle &= \pm |\psi^\pm\rangle\end{aligned}\quad (4.IV)$$

القيم الذاتية لـ $\sigma_x^B \sigma_x^A$ منحلة وهي $+1$ للأشعة ذات بت طور 0 و -1 للأشعة ذات بت طور 1 ، وعليه القيم الذاتية للمؤثر $\sigma_x^B \sigma_x^A$ تحدد قيم بت الطور، أما بت التكافؤ فيحدد بالقيم الذاتية للمؤثر $\sigma_z^B \sigma_z^A$:

$$\begin{aligned}\sigma_z^B \sigma_z^A |\phi^\pm\rangle &= |\phi^\pm\rangle \\ \sigma_z^B \sigma_z^A |\psi^\pm\rangle &= -|\psi^\pm\rangle\end{aligned}\quad (5.IV)$$

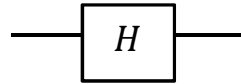
إذاً $\sigma_x^B \sigma_x^A$ و $\sigma_z^B \sigma_z^A$ مؤثران متبادلان نظراً لامتلاكهما نفس الأشعة الذاتية، وبالتالي يمكن نظرياً قياسهما معاً لثنائية البت الكمي المتشابك -غير المنفصلين- للحصول على بت التكافؤ وبت الطور معاً. على المستوى المحلي للبت الكمي يمكن أن يقاس المؤثران σ_x^B و σ_x^A للبت الكمي A و B على التوالي بشكل منفصل، وبما أن هذين المؤثرين يتبادلان مع المؤثر $\sigma_x^B \sigma_x^A$ فإنه يمكن إيجاد قيمة بت الطور للحالة المتشابكة. في المقابل المؤثران σ_x^B و σ_x^A لا يتبادلان مع المؤثر $\sigma_z^B \sigma_z^A$ ما يعني أنه لا يمكن إيجاد أشعة ذاتية للمؤثرات الثلاثة معاً، وبالتالي من المستحيل تحديد قيمة بت التكافؤ والطور في نفس الوقت عن طريق القيام بعمليات قياس محلية على مستوى كل بت كمي متشابك.

لا مناص إذاً من التعامل مع ثنائية البت الكمي المتشابك قبل فصلهما للتعرف على الحالة المتشابكة وتحديد المعلومات اللتين يحملانها، لكن هذا التعامل لا يعني دائماً القيام بعملية قياس على الثنائية قد يكون التعامل عن طريق عملية تحويل واحد للحالة المتشابكة. في الواقع التحويل الذي ينقل شعاع الحالة المتشابكة إلى حالة غير متشابكة يفى بالغرض جداً، فالتحويل الذي ينقل الحالة من الأساس $\{|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle\}$ إلى الأساس $\{|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$ يسمح بالتعرف على الحالة المتشابكة قبل عملية التحويل الواحد بواسطة عملية قياس محلية على مستوى كل بت كمي بشكل منفصل [20].

حسب علم الحوسبة الكمومية (Quantum computing) العمليات على البت الكمي تتم باستخدام البوابات الكمية (Quantum gates) والتي يمكن اعتبارها بمثابة أدوات أولية للحوسبة الكمومية، حيث تقوم بتطبيق تحويل واحد محدد على بت كمي (أو أكثر) لمدة محددة من الزمن. البوابات الكمية التي نحتاجها لنقل حالة متشابكة من الأساس (IV. 2) إلى حالة غير متشابكة هما اثنان : البوابة الأولى هي بوابة Hadamard، تؤثر على بت كمي واحد في كل مرة بالعملية الواحدة :

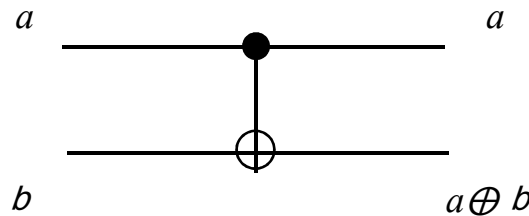
$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (6. IV)$$

المؤثر H ليس واحديا وحسب وإنما هرميتي أيضا ما يعني أن $H^2 = I$ ، وبالتالي تطبيقه لمرتين متتاليتين على نظام البت الكمي يعيده إلى حالته الابتدائية. يرمز لبوابة Hadamard في الدوائر الكمية بالرمز :



مرور خط واحد بالمرجع يعني أن البوابة تؤثر على بت كمي واحد فقط.

البوابة الثانية هي بوابة CNOT تؤثر هذه البوابة على اثنين من البت الكمي، يدعى الأول بت التحكم والثاني يدعى بالهدف. عمل بوابة CNOT يعتمد على شعاع حالة بت التحكم، فإذا كان في الحالة $|0\rangle$ فستترك شعاع حالة الهدف دون تغيير وإن كان بت التحكم في الحالة $|1\rangle$ فستقوم البوابة بقلب شعاع حالة الهدف، فإن كان في الحالة $|0\rangle$ فستنقله البوابة إلى الحالة $|1\rangle$ وإن كان في الحالة $|1\rangle$ فستنقله إلى شعاع الحالة $|0\rangle$. يرمز لبوابة CNOT في الدارات الكمية بـ :

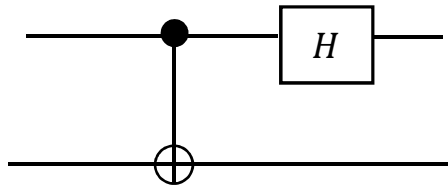


أين a تعبر عن بت التحكم و b تعبر عن الهدف أما $a \oplus b$ فهي ترمز للجمع بباقي القسمة على اثنين أي يؤخذ باقي قسمة المجموع على اثنين، فمثلا إن كان بت التحكم في الحالة $|0\rangle$ فإن باقي قسمة مجموعه مع بت الهدف سيكون دائما حالة الهدف نفسها ($0 \oplus 0=0$ و $0 \oplus 1=1$).

تطبيق بوابة CNOT مرتين على نفس ثنائية البت الكمي يعيده إلى حالته الابتدائية وإثبات ذلك سهل. فعندما يكون بت التحكم في الحالة $|0\rangle$ فلا تغيير لحالة الهدف ما يعني أن تأثير بوابة CNOT على هذه الحالة مماثل لتأثير مؤثر الوحدة وبالتالي تطبيقها مرتين على هذه الحالة لن يغيرها، وإن كان بت التحكم في الحالة $|1\rangle$ فإن تطبيق بوابة CNOT مرتين يعني قلب حالة الهدف مرتين وبالتالي سيعود إلى حالته الابتدائية :

$$\text{CNOT}^2 |a, b\rangle = |a, b\rangle \quad (7. IV)$$

التحويل الواحدي المطلوب لنقل شعاع حالة متشابكة من أشعة الأساس (2. IV) إلى أساس الحالات غير المتشابكة يتم الحصول عليه بتركيب البوابتين الكميتين السابقتين بالشكل التالي :



أي تُطبق بوابة CNOT على شعاع حالة اثنين من البت الكمي ومن ثم بوابة Hadamard على بت التحكم للبوابة السابقة، تؤثر هذه العملية على أشعة الأساس (2. IV) كالتالي :

$$\begin{aligned} |\phi^+\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |10\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle \right) = |00\rangle \\ |\phi^-\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |10\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle \right) = |10\rangle \\ |\psi^+\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |11\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)|1\rangle \right) = |01\rangle \\ |\psi^-\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |11\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)|1\rangle \right) = |11\rangle \end{aligned} \quad (8. IV)$$

إذا بالفعل تنقل الدارة السابقة الحالات المتشابكة للأساس (2. IV) إلى حالات غير متشابكة، والتعرف على الحالة المتشابكة أصبح ممكناً عن طريق قياس كل بت كمي بمفرده. لاحظ أن معرفة الحالة المتشابكة وبالتالي تحديد بت الطور والتكافؤ معا - يستلزم المعرفة بنتيجتي قياس كلا البت الكميين معا، فقياس البت الكمي الأول وفق الأساس $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ يعطي بت الطور (0 عند العثور على الشعاع $|0\rangle$ و 1 عند العثور على الشعاع $|1\rangle$) أما البت الكمي الثاني فهو يحمل معلومة بت التكافؤ (0 عند العثور على الشعاع $|0\rangle$ و 1 عند العثور على الشعاع $|1\rangle$) [15,20,47].

IV-3- الترميز المكثف (Dense Coding)

لم نر حتى الآن تأثير التشابك الكمي على عملية نقل المعلومات، في الحقيقة كل ما شهدناه حتى الآن أنه لا فرق بين البت الكمي المتشابك أو غير المتشابك والبت الكلاسيكي في كمية المعلومات التي يمكن أن ينقلها، لكن هذه ليست سوى بداية القصة، ففي العنصر السابق لم نستخدم التأثير الغريب الذي ينقله التشابك الكمي والعنصر الحالي جاء بالضبط لهذه الغاية .

سابقاً رأينا أن التشابك الكمي ينقل تأثيراً فوق زمني بين عناصره حيث أن التأثير على إحداها -سواء بعملية قياس أو عملية تحويل واحدي - يؤثر على البقية بشكل آني. الأمر الساحر بشأن هذا التأثير الغريب هو أنه من الممكن استغلاله لنقل معلومتين كلاسيكيتين بواسطة بت كمي واحد فقط ! تدعى هذه العملية بالترميز المكثف وهو بروتوكول معين يسمح بنقل معلومتين ببت كمي واحد مستفيداً من ظاهرة التشابك الكمي.

نفرض أن هنالك من حضر الحالة $|\phi^+\rangle$ واحتفظ ببت كمي واحد وأرسل الآخر في رحلة بعيدة إلى وجهة محددة عند المستقبل، قرر هذا المستقبل فجأة أن يرسل رسالة من اثنين من البت الكلاسيكي إلى من أرسل إليه البت الكمي، وليس لديه من وسيلة اتصال سوى القناة الكمية التي وصله البت الكمي عبرها وليس لديه أي بت كمي سوى ذلك الذي أرسل إليه. المعلومتان اللتان يريد المستقبل أن ينقلهما إلى المرسل لها احتمالات أربع : $\{00,01,10,11\}$ ، وله أن يستخدم أي تأثير واحدي على البت الكمي الذي لديه، وهنا تلعب فكرة ذكية في ذهن المستقبل، صحيح أنه ليس لديه سوى بت كمي واحد لكنه في الواقع يستطيع التأثير على اثنين منهما بفضل التشابك الكمي، الأمر هنا أنه يستطيع استخدام بت التكافؤ والطور للحالة المتشابكة لينقل رسالته، حيث :

$$\begin{aligned} 00 &\rightarrow |\phi^+\rangle \\ 01 &\rightarrow |\phi^-\rangle \\ 10 &\rightarrow |\psi^+\rangle \\ 11 &\rightarrow |\psi^-\rangle \end{aligned} \quad (9.IV)$$

لنقل رسالته إلى المرسل يطبق المستقبل المؤثر المناسب على البت الكمي الذي لديه قبل أن يعيده مجدداً إلى المرسل :

$$\begin{aligned} 00 : & I|\phi^+\rangle = |\phi^+\rangle \\ 01 : & \sigma_z|\phi^+\rangle = |\phi^-\rangle \\ 10 : & \sigma_x|\phi^+\rangle = |\psi^+\rangle \\ 11 : & \sigma_y|\phi^+\rangle = -i|\psi^-\rangle \end{aligned} \quad (10.IV)$$

إدًا عندما يعود البت الكمي إلى المرسل من جديد يقوم بقياس ثنائية البت الكمي المتشابك التي لديه وفق الأساس (IV. 2) ليتعرف على رسالة المستقبل، وبهذا يكون المستقبل قد استطاع تحميل بت كمي واحد بمعلوماتين [24,52,53,54].

لكن من المهم ألا نغفل نقطة مهمة هنا وهي أن نقل الرسالة ذات المعلوماتين بواسطة عملية الترميز المكثف يحتاج إلى اثنين من البت الكمي رغم أن المستقبل لم يستخدم سوى بت كمي واحد، وهذا راجع إلى قدرته على التأثير على البت الكمي الآخر بفضل التشابك الكمي. للوهلة الأولى قد تبدوا عملية الترميز المكثف كما لو كنت في حاجة إلى اثنين من البت الكمي لإرسال معلوماتين لكن ما عليك سوى نقل بت كمي واحد، غير أن الحقيقة هي أن عملية النقل قد تمت مرتين بالفعل، المرة الأولى كانت عند إرسال البت الكمي إلى المستقبل والثانية عند إعادته إلى المرسل، لكن الأمر الاستثنائي هنا هو أن عملية النقل الأولى لا تحمل أي معلومة في حين تحمل عملية النقل الثانية معلوماتين في نفس الوقت.

IV-4- نظرية عدم الاستنساخ (No-Cloning Theorem)

البوابات الكمية هي النسخة الكمية عن البوابات المنطقية الكلاسيكية التي تستخدم في الدارات الالكترونية للحواسيب والأجهزة الالكترونية. تتعدد البوابات المنطقية وتختلف باختلاف العملية التي تؤديها، أحد هذه البوابات المنطقية هي بوابة XOR وهي النظير الكلاسيكي لبوابة CNOT، لدى هذه البوابة القدرة على نسخ قيمة أي بت كلاسيكي إلى بت آخر إذا ضبطت الهدف في البداية ليأخذ القيمة 0، ومن الممكن إثبات أن بوابة XOR تؤدي بالفعل هذه العملية بكل سهولة، فهي لا تؤثر على الهدف إذا كانت قيمة بت التحكم هي 0 وبالتالي تكون قيمة بت التحكم وبت الهدف بعد المرور بالبوابة متماثلة وكلاهما يأخذ القيمة 0، أما إذا كان بت التحكم هو 1 فإن البوابة تغير قيمة بت الهدف إلى القيمة 1. ما يعني أن ضبط بوابة XOR بهذه الطريقة يجعل منها آلة نسخ للبت الكلاسيكي.

على الصعيد الآخر، بوابة CNOT لا تقدم مثل هذه الخدمة والسبب في ذلك هو إمكانية تراكب الحالات الكمية نتيجة لخطية ميكانيك الكم، فرغم أن هذه البوابة قادرة على نسخ الحالتين الكميتين $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ بشكل مماثل للحالة الكلاسيكية :

$$\begin{aligned} \text{CNOT } |00\rangle &= |00\rangle \\ \text{CNOT } |10\rangle &= |11\rangle \end{aligned} \quad (11.IV)$$

إلا أنها لا تستطيع من جهة أخرى أن تتسخ أي تركيبة خطية من الحالتين السابقتين من بت التحكم إلى بت الهدف :

$$\text{CNOT}((a|0\rangle + b|1\rangle)|0\rangle) = a|00\rangle + b|11\rangle \quad (12. IV)$$

هذه النتيجة مختلفة عن النتيجة التي ستعطيها آلة نسخ كمية حقيقية : $(a|0\rangle + b|1\rangle)(a|0\rangle + b|1\rangle)$.

عجز بوابة CNOT عن نسخ الحالة الكمية قد لا يعني أنه لا يوجد هناك بوابة معينة أو أداة تستخدم تحويلا محددًا يملك القدرة على نسخ حالة كمية غير معروفة، لكن قبل الذهاب بعيدا في هذه النقطة قد يكون من المفيد فهم ما الذي قد يعنيه أن يكون من الممكن نسخ أي حالة كمية مجهولة، فالقدرة على صنع نسخ من حالة كمية غير معروفة يسمح بالتعرف على هذه الحالة عن طريق تنفيذ عمليات قياس متكررة ومختلفة للتعرف على الحالة الكمية بالدقة المرغوبة، فمثلا التعرف على حالة بت كمي -كما سبق وتعرضنا له في العنصر II-2-1- يتطلب تحديد كل من $\langle S_x \rangle$ ، $\langle S_y \rangle$ و $\langle S_z \rangle$ لتحديد المحور الذي تتوجه وفقه حالة البت الكمي $|\uparrow_{\vec{n}}\rangle$ ، تخيل أن أحدهم قد أرسل بت كمي إلى شخص آخر، المستقبل يستطيع صنع عدة نسخ من البت الكمي الذي وصله ومن ثم يقيس نسخه وفق ثلاثة محاور متعامدة ليتمكن من التعرف على حالة البت الكمي الذي بحوزته. الميزة التي يمكن الاستفادة منها هنا هو أن البت الكمي بدل أن ينقل معلومة واحدة كمثيله الكلاسيكي أصبح بإمكانه نقل مجموعة أكبر من المعلومات، فشعاع الوحدة \vec{n} للمحور الذي يتوجه وفقه شعاع البت الكمي يملك درجتى حرية (θ, φ) ويمكن أن تخزن قيمتهما عددا كبيرا من البت الكلاسيكي وهو ما يمكن للمرسل الاستفادة منه لينقل للمستقبل عددا أكبر من المعلومات.

فائدة التعرف على حالة البت الكمي المجهولة بفضل عملية النسخ لا يتوقف هنا بل إن الأمر الأكثر إثارة بشأنها هو القدرة على نقل معلومات بسرعة أكبر من سرعة الضوء فعليا!! لتصوير كيفية حدوث هذا الأمر نتخيل أنه تم تحضير حالة معينة من حالات بيل (حالات الأساس (2 . IV)) ثم تم إرسال واحد من ثنائيات البت الكمي المتشابك إلى المستقبل الذي يوجد في مكان بعيد عن المرسل. لدى المستقبل القدرة على قياس سبين البت الكمي الذي لديه وفق المحور Ox أو وفق المحور Oz، لكن المرسل لا يستطيع أن يميز بواسطة عملية قياس واحدة إن كانت الحالة التي يقيسها هي حالة ذاتية لـ S_z أم لـ S_x ولا يستطيع تكرار عملية القياس للتعرف على حالة البت الكمي لأن عملية القياس الأولى قد غيرت حالته، ولهذا استنتجنا سابقا أن إرسال رسالة بسرعة أكبر من سرعة الضوء هو أمر مستحيل. لكن لو كانت هناك آلة نسخ للبت الكمي فإن المرسل يستطيع صنع عدة نسخ من البت الكمي الذي لديه ومن ثم يمكنه تحديد حالته بذات الطريقة التي

شُرحت سابقاً، إذًا يمكنه معرفة المؤثر الذي قاسه المُستقبل وبالتالي يستطيع قراءة رسالته، ما يعني أن هذه الرسالة قد انتقلت بسرعة أكبر من سرعة الضوء!

لقد خرق وجود آلة نسخ كمية للتو أحد قوانين النسبية الخاصة! وهو ما يرجح سلفاً بأن وجودها هو ربما أمر غير ممكن. للتحقق من هذا نبدأ بوضع الإطار النظري لآلة النسخ الكمية : لهذه الآلة القدرة على نسخ الحالة الكمية لأي بيت كمي A إلى بيت كمي آخر B موجود في الحالة $|0\rangle_B$ داخل الآلة، تقوم الآلة بتطبيق تحويل واحد معين على كلا البت الكميين ومن ثم تخرجهما في نفس الحالة الكمية، فمثلاً إن كان البت الكمي A في الحالة $|\varphi\rangle_A$ فإن الآلة ستعمل كالتالي :

$$|\varphi\rangle_A|0\rangle_B \rightarrow |\varphi\rangle_A|\varphi\rangle_B \quad (13.IV)$$

وإن كان في الحالة $|\psi\rangle_A$ فإن آلة النسخ ستقوم بالعملية الآتية :

$$|\psi\rangle_A|0\rangle_B \rightarrow |\psi\rangle_A|\psi\rangle_B \quad (14.IV)$$

وعليه فإن عمل آلة النسخ على الحالة $a|\varphi\rangle_A + b|\psi\rangle_A$ يعطي الحالة :

$$(a|\varphi\rangle_A + b|\psi\rangle_A)|0\rangle_B \rightarrow a|\varphi\rangle_A|\varphi\rangle_B + b|\psi\rangle_A|\psi\rangle_B \quad (15.IV)$$

آلة النسخ لم تقم هنا بنسخ حالة البت الكمي A الى البت الكمي B ، فالحالة التي تم الحصول عليها مختلفة عن الحالة $(a|\varphi\rangle_A + b|\psi\rangle_A)(a|\varphi\rangle_B + b|\psi\rangle_B)$ التي كنا نرجو الحصول عليها من آلة النسخ. إذًا فقد فشلت آلة النسخ في استنساخ الحالة الكمية بسبب خطية ميكانيك الكم مرة أخرى ولم يكن أداؤها أفضل من أداء بوابة CNOT.

ماذا لو حاولنا الآن تعميم العملية قليلاً بحيث نفرض أن التحويل الذي يعمل على حالي البت الكميين ليس واحدياً، ولكن يمكن أن يمدد ليكون واحدياً على فضاء أوسع من فضاء البت الكميين. وعليه نوسع الفضاء الذي تؤثر عليه آلة النسخ بالشكل الذي يسمح للتحويل الذي تطبقه أن يكون واحدياً، وبالتالي فإن تأثير آلة النسخ على حالتين عشوائيتين $|\varphi\rangle_A$ و $|\psi\rangle_A$ من فضاء البت الكمي A هو :

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle_A|0\rangle_B|\Omega_0\rangle &\rightarrow |\varphi\rangle_A|\varphi\rangle_B|\Omega_\varphi\rangle \\ |\psi\rangle_A|0\rangle_B|\Omega_0\rangle &\rightarrow |\psi\rangle_A|\psi\rangle_B|\Omega_\psi\rangle \end{aligned} \quad (16.IV)$$

أين Ω هو المحيط الذي يتأثر بالعملية الواحدية التي تقوم بها آلة النسخ (وقد يكون هذا المحيط هو آلة النسخ نفسها)، $|\Omega_0\rangle$ هي حالة المحيط قبل بدء عملية الاستنساخ ويمكن اعتبارها الحالة الواحدية للمحيط

قبل أن تؤثر عليه آلة النسخ، أما $|\Omega_\varphi\rangle$ و $|\Omega_\psi\rangle$ فهي حالة المحيط بعد عملية النسخ وقد تعتمد على حالة البت الكمي A وقد لا تعتمد عليها. العملية التي تنفذها آلة النسخ واحدية ما يعني أن الجداء الداخلي محفوظ، وبالتالي :

$${}_A\langle\varphi|\psi\rangle{}_A{}_B\langle 0|0\rangle{}_B\langle\Omega_0|\Omega_0\rangle = {}_A\langle\varphi|\psi\rangle{}_A{}_B\langle\varphi|\psi\rangle{}_B\langle\Omega_\varphi|\Omega_\psi\rangle \quad (17.IV)$$

وعليه فإن

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle\langle\Omega_\varphi|\Omega_\psi\rangle \quad (18.IV)$$

لو أردنا حل المعادلة السابقة من أجل معرفة قيمة الجداء الداخلي $\langle\varphi|\psi\rangle$ فإن الأمر سيكون مماثلاً لحل معادلة من الدرجة الثانية، الحل الأول لهذه المعادلة هو $\langle\varphi|\psi\rangle = 0$ أي أن الشعاعين $|\varphi\rangle$ و $|\psi\rangle$ متعامدان، وأما الحل الثاني فهو $\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\Omega_\varphi|\Omega_\psi\rangle^{-1}$ ، لكن الأشعة في فضاء هيلبرت الموسع منظمة ما يعني أن أقصى قيمة للجداء الداخلي لهذه الأشعة لا تتعدى الواحد (بقيمة مطلقة)، وعليه لا يمكن أن يكون الحل الأخير مقبولاً إلا إذا كان $|\langle\Omega_\varphi|\Omega_\psi\rangle|^{-1} = 1$ ، ما يعني أن الشعاع $|\varphi\rangle$ هو نفسه الشعاع $|\psi\rangle$ (قد يختلفان بفرق طور فقط) وكذلك $|\Omega_\psi\rangle = |\Omega_\varphi\rangle$. باختصار، لا تستطيع آلة النسخ المعممة سوى استنساخ حالات متعامدة فقط وليست قادرة على استنساخ أشعة غير متعامدة، وكل مجموعة متعامدة ومنظمة من الأشعة تنسخها آلة مصممة لتنسخ فقط أشعة تلك المجموعة أو الأساس ما يستلزم معرفة جزئية بحالة البت الكمي المراد استنساخه.

كل المناقشة السابقة ما هي إلا إثبات لنظرية مهمة في ميكانيك الكم تمثل نقطة اختلاف أخرى عن الميكانيك الكلاسيكي وهي نظرية 'عدم الاستنساخ'، وتنص على أنه من غير الممكن استنساخ حالة كمية مجهولة، ومن غير الممكن استنساخ حالات كمية غير متعامدة وإن كانت هذه الحالات معلومة والحالات الوحيدة التي يمكن استنساخها هي مجموعة معروفة من الأشعة المتعامدة [24,52,53,55,56].

IV-5- توزيع المفتاح الكمي (Quantum Key Distribution)

تعتمد معظم أنظمة الاتصال اليوم نوعاً معيناً من التشفير، قد لا تنتبه لهذا لكن انتقال المعلومات في أي جهاز اتصال يستخدم عملية تشفير معينة حتى تنقل المعلومة من اللغة البشرية العادية إلى لغة الآلة ليتمكن الجهاز فيما بعد من نقلها أو تخزينها.

علم التشفير 'Cryptography' يهدف في الأساس لإخفاء معلومات أو بيانات عن طريق استخدام شيفرة سرية تجعل من تلك البيانات أو المعلومات غير مفهومة لغير من يملك تلك الشيفرة. إن نقل المعلومات بسرية يتطلب وجود شيفرات خاصة وبروتوكولات معينة لتحقيق نقل آمن للمعلومات، لكن كلما تطورت عمليات التشفير تطور معها جنباً إلى جنب علم تحليل الشفرات 'Cryptanalysis'، والذي يطرح خطراً دائماً بأن يتم اكتشاف الرسالة السرية بواسطة جاسوس أو متلصص ما، لكن هناك نوعاً محدداً من عمليات التشفير -إن هو طبق بنجاح- تكون عملية اختراق الرسالة المشفرة بواسطته غير ممكنة على الإطلاق! تدعى هذه الطريقة بالمفتاح السري 'Private Key'، المميز في طريقة المفتاح السري أن الرسالة المشفرة التي تنتقل بين مستخدمين لا تحمل -بمفردها- أي معلومة على الإطلاق ولا يمكن لمن يحصل عليها أن يكتشف الرسالة السرية التي تنقلها. السر في هذه الطريقة يكمن في المفتاح السري الذي يكون موجوداً لدى المستخدمين فقط وغير معروف لأي أحد سواهما.

لنقل رسالة بطريقة المفتاح السري، نُحول أولاً إلى النظام الثنائي (1,0) بواسطة نظام ترميز معروف كلغة ASCII مثلاً، ثم يضاف إليها المفتاح والذي يكون عبارة عن سلسلة من الرقمين (1,0) على أن يكون طوله مساوياً لطول الرسالة على الأقل، يجمع كل رقم من الرسالة مع المفتاح على أن يكون الجمع بباقي القسمة على اثنين (النتيجة هي باقي قسمة المجموع على الرقم اثنين) ثم ترسل السلسلة المتحصل عليها إلى الوجهة المطلوبة، والتي كل ما عليها القيام به هو إضافة المفتاح من جديد إلى السلسلة لتتوصل على الرسالة السرية (من جديد الجمع يكون بباقي القسمة على اثنين) مثال يصور هذه الطريقة موجود بالشكل (IV-1).

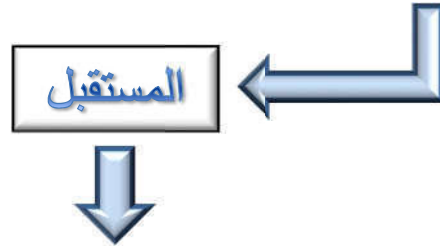
نقطة القوة لهذه الطريقة هو أنه لا يمكن اكتشاف الرسالة من دون وجود المفتاح، بل إنه يمكنك حتى أن تعطي نسخة من الرسالة المشفرة إلى المتلصص من دون أن يستطيع أن يفكها، لأنها بالفعل سلسلة عشوائية تماماً ولا تحمل أي معلومة يمكن للمتلصص أن يستغلها، فنفس الحرف في الرسالة يشفر بتتابع مختلف من الرقمين 0 و 1 في كل مرة حسب موضعه وتتابع الأرقام في المفتاح في تلك المنطقة. هذه الطريقة آمنة تماماً إذ أن احتمال أن يكشف المتلصص الشيفرة قبل الحصول على نسخة من الرسالة المشفرة مساو لاحتمال أن يكشفها بعد أن حصل على نسخة من الرسالة [20,57,58].

يبدو أن كل شيء ممتاز لحد الساعة، الطريقة آمنة جداً وغير قابلة للاختراق إن تم تشارك مفتاح سري بين المستخدمين بسرية وأمان، وهنا يظهر أكبر عائق عملي أمام هذا البروتوكول : فكيف يمكن أن يتم تشارك المفتاح بطريقة سرية ؟ يظهر هنا وكان علينا العودة لطرق التشفير الأخرى لنقل المفتاح بسرية، ونكون

هكذا قد عدنا بالفعل إلى نقطة الصفر، لأن أمان المفتاح السري هنا سيعتمد على أمان طريقة التشفير المستخدمة لنقله.

الرسالة : 010100111100101010000101110101
 ⊕ المفتاح : 000111011101000011101010011011

الرسالة المشفرة : 010011100001101001101111101110



الرسالة المشفرة : 010011100001101001101111101110
 ⊕ المفتاح : 000111011101000011101010011011

الرسالة : 010100111100101010000101110101

الشكل (1-IV) : مخطط لمثال يوضح مبدأ عمل التشفير بواسطة المفتاح الخاص 'Private Key'.

قد تتم مشاركة المفتاح يدا بيد بين المستخدمين لكن هذا ليس عمليا بالمرّة، واستخدام وسيط لينقل المفتاح يزيد من مخاطر أن يكتشف فكما زادت الأطراف المشاركة في عملية التشفير زاد خطر الاختراق، ما العمل إذا؟ ربما قد تكون الفكرة قد لمعت في رأسك بالفعل، يمكن استخدام التشابك الكمي لتشارك مفتاح سري عن طريق قياس مجموعة من الأجسام المتشابكة المشتركة بين المرسل والمستقبل! بالفعل يمكن للتشابك الكمي أن يمهد طريقا آمنة لنقل المفتاح بكل أمان، ولتوضيح الطريقة المتبعة لنقل المفتاح بواسطة التشابك الكمي بشكل عملي نتبع البروتوكول التالي :

يتشارك المستخدمان حالة متشابكة معينة، كأن يحضر المرسل مثلا مجموعة من ثنائيات البت الكمي في الحالة المتشابكة $|\psi^-\rangle$ ثم يقوم بإرسال بت كمي من كل ثنائية متشابكة نحو المُستقبل، بعد اكتمال عملية الإرسال يقوم كل من المرسل والمستقبل بقياس كل بت كمي متشابك من المجموعة وفق أساس الملاحظ S_x

أو الملاحظ S_z بشكل عشوائي، على أن يحاولوا أن تكون العملية متوازنة في النهاية بحيث حوالي نصف عمليات القياس تكون للملاحظ S_z والنصف الآخر للملاحظ S_x .

عمليات القياس تتم بشكل منفصل ودون أن يخبر أحد المستخدمين الآخر عن الملاحظ الذي سيقوم بقياسه لكل بت كمي حتى تنتهي جميع عمليات القياس لعناصر المجموعة، عندها يقوم كل من المرسل والمستقبل بالإعلان عن الملاحظ الذي قاما بقياسه لكل بت كمي دون الإفصاح عن نتيجة القياس. الإعلان يتم عبر قناة اتصال كلاسيكية وليس على هذه القناة أن تكون آمنة، فالتواصل بين المستخدمين الذي يتم عبر هذه القناة لا يحمل أي معلومات من الممكن أن يستفيد منها المتلصص لأن المعلومات آمنة في التشابك والترابط الذي يكون بين عناصره.

بعد معرفة كل مستخدم للملاحظات التي قاسها المستخدم الآخر أصبح من الممكن استخراج سلسلة المفتاح من نتائج القياس، فعندما يجد المستخدمان أنهما قد قاسا نفس الملاحظ لنفس ثنائية البت الكمي فالنتيجة التي حصلوا عليها مترابطة بفضل التشابك الكمي، ويكونان قد حصلوا على عنصر من سلسلة المفتاح السري. أما إن قاما بقياس ملاحظين مختلفين لنفس ثنائية البت الكمي فنتيجة القياس غير مترابطين وبالتالي لن تشكلا جزءا من المفتاح. على العموم تكون نتيجة المرسل والمستقبل مترابطين في نصف الحالات تقريبا، ويتم الاتفاق عبر قناة الاتصال الكلاسيكية على كيفية إرفاق الرقمين 0 و 1 بنتيجة قياس كل منهما. تدعى عملية توليد المفتاح السري بالطريقة السابقة بـبروتوكول EPR، والأمر المثير المتعلق به هو أن المستخدمين يمكنهما ألا يقوموا بعملية القياس إلا عند الحاجة لنقل رسالة بينهما، عندها فقط تتم عملية القياس وتوليد المفتاح السري.

بروتوكول EPR ليس الطريقة الوحيدة لنقل المفتاح السري باستخدام التشابك الكمي فثمة بروتوكول يُستعان به هو الآخر لنقل المفتاح ويدعى بـ'معكوس EPR' (Time-Reversed EPR)، وكما يوحي الاسم يقوم المستخدمان بالخطوات المعاكسة لتجربة EPR. في البداية يحضر كل منهما مجموعة من البت الكمي، كل بت كمي من المجموعة هو إما في الحالة الذاتية للملاحظ S_x أو في الحالة الذاتية للملاحظ S_z دون الكشف عن حالة كل بت كمي منهم، ثم يقومان بإرسالها واحدا بعد آخر إلى طرف ثالث. عندما يطلب المستخدمان توليد المفتاح، يقوم هذا الطرف الثالث بقياس كل ثنائي من البت الكمي الذي وصل من المستخدمين وفق أساس حالات بيل المتشابكة، ثم يقوم بنشر نتائج قياسه علنا، عندها يقوم المستخدمان بنشر تسلسل المحاور التي قاما بتحضير حالة كل بت كمي وفقها دون الكشف عن شعاع الحالة لكل بت كمي.

عناصر المجموعة التي قام المستخدمان بتحضيرها وفق نفس المحور تحمل معلومة مشتركة بينهما فقط : لنقل مثلا أن كلا البت الكمي قد حضرا وفق المحور Ox وشعاع حالتها هو $|01\rangle$ ، أين كل مستخدم ليس لديه فكرة عن حالة البت الكمي الآخر، لكن ما إن يعلن عن نتيجة قياس الحالة المتشابكة حتى يعلم كل منهما فجأة حالة البت الكمي الآخر، لأن شعاع الحالة غير المتشابكة $|01\rangle$ عند قياسه لا يمكن أن ينهار إلا إلى أحد الحالتين $|\psi^\pm\rangle$ لأن احتمال أن ينهار إلى الحالتين $|\phi^\pm\rangle$ معدوم، وبالتالي نتيجة قياس الطرف الثالث والمعلومة التي يملكها كل طرف عن حالة البت الكمي لديه تمكنه من معرفة حالة البت الكمي لدى المستخدم الآخر، لذا عندما يعلم المستخدم الأول صاحب البت الكمي $|0\rangle$ أن نتيجة القياس هي $|\psi^+\rangle$ مثلا فهو يعلم يقينا أن حالة البت الكمي لدى المستخدم الآخر قبل عملية القياس هي $|1\rangle$ ، وهكذا يتشارك المستخدمان معلومة لا يمكن لغيرهما أن يعلمها حتى الطرف الثالث نفسه.

في هذا البروتوكول لا تتربط نتيجتا المستخدمين حتى يقوم الطرف الثالث بالقياس، لذا يمكن أن يمثل هذا الطرف ما يشبه بنكا كميًا من حالات أرسلت من مجموعة كبيرة من المستخدمين، وما إن يحتاج اثنان منهما لنقل رسالة سرية فيما بينهما حتى يقوم البنك بقياس مجموعتيهما من البت الكمي وفق حالات بيل، ليتوفر لديهما مفتاح سري دون الحاجة لأن يلتقيا في أي مرحلة، ودون أن يعرف البنك هذا المفتاح لأنه غير قادر على نسخ مجموعات البت الكمي حسب نظرية عدم الاستنساخ، فهي محضرة وفق مجموعة من حالات كمية غير متعامدة، وأي نشاط مشبوه له سيؤدي إلى تغيير حالة البت الكمي ويمكن بالتالي كشفه عن طريق التخلي عن جزء من المفتاح وكشفه علنا من قبل المستخدمين ليتأكدا من ترابط نتائجهما.

تجدر الإشارة هنا أنه من الممكن نقل مفتاح سري كميًا من دون الاستعانة بالتشابك الكمي كما يحدث مثلا في البروتوكول BB84 والذي يختلف عن بروتوكول EPR في أن المرسل يقوم بإرسال مجموعة من البت الكمي إلى المستقبل بعد أن يقوم بتحضير كل واحد منها في أحد الحالات الذاتية للملاحظين S_x و S_z ، ثم يقوم المستقبل بعدها بقياس الملاحظين السابقين بشكل عشوائي متوازن كما حدث في بروتوكول EPR، ومن ثم تتبع نفس الخطوات في ذلك البروتوكول للحصول على المفتاح السري. في الحقيقة توجد عدة بروتوكولات كمية لإنشاء مفتاح سري بين طرفين ولأن العملية تمت بشكل كمي فإن توليد المفتاح بتلك البروتوكولات يدعى بتوزيع المفتاح الكمي [20,24].

IV-5-1- متلصص في الجوار

البروتوكولات التي تم استعراضها في العنصر السابق قادرة على نقل المفتاح السري بالاعتماد على ميكانيك الكم، لكن يبقى هناك تساؤل مشروع وهو هل هذه الطرق آمنة تماماً؟ فقد يختبأ متلصص في الجوار يبحث عن فرصة ليكتشف المفتاح، قد يتلصص على القناة الكلاسيكية للمستخدمين لكن المعلومات المنقولة في تلك القناة لن تمكنه من معرفة المفتاح لأن نقل المفتاح يتم في القناة الكمية، ما يعني أنه مضطر إلى التجسس على القناة الكمية التي تنقل البت الكمي.

في بروتوكول BB84 وبروتوكول معكوس EPR البت الكمي الذي ينتقل في القناة الكمية سيكون في حالة ذاتية للملاحظ S_x أو الملاحظ S_z ، وحسب نظرية عدم الاستساخ لا يمكن للمتلصص أن يتعرف على حالة البت الكمي من دون أن يؤثر عليها، وذلك لأنه يحاول التعرف على حالتين كميتين غير متعامدتين، وبالتالي فإن تأثيره على حالة البت الكمي المار بالقناة الكمية سيفسد الترابط الذي ينبغي أن يكون بين نتائج المستخدمين، ما يعني أنه يمكن كشف المتلصص عند المقارنة العلنية لأجزاء محدودة من المفتاح. إذاً تضمن نظرية عدم الاستساخ في هذه الحالة أن يكون فعل المتلصص قابلاً للرصد.

في بروتوكول EPR، الاعتماد يكون على التشابك الكمي، أين تكون الحالة الكمية لثنائية البت الكمي المتشابكة معروفة. قد يحاول المتلصص في هذه الحال أن يشابك الحالة المتشابكة لثنائية البت الكمي مع بت كمي آخر بحوزته عن طريق التأثير على البت الكمي المنقل داخل القناة، لتصبح الحالة الكلية لثنائية البت الكمي من الشكل :

$$|S\rangle_{ABE} = |00\rangle_{AB}|\tilde{e}_{00}\rangle_E + |01\rangle_{AB}|\tilde{e}_{01}\rangle_E + |10\rangle_{AB}|\tilde{e}_{10}\rangle_E + |11\rangle_{AB}|\tilde{e}_{11}\rangle_E \quad (19.IV)$$

الأشعة التي تحمل الدليل E هي أشعة خاصة بالبت الكمي للمتلصص، لاحظ أن المتلصص صار بإمكانه التعرف على نتيجة قياس المستخدمين، لأن عملية القياس هاته ستؤدي إلى انهيار حالة البت الكمي الذي لديه إلى شعاع محدد، وبعد إعلان المستخدمين للملاحظات التي قاموا بقياسها يمكن للمتلصص أن يقوم بقياس الأساس المناسب للبت الكمي الذي لديه ليتعرف على نتيجة قياس المستخدمين. على الرغم من أن هذا يبدو واعداً جداً لكن هل فعلته هاته ليس لها آثار تكشفه؟ في الحقيقة من الواضح أن الشعاع $|S\rangle_{ABE}$ مختلف عن الشعاع الأصلي لثنائية البت الكمي $|\psi^-\rangle$ ما يعني أنهما سيتصرفان بشكل مختلف تحت تأثير الملاحظات نفسها، تذكر أن $|\psi^-\rangle$ هي شعاع ذاتي للمؤثرين $\sigma_x^B \sigma_x^A$ و $\sigma_z^B \sigma_z^A$ وحتى لا يُفتضح أمر

المتلصص على الشعاع $|S\rangle_{ABE}$ أن يكون شعاعا ذاتيا لنفس المؤثرين مرفقا بنفس القيمة الذاتية، أي عليه أن يكون شعاع ذاتيا للمؤثر $\sigma_Z^B \sigma_Z^A$ مرفقا بالقيمة -1 :

$$\sigma_Z^B \sigma_Z^A |S\rangle_{ABE} = -|S\rangle_{ABE} \quad (20.IV)$$

وحتى يتحقق هذا على الشعاع $|S\rangle_{ABE}$ أن يكون من الشكل :

$$|S\rangle_{ABE} = |01\rangle_{AB} |\tilde{e}_{01}\rangle_E + |10\rangle_{AB} |\tilde{e}_{10}\rangle_E \quad (21.IV)$$

وعليه أن يكون أيضا شعاع ذاتيا للمؤثر $\sigma_x^B \sigma_x^A$ مرفقا بالقيمة -1 :

$$\sigma_x^B \sigma_x^A |S\rangle_{ABE} = -|S\rangle_{ABE} \quad (22.IV)$$

وبالتالي على الشعاع $|S\rangle_{ABE}$ أن يكون من الشكل :

$$|S\rangle_{ABE} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB}) |e\rangle_E = |\psi^-\rangle |e\rangle_E \quad (23.IV)$$

وعليه لا يمكن لشعاع الحالة $|S\rangle_{ABE}$ أن يكون شعاع ذاتيا للمؤثرين $\sigma_Z^B \sigma_Z^A$ و $\sigma_x^B \sigma_x^A$ إلا إذا كان شعاع البت الكمي للمتلصص غير متشابك مع شعاع حالة ثنائية البت الكمي $|\psi^-\rangle$ ، وبالتالي لا يمكن للمتلصص أن يحصل على معلومات من دون أن يخلف أثرا واضحا خلفه، وهذا مهم جدا فالقدرة على اكتشاف الاختراق في البروتوكول نقطة قوة مهمة في أداءه، بمعنى أنه من الممكن اكتشاف إن حدثت هناك عملية تجسس أم لا وبالتالي تحديد إن كان المفتاح آمنا أم لا بيقين تام [20].

المتلصص غير قادر على أن يعلم نتيجة القياس عن طريق مشابهة حالة بت كمي إضافي بالحالة المتشابكة لثنائي البت الكمي، بالتالي لم يبق لديه من حل سوى أن يقوم بقياس البت الكمي المنتقل بالقناة الكمية قبل أن يصل إلى وجهته عند المستقبل، هذه العملية تتسبب في إنهاء عملية التشابك على مستوى المتلصص لا على مستوى المستقبل، بمعنى أن النتائج المترابطة تكون بين المرسل والمتلصص لا بين المرسل والمستقبل.

للمتلصص أن يقيس S_x أو S_z بشكل عشوائي، فإن قام المستخدمان بقياس ملاحظين مختلفين فالنتيجة التي عند المتلصص ليست جزءا من المفتاح وعليه أن يتخلى عنها، أما إن قام المستخدمان بقياس نفس الملاحظ الذي قاسه المتلصص يكون المتلصص قد حصل على جزء من المفتاح دون يترك أي أثر، لأن المستقبل

عندما يقوم بتكرار نفس عملية القياس على البت الكمي سيحصل على نفس النتيجة التي حصل عليها المتلصص، وهذه النتيجة مترابطة مع نتيجة المرسل وبالتالي تأثير المتلصص ليس واضحا هنا.

إن قام المتلصص بقياس ملاحظ مختلف عن الملاحظ الذي قام بقياسه كلا المستخدمان، فإن الترابط الذي كان بين ثنائية البت الكمي قد انتهى عندما قام المتلصص بقياس ملاحظ مختلف عن الملاحظ الذي قام المرسل بقياسه، لنقل مثلا أن المرسل قد حصل على النتيجة 1- ومن المفترض أن يحصل المستقبل على النتيجة 1+ لأنهما قاما بقياس نفس الملاحظ، لكن بسبب تأثير المتلصص وقيامه بقياس ملاحظ مختلف فإن هناك احتمالا متساويا لأن يحصل المستقبل على النتيجة المترابطة المفترضة 1+ أو النتيجة الأخرى 1-، ما يعني أن تأثير المتلصص يتسبب في خطأ في الترابط المفترض بين نتائج المستخدمين، ولاكتشاف تأثيره يقوم المستخدمان بالكشف عن أجزاء من سلسلة المفتاح ليتأكدا من ترابط نتائجهما، فإن لم يكن هناك وجود لخطأ فعلية التجسس لم تقع والمفتاح آمن، وما عليهما إلا التخلي عن الأجزاء التي قاما بكشفها وإلا فإن عملية اختراق قد حدثت وعليهما أن يعيدا الكرة من جديد.

عندما يقوم المستخدمان بقياس نفس الملاحظ فإن هناك احتمالا قدره 50% لأن يقيس المتلصص نفس الملاحظ واحتمالا مساويا للاحتمال الأول لأن يقيس الملاحظ الخطأ، أي أن المتلصص وإن قام بقياس جميع البت الكمي المار بالقناة الكمية فهو لن يستطيع معرفة سوى 50% من سلسلة المفتاح، وتأثيره سيتسبب في عدم ترابط 25% من سلسلة المفتاح، وهي نسبة عالية ما يعني أنه يمكن كشف أمره بسهولة.

المتلصص لا ينوي الاستسلام بعد فما زال في جعبته ورقة أخيرة، المتلصص يعلم أنه لا وجود لقناة مثالية وكل قناة تتسبب في حد معين من الخطأ للمعلومات المنقولة عبرها، فحتى لو لم يكن هناك وجود للمتلصص فإن نسبة معينة من نتائج المستخدمين ستكون غير مترابطة. نسبة الخطأ التي ترتكبها القناة تكون معروفة وهناك عتبة قصوى معينة لا يمكن لنسبة الخطأ أن تتجاوزها. يقوم المتلصص باستغلال هذه النقطة وبدلا من أن يقوم بقياس كل بت كمي يمر في القناة يقوم بقياس نسبة معينة منها، بحيث الخطأ الذي يتسبب به المتلصص لا يمكن أن يتم تفرقه من الخطأ الذي تتسبب به القناة إن لم تتجاوز نسبة الخطأ الكلي العتبة الآتية الذكر. لكن هذا يأتي بثمن، فالمتلصص لن يستطيع معرفة جزء كبير من المفتاح في هذه الحال، مع ذلك فقد استطاع أن يتجسس على جزء منه دون أن يفتضح أمره. هل هذا يعني أن المتلصص قد فاز -ولو جزئيا- في النهاية؟ في الحقيقة أي معلومة يمكن أن يكون المتلصص قد حصل عليها يمكن محوها نهائيا عن طريق عمليتين : تصحيح الأخطاء وتضخيم السرية (Privacy implification) [24,52,58,59].

IV-5-2- تصحيح الأخطاء وتضخيم السرية

لا توجد قنوات نقل أو قنوات اتصال مثالية في العالم الحقيقي، ما يعني أن القناة الكمية الحقيقية ستتسبب في نسبة معينة من الأخطاء لنتائج المستقبل، فينجر عن ذلك أن سلسلة المفاتيح لدى المرسل والمستقبل ستكون مختلفة في بعض المواضع، فكيف يمكن للمستخدمين تجاوز هذا الأمر وكيف يمكنهما التفريق بين تأثير المتلصص وتأثير القناة؟

التفريق بين تأثير القناة وتأثير المتلصص ليس أمراً سهلاً أو ممكناً دائماً، لكن كل قناة تزود مستخدميها بالعتبة القصوى للخطأ في القناة، فإن تجاوزت نسبة الخطأ بين سلسلتي المستخدمين تلك العتبة فيمكن الجزم بأن هذا من فعل المتلصص ومن الأفضل التخلي عن المفاتيح في هذه الحالة. اكتشاف نسبة الخطأ يأتي بالمقارنة العننية لعدة مئات من البت الكلاسيكي من سلسلة المفاتيح ثم القيام بعدها بتحديد نسبة الخطأ بين سلسلتي المستخدمين، الأجزاء المكشوفة لا تصلح بعد ذلك لأن تكون جزءاً من المفاتيح ويتم التخلي عنها. إن كانت نسبة الخطأ بين المفاتيح أقل من العتبة فهذا لا يعني أنه لا وجود للمتلصص فعلى المستخدمين أن يكونا متأهبيين دائماً لوجود فعل مشبوه، لكن بما أن نسبة الخطأ أقل من العتبة فعليهما أن يفترضا أن المتلصص -إن كان موجوداً- قد تحصل على جزء صغير من المفاتيح، لكن الأولوية الآن هي لتصحيح الأخطاء الموجودة بين المفاتيح.

لتصحيح الأخطاء الموجودة بين سلسلتي المفاتيح دون الحاجة لكشف أي منهما علنا يقوم كل من المرسل والمستقبل بتقسيم سلسلة المفاتيح إلى مجموعات من n بت على أن يكون من غير المحتمل أن تحوي كل مجموعة على أكثر من خطأ واحد، حيث يتم الاتفاق على طريقة التقسيم والعدد n من خلال القناة الكلاسيكية.

يقوم بعدها المستخدمان بتحديد زوجية كل مجموعة ومن ثم يعلنان النتائج من جديد. زوجية مجموعة من البت الكلاسيكي تمثل عدد مرات تكرار الرقم 1 في المجموعة فإن كان عدد مرات تكراره رقماً زوجياً فالمجموعة زوجية (يرمز لها ب0) وإن كان عدد مرات تكرار العدد 1 فردياً فالمجموعة فردية (يرمز لها ب1). تحديد زوجية كل مجموعة يعطي معلومات مهمة للمتلصص ولذلك يقوم المستخدمان بحذف البت الأخير من كل مجموعة بعد تحديد زوجيتها، هذا يسمح لزوجية المجموعة أن تعود عشوائية من جديد.

إن تطابقت نتيجة زوجية مجموعة معينة بين المرسل والمستقبل فهذا يعني أنه لا يوجد أخطاء في تلك المجموعة (أو يوجد عدد زوجي منها) وإن أكتشف اختلاف في تحديد زوجية مجموعة فهذا يعني أن المجموعتان التي لدى المرسل والمستقبل مختلفتان ولا بد من وجود خطأ بهما. لتحديد الخطأ الموجود بالمجموعة يتم شطرها إلى نصفين وتحديد زوجية كل شطر ومن ثم يحذف البت الأخير منهما، إن تطابقت زوجية أحد الشطرين فهذا يعني أن الخطأ موجود بالشرط الآخر، يقسم ذلك الشرط مجدداً إلى نصفين وهكذا تستمر العملية السابقة إلى أن يحدد البت المختلف ويحذف. تكرر عملية اكتشاف الأخطاء عدة مرات باستخدام طول مختلف للمجموعة في كل مرة، حتى يتم التأكد من أن سلسلة المفاتيح قد تمت تنقيتها من كل الأخطاء الموجودة بها.

بعد أن أصبح المفاتيح الذي لدى المرسل والمستقبل متماثلاً مازال هناك تخوف من أن المتلصص قد مازال يملك أجزاء من المفاتيح، ففي النهاية ليس كل تأثير للمتلصص يتسبب في خطأ في المفاتيح، فاحتمالاً نصف خياراته لا تسبب أخطاء ولا يمكن للمستخدمين اكتشافها، إذًا من الضروري مضاعفة سرية المفاتيح عن طريق عملية تضخيم السرية.

في عملية تضخيم السرية يتم تقسيم المفاتيح الجديد الذي تم الحصول عليه بعد عملية تصحيح الأخطاء إلى مجموعات جزئية من جديد مثلما تم في عملية تصحيح الأخطاء، أين اختيار طول المجموعات الجزئية يتم علنياً عبر القناة الكلاسيكية، يقوم بعدها المستخدمان بتحديد بت الزوجية لكل مجموعة لكن هذه المرة دون أن يتم الكشف عن النتائج، وبدلاً من أن يتشكل المفاتيح من عناصر هذه المجموعات يتم تشكيل مفاتيح جديد انطلاقاً من بت الزوجية لكل مجموعة، هذه العملية ترفع من سرية المفاتيح بشكل كبير، فحتى يتمكن المتلصص من معرفة بت الزوجية لكل مجموعة عليه أن يعرف كل بت من تلك المجموعة، وهذا يرفع من سرية المفاتيح الجديد بشكل كبير [20,52,59].

IV-6- النقل الكمي (Quantum Teleportation)

عندما تسمع جملة 'النقل الكمي' قد يخطر ببالك أن الموضوع يتعلق بنقل نظام كمي بطريقة كمية ما، لكن الموضوع في الحقيقة هو عن نقل حالة كمية مجهولة لبت كمي دون نقل البت الكمي نفسه. قد يبدو الأمر هنا وكأنه يخالف نظرية عدم الاستنساخ ولكن الحالة الكمية المجهولة تنقل ولا تستنسخ، بمعنى أننا نأخذ حالة كمية مجهولة لبت كمي ثم ننقل هذه الحالة إلى بت كمي جديد موجود في مكان آخر، وعملية النقل

هذه تُنشئ حالة جديدة للبت الكمي الأول، أي أن الحالة الكمية المجهولة تختفي من مكان لتظهر في مكان آخر دون أن تكون هناك نسختان منها في أي وقت، لذا فالأمر لا يتعارض مع نظرية عدم الاستنساخ.

النقل الكمي هو تطبيق مهم من تطبيقات التشابك الكمي، وبفضل التأثير الغريب الذي يُظهره يمكن نقل الحالة المجهولة للبت الكمي دون تمييزها. برتوكول هذه العملية يبدأ بتشارك الحالة الكمية المتشابكة $|\phi^+\rangle_{AB}$ بين طرفين هما المرسل A والمستقبل B ، البت الكمي ذو الحالة المجهولة $|\varphi\rangle_C$ موجود لدى المرسل أين :

$$|\varphi\rangle_C = a|0\rangle_C + b|1\rangle_C \quad (24.IV)$$

المرسل يريد نقل الحالة الكمية $|\varphi\rangle_C$ إلى المستقبل لكن البت الكمي C ليس متشابكا مع البت الكمي الذي لدى المستقبل، لذلك سيكون هدف المرسل هو إيجاد عملية مناسبة يمكنه من خلالها نقل الحالة $|\varphi\rangle_C$ إلى المستقبل مستغلا البت الكمي المتشابك B الذي بحوزته، البداية ستكون من خلال كتابة شعاع الحالة لثلاثتهم :

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle_C |\phi^+\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a|0\rangle_C + b|1\rangle_C) (|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a|000\rangle_{CAB} + b|100\rangle_{CAB} + a|011\rangle_{CAB} + b|111\rangle_{CAB}) \end{aligned} \quad (25.IV)$$

الهدف الآن هو نقل المعاملات (a, b) إلى أشعة أساس البت الكمي B الموجود لدى المستقبل، ومن أجل هذه الغاية نعيد كتابة أشعة الأساس غير المتشابك لثنائي البت الكمي A و C بدلالة حالات بيل (الأشعة ((2. IV) :

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle_C |\phi^+\rangle_{AB} &= \frac{1}{2} [a(|\phi^+\rangle_{CA} + |\phi^-\rangle_{CA})|0\rangle_B + b(|\psi^+\rangle_{CA} - |\psi^-\rangle_{CA})|0\rangle_B + \\ &\quad + a(|\psi^+\rangle_{CA} + |\psi^-\rangle_{CA})|1\rangle_B + b(|\phi^+\rangle_{CA} - |\phi^-\rangle_{CA})|1\rangle_C] \\ &= \frac{1}{2} [(|\phi^+\rangle_{CA}(a|0\rangle_B + b|1\rangle_B) + |\phi^-\rangle_{CA}(a|0\rangle_B - b|1\rangle_B) + \\ &\quad + |\psi^+\rangle_{CA}(b|0\rangle_B + a|1\rangle_B) + |\psi^-\rangle_{CA}(-b|0\rangle_B + a|1\rangle_B)] \end{aligned} \quad (26.IV)$$

وعليه فإن :

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle_C |\phi^+\rangle_{AB} &= \frac{1}{2} |\phi^+\rangle_{CA} |\varphi\rangle_B + \frac{1}{2} |\phi^-\rangle_{CA} \sigma_z |\varphi\rangle_B + \\ &\quad + \frac{1}{2} |\psi^+\rangle_{CA} \sigma_x |\varphi\rangle_B + \frac{1}{2} |\psi^-\rangle_{CA} i\sigma_y |\varphi\rangle_B \end{aligned} \quad (27.IV)$$

إذا لينقل المرسل الحالة الكمية $|\varphi\rangle$ للبت الكمي C إلى البت الكمي B الموجود عند المستقبل عليه أن يقوم بقياس البت الكمي A و C وفق الأساس (2. IV)، هذا يؤدي إلى انهيار شعاع الحالة لثلاثة البت الكمي إلى أحد أشعة المجموع في المعادلة السابقة، وعليه ينهار شعاع موجة البت الكمي B إلى أحد الأشعة الأربعة $\{|\varphi\rangle_B, \sigma_x|\varphi\rangle_B, i\sigma_y|\varphi\rangle_B, \sigma_z|\varphi\rangle_B\}$ ، وبالتالي عندما يحصل المرسل على النتيجة $|\phi^+\rangle_{CA}$ فالبت الكمي B هو بالفعل في الحالة $|\varphi\rangle_B$ ، أما إن حصل على نتيجة أخرى فشعاع البت الكمي B ليس في الحالة $|\varphi\rangle_B$ بالضبط ولكن هو الشعاع $|\varphi\rangle_B$ بعد التأثير عليه بأحد مصفوفات باولي الثلاثة، إذاً ليحصل المستقبل على الشعاع $|\varphi\rangle_B$ عليه أن يطبق مقلوبها على البت الكمي B ، وبما أننا نعلم أن هذه المؤثرات واحدية وهرميتية فكل ما على المستقبل فعله هو أن يعيد تطبيق المؤثر نفسه على شعاع حالة البت الكمي B . الجدول (1-IV) يوضح التحويل الذي يجب على المستقبل تطبيقه من أجل الحصول على شعاع الحالة $|\varphi\rangle_B$ حسب النتيجة التي تحصل عليها المرسل.

الجدول (1-IV) : جدول يوضح جميع العمليات المتعلقة بالنقل الكمي ونتائجه.

نتيجة قياس المرسل	شعاع البت الكمي B	عملية التحويل على البت الكمي B	شعاع البت الكمي B الجديد
$ \phi^+\rangle_{CA}$	$a 0\rangle_B + b 1\rangle_B$	I	$a 0\rangle_B + b 1\rangle_B$
$ \phi^-\rangle_{CA}$	$a 0\rangle_B - b 1\rangle_B$	σ_z	$a 0\rangle_B + b 1\rangle_B$
$ \psi^+\rangle_{CA}$	$b 0\rangle_B + a 1\rangle_B$	σ_x	$a 0\rangle_B + b 1\rangle_B$
$ \psi^-\rangle_{CA}$	$-b 0\rangle_B + a 1\rangle_B$	σ_y	$e^{i\pi/2}(a 0\rangle_B + b 1\rangle_B)$

العملية التي على المستقبل أن يطبقها حتى يتم نقل الحالة الكمية $|\varphi\rangle$ من المرسل إلى المستقبل تعتمد على نتيجة قياس المرسل. إذا يبقى المستقبل في انتظار اتصال المرسل ليخبره بنتيجة قياسه حتى يعلم أي تحويل عليه القيام به لنقل تلك الحالة، وهو ما يتفق مع نظرية النسبية الخاصة، فلا يمكن أن يتم نقل معلومات أو طاقة بسرعة أكبر من سرعة الضوء. لاحظ أيضاً أن عملية النقل للحالة المجهولة تمت بدون أن يتم معرفة أي شيء عنها، فالنتيجة التي يتحصل عليها المرسل لا تتعلق بأي شكل من الأشكال بالحالة المجهولة $|\varphi\rangle$ وإلا كان هذا متناقضاً مع نظرية عدم الاستنساخ، لذا من المهم هنا تجديد التأكيد على أن الذي حدث هو عملية نقل وليس عملية نسخ [20,52,59].

الفصل الخامس

قياس التشابك الكمي

1-V- تمهيد

قدم التشابك الكمي منظورا جديدا للعالم الكمي، وأداة خارقة لنظرية المعلومات الكمية، ومع أنه قُدم في البداية كدليل على نقصان النظرية الكمية إلا أنه تم تأكيد وجوده بالفعل، وهو ما حطم العديد من الحواجز العقلية (الكلاسيكية) فيما يخص العالم الكمي. وإلى اليوم لا يزال المعنى الفيزيائي المرتبط بالتشابك الكمي غير مفهوم بشكل تام، فكل ما هو معلوم هو أنه موجود لكن كيفية حدوثه بالضبط مازال أمرا غامضا. هذه التوجسات لا تضر التشابك الكمي ولا تطبيقاته شيئا، لكنها ضرورية لتناسق المعرفة الكلية لميكانيك الكم، وهو ما سيكون مفيدا بشكل أو بآخر للتعرف على الوجه الحقيقي للتشابك الكمي. إن الوضع الحالي لا يساعد كثيرا للدخول في فلسفة التشابك الكمي وآليته، لذا قد يكون من المفيد أكثر الآن التعمق في آلية التحكم به وكيفية الاستفادة منه، لهذا سيتم تقصي جانب آخر من التشابك في هذا الفصل، أين سيكون الهدف الأساسي فيه هو تحديد كمية التشابك التي تحويها حالة كمومية معينة. فعلى سبيل المثال لا تحوي الحالة القابلة للفصل أي مقدار من التشابك لأنها حالة غير متشابكة، لكن ماذا عن مقدار التشابك الذي تحويه حالة أخرى غير قابلة للفصل؟ أي بشكل غير دقيق ربما كم تبعد هذه الحالة عن الحالة القابلة للفصل؟ إن معرفة مقدار التشابك الذي تحتويه الحالة الكمية يستدعي تعريف مقياس للتشابك، وسيتم التعرض لاثنتين منهما في هذا الفصل لكن هذا سيكون من أجل الأنظمة المكونة من قسمين فقط، وستكون الحالات الكمية لهذه الأنظمة هي الحالات المدروسة والمقصودة في سياق الحديث وإن لم تذكر صراحة، إلا إذا تمت الإشارة للعكس.

2-V- مقياس التشابك الكمي

قد لا تكون تطبيقات التشابك الكمي التي تعرضنا لها في الفصل السابق هي الوحيدة أو الأخيرة خاصة وأن التشابك الكمي لا يزال موضوعا خصباً حتى الآن. فالتطبيقات التي تمت الإشارة إليها سابقاً اعتمدت على نوع خاص من حالات المتشابكة وهي : حالات بيل أو الحالات ذات التشابك الأقصى لاثنتين من البت الكمي، ما يعني أن استغلال الحالات المتشابكة الأخرى لا يزال معطلاً ضمناً : كالحالات ذات التشابك غير الأقصى والحالات المختلطة لاثنتين من البت الكمي، الحالات المتشابكة لنظام مركب ثنائي بعده أكبر من اثنتين والأنظمة متعددة الأجزاء. إن محاولة استغلال خاصية التشابك في هكذا حالات يقتضي في الحقيقة تحديد مقدار التشابك الذي تحويه، حتى يكون من الممكن التوصل إلى الطريقة التي يمكن استغلاله بها عملياً، ففي عملية النقل الكمي على سبيل المثال كانت هناك حاجة لحالة متشابكة قصوى لاثنتين من

1-V- تمهيد

قدم التشابك الكمي منظورا جديدا للعالم الكمي، وأداة خارقة لنظرية المعلومات الكمية، ومع أنه قُدم في البداية كدليل على نقصان النظرية الكمية إلا أنه تم تأكيد وجوده بالفعل، وهو ما حطم العديد من الحواجز العقلية (الكلاسيكية) فيما يخص العالم الكمي. وإلى اليوم لا يزال المعنى الفيزيائي المرتبط بالتشابك الكمي غير مفهوم بشكل تام، فكل ما هو معلوم هو أنه موجود لكن كيفية حدوثه بالضبط مازال أمرا غامضا. هذه التوجسات لا تضر التشابك الكمي ولا تطبيقاته شيئا، لكنها ضرورية لتناسق المعرفة الكلية لميكانيك الكم، وهو ما سيكون مفيدا بشكل أو بآخر للتعرف على الوجه الحقيقي للتشابك الكمي. إن الوضع الحالي لا يساعد كثيرا للدخول في فلسفة التشابك الكمي وآليته، لذا قد يكون من المفيد أكثر الآن التعمق في آلية التحكم به وكيفية الاستفادة منه، لهذا سيتم تقصي جانب آخر من التشابك في هذا الفصل، أين سيكون الهدف الأساسي فيه هو تحديد كمية التشابك التي تحويها حالة كمومية معينة. فعلى سبيل المثال لا تحوي الحالة القابلة للفصل أي مقدار من التشابك لأنها حالة غير متشابكة، لكن ماذا عن مقدار التشابك الذي تحويه حالة أخرى غير قابلة للفصل؟ أي بشكل غير دقيق ربما كم تبعد هذه الحالة عن الحالة القابلة للفصل؟ إن معرفة مقدار التشابك الذي تحويه الحالة الكمية يستدعي تعريف مقياس للتشابك، وسيتم التعرض لاثنتين منهما في هذا الفصل لكن هذا سيكون من أجل الأنظمة المكونة من قسمين فقط، وستكون الحالات الكمية لهذه الأنظمة هي الحالات المدروسة والمقصودة في سياق الحديث وإن لم تذكر صراحة، إلا إذا تمت الإشارة للعكس.

2-V- مقياس التشابك الكمي

قد لا تكون تطبيقات التشابك الكمي التي تعرضنا لها في الفصل السابق هي الوحيدة أو الأخيرة خاصة وأن التشابك الكمي لا يزال موضوعا خصباً حتى الآن. فالتطبيقات التي تمت الإشارة إليها سابقاً اعتمدت على نوع خاص من حالات المتشابكة وهي: حالات بيل أو الحالات ذات التشابك الأقصى لاثنتين من البت الكمي، ما يعني أن استغلال الحالات المتشابكة الأخرى لا يزال معطلاً ضمناً: كالحالات ذات التشابك غير الأقصى والحالات المختلطة لاثنتين من البت الكمي، الحالات المتشابكة لنظام مركب ثنائي بعده أكبر من اثنتين والأنظمة متعددة الأجزاء. إن محاولة استغلال خاصية التشابك في هكذا حالات يقتضي في الحقيقة تحديد مقدار التشابك الذي تحويه، حتى يكون من الممكن التوصل إلى الطريقة التي يمكن استغلاله بها عملياً، ففي عملية النقل الكمي على سبيل المثال كانت هناك حاجة لحالة متشابكة قصوى لاثنتين من

البت الكمي من أجل نقل حالة بت كمي واحد، فإذا أخذنا أن مقدار التشابك الذي تحتويه أحد حالات بيل هو واحد بت تشابكي أو واحد ebit (اختصاراً لـ entangled bit)، فإنه من غير الممكن بدهة التصور بأنه من الممكن نقل بت كمي بواسطة حالة متشابكة ذات مقدار تشابك أقل من واحد ebit [60,61].

تحديد مقدار التشابك الذي تحتويه الحالات الكمية يستدعي تعريف مقياس للتشابك يمكن بواسطته تقدير كمية التشابك الموجودة في أي حالة نقية أو مختلطة، على أن يكون هذا المقياس مبرراً فيزيائياً و مريحاً من الناحية الرياضية أيضاً [61]. في الحقيقة إن الأبحاث التي كتبت في هذا المجال كثيرة جداً وعليه فقد ظهر عدد من المقاييس المختلفة التي تتنوع حسب المهمة أو العملية التي يركز عليها المقياس لتحديد مقدار التشابك الكمي في كل حالة، لكن قبل التعرض لهذه المقاييس وخصائصها ينبغي أولاً تحديد القيود أو الشروط التي تخضع لها الأنظمة المتشابكة. هذه القيود تتبع من المتطلبات العملية وتبرز بشكل طبيعي في عدد كبير من البروتوكولات الفيزيائية، فمن المنصف القول بأن أثر التشابك غالباً ما يكون ذا فائدة عند التعامل مع أجسام متشابكة متباعدة أي عند وجودها في أماكن منفصلة عن بعضها البعض بشكل كبير، لذا فإن العمليات الفيزيائية (عملية قياس، تحول واحد أو معمم...) التي تطبق على هذه الجسيمات تكون محلية على مستوى كل جسيم متشابك وعليه تدعى بالعمليات المحلية (Local Operations)، ذلك أنه لا يمكن أن تطبق عملية شاملة على كامل النظام المتشابك بسبب المسافات الموجودة بين أجزائه.

فيما عدا العمليات المحلية، يمكن للأطراف التي تتشارك الأجسام المتشابكة أن تتواصل فيما بينها بواسطة أجهزة اتصال كلاسيكية (Classical Communication) لتتشارك المعلومات حول نتائج العمليات المحلية، والتي قد تحدد العمليات المقبلة التي سيقوم بها كل طرف على مستوى نظامه المتشابك. إذاً بالإضافة إلى العمليات المحلية يمكن للأطراف التي تتشارك الأجسام المتشابكة أن تستخدم الاتصالات الكلاسيكية، ما يعني أن الأنشطة المعنية التي ستمس الأنظمة المتشابكة ستقتصر على العمليات المحلية والاتصالات الكلاسيكية (Local Operations and Classical Communication) أو باختصار LOCC، وهي تمثل عدداً مهماً من مجمل العمليات الممكن تطبيقها على الأنظمة المتشابكة ولعل واحداً من أهم أمثلتها يتمثل في عملية النقل الكمي [62,63,64].

إن العمليات الفيزيائية من نوع LOCC مهمة من أجل فهم خصائص مقياس التشابك كما سنرى بعد قليل، لكن في البداية ينبغي التنويه لجزئية مهمة: إن مقياس تشابك معين يعتمد في تحديد مقدار تشابك حالة كمية ما على مدى فائدة هذه الحالة في تنفيذ مهمة محددة [60]، فهو يصنف الحالات الكمية وفقاً لكفاءتها

في تنفيذ تلك المهمة، لكن التصنيف الذي يقره مقياس ما ليس بالضرورة نفس التصنيف الذي يقره مقياس آخر، ذلك أن حالة معينة قد تكون مفيدة في تنفيذ مهمة محددة ولكنها أقل فائدة في تنفيذ مهمة أخرى، وهو ما يعني أن المقاربة التي تعتمد على عملية محددة لتقدير درجة التشابك ستؤدي بشكل شبه مؤكد إلى تصنيف غير موحد لمقدار تشابك الحالات الكمية حسب العملية المختارة [62]. مع ذلك تبقى هناك بعض الخطوط العريضة والخصائص العامة التي لا بد من أن يحققها مقياس التشابك مهما كانت العملية أو المهمة التي يعتمد عليها لتحديد مقدار التشابك، هذه الخصائص أساسية جدا ومنطقية تماما بحيث أنها تقرر صلاحية مقياس التشابك من عدمها، لذا سيتم التعرض لها تباعا في النقاط التالية :

• مقدار تشابك الحالات غير المتشابكة أو القابلة للفصل معدوم

فلا بد لأي مقياس تشابك أن يقدم النتيجة 0 إذا كانت الحالة الكمية التي يقوم بتقدير تشابكها قابلة للفصل، بعبارة أخرى إذا رمزنا لمقياس التشابك بـ E فإن :

$$E(\rho) = 0 \quad (1.V)$$

من أجل أي حالة ρ قابلة للفصل [60,62]. بعودة سريعة إلى تحليل Schmidt نجد أن كل حالة نقية لنظام مركب من قسمين تكون قابلة للفصل إذا وفقط إذا كان عدد Schmidt مساويا للواحد أي أن :

$$|\psi\rangle_{AB} = |\varphi\rangle_A |\varphi'\rangle_B \quad (2.V)$$

في الحالة العامة أي في الحالة التي يكون فيها النظام مكونا من عدة أقسام والحالة الكمية مختلطة فإن الحالة تكون قابلة للفصل إن أمكن إيجاد تقسيم لمؤثر الكثافة الكلي من الشكل :

$$\rho_{ABC\dots} = \sum_i w_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i \otimes \rho_C^i \dots \quad (3.V)$$

أين $\{w_i\}$ هي توزيع احتمالي لحدود المجموع السابق. قد يبدو للوهلة الأولى أن هذه الحالة متشابكة لكن ليس فعلا، الحالة السابقة مترابطة صحيح فعند قياس أحد الأنظمة الجزئية وليكن A مثلا والعتور على الحالة ρ_A^k فإن هذا سيحدد بقية الأنظمة الجزئية $\{\rho_x^k\}$ لكن هذا لا يعني أن هذه الأنظمة متشابكة، فالاحتمالات $\{w_i\}$ التي يظهرها مؤثر الكثافة الكلي هي احتمالات كلاسيكية بمعنى أنها لا تقرر ذلك التأثير غير المحلي الذي ينقله التشابك الكمي، أي أنها حالة مترابطة كلاسيكيا فقط.

لتوضيح هذا بلغة أبسط يمكن إثبات أنه من الممكن تحضير هذه الحالة باستخدام عمليات من نوع LOCC فقط، بمعنى أنه يمكن تحضيرها دون الحاجة لالتقاء الأنظمة الجزئية وتنفيذ تحويل واحد يشابك حالات هذه الأخيرة، فيكفي أن يقوم الطرف A الذي بحوزته النظام الجزئي A بتحضير الحالة ρ_A^1 بتوزيع احتمالي w_1 ثم يعلم بقية الأطراف لتقوم بتحضير الحالات $\{\rho_x^1\}$ بذات التوزيع الاحتمالي، ومن ثم يقوم الطرف A بتحضير مجموعة أخرى من الحالات ρ_A^2 نسبتها توافق التوزيع الاحتمالي w_2 ومن ثم يخبر بقية الأطراف وهكذا. عند الانتهاء من تحضير جميع الحالات يقوم جميع الأطراف بالتخلي عن المعرفة الموجودة بحالة كل نظام جزئي وعليه تكون حالة النظام الكلي بعد هذه العملية هي أحد الحالات $\{\rho_A^k \otimes \rho_B^k \otimes \rho_C^k \dots\}$ التي قام الأطراف بتحضيرها وذلك بالاحتمال الموافق لها $\{w_k\}$ أي أن حالته هي نفسها الحالة $\rho_{ABC\dots}$ التي توضحها المعادلة (3-V) [62,65,66].

• المقدار الكلي للتشابك لا يمكن أن يرتفع باستخدام عمليات LOCC وحدها

لشرح هذه النقطة سنبدأ أولاً بمثال بسيط : ليكن هناك نظام مركب من قسمين AB حالة النظامين الجزئيين في البداية غير متشابكة، والعمليات الوحيدة التي يمكن القيام بها عليهما هي من نوع LOCC فقط، أي أننا اعتبرنا أن النظامين الجزئيين منفصلان عن بعضهما البعض منذ البداية. بما أنه ما من تواصل كمي بين النظامين الجزئيين وحالتهم الكمية منفصلة فإن أي عملية محلية قد يتم القيام بها على مستوى النظام A لن تغير قطعاً من حالة النظام B ، أي أن الطرف الذي يحوز على النظام A لن يستطيع التأثير على النظام B عن طريق التأثير على النظام الذي لديه وهذا أمر واضح تماماً، بعبارة أخرى لن يكون من الممكن إنشاء حالة متشابكة انطلاقاً من حالة غير متشابكة بواسطة عمليات LOCC فقط ! أي أن إنشاء تشابك يتطلب دائماً إجراء عملية شاملة على الأنظمة الجزئية ويستحيل إنشائه بالعمل محلياً على مستوى كل نظام جزئي. الأمر الذي يمكن استخلاصه وتعميمه من المثال السابق هو أنه عندما يتم تشارك مجموعة من الحالات المتشابكة فإن المقدار الكلي للتشابك الذي تحتويه هذه المجموعة لا يمكن أن يرتفع باستخدام عمليات من نوع LOCC فقط [62,63,65].

• مقدار التشابك لا يتغير تحت تأثير عمليات واحدة محلية

هذه الخاصية لا تعدوا كونها حالة خاصة من الخاصية السابقة، لمناقشتها نبدأ كالعادة بحالة نظام مكون من قسمين، حسب نظرية GHJW فإن تطبيق تحويل واحد على أحد النظامين الجزئيين لنظام مركب من

قسمين يحافظ على نفس مؤثر الكثافة للنظام الجزئي الآخر، وبالتالي فهو يحافظ على نفس القيم والأشعة الذاتية، لذا حسب نظرية تحليل Schmidt فإن مؤثر الكثافة للنظام الجزئي الأول (الذي طبقت عليه عملية التطور الواحدي) مازال يحتفظ بنفس القيم الذاتية، أي أن مقدار التشابك لم يتغير رغم أن تمثيل مؤثر الكثافة قد تغير بفعل التحويل الواحد المحلي، إذ ما قام به هذا التحويل هو فقط تغيير الأساس و يمكن العودة دائما إلى الأساس السابق باستخدام مقلوب ذلك التحويل والذي هو المرافق الهرميتي للعملية الواحدي السابقة. وعليه يكون :

$$E(\rho_{AB}) = E(U_A \otimes U_B \rho_{AB} U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger) \quad (4.V)$$

بشكل عام تطبيق تحويل واحد محلي على نظام جزئي من نظام أكبر متشابك لن يغير من مقدار التشابك الذي تحتويه الحالة الكمية الكلية، لأن ما يقوم به هو تبديل الأساس الذي تكتب فيه ويمكن دائما العودة إلى الأساس القديم باستخدام مقلوب التحويل الأول بشكل محلي، وبما أن مقدار التشابك لا يمكن أن يرتفع تحت تأثير عمليات LOCC حسب الخاصية السابقة، فلا بد من أن الحالة قبل التحويل والحالة بعده تحتويان على نفس مقدار التشابك [62,67,68].

بالإضافة إلى الخواص الثلاثة السابقة هناك خاصية أخرى يمكن إضافتها وهي :

• التجميعية (additivity)

تصور أن مجموعة من الأطراف تشاركت نظامين متشابكين متطابقين لهما نفس الحالة الكمية المتشابكة ρ وأرادت هذه المجموعة قياس مقدار تشابك هذه الحالة. من المنطقي أن نطلب من مقياس التشابك أن يعطي نفس النتيجة لكل من النظام الأول والثاني لأن لهما نفس الحالة الكمية. بشكل آخر، هذا مكافئ لأن نطلب أن يكون مقدار تشابك الحالة $\rho \otimes \rho$ هو ضعف مقدار تشابك الحالة ρ أي أن $E(\rho \otimes \rho) = 2E(\rho)$ ، بشكل عام ومن أجل أي عدد طبيعي N تكون $E(\rho^{\otimes N}) = NE(\rho)$ وهي خاصية التجميع التي من المفترض أن يحققها مقياس التشابك [62,65,69]. لكن حتى لو حدث ووجد مقياس تشابك يحقق الخصائص الثلاث الأولى لكنه لم يحقق الخاصية الأخيرة فإنه من الممكن تشكيل مقياس يحقق خاصية التجميع انطلاقا من المقياس الأول، حيث يعرف المقياس الجديد ب :

$$E^\infty(\rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(\rho^{\otimes n})}{n} \quad (5.V)$$

مقياس التشابك $E^\infty(\rho)$ يحقق خاصية التجميع وإن لم يحققها مقياس التشابك E حيث أن :

$$\begin{aligned}
 E^\infty(\rho^{\otimes N}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E((\rho^{\otimes N})^{\otimes n})}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(\rho^{\otimes Nn})}{n} \\
 &= N \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(\rho^{\otimes Nn})}{Nn} \equiv N \lim_{Nn \rightarrow \infty} \frac{E(\rho^{\otimes Nn})}{Nn} = NE^\infty(\rho) \quad (6.V)
 \end{aligned}$$

وبهذا نكون قد حصلنا على النتيجة المطلوبة :

$$E^\infty(\rho^{\otimes N}) = NE^\infty(\rho) \quad (7.V)$$

أما إن كان مقياس التشابك E يحقق خاصية التجميع منذ البداية فإن $E^\infty(\rho) = E(\rho)$ ، ويمكن استنتاج هذا بكل سهولة من العبارة (5-V).

يمكن أن نطلب أيضا من مقياس التشابك أن يحقق خاصية ' التجميع التام ' أي أن مقدار تشابك أي حالتين متميزتين $\rho \otimes \rho'$ يكون مساويا لمجموع كل حالة على حدى :

$$E(\rho \otimes \rho') = E(\rho) + E(\rho') \quad (8.V)$$

هذه الخاصية قوية جدا وقد لا يكون من السهل تقصيها دائما، كما قد لا تحققها بعض المقاييس الموجودة بالفعل لذا لن نلزم مقياس التشابك بأن يستوفيهما حاليا [62].

3-V- الحالة ذات التشابك الأقصى

عند التعامل مع مقياس التشابك والبحث عن مقدار التشابك الكمي قد يكون مفيدا تحديد المجال الذي يحصر قيمة مقدار التشابك الذي يمكن أن تحتويه حالات نظام معين. بداية نحن نعلم أن الحد الأدنى لمقدار التشابك هو صفر أي لا درجة تشابك على الإطلاق، وهذا في الحالات الكمية القابلة للفصل أو غير المتشابكة. لكن من جهة أخرى ما هو الحد الأعلى الممكن لمقدار التشابك الذي يمكن أن تبلغه الحالات الكمية النقية أو المختلطة لنظام ما؟ أو هل يوجد هذا الحد الأقصى على الإطلاق؟ الحالات التي تحتوي المقدار الأعلى من التشابك تدعى بالحالات ذات التشابك الأقصى، ونحن نعلم أنه هذه الحالات موجودة على الأقل للأنظمة المركبة من قسمين لكليهما نفس بعد فضاء هيلبرت d وهي الحالة الكمية :

$$|\psi_d^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} (|0,0\rangle + |1,1\rangle + \dots + |d-1, d-1\rangle) \quad (9.V)$$

وكل تحويل واحدي محلي لهذه الحالة الكمية هو أيضا حالة متشابكة قصوى لذات النظام وهذا حسب الخاصية الثالثة من العنصر السابق. التبرير الذي ينطوي وراء تعيين هذه الحالات كالحالات التي تحتوى

أقصى مقدار تشابك يمكن أن تبلغه أي حالة نظام مركب من قسمين بعدها d ، يتمثل في أنه من الممكن تحضير أي حالة كمية لهذا النظام انطلاقاً من هذه الحالات المتشابكة القصوى باستخدام عمليات LOCC فحسب، وبما أننا نعلم أن مقدار التشابك لا يمكن أن يرتفع باستخدام هذا النوع من العمليات فلا بد من أن الحالات الناتجة تحوي مقداراً مساوياً أو أقل للحالة الأولى ما يعني أنها بالفعل الحالات التي تحوي أقصى درجة تشابك [62].

إثبات عملي لهذا يمكن تقديمه عن طريق دراسة الحالة المتشابكة القصوى لاثنتين من البت الكمي AB ، والذي يمكن تعميمه من حيث المبدأ ليشمل أي نظام مكون من قسمين. في البداية يتم تثبيت أحد حالات بيل والتي هي حالات التشابك القصوى لنظام ثنائي من البت الكمي لدراستها، نختار مثلاً الحالة :

$$|\psi_2^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle) \quad (10.V)$$

أي حالة كمية ممكنة للنظام الثنائي يمكن كتابتها حسب تحليل Schmidt كالتالي :

$$|\varphi\rangle = \alpha|0,0\rangle + \beta|1,1\rangle \quad (11.V)$$

أين $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. لاحظ أن أساس Schmidt المستخدم لكتابة حالة التشابك القصوى والحالة السابقة هو ذات الأساس، ذلك أن أساس Schmidt لحالة التشابك القصوى عشوائي تماماً و يكون اختيار أي أساس Schmidt مقبولاً لهذه الحالة (التعرض لهذه النقطة تم في العنصر IV -2)، لذا يتم تثبيت أساس $|\psi_2^+\rangle$ ليكون نفس أساس Schmidt للحالة $|\varphi\rangle$ (بعبارة أخرى يوجد تحويل واحد محلي ينقل أساس Schmidt لـ $|\psi_2^+\rangle$ إلى أساس Schmidt لـ $|\varphi\rangle$ ، وتبقى الحالة الجديدة بعد التحويل حالة تشابك قصوى أيضاً). نبحث الآن عن عملية LOCC المناسبة التي تنتقل $|\psi_2^+\rangle$ إلى $|\varphi\rangle$ ، من الواضح أن عملية تحول واحد لن تكون ذي نفع هنا لأنها لن تغير مقدار التشابك، يمكن التفكير إذًا في عملية تطور معمة كما تصفها المؤثرات الفائقة، بما أن العمليات محلية فإن مؤثرات Kraus ستكون من الشكل :

$$\{M_\mu\} \equiv \{A_\mu \otimes B_\mu\} \quad (12.V)$$

أين المؤثرات $\{A_\mu\}$ تؤثر على القسم A فقط من النظام الثنائي أما المؤثرات $\{B_\mu\}$ فلا تؤثر سوى على القسم الآخر B . بمقارنة عبارتي $|\psi_2^+\rangle$ و $|\varphi\rangle$ يمكن التفكير في أن أحد مؤثرات Kraus سيقوم فقط بإسناد القيمة α (β) إلى الشعاع $|0,0\rangle$ ($|1,1\rangle$) دون أن يقوم بتغيير هذا الشعاع، يمكن تنفيذ هذه العملية كلياً على مستوى أحد القسمين، ومنه أحد مؤثرات Kraus الممكنة هو :

$$p_0(\alpha|0\rangle\langle 0| + \beta|1\rangle\langle 1|) \otimes I \quad (13.V)$$

هذا المؤثر ينقل $|\psi_2^+\rangle$ إلى الشعاع $|\varphi\rangle$ أين p_0 هو عدد حقيقي نستخدمه لاحقا لضمان تنظيم مؤثرات Kraus. طريقة أخرى للحصول على الشعاع $|\varphi\rangle$ هي بقلب الشعاع $|0,0\rangle$ إلى $|1,1\rangle$ الشعاع $|1,1\rangle$ و $|0,0\rangle$ واسناد القيمة β (α) إلى الشعاع الجديد، وعليه مؤثر Kraus هو :

$$p_1(\beta|1\rangle\langle 0| + \alpha|0\rangle\langle 1|) \otimes (|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|) \quad (14.V)$$

وهو ينقل الشعاع $|\psi_2^+\rangle$ إلى الشعاع $|\varphi\rangle$ أين p_1 هو من جديد عدد حقيقي، يمكن الانتباه إلى أن هذين المؤثرين كافيان لتحقيق علاقة التمام لمؤثرات Kraus (العلاقة (III-68)) عند اختيار $(p_0 = p_1 = 1)$ [62]، وبالتالي :

$$\begin{aligned} M_0 &= (\alpha|0\rangle\langle 0| + \beta|1\rangle\langle 1|) \otimes I \\ M_1 &= (\beta|1\rangle\langle 0| + \alpha|0\rangle\langle 1|) \otimes (|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|) \end{aligned} \quad (15.V)$$

هذه المؤثرات تحقق علاقة التمام :

$$\sum_{\mu=0}^1 M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu} = I \otimes I \quad (16.V)$$

وعندما تؤثر على الحالة $|\psi_2^+\rangle$ فهي تعطي

$$\sum_{\mu=0}^1 M_{\mu} |\psi_2^+\rangle \langle \psi_2^+| M_{\mu}^{\dagger} = |\varphi\rangle \langle \varphi| \quad (17.V)$$

نريد الآن تحديد الخطوات العملية الفيزيائية للحصول على $|\varphi\rangle$ انطلاقاً من مؤثرات Kraus السابقة. نبدأ أولاً مع مؤثرات Kraus المحلية $\{A_{\mu}\}$ على مستوى النظام الجزئي A ، لتنفيذ عملية التطور التي تصفها مؤثرات Kraus هاته يجب إضافة نظام إضافي a إلى البت الكمي A في الحالة الكمية $|0\rangle_a$ العملية محلية تماماً- ومن ثم تنفيذ عملية تطور واحد معينة U على النظامين السابقين أين توصف عملية التطور هاته على مستوى النظام الجزئي A بمؤثرات Kraus $\{A_{\mu}\}$. بما أنه هناك مؤثر Kraus فيكفي أن يكون بعد النظام الإضافي هو اثنان و لإيجاد التمثيل الواحد الذي يتم على النظام $A + a$ نستخدم التمثيل الواحد للمؤثر الفائق (العلاقة (III-74)) فنجد أن

$$U|0\rangle|0\rangle_a = \sum_{\mu=0}^1 A_{\mu}|0\rangle|\mu\rangle_a = \alpha|0\rangle|0\rangle_a + \beta|1\rangle|1\rangle_a \quad (18.V)$$

$$U|1\rangle|0\rangle_a = \sum_{\mu=0}^1 A_{\mu}|1\rangle|\mu\rangle_a = \beta|1\rangle|0\rangle_a + \alpha|0\rangle|1\rangle_a$$

أما بالنسبة للبت الكمي B فإن مجموعة المؤثرات $\{B_{\mu}\}$ التي تؤثر عليه هي مجموعة مؤثرات واحدة ما يعني أن تنفيذها لا يحتاج لإقحام نظام إضافي آخر.

بعد أن تم تحديد جميع العمليات اللازمة لنقل الحالة الكمية $|\psi_2^+\rangle$ إلى الحالة $|\varphi\rangle$ يمكن الآن تنظيم خطوات هذه العملية بشكل عملي :

في البداية يحضر الطرف الذي يحوز على النظام A بتا كميًا آخر a في الحالة $|0\rangle_a$ بحيث يصبح شعاع الحالة الكلي من الشكل :

$$|\psi_2^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle|0\rangle_a + |1,1\rangle|0\rangle_a) \quad (19.V)$$

يقوم ذات الطرف بتنفيذ التحويل الواحدي المعرف بالمعادلة (18-V) على النظام $A + a$ فيتغير شعاع الحالة الكلي ليصير

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0,0\rangle|0\rangle_a + \beta|1,0\rangle|1\rangle_a + \beta|1,1\rangle|0\rangle_a + \alpha|0,1\rangle|1\rangle_a) \quad (20.V)$$

تنفيذ بقية العمليات الواحديّة على القسم B (أي الجزء الخاص بهذا القسم من مؤثرات Kraus (15-V)) يتطلب إرفاق كل مؤثر A_{μ} بالمؤثر الموافق له B_{μ} ، لكن سبق وتم تنفيذ كل المؤثرات $\{A_{\mu}\}$ على الحالة $|\psi_2^+\rangle$ ، لذا فإن الحل المتبقي هو القيام بعملية قياس متعامد على النظام a في الأساس $\{|0\rangle_a, |1\rangle_a\}$ ، لأن هذا -حسب التمثيل الواحدي للمؤثر الفائق (المعادلة (18-V))- سينقل شعاع الحالة (20-V) إلى شعاع جديد لا يبقى فيه أثر سوى لمؤثر Kraus واحد من المجموعة $\{A_{\mu}\}$ ، عندها يمكن للطرف الذي يحوز على البت الكمي B أن ينفذ التحويل الواحدي الموافق لنتيجة القياس، فإن كانت نتيجة قياس a هي $|0\rangle_a$ فإن شعاع حالة النظام AB الناتج هو $(\alpha|0,0\rangle + \beta|1,1\rangle)$ وليس على الطرف B أن ينفذ أي تحويل لأن المؤثر B_0 الموافق لـ A_0 ما هو إلا مؤثر الوحدة I ، أما إن كانت نتيجة قياس a هي $|1\rangle_a$ فإن الشعاع (20-V) سينهار إلى الشعاع $(\alpha|0,1\rangle + \beta|1,0\rangle)$ ، عندها على الطرف B أن ينفذ التحويل الواحدي

$(|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|)$ الذي يمثل المؤثر الهرميتي σ_x . وبهذا يمكن الحصول على أي حالة نقية $|\varphi\rangle$ انطلاقاً من $|\psi_2^+\rangle$ بواسطة عمليات LOCC فقط.

بقي الآن إثبات أن أي حالة مختلطة ρ يمكن الحصول عليها هي الأخرى انطلاقاً من الحالة ذات التشابك الأقصى $|\psi_2^+\rangle$ بواسطة عمليات LOCC فحسب. إن أي حالة مختلطة ρ يمكن كتابتها كتركيبية محدبة من مُسقطات أشعتها الذاتية $\{|\varphi_i\rangle\}$ كالتالي $\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle \varphi_i|$ ، أين $\{p_i\}$ هي القيم الذاتية لـ ρ وحسب تحليل Schmidt لهذه الأشعة الذاتية، فإن كل واحد منها يمكن أن يكتب من الشكل :

$$|\varphi_i\rangle = \alpha_i |0,0\rangle + \beta_i |1,1\rangle \quad (21.V)$$

إذاً لتحضير الحالة ρ يمكن الاستعانة بتفسير المجموعة لمؤثرات الكثافة : يتم تحضير عدد من الحالات $|\varphi_0\rangle$ انطلاقاً من الحالة ذات التشابك الأقصى $|\psi_2^+\rangle$ بوزن احتمالي p_0 ، وذلك باستخدام نفس البروتوكول السابق أين $(\alpha \equiv \alpha_0, \beta \equiv \beta_0)$. بعد ذلك تحضر الحالة التي تليها $|\varphi_1\rangle$ بوزن احتمالي p_1 وهكذا. بعد الانتهاء من تحضير جميع الحالات يُسمح أي توثيق لحالة كل عنصر من المجموعة، فتصير الحالة المحتملة لكل واحد منها هي أحد الحالات $\{|\varphi_i\rangle\}$ التي تم تحضيرها باحتمال $\{p_i\}$ ، وبالتالي تصبح الحالة الكمية لكل عنصر من المجموعة هي : $\sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle \varphi_i|$ وهي الحالة المختلطة المطلوب تحضيرها ρ ، ما يعني أنه تم تحضير عدد من الحالة المختلطة ρ باستخدام نفس العدد من الحالة ذات التشابك الأقصى $|\psi_2^+\rangle$. وعليه يمكن تحضير أي حالة نقية أو مختلطة لنظام مركب من اثنين من البت الكمي انطلاقاً من الحالة (10.V) باستخدام عمليات من نوع LOCC فقط، وهو ما يعني أن هذه الحالة (وكل تحويل أحادي محلي لها) هي حالة ذات تشابك أقصى.

4-V- ضغط المعلومات الكمية (Quantum Data Compression)

قبل التعرّيج على أهم مقاييس التشابك المعروفة حالياً، سيكون من المفيد التعرض ولو بشكل مبسط لضغط المعلومات الكمية، لأن هذا سيساعد في خلق الجو المناسب لفهم مقاييس التشابك التي سيتم التعرض لها لاحقاً بشكل أفضل، كما أنه سيحضر بعض الأدوات والمفاهيم التي سيتم استخدامها بشكل متكرر.

إن المقصود بالمعلومات أو البيانات الكمية هو أشعة الحالة الكمية، فمن المعلوم مثلاً أن الحالة الكمية للبت الكمي هي المستخدمة لنقل المعلومات في نظرية المعلومات الكمية، بالمثل يمكن التعميم ومعاملة جميع الحالات الكمية كمعلومات كمية، وهكذا يصبح المقصود بضغط المعلومات الكمية هو ضغط الحالات الكمية

وهو المفهوم الذي سنتعرف عليه بشكل واف في هذا العنصر. الحالات الكمية التي سنتعرض لكيفية ضغطها هي حالة البت الكمي لأنها الحالة الأسهل وذات الأهمية الأكبر، ولأننا مهتمون بالتشابك الكمي فالعمل سيتم على حالات متشابكة من البت الكمي، نفترض أن هناك n حالة ثنائية متشابكة من البت الكمي جميعها في الحالة الكمية :

$$|\psi\rangle = \sqrt{p}|00\rangle_{AB} + \sqrt{1-p}|11\rangle_{AB} \quad (22.V)$$

الحالة الكلية لـ n ثنائية من البت الكمي هي $|\psi\rangle^{\otimes n}$ ، وبعد بعض الترتيب يمكن كتابتها من الشكل :

$$|\psi\rangle^{\otimes n} = \sum_{x_1 x_2 \dots x_n} \sqrt{q(x_1)q(x_2) \dots q(x_n)} |x_1 x_2 \dots x_n\rangle_A |x_1 x_2 \dots x_n\rangle_B \quad (23.V)$$

أين $\{x_i\}$ هي متغيرات تأخذ القيمة 1 أو 0 فقط، الشعاع $|x_1 x_2 \dots x_n\rangle_A |x_1 x_2 \dots x_n\rangle_B$ هو أحد أشعة الأساس الذي كتبت فيه الحالة $|\psi\rangle^{\otimes n}$ ، حيث x_1 تعبر عن حالة البت الكمي الأول الموجود بالقسم A وكذا حالة البت الكمي الأول الموجود بالقسم B والمتشابك مع البت الكمي الأول الموجود بـ A ، x_2 تعبر عن حالة ثنائية البت الكمي الثانية المتشابكة و التي يوجد أحدها بالقسم A و الآخر بالقسم B وهكذا، أما الدالة $q(x_i)$ فهي الدالة المعرفة بـ $\{q(0) = p; q(1) = 1 - p\}$.

عدد الحدود الذي يحتويه المجموع السابق هو 2^n حد، ذلك أن الحدود تجمع حسب المتغيرات $\{x_i\}$ وبما أنه يوجد n متغير وكل واحد منهم يمكنه أن يأخذ القيمة 0 أو 1 بشكل مستقل عن الآخر، فإن هذا يعني أن هناك 2^n حد بالمجموع. الهدف المراد تحقيقه بواسطة بروتوكول معين من ضغط المعلومات الكمية، هو ضغط الحالات الموجودة بقسم معين (A مثلاً)، ومن ثم القدرة على فك هذا الضغط والعودة للحالات الكمية القديمة دون المساس بالتشابك الموجود بين القسمين A و B . كيفية عمل هذا البروتوكول و المبدأ الذي يعتمد عليه سنتوضح تباعاً في الفقرات القادمة [64].

إن احتمال العثور على النظام AB في الحالة $|x_1 x_2 \dots x_n\rangle_A |x_1 x_2 \dots x_n\rangle_B$ مماثل لاحتمال العثور على النظام الجزئي A في الحالة $|x_1 x_2 \dots x_n\rangle_A$ ، ومماثل لاحتمال العثور على الشعاع $|x_1 x_2 \dots x_n\rangle_B$ عند قياس النظام الجزئي B وهو يعطى بـ :

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = q(x_1)q(x_2) \dots q(x_n) \quad (24.V)$$

نريد الآن تقسيم شعاع الحالة $|\psi\rangle^{\otimes n}$ إلى مجموعات أشعة جزئية، كل مجموعة تتشكل من الأشعة التي لها نفس الاحتمال $Q(x_1, \dots, x_n)$ ، أي أن جميع الأشعة التي تنتمي إلى نفس المجموعة لها نفس العدد من الرقم 0 وبالتالي نفس العدد من الرقم 1، لكن ترتيب توزيع هذين الرقمين في الشعاع $|x_1 x_2 \dots x_n\rangle_A$ يختلف من عنصر لآخر في المجموعة، وهذا ما هو إلا استنتاج بسيط من عبارة الاحتمالات (24-V) (يكفي هنا الحديث عن طرف واحد من النظام الكلي نتيجة تماثل الاحتمالات، ولكون ترتيب الأرقام في الشعاع $|x_1 x_2 \dots x_n\rangle_A$ مماثل لترتيبها في الشعاع $|x_1 x_2 \dots x_n\rangle_B$ ،. إذاً كل مجموعة يمكن التعبير عنها بسلسلة $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ من الأرقام 0 و 1 أين كل ترتيب محدد لعناصر هذه السلسلة يؤدي إلى شعاع معين من المجموعة، وعليه يمكن إعادة كتابة الشعاع $|\psi\rangle^{\otimes n}$ على الشكل :

$$|\psi\rangle^{\otimes n} = \sum_{X_i} \sqrt{Q(X_i)} \sum_{per(X_i)} |per(X_i)\rangle_A |per(X_i)\rangle_B \quad (25.V)$$

أين $\{X_i\}$ هي السلاسل الممكنة تشكيلها من n بت (1,0) وعددها $n + 1$ سلسلة، و $per(X_i)$ هي التبديلات الممكنة لعناصر السلسلة X_i . لو اصطلحنا على أن i ترمز لعدد الأصفار في السلسلة X_i فإن عدد التبديلات الممكنة للسلسلة $\{X_i\}$ هو $\frac{n!}{i!(n-i)!}$ و $Q(X_i) = p^i(1-p)^{n-i}$. نريد الآن البحث عن ذلك الحد من المجموع السابق على السلاسل الممكنة لـ $|\psi\rangle^{\otimes n}$ الذي له الاحتمال الأكبر، بعبارة أخرى أي مجموعة من المجموعات $\{X_i\}$ التي تم تقسيم الشعاع $|\psi\rangle^{\otimes n}$ إليها يجمع أكبر احتمال كمي. الاحتمال $P(X_i)$ الذي تجمعه كل سلسلة هو مجموع احتمالات العثور على أي شعاع من المجموعة المعرفة بالسلسلة $\{X_i\}$ ، وبما أن جميع هذه الأشعة لها نفس الاحتمال $Q(X_i)$ فإن الاحتمال الذي تملكه السلسلة $\{X_i\}$ ما هو إلا عدد تبديلات تلك السلسلة في الاحتمال $Q(X_i)$ أي أن :

$$P(X_i) = \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} \quad (26.V)$$

لو أردنا أن نصور الأمر بشكل أبسط قليلاً، فيمكن تصور أنه لدينا احتمال p للعثور على النتيجة 0 و $1-p$ للعثور على النتيجة 1 عند بت كمي واحد. نريد الآن معرفة احتمال العثور i مرة على النتيجة 0 و $n-i$ مرة على النتيجة 1 في سلسلة من n بت كمي دون الاهتمام لترتيب العثور على هذه النتائج، احتمال العثور على تسلسل معين من هذه السلسلة هو $p^i(1-p)^{n-i}$ ، لكن عند عدم الاهتمام بترتيب الحصول على النتائج 0 و 1 يكون لدينا $\frac{n!}{i!(n-i)!}$ طريقة للحصول على نفس السلسلة، ما يعني أن الاحتمال الكلي هو $\frac{n!}{i!(n-i)!} p^i(1-p)^{n-i}$ وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها في المعادلة السابقة. وحتى نتأكد

من هذه النتائج، يمكن الانتباه إلى أن مجموع الاحتمالات لكل السلاسل الممكنة $\{i = \overline{0, n}\}$ هو الوحدة حسب قانون ثنائي حد نيوتن.

معرفة أكبر قيمة ممكنة للاحتمال $P(X_i)$ من أجل p و n محددين، يعني تحديد قيمة i التي يكون من أجلها ذلك الاحتمال أعظما، أي القيمة i_0 التي تعدم مشتق الدالة $P(X_i)$ بالنسبة للمتغير i :

$$\frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} \right) \Big|_{i=i_0} = 0 \quad (27.V)$$

الاهتمام سيكون فقط بالحالات التي يكون فيها n عددا كبيرا كفاية بحيث يمكن استخدام علاقة Stirling :

$$\ln n! \cong n \ln n - n \quad (28.V)$$

سنعتبر أن i_0 كبير كفاية بحيث يمكن أن تطبق عليه علاقة Stirling هو الآخر، ورغم أن هذا حدسي في البداية لكنه مبرر نوعا ما خاصة وأن التوفيقات $\left\{ \frac{n!}{i!(n-i)!} \right\}$ تأخذ أكبر قيمها من أجل $i = n/2$. بما أن الدالة \ln متزايدة فإن لـ $P(X_i)$ و $\ln P(X_i)$ نفس القيمة العظمى، لكن من الواضح أن التعامل مع الدالة الأخيرة أسهل بكثير بفضل علاقة Stirling، وعليه :

$$\frac{\partial}{\partial i} \ln \left(\frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} \right) \Big|_{i=i_0} = 0 \quad (29.V)$$

حل هذه المعادلة مباشر عند استخدام علاقة Stirling (28-V) لكل من $n!$ ، $i!$ و $(n-i)!$ ويمكن التأكد من أن الحل هو :

$$i_0 = np \quad (30.V)$$

طبعا سنفترض هنا أن np هو عدد طبيعي لتفادي أي تعقيدات أخرى في هذه المرحلة. إذا السلسلة الأكثر احتمالا هي السلسلة التي يكون تردد الرقم 0 فيها موافقا للاحتمال p ، وهو احتمال العثور على النتيجة 0 لبيت كمي واحد، وكذا تردد الرقم 1 في السلسلة $(n-i_0 = n(1-p))$ موافق لـ $1-p$ وهو احتمال العثور على النتيجة 1 لبيت كمي وحيد. يدعى كل تسلسل أو ترتيب معين يحقق الخاصيتين الأخيرتين بالتسلسل النموذجي (*typical sequence*)، وبالتالي كل تسلسل نموذجي ينتمي إلى السلسلة الأكثر احتمالا.

حسب نظرية الأعداد الكبرى و التي يمكننا الحديث عنها هنا لأننا أخذنا n كبيراً كفاية، فإن تصرف شعاع الحالة $|\psi\rangle^{\otimes n}$ سيقره الحد الأكثر احتمالاً منها، حتى أنه من الممكن -كتقريب جيد جداً- الاكتفاء بدراسة الحد الأكثر احتمالاً فقط وإهمال بقية الحدود الأخرى، وستكون النتائج المتحصل عليها عند الاكتفاء بالحد الأكثر احتمالاً و شعاع الحالة $|\psi\rangle^{\otimes n}$ متقاربة بشكل كبير جداً، ويزيد هذا التقارب كلما زادت n .

إن كل شعاع من السلسلة الأكثر احتمالاً مرفق بالاحتمال $Q(X_{i_0}) = p^{np}(1-p)^{n(1-p)}$ وعليه فإن :

$$\log_2 Q(X_{i_0}) = np \log_2 p + n(1-p) \log_2(1-p) \quad (31.V)$$

أين $\log_2 a = \ln a / \ln 2$ ، وبالتالي :

$$-\frac{1}{n} \log_2 Q(X_{i_0}) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2(1-p) \equiv h(p) \quad (32.V)$$

من المساواة السابقة يمكن أن نستنتج أن $Q(X_{i_0}) = 2^{-nh(p)}$ من أجل كل تسلسل نموذجي من السلسلة X_{i_0} .

نعود الآن للحالة العامة أين np ليس بالضرورة عدداً طبيعياً، في هذه الحال لن يكون هناك تسلسل نموذجي نقي في أي سلسلة $\{X_i\}$ ، مع ذلك -حسب قانون الأعداد الكبرى- سيكون هناك مجموعة منها قريبة بشكل كبير من التسلسل النموذجي، أين يمكن أن نعرف الفرق بين التسلسلين على أنه خطأ ε ، حيث :

$$\left| -\frac{1}{n} \log_2 Q(X_k) - h(p) \right| \leq \varepsilon \quad (33.V)$$

ε هو عدد موجب صغير تعتمد قيمته على طول التسلسل n وتقل عموماً كلما زاد هذا الأخير. حسب قانون الأعداد الكبرى يكون احتمال العثور على النظام في مجموعة الأشعة ذات التسلسل النموذجي (أو القريب منه في هذه الحالة) أكبر من أو يساوي $1 - \delta$ ، أين δ هو عدد موجب أقل تماماً من الواحد ويؤول إلى الصفر كلما آل n إلى اللانهاية [43,64,70].

بفك رمز القيمة المطلقة من المتراجحة (33-V)، نجد أن الاحتمال $Q(X_k)$ للتسلسل شبه النموذجي يحقق :

$$2^{-n(h(p)+\varepsilon)} \leq Q(X_k) \leq 2^{-n(h(p)-\varepsilon)} \quad (34.V)$$

وبما أن مجموع الاحتمالات أقل من أو يساوي الوحدة، فإن هذا يؤدي إلى أن الجمع على جميع التسلسلات شبه النموذجية في المتراجحة السابقة يقود إلى :

$$\sum_{typ} 2^{-n(h(p)+\varepsilon)} = v \cdot 2^{-n(h(p)+\varepsilon)} \leq \sum_{typ} Q(X_k) \leq 1 \quad (35.V)$$

أين v هو عدد التسلسلات شبه النموذجية، ما يعني أن :

$$v \leq 2^{n(h(p)+\varepsilon)} \quad (36.V)$$

وهو ما يحدد سقف العدد الممكن للأشعة ذات التسلسلات شبه النموذجية.

بعد كل هذه الإعدادات صار من الممكن الآن توضيح كيفية القيام بضغط الحالات الكمية في الطرف المتشابك A ، الفكرة تقوم على أن تصرف $|\psi\rangle^{\otimes n}$ تحده مجموعة الأشعة التي لها تسلسل شبه نموذجي والتي عددها أقل من عدد الأشعة الكلي الذي يشكل $|\psi\rangle^{\otimes n}$ ، ما يعني أنه من الممكن نقل تلك المعلومات الموجودة في تلك الأشعة إلى عدد v من مجموعة البت الكمي الموجودة بـ A بواسطة تحويل واحد، وهذا العدد بالتأكيد أقل من العدد الكلي n . الحالة الجديدة لـ v بت كمي تحوي تقريبا نفس المعلومات التي تحويها الحالة $|\psi\rangle^{\otimes n}$ وتزداد قريبا منها كلما كان n أكبر، ما يعني أنه يمكن نقل حالة n بت كمي إلى v بتا كمي فقط، تفاصيل أكثر حول كيفية النقل وعملية التحويل الواحد موجودة بالجدول (1-V).

جدول (1-V) : التحويل الواحد U المستخدم لضغط الحالات الكمية [64].

أشعة النشر $ x_1 x_2 \dots x_n\rangle_A$	الرقم	الأشعة الناتجة عن التحويل الواحد U
الأشعة ذات التسلسل شبه النموذجي		
$ 1st \ \varepsilon - typical \ seq.\rangle_A$	0	$ 0 \dots 000 \dots 00\rangle_A$
$ 2nd \ \varepsilon - typical \ seq.\rangle_A$	1	$ 0 \dots 000 \dots 01\rangle_A$
...
$ vth \ \varepsilon - typical \ seq.\rangle_A$	$v - 1$	$ 0 \dots 00 \underbrace{1 \dots 11}_m \rangle_A$
الأشعة ذات التسلسل غير النموذجي		
$ 1st \ atypical \ seq.\rangle_A$	v	$ 0 \dots 011 \dots 11\rangle_A$
$ 2nd \ atypical \ seq.\rangle_A$	$v + 1$	$ 0 \dots 111 \dots 11\rangle_A$
...
$ 2^n - v \ th \ atypical \ seq.\rangle_A$	$2^n - 1$	$ 1 \dots 111 \dots 11\rangle_A$

التحويل الواحدي يقوم بنقل الأشعة ذات التسلسل شبه النموذجي إلى مجموعة معينة من الأشعة موضحة بالخانة اليسرى من الجدول. الجزء الأول من الأشعة التي تم النقل إليها (بالتحديد الـ $n - m$ بتا كمي الأولى) كلها في الحالة $|0\rangle$ ، أما المعلومات فهي موجودة في الجزء المتبقي (أي الـ m بتا كمي الأخيرة). حيث أن 2^m تمثل السقف الأعلى الممكن لعدد الأشعة ذات التسلسل النموذجي، وهو ما يعني حسب العلاقة (36-V) أن :

$$m \equiv n(h(p) + \varepsilon) \quad (37.V)$$

إذاً للحصول على المعلومات التي تحتويها الأشعة ذات التسلسل شبه النموذجي فقط دون غيرها (المعلومات لا تكون معدومة في الجزء الأول من الأشعة عندما تكون الأشعة ذات تسلسل غير نموذجي)، يقوم الطرف A بقياس الـ $n - m$ بتا كمي الأولى، فإن حصل على النتيجة 0 لجميعها يكون حينها قد حصل على مبتغاه، والحالة الكمية الجديدة لمجموعة البت الكمي هي أشعة الحالة ذات التسلسل شبه النموذجي والتي تحتفظ بقدر مماثل من المعلومات للذي كانت تحتويه الحالة الأصلية $|\psi\rangle^{\otimes n}$ ، وإن هو حصل على النتيجة 1 يكون حينها قد تحصل على الحالة الكمية للأشعة ذات التسلسل غير النموذجي وبهذا يكون قد خسر الحالة الكمية $|\psi\rangle^{\otimes n}$ تماماً، لكن ما هو احتمال حدوث أي نتيجة من النتيجتين السابقتين؟ إن احتمال الحصول على النتيجة 0 لـ $n - m$ بتا كمي الأولى (P_{suc}) مكافئ للاحتمال الحصول على الأشعة ذات التسلسل شبه النموذجي، أي أن $P_{suc} \geq 1 - \delta$ أين δ يؤول إلى الصفر من أجل n كبير كفاية، ما يعني أن احتمال النجاح في العثور على الحالة $|0\rangle$ لـ $n - m$ بتا كمي الأولى كبير ويكبر هذا الاحتمال كلما كان n كبيراً، وهي الحالة التي نتعامل معها حالياً.

إذاً بعد نجاح عملية القياس والحصول على النتيجة المطلوبة، يمكن للطرف A التخلي عن $n - m$ بتا كمي الأولى لأنها جميعاً في الحالة $|0\rangle$ ، وهي بالتالي غير متشابكة مع البت الكمي الموجودة في الطرف B (لن تتغير حالتها مهما كانت العملية التي تجرى على مجموعة البت الكمي B)، وبهذا يكون قد تم ضغط الحالة الكمية لـ n بت كمي إلى الحالة الكمية لـ m بت كمي فقط.

لتحديد فعالية عملية الضغط يجب تحديد معدل الضغط أو النسبة m/n . إن قيمة m تحدد بالعلاقة (37-V) وهي تعتمد على قيمة ε التي تعتمد بدورها على قيمة n بصورة عكسية، حيث تؤول ε إلى الصفر لما n تؤول إلى اللانهاية ما يعني أن :

$$\frac{m}{n} = \frac{n(h(p) + \varepsilon)}{n} \rightarrow h(p) \quad (38.V)$$

إذا في النهاية $n \rightarrow \infty$ يؤول معدل الضغط m/n إلى $h(p)$.

النتيجة التي يمكن استخلاصها من الدراسة السابقة هي أن ضغط المعلومات الكمية باستخدام البت الكمي هو أمر ممكن نظريا، وهذا بفضل التصرف الفريد للأعداد الكبرى التي وفرت الأرضية المناسبة لهذه العملية وجعلت منها أمرا ممكنا. تحديد العملية العكسية هو أمر هام أيضا وهي من يفصل في النهاية إن كان الضغط قد حافظ على الحالة الأصلية أم لا.

إن العملية العكسية أي عملية فك ضغط الحالات الكمية لاستعادة الحالة الأصلية $|\psi\rangle^{\otimes n}$ -أو حالة قريبة منها في الواقع عند التعامل مع n منتهية- هو أمر بسيط، إذ يكفي تطبيق الخطوات العكسية لعملية ضغط المعلومات : الحالة الكمية التي نتجت بعد عملية الضغط نرسم لها بـ $|comp\rangle$ وهي تصف حالة الـ m بت كمي، تتم إضافة $(n - m)$ بت كمي إضافي لهذه الحالة جميعها في الحالة $|0\rangle$ ، ومن ثم يتم تطبيق التحويل العكسي للتحويل الواحد U ، أي يتم تطبيق U^+ على الحالة الكمية $|comp\rangle^{\otimes (n-m)}|0\rangle$ من أجل فك الضغط :

$$|decomp\rangle = U^+|0\rangle^{\otimes (n-m)}|comp\rangle \quad (39.V)$$

وبهذا يتم فك ضغط m حالة بت كمي إلى حالة n بت كمي من جديد، والحالة الجديدة لمجموعة البت الكمي بعد عملية فك الضغط $|decomp\rangle$ قريبة جدا من الحالة الأصلية $|\psi\rangle^{\otimes n}$.

من المهم هنا التنويه إلى أن التشابك الكمي قد بقي محفوظا -تقريبا- ما بين الطرفين A و B ، لأن الحالة الأصلية $|\psi\rangle^{\otimes n}$ قد تمت استعادتها -تقريبا- بعد عملية فك الضغط، حيث أن الفرق بين الحالة الأصلية قبل الضغط $|\psi\rangle^{\otimes n}$ والحالة الناتجة بعد عملية فك الضغط $|decomp\rangle$ مماثل للفرق بين $|\psi\rangle^{\otimes n}$ ومجموعة الأشعة ذات التسلسل شبه النموذجي، فحسب بروتوكول عملية الضغط تستخرج الحالة $|comp\rangle$ من الأشعة ذات التسلسل شبه النموذجي بعد تنفيذ التحويل الواحد عليها، وعند تنفيذ عملية فك الضغط فإننا نعود لنحصل على مجموعة الأشعة شبه النموذجية دون غيرها، وحسب قانون الأعداد الكبرى يكون احتمال العثور على $|\psi\rangle^{\otimes n}$ في مجموعة الأشعة ذات التسلسل شبه النموذجي أكبر من أو يساوي $(1 - \delta)$ أي أن :

$$|\langle decomp | (|\psi\rangle)^{\otimes n} \rangle|^2 \geq 1 - \delta \quad (40.V)$$

وهذا الاحتمال يؤول إلى الواحد في النهاية $n \rightarrow \infty$ ، أي أننا نستعيد نفس الحالة الأصلية بعد عملية فك الضغط في النهاية التي تكون فيها n كبيرة جدا [64].

يمكن تعميم كل الدراسة السابقة لتشمل أي نظام مركب من قسمين بعده أكبر من اثنين. التغييرات طفيفة ومباشرة حيث أن الحالة الكمية :

$$|\phi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \sqrt{p_i} |i, i\rangle_{AB} \quad (41.V)$$

يمكن معاملتها بنفس الطريقة التي عوملت بها حالة البت الكمي، مع أخذ اختلاف البعد بعين الاعتبار فمثلا x_i تصبح تأخذ قيمها من 0 إلى $d-1$ أين d هو عدد Schmidt للحالة $|\phi\rangle$ ، أما $h(p)$ فتصبح من الشكل :

$$h(p) \rightarrow h(p_0, p_1, \dots, p_{d-1}) = - \sum_{i=0}^{d-1} p_i \log_2 p_i \quad (42.V)$$

النتيجة التي يمكن استخلاصها في النهاية هي أن الحالة الكمية للطرف A (أو B) والمشكلة من n نظام جزئي، يمكن ضغطها إلى الحالة الكمية لـ $h(p_0, p_1, \dots, p_{d-1})$ بتا كمي [43,64].

5-V- مقياس تشابك الحالة النقية : انتروبي فان نيومان

يمكن لجسمين متشابكين أن يؤثر على بعضهما البعض مهما كانت المسافات الموجودة بينهما ودون وجود واسطة بينهما وهذه هي ميزة التشابك الكمي. في الحالة النقية يكون شعاع الحالة للجسيمين المتشابكين غير قابل للفصل، وهو حسب تحليل Schmidt من الشكل :

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{p_i} |i\rangle_A \otimes |i'\rangle_B \quad (43.V)$$

أين المجموع يحوي أكثر من حد واحد في الحالة المتشابكة.

الأمر أن بعض الحالات متشابكة أكثر من غيرها، ومقدار تشابك الحالات النقية مثل الحالة (43-V) يمكن أن يقدر بكم تبعد هذه الحالة عن الحالة القابلة للفصل أو حالة التشابك القصوى، الأمر إذاً يتعلق بمعاملات Schmidt فكلما اقترب أحدها من الواحد كلما اقتربت الحالة الكمية من الحالة القابلة للفصل، وكلما كان عدد هذه المعاملات كبيراً وقيمها تؤول إلى أن تكون متساوية كلما اقتربت هذه الحالة من الحالة ذات التشابك

الأقصى. إن معاملات Schmidt تعبر عن خصائص الحالة النقية ولا تتغير تحت تأثير عمليات واحدية محلية، ما يعني أن أي مقياس تشابك للحالة النقية للأنظمة المركبة من قسمين لا بد من أن يعتمد على قيم هذه المعاملات لتقدير مدى تشابك الحالة النقية [69].

عند التعرض لضغط المعلومات الكمية للبت الكمي، كان واضحا أنه من الممكن نقل حالة n بت كمي إلى m بت كمي آخر، هذه العملية يمكن أن تتم على مستوى كلا الطرفين المتشابكين فتتقل الحالة الكمية $|\psi\rangle^{\otimes n}$ إلى الحالة الكمية m ثنائية من البت الكمي المتشابكة $|\varphi\rangle^{\otimes m}$ ، عملية فك الضغط ممكنة أيضا بحيث يمكن الانتقال من الحالة $|\varphi\rangle^{\otimes m}$ إلى الحالة $|\psi\rangle^{\otimes n}$ من جديد في النهاية المقاربة $n \rightarrow \infty$ ، أين يكون معدل الضغط عندها هو $m/n = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$. إن عملية ضغط المعلومات الكمية وعملية فك الضغط عنها هي عمليات من نوع LOCC، وبما أنه أمكن نقل الحالة الكمية n بت كمي إلى m بت كمي ومن ثم استعادتها مجددا باستخدام عمليات من نوع LOCC فقط، فإن هذا يعني أن مقدار التشابك الذي تحويه الحالة الكمية $|\psi\rangle^{\otimes n}$ هو نفسه مقدار التشابك الذي تحويه الحالة الكمية $|\varphi\rangle^{\otimes m}$ ، لأن العمليات من نوع LOCC لا يمكنها أن ترفع من مقدار التشابك، هذه النتيجة مهمة للغاية لأنها تعطي منظورا لكيفية قياس مقدار التشابك: m حالة كمية من $|\varphi\rangle$ تملك نفس مقدار التشابك الذي تحويه n حالة كمية من $|\psi\rangle$ أي أن

$$m E(|\varphi\rangle) = n E(|\psi\rangle) \quad (44.V)$$

أين E تُعبر عن مقياس التشابك. العبارة السابقة تُمكن من المقارنة النسبية بين مقدار التشابك الذي تحويه الحالة $|\psi\rangle$ والحالة $|\varphi\rangle$ ، والتي تُحدد بالنسبة m/n المعرفة سابقا. إن الحالة $|\psi\rangle$ تكون من اختيار المجرب الذي يقوم بتحضير n حالة منها، لكن ماهي الحالة $|\varphi\rangle$ التي تظهر بعد عملية الضغط؟ إن السلسلة شبه النموذجية (التي تحوي الأشعة ذات التسلسل شبه النموذجي) تؤول إلى سلسلة نموذجية في النهاية المقاربة عندما $n \rightarrow \infty$ ، حينها وحسب نظرية الأعداد الكبرى- يؤول الشعاع $|\psi\rangle^{\otimes n}$ إلى الحد الذي يشمل الأشعة التي تنتمي إلى السلسلة النموذجية فقط، بحيث:

$$|\psi\rangle^{\otimes n} \rightarrow \sum_{per(X_{i_0})} |per(X_{i_0})\rangle_A |per(X_{i_0})\rangle_B \quad (45.V)$$

الشعاع الأخير غير منظم، لكننا سنهمل عملية التنظيم حالياً مادام لجميع الأشعة في المجموع نفس المعامل. الشعاع الذي ينتج بعد عملية الضغط يسهل الحصول على عبارته لأن جميع حدود أشعة النشر للشعاع الذي ستجرى له عملية الضغط متساوية، وعليه فإن :

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle^{\otimes m} &= \left({}_{AB}\langle 00| \right)^{\otimes (n-m)} U \otimes U |\psi\rangle^{\otimes n} \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_m} |x_1, x_2, \dots, x_m\rangle_A |x_1, x_2, \dots, x_m\rangle_B \end{aligned} \quad (46.V)$$

أين x_i هو من جديد متغير يمكن له أن يأخذ أحد القيمتين 0 أو 1. يمكن الآن تحديد الشعاع $|\varphi\rangle$ انطلاقاً من العبارة الأخيرة للشعاع $|\varphi\rangle^{\otimes m}$ وذلك قبل أن تتم عملية تنظيمه حتى، إذ يمكن التقطن إلى أن الشعاع $|\varphi\rangle$ ما هو إلا الحالة ذات التشابك الأقصى لثنائية من البت الكمي، ذلك أن جميع معاملات النشر في العبارة الأخيرة متساوية وهذا لا يمكن أن يحدث سوى في الحالة التي يكون فيها معاملا النشر لـ $|\varphi\rangle$ متساويان حسب تحليل Schmidt، ما يوافق الحالة ذات التشابك الأقصى وعلى وجه الدقة الحالة $|\psi_2^+\rangle$ ، إذاً :

$$|\varphi\rangle \equiv |\psi_2^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \quad (47.V)$$

وذلك مهما كانت الحالة $|\psi\rangle^{\otimes n}$. هذه النتيجة متناسقة جداً مع نظرية ضغط المعلومات الكمية وجميع نتائجها، فعلى سبيل المثال إن كانت $|\psi\rangle$ هي نفسها $|\psi_2^+\rangle$ فمن المفترض أن يكون ضغطها مستحيلاً إن كانت الحالة التي ستضغط إليها حسب النتيجة السابقة هي نفسها الحالة $|\psi_2^+\rangle$ ، وبالفعل حسب العلاقة (38-V) لمعدل الضغط يكون :

$$\frac{m}{n} = h\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2}\right) = 1 \quad (48.V)$$

وعليه لا يمكن ضغط الحالات $|\psi_2^+\rangle$ لأن معدل ضغطها هو 1. في الحقيقة إن الطريقة السابقة لضغط طرفي حالة كمية متشابكة ما هو إلا بروتوكول ممكن لعملية تركيز التشابك للبت الكمي، وهي العملية التي يتم فيها الانتقال من عدد من الحالات (أي الأنظمة) ذات تشابك معين إلى عدد أقل من الحالات ذات مقدار تشابك أكبر.

بالعودة إلى العلاقة النسبية بين مقادري التشابك للحالتين $|\phi\rangle$ و $|\psi\rangle$ المعرفة بالعبارة (44-V)، وباستخدام النتيجة السابقة تصبح تلك العلاقة من الشكل

$$E(|\psi\rangle) = \frac{m}{n} E(|\psi_2^+\rangle) \quad (49.V)$$

هذه النتيجة ممتازة فعلا، لأنها تعطي مقدار التشابك الذي تحتويه أي حالة ثنائية من البت الكمي $|\psi\rangle$ بالنسبة للحالة ذات التشابك الأقصى $|\psi_2^+\rangle$ ، فإذا ما أخذنا مقدار التشابك الموجود بها ليكون واحد ebit فإن مقدار التشابك الموجود بأي حالة كمية لاثنين من البت الكمي هو :

$$E(|\psi\rangle) = \frac{m}{n} = -p \log_2 p - (1-p) \log_2(1-p) \quad (50.V)$$

يمكن تعميم هذه النتيجة لتشمل الحالة النقية لأي نظام مكون من قسمين، بحيث يمكن تحديد مقدار التشابك الذي تحتويه أي حالة منها بالنسبة لحالة التشابك الأقصى لاثنين من البت الكمي $|\psi_2^+\rangle$ ، فحسب نظرية ضغط المعلومات الكمية فإنه من الممكن ضغط n حالة كمية $|\phi\rangle$ (المعرفة بالعبارة (43-V)) لنظام مكون من قسمين إلى الحالة الكمية لـ m ثنائية من البت الكمي، وبما أن فك الضغط واستعادة الحالة $|\phi\rangle^{\otimes n}$ ممكن بواسطة عمليات من نوع LOCC فقط، فإن الحالة الكمية لـ m ثنائية من البت الكمي لها نفس مقدار التشابك الذي تحتويه الحالة $|\phi\rangle^{\otimes n}$ ، أين حالة ثنائية البت الكمي التي تم ضغط $|\phi\rangle$ إليها هي حالة التشابك القصوى $|\psi_2^+\rangle$ - وذلك باستخدام نفس البرهان السابق-، وعليه فإن :

$$E(|\phi\rangle) = \frac{m}{n} E(|\psi_2^+\rangle) = \frac{m}{n} \quad (51.V)$$

حيث تم اعتبار أن $E(|\psi_2^+\rangle) = 1$ ebit، وحسب نظرية ضغط المعلومات الكمية تكون قيمة العدد m هي $m = -n \sum_{i=1}^d p_i \log_2 p_i$ ، أين $\{p_i\}$ هي مربعات معاملات Schmidt للحالة النقية $|\phi\rangle$ و d هو عدد Schmidt لتلك الحالة، إذًا :

$$E(|\phi\rangle) = - \sum_{i=1}^d p_i \log_2 p_i \quad (52.V)$$

يمكن الآن تقديم مقياس التشابك للحالة النقية للأنظمة المكونة من قسمين، والذي يعرف باسم انتروبي فان نيومان [27,69,71]، فمن أجل حالة نقية $|\phi\rangle$ لنظام مركب مكون من قسمين AB يكون مقدار التشابك الذي تحتويه الحالة النقية $E(|\phi\rangle)$ ، وبالضبط كمية التشابك الموجودة بين القسمين A و B حسب انتروبي فان نيومان - التي يرمز لها بالرمز S - هي :

$$E(|\phi\rangle) = S(\rho_A) = -tr(\rho_A \log_2 \rho_A) = S(\rho_B) \quad (53.V)$$

للهولة الأولى قد يكون هذا مفاجئاً قليلاً، فهذه ليست العبارة المنتظرة التي تم استخراجها في المناقشة السابقة، لكن الأمور ليست كما تبدوا عليه دائماً، لنبدأ إذاً خطوة بخطوة لنثبت أن عبارة الانتروبي تعطي نفس مقدار التشابك الذي تعطيه العبارة (52-V). تعتمد الانتروبي على أخذ أثر المصفوفة $\rho_A \log_2 \rho_A$ ، أين ρ_A هي مصفوفة الكثافة المختزلة للقسم A أي أن $\rho_A = tr_B |\phi\rangle\langle\phi|$. إن الأثر سمة مميزة للمصفوفة ولا يتأثر بالأساس الذي كتبت فيه، لذا يتم اختيار كتابة المصفوفة $\rho_A \log_2 \rho_A$ في أساس الأشعة الذاتية لـ ρ_A والذي تكون فيه المصفوفة ρ_A حسب تحليل Schmidt من الشكل :

$$\rho_A = \sum_{i=1}^d p_i |i\rangle\langle i| = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p_d \end{pmatrix} \quad (54.V)$$

في هذا الأساس من السهل استخدام نشر تايلور لإيجاد العبارة الصريحة للمصفوفة $\log_2 \rho_A$ ، ذلك أن $(\rho_A)^k = \sum_i (p_i)^k |i\rangle\langle i|$ وهو ما يعني أن $F(\rho_A) = \sum_i F(p_i) |i\rangle\langle i|$ من أجل أي دالة F [64]، وبالتالي

$$\log_2 \rho_A = \sum_{i=1}^d \log_2(p_i) |i\rangle\langle i| \quad (55.V)$$

وعليه تكون

$$\rho_A \log_2 \rho_A = \sum_{i=1}^d p_i \log_2(p_i) |i\rangle\langle i| \quad (56.V)$$

أين تم الاعتماد على خاصية التعامد للأشعة الذاتية $\{|i\rangle\}$. ومنه عبارة انتروبي فان نيومان هي

$$S(\rho_A) = -tr(\rho_A \log_2 \rho_A) = - \sum_{i=1}^d p_i \log_2(p_i) \quad (57.V)$$

وهي النتيجة المرجوة فانتروبي فان نيومان تعطي نفس مقدار التشابك الذي تعطيه العبارة (52-V). من جهة أخرى من السهل التأكد من أن $S(\rho_A) = S(\rho_B)$ ذلك أن للمصفوفتين ρ_A و ρ_B نفس القيم الذاتية حسب تحليل Schmidt، وبما أن قيمة انتروبي فان نيومان لا تعتمد سوى على القيم الذاتية لمصفوفة الكثافة كما

هو واضح من العبارة الأخيرة، فإن $S(\rho_A) = S(\rho_B)$ من أجل أي حالة نقية لنظام مركب من قسمين AB .

إن انتروبي فان نيومان تحقق جميع الخصائص التي يجب أن يستوفيهها مقياس التشابك، ما يجعلها مقياسا جيدا لمدى تشابك الحالة النقية لنظام مركب ثنائي، في الحقيقة هناك من يعتبره المقياس الوحيد الموجود للحالات المتشابكة الثنائية، وهذا لأسباب جيدة أخرى غير الطريقة التي تم بها إثبات أن مقدار التشابك الذي تحتويه الحالات النقية نسبة للحالة $|\psi_2^+\rangle$ هو بالفعل القيمة التي تعطيها انتروبي فان نيومان [65].

أهم الخصائص التي تتمتع بها انتروبي فان نيومان يمكن توضيحها تباعا في النقاط التالية :

- تكون انتروبي فان نيومان معدومة في الحالات القابل للفصل، أي في الحالات التي تكون فيها ρ_A و ρ_B حالات نقية بدورها، عندها تكون كل القيم الذاتية للمصفوفة المختزلة معدومة ماعدا قيمة ذاتية واحدة p_k تأخذ القيمة واحد، ما يعني أن :

$$S(\rho_A) = - \sum_i p_i \log_2(p_i) = -p_k \log_2 p_k = 0 \quad (58.V)$$

- الانتروبي لا تتغير تحت تأثير عمليات وحيدة محلية أي أن $S(U\rho_A U^\dagger) = S(\rho_A)$. يمكن توضيح هذا بالشكل الأمثل عند استخدام الأساس الخاص بـ ρ_A ، عندها شكل المؤثر $\rho_A \log_2 \rho_A$ في هذا الأساس كما توضحه العبارة (56-V) يسمح بشكل سهل من إثبات هذه النقطة، وذلك باستغلال بعض الخواص الأولية للأثر.

- تحقق انتروبي فان نيومان خاصية التجميع التام، بحيث $S(\rho_A \otimes \rho_{A'}) = S(\rho_A) + S(\rho_{A'})$ من أجل أي مؤثري كثافة ρ_A و $\rho_{A'}$. لإثبات هذه الخاصية تتم الاستعانة بالأساس الخاص بكل من ρ_A و $\rho_{A'}$ ، أين يصبح من الممكن أن نكتب :

$$\log_2(\rho_A \otimes \rho_{A'}) = \sum_{i,k} \log_2(p_i \cdot p'_k) |i\rangle\langle i| \otimes |k'\rangle\langle k'| \quad (59.V)$$

أين $\{p'_k\}$ و $\{|k'\rangle\}$ هي التوالي القيم الذاتية والأشعة الذاتية لمؤثر الكثافة $\rho_{A'}$ ، وعليه تصبح :

$$\log_2(\rho_A \otimes \rho_{A'}) = \sum_{i,k} \log_2(p_i) |i\rangle\langle i| \otimes |k'\rangle\langle k'| + \sum_{i,k} \log_2(p'_k) |i\rangle\langle i| \otimes |k'\rangle\langle k'|$$

$$= \sum_i \log_2(p_i) |i\rangle\langle i| \otimes I_{A'} + \sum_k \log_2(p'_k) |k'\rangle\langle k'| \otimes I_A \quad (60.V)$$

ومنه

$$\begin{aligned} tr_{A,A'}(\rho_A \otimes \rho_{A'} \log_2(\rho_A \otimes \rho_{A'})) &= tr_A(\rho_A \log_2 \rho_A) tr_{A'}(\rho_{A'}) + tr_{A'}(\rho_{A'} \log_2 \rho_{A'}) tr_A(\rho_A) \\ &= tr_A(\rho_A \log_2 \rho_A) + tr_{A'}(\rho_{A'} \log_2 \rho_{A'}) \end{aligned} \quad (61.V)$$

وعليه بالفعل :

$$S(\rho_A \otimes \rho_{A'}) = S(\rho_A) + S(\rho_{A'}) \quad (62.V)$$

• حسب انتروبي فان نيومان، تحتوي حالات التشابك القصوى للأنظمة المكونة من قسمين متماثلين بعد فضائهما d منته (كالحالات $|\psi_d^+\rangle$ الموضحة بالعبارة (9-V))، تحتوي على تشابك يقدر بـ :

$$S(\rho_A \equiv I/d) = \log_2 d \quad (63.V)$$

وبالنسبة لحالة التشابك القصوى للبت الكمي $|\psi_2^+\rangle$ ، فإن مقدار تشابكها هو $(\log_2 2 = 1)$ وهذا يتناسق مع الافتراض الذي وضعناه في البداية، أين وضع مقدار تشابك الحالة ذات التشابك الأقصى للبت الكمي كمرجع لقياس مدى تشابك الحالات الأخرى، وأسندت القيمة واحد ebit لمقدار تشابك تلك الحالة [43,64].

6-V- الحالة المختلطة : مقياس تشابك التكوّن

(Entanglement of Formation)

الانتروبي شكلت مقياساً مثالياً لقياس درجة تشابك الحالات النقية. الإطار الطبيعي الذي أستقيت منه-حسب التدرج الذي تم اتباعه- كان عملية ضغط المعلومات الكمية، أين ظهرت انتروبي فان نيومان بشكل طبيعي كأقل نسبة يمكن لمعدل الضغط أن يصلها دون أن تتم خسارة مقدار التشابك الذي تحتويه الحالة الكمية الكلية التي تم ضغطها (في النهاية المقاربة طبعاً، ومن الآن وصاعداً سنفترض أن هذه هي الحال التي نتحدث عنها). في الحقيقة لقد أصبح ممكناً بواسطتها -كما وُضح في العنصر السابق- تحديد عدد الحالات $|\psi_2^+\rangle$ التي يمكن استخلاصها انطلاقاً من عدد n من أي حالة نقية $|\phi\rangle$. على نفس المنهج وباستخدام عملية فك ضغط المعلومات الكمية، أمكن تحديد عدد الحالات n التي يمكن تشكيلها من أي حالة نقية $|\phi\rangle$ انطلاقاً من عدد m من الحالات الكمية $|\psi_2^+\rangle$ ، أين النسبة m/n تمثل قيمة انتروبي فان نيومان للحالة

$|\phi\rangle$ التي يراد تشكيلها، إذا باختيار المؤثر الواحد المناسب U^\dagger وإضافة $(n - m)$ ثنائية من البت الكمي في الحالة $|00\rangle$ يمكن تشكيل n حالة من $|\phi\rangle$. قدرة الانتروبي على إعطاء العدد اللازم من الحالات $|\psi_2^+\rangle$ لتشكيل أي حالة نقية $|\phi\rangle$ ، وأيضا إعطاء عدد الحالات $|\psi_2^+\rangle$ التي يمكن استخلاصها من أي حالة نقية $|\phi\rangle$ ، هو ما جعل من انتروبي فان نيومان مقياسا جيدا بالفعل لتحديد مدى تشابك الحالات النقية.

لكن ما الذي يمنع هذا المقياس لأن يمتد إلى الحالات المختلطة؟ فأي حالة مختلطة مؤثر كثافتها ρ يمكن كتابتها كتركيبية محدبة من مجموعة من الحالات النقية :

$$\rho = \sum_i w_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (64.V)$$

يمكن التفكير في أن الطريقة المناسبة لتحديد تشابك هذه الحالة هو عن طريق تحديد عدد الحالات $|\psi_2^+\rangle$ اللازمة لتشكيلها باستخدام عمليات من نوع LOCC فقط. نفترض أن هناك طرفين A و B يريدان أن يتشاركا عددا N من الحالة ρ غير أنهما لا يستطيعان التواصل كميًا، لكن سبق لهما أن تشاركا عددا من الأشعة $|\psi_2^+\rangle$. من أجل تحضير $\rho^{\otimes N}$ يقوم الطرفان AB بتشكيل أول حالة نقية من المجموعة $\{|w_i, |\psi_i\rangle\}$ ، في الحقيقة عليهما تحضير $N \cdot w_0$ حالة منها ما يعني أنهما في حاجة إلى العدد $N \cdot w_0 \cdot E(|\psi_0\rangle)$ من الحالات $|\psi_2^+\rangle$ ، أين $E(|\psi_0\rangle) = S(\text{tr}_A |\psi_0\rangle\langle\psi_0|)$ هو مقدار تشابك الحالة النقية $|\psi_0\rangle$. يواصلان فعل ذات الأمر مع بقية حالات المجموعة $\{|w_i, |\psi_i\rangle\}$ ، ثم يقومان بعد ذلك بمسح المعلومات التي لديهما عن الحالة الكمية لكل عنصر من مجموعة الحالات التي قاما بتحضيرها، فتصبح الحالة الممكنة لأي عنصر من عناصر المجموعة هي أحد الحالات $\{|\psi_i\rangle\}$ التي تم تحضيرها مرفقة بالاحتمال الموافق لها، وعليه كل عنصر من المجموعة N يكون في الحالة المطلوبة ρ . بهذه الطريقة يكون الطرفان قد استهلكا عددا من الحالات $|\psi_2^+\rangle$ قدره :

$$\sum_i w_i \cdot E(|\psi_i\rangle) \quad (65.V)$$

من أجل تحضير حالة واحدة من ρ ، وعليه قد يتم تخمين أن مقدار التشابك الذي تحتويه الحالة ρ هو $(\sum_i w_i \cdot E(|\psi_i\rangle))$ بت تشابكي أو ebit.

كل شيء يبدو ممتازا لحد الساعة فقد تم تحديد مقدار تشابك الحالة المختلطة ρ ! لكن قبل التسرع في الحصول على هكذا نتيجة، قد يكون من المجدي التذكير بأن أي حالة مختلطة تملك عددا لا نهائيا من

الطرق التي يمكن أن تكتب بها في شكل تركيبات محدبة من حالات نقية، فهل يمكن أن يكون مقدار التشابك المحسوب لـ ρ بالنسبة لمجموعة معينة مساويا لمقدار التشابك المحسوب بالنسبة للمجموعات الأخرى؟ بعبارة أخرى هل يعتمد عدد الحالات $|\psi_2^+\rangle$ اللازمة لتشكيل ρ على التقسيم المعتمد لها؟ في الواقع إن إجابة هذا التساؤل هي نعم للأسف، فقد تكون ρ غير متشابكة (بالمعنى الذي تظهره العبارة (3-V)) لكن يمكن إيجاد تقسيم لها أين تكون الحالات النقية التي تتشكل منها تحوي مقدارا غير معدوم من التشابك، ما يعني أن مقدار التشابك الذي يُحسب بالعبارة (65-V) سيكون غير معدوم أيضا مع أن الحالة غير متشابكة! أفضل طريقة لتوضيح هذا ستكون بمثال، نعتبر مثلا الحالة :

$$\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0|\otimes|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|\otimes|1\rangle\langle 1| \quad (66.V)$$

هذه الحالة غير متشابكة لأنه يمكن تحضيرها بواسطة عمليات من نوع LOCC فقط ما يعني أن مقدار التشابك لهذه الحالة هو صفر. أحد المجموعات التي تعطي نفس الحالة السابقة هي خليط متساوي الاحتمال من الحالتين $(|11\rangle + |00\rangle)$ و $(|11\rangle - |00\rangle)$ ، كلتا الحالتين السابقتين هي حالة تشابك قصوى ما يعني أنه حسب العبارة (65-V) سيكون مقدار تشابك ρ هو واحد ebit، أي أنه ستكون هناك حاجة لحالة واحدة من $|\psi_2^+\rangle$ من أجل تحضير ρ ، بينما في الحقيقة ليست هناك حاجة لأي حالة من $|\psi_2^+\rangle$ لتحضيرها لأنها غير متشابكة من الأساس.

الخطوة المنطقية التالية لمقياس تشابك للحالة المختلطة هو البحث عن تلك المجموعة أو ذلك التقسيم للحالة ρ الذي يعطي العبارة (65-V) أقل قيمة لها، أي أن مقدار تشابك الحالة المختلطة ρ يمثل الحد الأدنى من الحالات $|\psi_2^+\rangle$ اللازمة لتحضير تلك الحالة، إذًا :

$$E_f(\rho) = \inf_{\{w_i|\psi_i\rangle\}} \sum_i w_i \cdot E(|\psi_i\rangle) \quad (67.V)$$

يدعى هذا المقياس بمقياس تشابك التكوّن E_f وهو يمثل أقل قيمة ممكنة لمعدل مقدار التشابك على كل التركيبات المحدبة الممكنة من الحالات النقية لـ ρ ، أين $E(|\psi_i\rangle) = S(\text{tr}_A |\psi_i\rangle\langle \psi_i|)$ [3,69,72,73]. في الحقيقة يمكن اعتبار مقياس تشابك التكوّن كتمديد لانتروبي فان نيومان من أجل الحالة المختلطة، حيث من أجل الحالات النقية يعود مقياس تشابك التكوّن ليمثل انتروبي فان نيومان من جديد، ذلك أن هناك طريقة واحدة فقط لكتابة مؤثر الكثافة للحالة النقية كتركيبية محدبة من الحالات النقية، لأن هذه الحالات هي النقاط القصوى من المجموعة المحدبة لمؤثر الكثافة، ومنه :

$$E_f(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = \inf_{\{1,|\varphi\rangle\}} E(|\varphi\rangle) = E(|\varphi\rangle) \quad (68.V)$$

بشكل عام، يكون حساب قيمة مقدار التشابك لحالة معينة ρ بواسطة مقياس تشابك التكوّن أمراً صعباً جداً، ذلك أن البحث عن القيمة الدنيا لمعدل التشابك للحالة ρ كما توضحه العبارة (65-V) يجب أن يمر على جميع المجموعات الممكنة التي تحقق مؤثر الكثافة هذا، وعدد هذه المجموعات لا نهائي كما هو معلوم، كما أن عدد عناصرها قد يختلف من مجموعة لأخرى بحيث يمكن أن تتشكل من عدد كبير وغير محدود من العناصر، لذا فإن إيجاد حلول تحليلية لهذه المشكلة التغيرية هو أمر غاية في الصعوبة، ولم يتم إيجاد حلول دقيقة سوى من أجل عدد محدود من الحالات الخاصة، ولعل أكبر إنجاز تم في هذا الميدان كان تحديد العبارة الدقيقة لمقياس تشابك التكوّن لحالة اثنين من البت الكمي [62,64,67,69].

V-6-1- مقياس تشابك التكوّن لاثنين من البت الكمي

حالة البت الكمي تلقى الكثير من الاهتمام بسبب كونها العنصر الأساسي لنظرية المعلومات الكمية، ولعل من حسن الحظ أن مقدار التشابك لنظام ثنائي منها معروف من أجل أي حالة مختلطة أو نقية حسب مقياس تشابك التكوّن. حساب مقدار التشابك لنظام مكون من اثنين من البت الكمي يعتمد على تعريف مقدار خاص يدعى بـ'التنافسية' (*Concurrence*). التنافسية هي كمية لا يمكن تعريفها إلا من أجل النظام المدروس وهو ثنائية من البت الكمي، يمكن تعريفها في البداية من أجل الحالة النقية قبل أن يتم تعميم عبارتها من أجل الحالة المختلطة، فمن أجل حالة نقية $|\psi\rangle$ لنظام مكون من اثنين من البت الكمي تعرف التنافسية $C(\psi)$ لهذه الحالة بـ :

$$C(\psi) = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle| \quad (69.V)$$

أين الشعاع $|\tilde{\psi}\rangle$ يعرف بالعبارة :

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\psi^*\rangle \quad (70.V)$$

حيث $|\psi^*\rangle$ تمثل الشعاع $|\psi\rangle$ بعد أخذ المرافق المركب لمعاملات نشره في الأساس القانوني $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ [3,69,74]. قد لا تبدو العلاقة بين التنافسية ومدى تشابك الحالة $|\psi\rangle$ واضحة لحد الآن، لذا قد يكون من المفيد أن ننظر إلى التنافسية من زاوية أخرى، إن الشكل العام للشعاع $|\psi\rangle$ هو :

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle \quad (71.V)$$

وبإعادة ترتيب بسيطة يمكن كتابته من الشكل :

$$|\psi\rangle = |0\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle) + |1\rangle(c|0\rangle + d|1\rangle) \quad (72.V)$$

حتى تكون هذه الحالة قابلة للفصل يجب أن يكون الشعاعان $a|0\rangle + b|1\rangle$ و $c|0\rangle + d|1\rangle$ متناسبين، أي لا تكون الحالة قابلة للفصل إلا إن كان $(ad = cb)$ ، عندها سيمكن كتابة الشعاع $|\psi\rangle$ على شكل جداء تنسوري من شعاعي الحالة لنظاميه الجزئيين. إن هذا ليدعونا إلى التفكير في أنه من الممكن أخذ المقدار $|ad - cb|$ كمقدار يعبر عن مدى تشابك الحالة $|\psi\rangle$ ، فتكون قيمته معدومة إن كانت الحالة قابلة للفصل وتزداد كلما زاد تشابك الحالة. لو قمنا الآن بحساب التنافسية لهذه الحالة فإن قيمتها حسب العبارة (69-V) هي $2|ad - cb| = 2|a^*d^* - c^*b^*|$ ، ما يعني أن التنافسية تعبر بالفعل عن مدى تشابك الحالة الكمية $|\psi\rangle$ [69].

نريد الآن تحديد العلاقة بين التنافسية ومقياس تشابك التكوّن، من أجل تحقيق هذه الغاية سيكون من المفيد كتابة الشعاع $|\psi\rangle$ في أساس Schmidt واعتماد هذا الأساس كالأساس القانوني للفضاء :

$$|\psi\rangle = \sqrt{w_0}|00\rangle + \sqrt{w_1}|11\rangle \quad (73.V)$$

قيمة التنافسية لهذه الحالة هي

$$C(\psi) = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle| = 2\sqrt{w_0 \cdot w_1} \quad (74.V)$$

من خلال قيمة التنافسية بالعبارة السابقة يمكن أن نرى أنه يكون معدوما عندما تكون الحالة قابلة للفصل أين يكون أحد معاملي Schmidt معدومين، أي أن $\sigma_y \otimes \sigma_y$ يأخذ الشعاع $|\psi\rangle$ إلى الشعاع العمودي عليه عندما يكون هذا الأخير غير متشابك. من جهة أخرى تأخذ التنافسية أقصى قيمة لها وهي الواحد، عندما تكون $|\psi\rangle$ حالة تشابك قصوى أين يكون $(w_0 = w_1 = \frac{1}{2})$ ، ما يعني أن المؤثر $\sigma_y \otimes \sigma_y$ يحافظ على نفس الشعاع $|\psi\rangle$ مع إضافة فرق طور كلي غير مؤثر - إن كان هذا الأخير حالة تشابك قصوى، لذلك قد ينظر إلى التنافسية على أنها مقياس تشابك بحد ذاتها.

مقدار تشابك الحالة $|\psi\rangle$ حسب مقياس تشابك التكوّن (والذي يتطابق هنا مع انتروبي فان نيومان) هو :

$$E_f(|\psi\rangle) = -w_0 \log_2 w_0 - w_1 \log_2 w_1 \quad (75.V)$$

يمكن إعادة كتابة العبارة السابقة بدلالة التنافسية $(C(\psi) \equiv C)$ ، حيث أن :

$$\begin{cases} 2\sqrt{w_0 \cdot w_1} = C \\ w_0 + w_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4w_0 \cdot w_1 = C^2 \\ w_0 = 1 - w_1 \end{cases} \quad (76. V)$$

لإيجاد قيمة المعاملات $\{w_0, w_1\}$ بدلالة التنافسية C ، يجب حل جملة المعادلتين السابقتين من أجل $\{w_0, w_1\}$ ، هذه الحلول هي :

$$\begin{cases} w_0 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - C^2}) \\ w_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - C^2}) \end{cases} \quad (77. V)$$

وعليه تصبح عبارة تشابك التكوّن للحالة النقية المعرفة بالعبارة (75-V) بدلالة التنافسية هي :

$$E_f(|\psi\rangle) = \varepsilon(C(\psi)) = h\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - C^2})\right) \quad (78. V)$$

أين

$$h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x) \quad (79. V)$$

وبهذا أمكن كتابة تشابك التكوّن للحالة النقية بدلالة التنافسية $C(\psi)$. في الحالة المختلطة يمكن تعميم التنافسية بذات الطريقة التي عُممت فيها انتروبي فان نيومان للحالة المختلطة : قيمة التنافسية للحالة المختلطة ρ تعطى بمعدل التنافسية لحالات المجموعة التي تعطي أقل قيمة لهذا الأخير، أي أن

$$C(\rho) = \inf_{\{p_i, |\varphi_i\rangle\}} \sum_i p_i C(\varphi_i) \quad (80. V)$$

من المنطقي الآن التساؤل إن كانت $E_f(\rho) = \varepsilon(C(\rho))$ ؟ ففي الحالة النقية كان واضحاً أن هذين المقدارين متساويان، لكن في الحالة المختلطة لم يعد هذا الأمر واضحاً ذلك أن :

$$\varepsilon(C(\rho)) = \varepsilon\left(\inf_{\{p_i, |\varphi_i\rangle\}} \sum_i p_i C(\varphi_i)\right) = \inf_{\{p_i, |\varphi_i\rangle\}} \varepsilon\left(\sum_i p_i C(\varphi_i)\right) \quad (81. V)$$

المساواة الأخيرة ناتجة من كون الدالة ε رتيبة على المجال $[0,1]$ ، من جهة أخرى

$$E_f(\rho) = \inf_{\{p_i, |\varphi_i\rangle\}} \sum_i p_i \cdot E(|\varphi_i\rangle) = \inf_{\{p_i, |\varphi_i\rangle\}} \sum_i p_i \cdot \varepsilon(C(\varphi_i)) \quad (82. V)$$

الدالتان $E_f(\rho)$ و $\varepsilon(C(\rho))$ تبدوان مختلفتين ظاهريا لكنهما متساويتان في الحقيقة، ولإثبات هذا يتم استغلال خاصية مهمة للدالة $\varepsilon(C)$ وهي أنها محدبة على مجال تعريفها $[0,1]$ ، ذلك أن $\frac{d^2\varepsilon(C)}{dC^2} \geq 0$ على نفس المجال. كون الدالة $\varepsilon(C(\rho))$ محدبة يعني أن :

$$\varepsilon(C(\rho)) = \inf_{\{p_i, \varphi_i\}} \varepsilon \left(\sum_i p_i C(\varphi_i) \right) \leq \inf_{\{p_i, \varphi_i\}} \sum_i p_i \varepsilon(C(\varphi_i)) = E_f(\rho) \quad (83.V)$$

إذاً

$$\varepsilon(C(\rho)) \leq E_f(\rho) \quad (84.V)$$

مازالت النتيجة المطلوبة لم تظهر بعد، وظهورها يستلزم استخدام خاصية أخرى، لن يتم إثباتها حالياً لكنها مبرهنة بشكل غير مباشر في الملحق (ب)، الخاصية تنص على أن المجموعة التي تحقق القيمة الدنيا للتنافسية تتكون من حالات نقية لها جميعاً نفس قيمة التنافسية [69,74]. استخدام هذه الخاصية في المتراحة (83-V) يعني أن المساواة $\varepsilon(C(\rho)) = E_f(\rho)$ يجب أن تكون محققة، فعندما تكون قيمة التنافسية ثابتة لجميع الحالات يكون طرفاً المتراحة متساويان.

البحث إذاً عن مقدار تشابك التكوّن للحالة المختلطة لاثنين من البت الكمي يستلزم البحث عن المجموعة التي تملك أقل قيمة لمعدل التنافسية كما توضحه العبارة (80-V)، وهو ما قام به *W. Wootters* إذ أثبت أن أقل قيمة لمعدل التنافسية لنظام مكون من اثنين من البت الكمي تعطى بالعبارة :

$$C(\rho) = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) \quad (85.V)$$

أين $\{\lambda_i\}$ هي الجذور التربيعية لمجموعة القيم الذاتية للمؤثر $\rho\tilde{\rho}$ بترتيب تنازلي، بحيث الدليل 1 يرمز للقيمة الأكبر من بينها و 2 للقيمة التي تليها وهكذا، أما المؤثر $\tilde{\rho}$ فهو يعرف بـ :

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad (86.V)$$

أين ρ^* تعبر عن المرافق المركب لمؤثر الكثافة ρ في الأساس القانوني $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. إن القيم الذاتية للمؤثر $\rho\tilde{\rho}$ حقيقية وموجبة وإن لم يكن هذه الأخير هرميتياً، وذلك لأنها ناتجة من جداء مؤثرين موجبين ($\langle\phi|\rho|\phi\rangle \geq 0, \langle\phi|\tilde{\rho}|\phi\rangle \geq 0$). [69,74]. إثبات علاقة التنافسية المعطاة بالعبارة (85-V) موجود بالملحق (ب).

قد يبدو استخدام المؤثر $\rho\tilde{\rho}$ غريباً، لكن من السهل إثبات أن (جذر) القيمة الذاتية لهذا المؤثر في الحالة النقية، أي في الحالة التي يكون فيها مؤثر الكثافة ρ مجرد مُسقط، هي نفسها عبارة التنافسية للحالة النقية كما تعطى بالعبارة (69-V). فبوضع $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ و $\tilde{\rho} = |\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}|$ يكون :

$$\rho\tilde{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}| = \langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|\psi\rangle\langle\tilde{\psi}| \quad (87.V)$$

من السهل التأكد من أن الشعاع الذاتي الوحيد لهذا المؤثر هو $|\psi\rangle$ وهو مرفق بالقيمة الذاتية $|\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|^2$ ما يعني أن $\lambda_1 = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|$ ، وبما أن القيم الذاتية الأخرى معدومة فإن $C(\rho) = \lambda_1$ وهي نفسها عبارة التنافسية المعطاة بالعبارة (69-V).

إذاً تقدير قيمة تشابك التكوّن الموجود بحالة ما ρ لاثنين من البت الكمي يتطلب أولاً تحديد القيم الذاتية للمؤثر $\rho\tilde{\rho}$ ، أخذ جذورها التربيعية $\{\lambda_i\}$ ومن ثم حساب المقدار $(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)$ لتلك الأخيرة، فإن كانت قيمته موجبة فإن

$$C(\rho) = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \quad (88.V)$$

ويمكن حساب مقدار تشابك التكوّن بواسطة $\varepsilon(C(\rho))$ المعطاة بالعبارة (78-V)، وإن كانت سالبة فإن $C(\rho) = 0$ والحالة إذاً غير متشابكة.

الخاتمة العامة



الخاتمة العامة

من المنتظر أن يشهد العالم قفزة هائلة في مجال الاتصالات والمعلوماتية، تقوم بها ميكانيك الكم وترسم مسارها نظرية المعلومات الكمية. حجر الزاوية الذي تعتمد عليه نظرية المعلومات الكمية هو التشابك الكمي، والذي قد يصبح هو الأداة التي يتم بها الاتصال اليومي في عالمنا غدا، قد يصبح كل الخيال العلمي الذي حسبناه يوما مستحيلا واقعا ملموسا، لكن غدنا البعيد هذا يقترب بالسرعة التي يتم فيها فهم التشابك الكمي والتحكم به.

التشابك الكمي هو ظاهرة تنفرد بها ميكانيك الكم، علاقة بين نظامين أو أكثر تتعدى حدود الزمان والمكان، تتمثل في قدرة كل نظام على التأثير على البقية وإن كانت هذه الأخيرة مفصولة فيما بينها بمسافات عريضة. التشابك الكمي يتولد نتيجة تفاعل بين هذه الأنظمة في مرحلة ما، وهو ما يؤدي لأن تتشابك أشعة حالتهم بشكل لا يسمح بوصف كل نظام منهم بشعاع حالة منفرد. التشابك الذي يكون بين أشعة الحالة هو ما يستوجب وصف الأنظمة المتشابكة كمجموعة واحدة، فتتأثر بالعمليات التي تجري على عناصرها وإن كانت منفصلة مكانيا عن بعضها البعض.

لم يستطع كثيرون هضم التشابك الكمي ولا تقبله بل اعتبروه نقطة ضعف في النظرية الكمية، لكن J. S. Bell تمكن أخيرا من حسم الموقف من خلال متراجحة صارت تعرف فيما بعد بمتراجحة بيل. لا تكون هذه المتراجحة محققة دوما إن كان التشابك الكمي حقيقيا، أي إن كانت الأجسام المتشابكة قادرة على أن تؤثر أنيا على بعضها البعض. الاختبار العملي لمتراجحة بيل من خلال عدد من التجارب أثبت أن نتائجها تخرق متراجحة بيل وهو ما يعني أن التشابك الكمي موجود بالفعل!

الاستفادة من التشابك الكمي يستلزم تحديد الأدوات الرياضية اللازمة لوصف الأنظمة المتشابكة، حتى يتسنى التحكم بها والتنبؤ بسلوكها. الأنظمة المتشابكة لا يمكن أن تُوصف بشعاع حالة وهو ما يستدعي وصفها باستخدام مؤثر الكثافة، ولأن الأنظمة المتشابكة تؤثر بعضها على بعض فإن هذا يعني أن تطور حالتها نتيجة للعمليات الفيزيائية التي يمكن أن تخضع لها لا يمكن أن يعتمد على متغيرات النظام وحسب، ولهذا تم تعميم هذه العمليات للأنظمة المتشابكة. البداية كانت مع عملية القياس المعقدة POVM وتمثل تعميما لعملية القياس المتعامد، وهي تحدد كيفية تصرف جزء من النظام عندما يخضع النظام الكلي لعملية

قياس متعامد. العملية التالية كانت عملية التطور المعممة، والتي تصفها المؤثرات الفائقة. المؤثر الفائق يسمح بتحديد حالة النظام المتشابك بعد خضوع المجموعة المتشابكة لعملية تطور واحدة. وأخيرا تم تحديد المعادلة التفاضلية الزمنية التي تحكم التطور الزمني لنظام متشابك، المعادلة التي تم اشتقاقها هي المعادلة الرئيسية بشكل Lindblad وتصلح للأنظمة التي يكون تطورها خاضعا لتقريب ماركوف، أي أن حالتها في لحظة زمنية معينة تُحدد حالتها في اللحظة التي تليها.

هناك عدد من التطبيقات المثيرة التي تعتمد على التشابك الكمي، كالنقل الكمي، الترميز المكثف وغيرها. تستغل هذه التطبيقات التشابك الكمي الذي تحتويه حالات بيل، أو الحالات ذات التشابك الأقصى لثنائية من البت الكمي. كل الحالات الكمية الأخرى لاثنين من البت الكمي تحوي مقدار تشابك أقل من حالات بيل، وبشكل عام يختلف مقدار التشابك الي تحتويه الحالات الكمية لأي نظام متشابك من حالة لأخرى ومن نظام لآخر، وهو ما يستدعي تعريف مقياس للتشابك يقوم بتقدير التشابك الذي تحتويه الحالات الكمية.

مقاييس التشابك المعروفة عديدة، يختلف كل مقياس عن الآخر في نوع المهمة التي يقوم بترتيب الحالات المتشابكة بحسب كفاءتها في تنفيذها. المقياس الكمي الأكثر شهرة من بينها هو مقياس انتروبي فان نيومان ويستطيع تقدير كمية التشابك الموجودة في الحالة النقية لأي نظام مركب من قسمين. مقياس تشابك التكوّن هو تعميم لانتروبي فان نيومان للحالة المختلطة لنظام مكون من قسمين، وفيه يُعرّف مقدار التشابك بأنه أقل قيمة لمعدل التشابك بالنسبة لكل المجموعات الممكنة لمؤثر الكثافة، هذا التعريف التغييري لمقياس تشابك التكوّن هو ما جعل من تحديد مقدار التشابك للحالة مختلطة أمرا غاية في الصعوبة، ولم يُحدد بشكل تحليلي سوى لأجل النظام المكون من اثنين من البت الكمي.

تُماثل بقية المقاييس الموجودة مقياس تشابك التكوّن في امتلاكها تعريفا تغييريا لتحديد درجة التشابك، ولهذا لا تملك هذه المقاييس عبارات تحليلية يمكن من خلالها تقدير التشابك. الاستثناء الوحيد هو انتروبي فان نيومان لكنه هو الآخر لا ينفذ سوى في حالة خاصة، لذا فإن تطوير هذه المقاييس والبحث عن كيفية تحديد مقدار التشابك لأي حالة كمية سيكون ذا فائدة عظيمة على نظرية المعلومات الكمية، وعلى الاستغلال العملي للتشابك في التطبيقات الحالية والمستقبلية.

الملاحظات



الملحق (أ)

مؤثر الإفناء في تمثيل التفاعل

في تمثيل التفاعل يعرف مؤثر الإفناء a_I بالعلاقة :

$$a_I = e^{iH_0 t} a e^{-iH_0 t} \quad (1.A)$$

أين a هو مؤثر الإفناء في تمثيل شرودينجر، و H_0 هو مؤثر الطاقة للهزاز التوافقي في نفس التمثيل. الغاية التي نسعى إليها في هذا القسم هي أن نثبت أن $a_I = e^{-i\omega_0 t} a$ ، ولتحقيق هذه الغاية نقوم بداية بتحديد المعادلة التفاضلية الزمنية التي يحققها مؤثر الإفناء a_I ، وذلك باشتقاق هذا الأخير بالنسبة للزمن :

$$\dot{a}_I = (iH_0) e^{iH_0 t} a e^{-iH_0 t} + e^{iH_0 t} a (-iH_0) e^{-iH_0 t} = i[H_0, a_I] \quad (2.A)$$

إذاً

$$\dot{a}_I = i[H_0, a_I] \quad (3.A)$$

نفترض أن حل المعادلة السابقة هو من الشكل $a_I = e^{-i\omega_0 t} a$ ، ونرى إن كان هذا الحل يحقق المعادلة السابقة أم لا، ومنه

$$\dot{a}_I = -i\omega_0 e^{-i\omega_0 t} a = -i\omega_0 a_I \quad (4.A)$$

و من جهة أخرى

$$i[H_0, a_I] = i[\omega_0 a^\dagger a, e^{-i\omega_0 t} a] = i\omega_0 e^{-i\omega_0 t} [a^\dagger a, a] = i\omega_0 e^{-i\omega_0 t} (-a) \quad (5.A)$$

أين استخدمت علاقات التبادل المعروفة للهزاز التوافقي في المساواة الأخيرة، وعليه

$$i[H_0, a_I] = -i\omega_0 a_I \quad (6.A)$$

عند مقارنة المعادلتين (4.A) و (6.A) نجد أنهما متساويتان، إذاً $e^{-i\omega_0 t} a$ هي بالفعل حل للمعادلة (3.A)، وهو ما يعني أن قيمة مؤثر الإفناء في تمثيل التفاعل هي $a_I = e^{-i\omega_0 t} a$.

الملحق (ب)

قيمة التنافسية لحالة أي نظام مكون من اثنين من البت الكمي

تعرف التنافسية $C(\rho)$ لنظام مكون من اثنين من البت الكمي في الحالة الكمية ρ بالعلاقة :

$$C(\rho) = \inf_{\{p_i, \varphi_i\}} \sum_i p_i C(\varphi_i) \quad (1. B)$$

أين $\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ و $C(\varphi_i) = |\langle\varphi_i|\tilde{\varphi}_i\rangle| = |\langle\varphi_i|\sigma_y \otimes \sigma_y|\varphi_i^*\rangle|$ الهدف الذي نصبوا إليه في هذا القسم هو أن نثبت أن :

$$C(\rho) = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) \quad (2. B)$$

أين $\{\lambda_i\}$ هي أعداد موجبة تمثل الجذور التربيعية للقيم الذاتية للمؤثر $\tilde{\rho}$ بترتيب تنازلي، حيث

$$\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y \quad (3. B)$$

المرافق المركب يُؤخذ دائما بالنسبة للأساس القانوني $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. الإثبات يمر بمرحلتين، في المرحلة الأولى سيتم إثبات أنه من الممكن دوما إيجاد مجموعة أو تقسيم لمؤثر الكثافة ρ بحيث يكون معدل التنافسية $\langle C \rangle$ بالنسبة لهذه المجموعة (المقصود بمعدل التنافسية لمجموعة معينة $\{p_i, |\varphi_i\rangle\}$ هو $\langle C \rangle = \sum_i p_i C(\varphi_i)$) يكون مساويا لقيمة $C(\rho)$ المعطاة بالعلاقة (2.B)، بالإضافة إلى أن كل الحالات $\{|\varphi_i\rangle\}$ لهذه المجموعة تمتلك تنافسية $C(\varphi_i)$ مساوية لمعدل التنافسية للمجموعة، أي أن $C(\varphi_i) = C(\rho)$. في المرحلة الثانية يتم إثبات أن معدل التنافسية $\langle C \rangle = C(\rho)$ لهذا التقسيم هو أقل قيمة ممكنة لمعدل التنافسية $\langle C \rangle$ للحالة الكمية ρ [74].

في البداية، يتم الانطلاق من التقسيم الخاص بمجموعة الأشعة الذاتية $\{|v_i\rangle\}$ ذات القيم الذاتية غير المعدومة لمؤثر الكثافة ρ ، أين ستؤخذ هذه الأشعة لتكون غير منظمة بحيث $\langle v_i|v_i\rangle = w_i$ أين w_i تمثل القيمة الذاتية للمؤثر ρ المرفقة بالشعاع الذاتي $|v_i\rangle$:

$$\rho = \sum_{i=1}^n |v_i\rangle\langle v_i| \quad (4. B)$$

تمثل n رتبة المصفوفة ρ وهي لا تتجاوز الأربعة ($n \leq 4$).

حسب النظرية (1) من العنصر (1-6-II)، فإن أي مجموعة أخرى ستمثل نفس مصفوفة الكثافة ρ إذا وُجد مؤثر واحد U^* ، بحيث تكون العلاقة بين أشعة هذه المجموعة والأشعة الذاتية $\{|v_j\rangle\}$ من الشكل :

$$|w_i\rangle = \sum_{j=1}^n U_{ij}^* |v_j\rangle \quad (5. B)$$

الأشعة $|w_i\rangle$ غير منظمة بدورها ومربع طوليتها يمثل الوزن الاحتمالي للعثور على ρ في الحالة المنظمة من $|w_i\rangle$ ، أما U^* فهي مصفوفة واحدة مربعة بعدها $(m \times m)$ أين $m \geq n$. إن اختيار المرافق المركب للمؤثر U جاء لتسهيل الكتابة فيما بعد ويكون U^* واحديا إن كان المؤثر U واحديا. بشكل عام يمكن دوما كتابة ρ من الشكل :

$$\rho = \sum_{i=1}^m |w_i\rangle \langle w_i| \quad (6. B)$$

للبحث عن المجموعة ذات معدل التنافسية الأدنى نبدأ أولا بمعالجة الحالة التي يكون فيها المقدار $(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)$ موجبا أو معدوما. الوصول إلى المجموعة التي يكون معدل تنافسيتها مساويا لذلك المقدار يمر بثلاث تقسيمات للمؤثر ρ ، أول تقسيم -كبقية التقسيمات التي تليه- يتشكل من n شعاع $\{|x_i\rangle\}$ غير منظم على غرار الأشعة $\{|w_i\rangle\}$ ، بحيث يكون

$$\langle x_i | \tilde{x}_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij} \quad (7. B)$$

السؤال الآن هو هل يوجد مؤثر واحد U^* بحيث يكون هناك تقسيم $\{|x_i\rangle\}$ لمؤثر الكثافة ρ يحقق العلاقة السابقة؟ إذا انطلقنا من الحالة العامة فإن

$$|x_i\rangle = \sum_{t=1}^n U_{it}^* |v_t\rangle \quad (8. B)$$

كما أن

$$|\tilde{x}_j\rangle = \sum_{k=1}^n U_{jk} |\tilde{v}_k\rangle \quad (9. B)$$

وعليه تكون

$$\langle x_i | \tilde{x}_j \rangle = \sum_{k,t=1}^n U_{it} \langle v_t | \tilde{v}_k \rangle U_{jk} = (UHU^t)_{ij} \quad (10. B)$$

أين H هي مصفوفة مربعة بعدها $(n \times n)$ وعناصرها المصفوفية هي $H_{tk} = \langle v_t | \tilde{v}_k \rangle$ ، أما المصفوفة U^t فهي منقول المصفوفة U . إذا لا تحقق الأشعة $\{|x_i\rangle\}$ العلاقة (7.B) إلا إن كانت المصفوفة UHU^t قطرية، وعليه يجب البحث عن المصفوفة الواحدية U - إن كانت موجودة- التي تنقل المصفوفة H إلى مصفوفة قطرية عند تنفيذه على هذه الأخيرة بالطريقة UHU^t . في الحقيقة، ونتيجة لكون المصفوفة H متناظرة أي أن $H_{tk} = H_{kt}$ (التحقق من هذه الخاصية ليس صعبا عند استغلال هرميتية المؤثر $\sigma_y \otimes \sigma_y$) فإنه يوجد دائما مؤثر واحد U يحول المصفوفة المتناظرة H إلى مصفوفة قطرية عندما يطبق عليها بالشكل UHU^t [45]، ما يعني أنه من الممكن دوما إيجاد المجموعة $\{|x_i\rangle\}$ لمؤثر الكثافة ρ بحيث $\langle x_i | \tilde{x}_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}$. معدل التنافسية لهذه المجموعة يمثل احتمال العثور على الحالة $|x_i\rangle$ مضروبا في قيمة التنافسية لتلك الحالة، ثم مجموعا على كل الحالات الموجودة في المجموعة، وبما أن الأشعة $\{|x_i\rangle\}$ غير منظمة ومربع طوليتها يعطي احتمال العثور عليها فإن معدل التنافسية للمجموعة $\{|x_i\rangle\}$ هو

$$\sum_{i=1}^n \langle x_i | x_i \rangle \frac{|\langle x_i | \tilde{x}_i \rangle|}{\langle x_i | x_i \rangle} = \sum_{i=1}^n |\langle x_i | \tilde{x}_i \rangle| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \quad (11. B)$$

إن كانت n أقل تماما من أربعة فإن كل λ_i ذات دليل أكبر من n يكون معدوما، وذلك حتى يمكن التعامل مع العبارة السابقة بغض النظر عن رتبة المصفوفة ρ .

المجموعة التالية من الأشعة التي سيتم الانتقال إليها هي مجموعة الأشعة $\{|y_i\rangle\}$ ، وتعرف انطلاقا من مجموعة الأشعة السابقة $\{|x_i\rangle\}$ حيث

$$\begin{aligned} |y_1\rangle &= |x_1\rangle \\ |y_j\rangle &= i|x_j\rangle \quad j \neq 1 \end{aligned} \quad (12. B)$$

من السهل التأكد هنا من وجود التحويل الواحد V^* الذي ينقل الأشعة $\{|x_i\rangle\}$ إلى الأشعة $\{|y_i\rangle\}$ وفق العلاقة (5.B) (تلك العلاقة عامة من أجل أي مجموعتي أشعة تمثلان نفس مؤثر الكثافة ρ حسب النظرية 1 من العنصر (II-6-1) إذ أن :

$$V^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & i \end{pmatrix} \quad (13. B)$$

ومن السهل التأكد من واحدية V^* عن طريق التطبيق المباشر للعلاقة $V^*(V^*)^\dagger = I$. معدل التنافسية للمجموعة $\{|y_i\rangle\}$ مماثل لمعدل التنافسية للمجموعة السابقة، حيث

$$\sum_{i=1}^n |\langle y_i | \tilde{y}_i \rangle| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \quad (14. B)$$

لكن الانتقال لهذا التقسيم لم يكن من أجل معدل التنافسية بل من أجل استغلال خاصية أخرى مهمة له، للتعرف عليها نقوم أولاً بتعريف 'التنافسية الابتدائية' c (preconcurrency) للحالة النقية $|\psi\rangle$ ، بحيث

$$c(\psi) = \frac{\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (15. B)$$

أين تم تعريفها بشكل عام حتى من أجل الأشعة غير المنظمة، إذا التنافسية الابتدائية ما هي إلا التنافسية لكن من دون رمز القيمة المطلقة. الخاصية التي تتميز بها مجموعة الأشعة $\{|y_i\rangle\}$ هو أن معدل التنافسية الابتدائية $\langle c \rangle$ لهذه المجموعة مساو للتنافسية $C(\rho)$ للحالة ρ كما تنص عليها العبارة (2.B) أي أن

$$\langle c \rangle = \sum_{i=1}^n \langle y_i | \tilde{y}_i \rangle = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \quad (16. B)$$

أهمية هذه الخاصية تظهر في الخطوة التالية والأخيرة، أين سيتم الانتقال من مجموعة الأشعة $\{|y_i\rangle\}$ إلى المجموعة التي تمتلك كل أشعتها تنافسية مساوية لـ $(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)$ مع الحفاظ على معدل التنافسية الابتدائية السابق دون تغيير، هذا سيؤدي إلى أن تكون قيمة معدل التنافسية للمجموعة مساوية لمعدل التنافسية الابتدائية $\langle c \rangle$ لأن هذا الأخير موجب، وهذه هي المجموعة التي نأمل الوصول إليها منذ البداية.

مرة أخرى نكتب أشعة المجموعة الجديدة $\{|z_i\rangle\}$ بدلالة أشعة المجموعة $\{|y_i\rangle\}$ ، وذلك باستخدام العلاقة (5.B) أين المصفوفة الواحدية المستخدمة في هذه الحالة هي W^* التي بعدها هو $(n \times n)$:

$$|z_i\rangle = \sum_{j=1}^n W_{ij}^* |y_j\rangle \quad (17. B)$$

المطلوب من هذه المجموعة هو أن تحافظ على قيمة التنافسية الابتدائية، حيث

$$\langle c \rangle = \sum_{i=1}^n \langle z_i | \tilde{z}_i \rangle = \sum_{i=1}^n (WYW^t)_{ii} = \text{tr}(WYW^t) = \text{tr}(YW^tW) \quad (18. B)$$

أين Y هي مصفوفة حقيقية قطرية وعناصرها تعرف بـ $Y_{it} = \langle y_i | \tilde{y}_t \rangle$. وبالتالي حتى يكون للمجموعتين $\{|z_i\rangle\}$ و $\{|y_i\rangle\}$ نفس معدل التنافسية الابتدائية، يجب أن تكون المصفوفة W مصفوفة واحدية وحقيقية وذلك حتى يكون $(W^\dagger = W^t)$ ، ونتيجة لذلك تصبح :

$$\langle c \rangle = \text{tr}(YW^tW) = \text{tr}(Y) = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \quad (19. B)$$

وهذا هو نفسه معدل التنافسية الابتدائية للمجموعة $\{|y_i\rangle\}$.

نقتصر العمل إذاً على المصفوفات المتعامدة التي تحقق $(W^t W = I)$ للانتقال من مجموعة الأشعة $\{|y_i\rangle\}$ إلى المجموعة $\{|z_i\rangle\}$ ، وهذا النوع من التحويلات كاف في الحقيقة لنقل $\{|y_i\rangle\}$ إلى مجموعة من الأشعة يمتلك كل منها تنافسية مساوية لمعدل التنافسية الابتدائية $\langle c \rangle$. إن المصفوفات المتعامدة تملك محددًا قدره $+1$ أو -1 ، تلك التي محددها $+1$ يمكن القول بأنها تصف دورانًا معممًا للأشعة، النوع الأخير من التحويلات يمكن استخدامه لنقل كل شعاع من الأشعة $\{|y_i\rangle\}$ إلى المجموعة المقصودة كما سيتم توضيحه بعد قليل. نأخذ أن هذا التحويل لا يؤثر إلا على الشعاعين الحديين من مجموعة الأشعة $\{|y_i\rangle\}$ أي يمكن تمثيل هذا التحويل بدوران عادي في فضاء ثنائي البعد مشكل بواسطة الشعاعين الحديين ويتم تعريفه بواسطة وسيط وحيد هو زاوية الدوران. من المهم التوضيح هنا أن هذا التحويل لا يقوم بتدوير الأشعة في فضاء هيلبرت الحقيقي وإنما هو فقط يقوم بإنشاء تركيبات خطية انطلاقًا من الشعاعين الحديين كما تصف ذلك المعادلة (17.B)، أين يتم تشكيل هذه التركيبات الجديدة بواسطة المعاملات $\{w_{ij}\}$ التي تخضع للشرط $\sum_i w_{ik} w_{ij} = \delta_{jk}$ وهذه العملية لا تؤثر بتاتا على بقية الأشعة من المجموعة $\{|y_i\rangle\}$.

في البداية يمتلك الشعاعان تنافسية ابتدائية مختلفة عن $\langle c \rangle$ (إذا كانت تنافسيتهما الابتدائية متساوية فالأمر منته قبل أن يبدأ ونكون بالفعل في المجموعة المطلوبة)، الأول تنافسيته الابتدائية λ_1 أكبر تمامًا من معدل التنافسية الابتدائية أما الأخير من المجموعة فله تنافسية ابتدائية أقل تمامًا من $\langle c \rangle$ ، ما يقوم به التحويل المتعامد هو نقل الشعاع الأول إلى شعاع ذي تنافسية ابتدائية مساوية إلى $\langle c \rangle$ ، وهذا ممكن لأنه يوجد تحويل من نفس النوع يقوم بنقل الشعاع الأول إلى الأخير، وبما أن الدوران عملية مستمرة فلا بد من أن الشعاع قد مر بالشعاع الذي له تنافسية ابتدائية مساوية للمعدل $\langle c \rangle$ ، ومنه يوجد دوران بزاوية معينة إن صح التعبير ينقل الشعاع $|y_1\rangle$ إلى الشعاع ذي التنافسية الابتدائية المساوية للمعدل $|z_1\rangle$ مع بقاء معدل التنافسية الابتدائية $\langle c \rangle$ محفوظًا بهذا التحويل. الشعاع الأخير تغيرت تنافسيته الابتدائية بهذا التحويل هو الآخر، لكن قيمتها مختلفة عن $\langle c \rangle$ فهو يأخذ قيمة معينة بحيث يبقى معدل التنافسية الابتدائية $\langle c \rangle$ للمجموعة محفوظًا بعد هذه العملية، إذا تبقى ثلاثة أشعة ليتم نقلها واحدًا بعد آخر إلى الأشعة المطلوبة للمجموعة $\{|z_i\rangle\}$ باستخدام نفس الطريقة التي نُقل بها الشعاع الأول $|y_1\rangle$ [74].

في نهاية هذه العملية يتم التوصل إلى المجموعة $\{z_i\}$ التي تمتلك معدل تنافسية ابتدائية $\langle c \rangle$ مساويا لمعدل التنافسية $\langle C \rangle$ للمجموعة، أين كل شعاع من أشعة هذه المجموعة يمتلك تنافسية مساوية لـ $\langle C \rangle$ ، المساوية بدورها لـ $C(\rho)$ بحيث

$$\langle c \rangle = \langle C \rangle = C(z_i) = C(\rho) = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \quad (20. B)$$

هنا نكون قد أنهينا المرحلة الأولى من الإثبات وبقي الآن أن نثبت أن المجموعة $\{z_i\}$ هي المجموعة التي تمتلك أقل معدل تنافسية ممكن. لتحقيق هذا الغرض نطلق من المجموعة $\{y_i\}$ أين كل تقسيم ممكن لمؤثر الكثافة ρ يمكن تشكيله من هذه المجموعة حسب العلاقة (5.B)، معدل التنافسية للمجموعة الجديدة يمكن حسابه بطريقة مشابهة للطريقة التي حسب بها معدل التنافسية الابتدائية $\langle c \rangle$ ، حيث

$$\langle C \rangle = \sum_{i=1}^m |(FYF^t)_{ii}| \quad (21. B)$$

أين F هي مصفوفة التحويل بين مجموعتي التقسيم للمؤثر ρ . بما أن المجموعة الجديدة قد تحتوي على عدد من الأشعة أكبر من n رتبة المصفوفة ρ وعدد الأشعة في المجموعة $\{y_i\}$ ، فإن المصفوفة الواحدية F سيكون بعدها على العموم هو $(m \times m)$ أين $(n \leq m)$ ، لكن بما أن الانطلاق كان من المجموعة $\{y_i\}$ التي لا تملك سوى n شعاع فإنه يمكن النظر إلى F على أنها مصفوفة لها n عمود و m سطر أين تكون أعمدة هذه المصفوفة عبارة عن أشعة منظمة ومتعامدة، وبلغة أخرى للانتقال بين تقسيمي ρ الفارطين يكفي البحث عن المصفوفة F التي بعدها $(m \times n)$ ذات الأعمدة المنظمة و المتعامدة. وبالفعل فقط عند النظر لـ F بهذه الطريقة يكون للمعادلة السابقة معنى (وفي الحقيقة الاستخراج التحليلي للعبارة السابقة يفرض هذا).

لإثبات أن معدل التنافسية لأي مجموعة لا يمكن أن يكون أقل من $C(\rho)$ الموضحة بالعبارة (2.B)، يجب إثبات أن قيمة $\langle C \rangle$ المعطاة بالعبارة (21.B) أكبر من أو تساوي $(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)$ ، وهذا يتم باستغلال خاصية التنظيم لأعمدة المصفوفة F حيث أن $\sum_{i=1}^m |(F_{ij})^2| = 1$. عند كتابة المعادلة (21.B) باستخدام العناصر المصفوفية نجد أن (تذكر أن المصفوفة Y قطرية) :

$$\langle C \rangle = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n (F_{ij})^2 Y_{jj} \right| \quad (22. B)$$

ما يجب التأكيد عليه هنا هو أن كل اختيار للمصفوفة F يفضي إلى مجموعة معينة لمؤثر الكثافة ρ ، بحيث أن كل المصفوفات الممكنة F تمثل كل المجموعات الممكنة لـ ρ ، أين الشرط الوحيد على هذه المصفوفات هو أن تحقق أعمدها شرطي التعامد والتنظيم كما سبق شرحه. إثبات أن $\langle C \rangle \geq \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4$ يستلزم المرور بنقطة أساسية و أخيرة : لا تعطي مجموعتان لمؤثر الكثافة نفس التمثيل لهذا الأخير إلا إن كانت هاتان المجموعتان من الشكل $\{|s_i\rangle\}$ و $\{e^{i\theta_i}|s_i\rangle\}$ ذلك أن إضافة فرق طور كلي للأشعة لن يغير من شكل التمثيل لمؤثر الكثافة حيث :

$$\rho = \sum_i e^{i\theta_i}|s_i\rangle\langle s_i|e^{-i\theta_i} = \sum_i |s_i\rangle\langle s_i| \quad (23. B)$$

أي أن كل المجموعات من الشكل $\{e^{i\theta_i}|s_i\rangle\}$ هي مجموعات متكافئة. يمكن استغلال هذه الخاصية لاختبار عنصر واحد من المجموعة المتكافئة عند البحث عن القيمة الدنيا لمعدل التنافسية $\langle C \rangle$ ، هذا العنصر يتم اختياره بحيث تكون عناصر العمود الأول للمصفوفة F كلها حقيقية وموجبة، وهذا ممكن دوماً، فالمصفوفة F التي تنقل الأشعة $\{|y_i\rangle\}$ إلى المجموعة $\{|s_i\rangle\}$ لا تكون عناصر العمود الأول منها $\{F_{i1}\}$ حقيقية بشكل عام $(F_{i1} = |F_{i1}|e^{-i\varphi_i})$ ، بحيث أن

$$|s_i\rangle = |F_{i1}|e^{-i\varphi_i} + \sum_{j=2}^n F_{ij}^*|y_j\rangle \quad (24. B)$$

لكن يمكن من هذه العبارة الانتقال إلى تلك المجموعة التي تكون فيها $\{F_{i1}\}$ حقيقية وموجبة مع الحفاظ على نفس التمثيل لـ ρ ، وذلك باختيار :

$$e^{i\varphi_i}|s_i\rangle = |F_{i1}| + \sum_{j=2}^n F_{ij}^*e^{i\varphi_i}|y_j\rangle \quad (25. B)$$

وعليه جميع عناصر العمود الأول للمصفوفة التي تنقل المجموعة $\{|y_i\rangle\}$ إلى المجموعة $\{e^{i\varphi_i}|s_i\rangle\}$ حقيقية وموجبة. إذاً لا ينقص من عمومية المسألة شيئاً أن يتم اختيار المصفوفات F التي تكون فيها $\{F_{i1}\}$ كلها حقيقية وموجبة، لأن هذا يكفي لتشكيل كل التمثيلات الممكنة لمؤثر الكثافة ρ ، وعليه يمكن استغلال هذه الخاصية لنكتب :

$$\langle C \rangle = \sum_i \left| \sum_j (F_{ij})^2 Y_{jj} \right| \geq \left| \sum_{i,j} (F_{ij})^2 Y_{jj} \right| = \left| \lambda_1 - \sum_{j=2}^n \sum_i (F_{ij})^2 \lambda_j \right| \quad (26. B)$$

وباستغلال خواص الأعداد المركبة نجد أن

$$\left| \lambda_1 - \sum_{j=2}^n \sum_i (F_{ij})^2 \lambda_j \right| \geq \lambda_1 - \left| \sum_{j=2} \sum_i (F_{ij})^2 \lambda_j \right| \quad (27. B)$$

وبما أن

$$\left| \sum_{j=2} \sum_i (F_{ij})^2 \lambda_j \right| \leq \sum_{j=2} \sum_i |(F_{ij})^2| \lambda_j = \sum_{j=2} \lambda_j \quad (28. B)$$

فإن

$$\lambda_1 - \left| \sum_{j=2} \sum_i (F_{ij})^2 \lambda_j \right| \geq \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \quad (29. B)$$

وعليه يكون

$$\langle C \rangle = \sum_i \left| \sum_j (F_{ij})^2 Y_{jj} \right| \geq \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = C(\rho) \quad (30. B)$$

وهي النتيجة المطلوبة، إذًا معدل التنافسية $\langle C \rangle$ لا يمكن أن يكون أقل من $C(\rho)$ عندما يكون هذا الأخير موجبا أو معدوما (كالعادة تكون كل λ_j ذات دليل j أكبر تماما من n معدومة).

بقي الآن أن نثبت أن أقل قيمة لمعدل التنافسية هي الصفر عندما يكون $(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)$ سالبا تماما، وهو ما يعني أن الحالة ρ غير متشابكة في هذه الحال. يجدر التنويه هنا إلى أن مصفوفات الكثافة التي نتعامل معها هنا هي المصفوفات التي تكون رتبته أكبر تماما من اثنين ذلك أن $(\lambda_1 \geq \lambda_2)$ حسب التعريف. في هذا الشطر من البرهان، تستخدم المجموعة $\{|x_i|\}$ المعرفة بالعلاقة (7.B) من جديد للانتقال مباشرة إلى المجموعة ذات التنافسية المعدومة $\{|z_i|\}$ ، التحويل الواحد المستخدم للانتقال بين المجموعتين هو :

$$\begin{aligned}
 |z_1\rangle &= \frac{1}{2}(e^{i\theta_1}|x_1\rangle + e^{i\theta_2}|x_2\rangle + e^{i\theta_3}|x_3\rangle + e^{i\theta_4}|x_4\rangle) \\
 |z_2\rangle &= \frac{1}{2}(e^{i\theta_1}|x_1\rangle + e^{i\theta_2}|x_2\rangle - e^{i\theta_3}|x_3\rangle - e^{i\theta_4}|x_4\rangle) \\
 |z_3\rangle &= \frac{1}{2}(e^{i\theta_1}|x_1\rangle - e^{i\theta_2}|x_2\rangle + e^{i\theta_3}|x_3\rangle - e^{i\theta_4}|x_4\rangle) \\
 |z_4\rangle &= \frac{1}{2}(e^{i\theta_1}|x_1\rangle - e^{i\theta_2}|x_2\rangle - e^{i\theta_3}|x_3\rangle + e^{i\theta_4}|x_4\rangle)
 \end{aligned} \tag{31. B}$$

في الحالة التي تكون فيها رتبة المصفوفة هي 3 فإن الشعاع $|x_4\rangle$ في التحويل السابق سيمثل ببساطة الشعاع المعدم. إن التأكد من واحدة مصفوفة التحويل سهل، لكن حتى يكون للمجموعة $\{|z_i\rangle\}$ معدل تنافسية معدوم، يجب أن يكون :

$$\sum_j e^{2i\theta_j} \lambda_j = 0 \tag{32. B}$$

عندها تكون تنافسية كل شعاع من الأشعة $\{|z_i\rangle\}$ معدومة، حيث

$$\langle z_i | \tilde{z}_i \rangle = \sum_j e^{-2i\theta_j} \lambda_j = 0 \tag{33. B}$$

في الحقيقة، يمكن التأكد من أنه توجد دوما مجموعة معاملات $\{e^{2i\theta_j}\}$ تحقق العلاقة (32.B) عندما تكون $\lambda_1 < \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ ، وللتحقق من هذا نفترض أن هناك مجموعة من الأعداد المركبة $\{\tilde{\lambda}_j\}$ بحيث $|\tilde{\lambda}_j| = \lambda_j$ ، هذه الأعداد تحقق العلاقة :

$$\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 + \tilde{\lambda}_4 = 0 \tag{34. B}$$

وعليه تكون

$$|\tilde{\lambda}_1| = \lambda_1 = |\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 + \tilde{\lambda}_4| \leq \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \tag{35. B}$$

ومنه

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \tag{36. B}$$

وبما أن $\lambda_1 < \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ في الحقيقة فإن هذا يعني أنها متناسقة مع العلاقة الأخيرة، وعليه يمكن دوما إيجاد معاملات مركبة $\{e^{2i\theta_j}\}$ بحيث تكون العلاقة (32.B) محققة.

طبعاً لا يمكن أن يوجد تقسيم لـ ρ يمكن أن يعطي معدل تنافسية أقل، لأن الصفر هو أقل قيمة ممكنة للتنافسية على الإطلاق. بهذه النتيجة يكون الإثبات قد اكتمل، ونكون قد أثبتنا أن التنافسية للحالة ρ المعرفة

بالعلاقة (1.B) تعطى فعلا بواسطة العبارة (2.B)، وعليه يمكن دوما معرفة مقدار تشابك التشكيل لأي حالة كمية لنظام مركب من اثنين من البت الكمي [74].

قائمة المراجع

- [1] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, Phys. Rev., Vol. 47, iss. 10 (1935).
- [2] Alisa Bokulich and Gregg Jaeger, Philosophy Of Quantum Information And Entanglement, Cambridge University Press, Cambridge (2010).
- [3] Philipp Krammer, Quantum Entanglement : Detection, Classification and Quantification, Master thesis, University of Vienna, Austria (2005).
- [4] John D. Trimmer, The Present Situation in Quantum Mechanics : A Translation of Schrödinger's "Cat Paradox" Paper, Proc. Am. Philos. Soc., Vol. 124, No. 5 (1980).
- [5] Michael A .Nielsen, Quantum Information Theory, Doctoral Dissertation, The University of New Mexico, United States of America (1998).
- [6] Roland Omnès, The Interpretation of Quantum Mechanics, Princeton University Press, United states of America (1994).
- [7] B. H. Bransden and C. J. Joachain, Physics of Atoms and Molecules, Longman Scientific & Technical, Hong Kong (1990).
- [8] David J.Griffiths, Introduction to Quantum Mechanics, Prentice Hall, United states of America (1995).
- [9] Leslie E. Ballentine, Quantum Mechanics A Modern Development, World Scientific Publishing, United states of America (1998).
- [10] George Greenstein and Arthur G. Zajonc, The Quantum Challenge: Modern Research on the Foundations of Quantum Mechanics, Second Edition, Jones And Bartlett Publishers, United states of America (2006).
- [11] Franck Jackson and Graham Priest, Lewisian Themes: The Philosophy of David K. Lewis, Oxford University Press, United states of America (2004).
- [12] Peter R. Holland, The Quantum Theory Of Motion, Cambridge University Press, Great Britain (1993).

-
- [13] J. S. Bell, Speakable and unspeakable in quantum mechanics, Cambridge University Press, United states of America (1987).
- [14] Williem M. De Muynck, Foundations of Quantum Mechanics, an Empiricist Approach, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2002).
- [15] Gennaro Auletta, Foundations and Interpretation of Quantum Mechanics, World Scientific Publishing , Singapore (2001).
- [16] Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne, Abner Shimony, Anton Zeilinger, Bell's theorem without inequalities, Am. J. Phys., Vol. 58, Iss. 12 (1990).
- [17] Jürgen Audretsch, Entangled Systems : New Directions In Quantum Physics, Wiley, Weinheim (2007).
- [18] Lingxiao Zhang, Engineering Exchange Interaction in Coupled Spin-qubit Quantum Dots, A doctoral dissertation, university of Illinois at Urbana-Champaign, United States of America (2008).
- [19] J.J.Sakurai, Modern Quantum Mechanics, revised edition, Addison Wesley publishing company, United States of America (1994).
- [20] Jhon Preskill , Lectures Notes on Quantum Information Theory.
[<http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/>].
- [21] Dan C. Marinescu and Gabriela M. Marinescu, Classical and Quantum Information, Elsevier, United States of America (2012).
- [22] Michel Le Bellac, Quantum Physics, Cambridge University Press, New York (2006).
- [23] Dipankar Home, Conceptual Foundations of Quantum Physics An Overview from Modern Perspectives, Springer, New York (1997).
- [24] Michael A. Nielsen & Isaac L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, 10th Anniversary Edition, Cambridge University Press, Cambridge (2010).
- [25] Asher Peres, Quantum Theory : Concepts and Methods, Kluwer Academic Publishers, United States of America (2002).

- [26] Richard L. Liboff, *Introductory Quantum Mechanics*, Addison Wesley publishing company, United States of America (1980).
- [27] Ingemar Bengtsson and Karol Zyczkowski, *Geometry Of Quantum States An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press, New York (2006).
- [28] Alisa Bokulich and Gregg Jaeger, *Philosophy Of Quantum Information And Entanglement*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).
- [29] Anirban Pathak, *Elements Of Quantum Computation And Quantum Communication*, Taylor & Francis Group, Florida (2013).
- [30] Thomas A. Brody, Luis de la Peiia and Peter E. Hodgson, *The Philosophy Behind Physics*, Second Printing, Springer, Germany (1994).
- [31] V. K. Thankappan, *Quantum Mechanics*, Second Edition, New Age International, India (2003).
- [32] Emil Wolf, *Progress In Optics Volume 49*, Elsevier, Netherlands (2006).
- [33] Vasily E. Tarasov, *Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems*, Elsevier, Netherlands (2008).
- [34] Robert Batterman, *The Oxford Handbook of Philosophy of Physics*, Oxford University Press, United States of America (2013).
- [35] Richard Phillips Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Linzee Sands, *The Feynman Lectures on Physics volume 3*, Addison Wesley publishing company, United States of America (2010).
- [36] Zbigniew Ficek and Stuart Swain, *Quantum Interference and Coherence Theory and Experiments*, Springer, United States of America (2005).
- [37] János A. Bergou and Mark Hillery, *Introduction to the Theory of Quantum Information Processing*, Springer, New York (2013).
- [38] Jeong Woon Choi, Dowon Hong, Ku-Young Chang, Dong Pyo Chi and Soojoon Lee, *Extension of the GHJW theorem for operator ensembles*, *Phys. Lett. A*, Vol. 375, Iss. 3 (2011).

-
- [39] Gregg Jaeger, Quantum Information An Overview, Springer, United States of America (2007).
- [40] Moses Fayngold and Vadim Fayngold, Quantum Mechanics and Quantum Information, Wiley, Germany (2013).
- [41] K. R. Parthasarathy, An Introduction to Quantum Stochastic Calculus, Springer, Germany (1992).
- [42] A. Bovier, F. Dunlop, A. van Enter, F. den Hollander, J. Dalibard, Mathematical Statistical Physics, Elsevier, Netherlands (2006).
- [43] Giuliano Benenti, Giulio Casati and Giuliano Strini, Principles Of Quantum Computation And Information, Volume II, World Scientific Publishing, Singapore (2007).
- [44] Doyeol Ahn and Seoung-Hwan Park, Engineering Quantum Mechanics, Wiley, Singapore (2011).
- [45] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, United States of America (1990).
- [46] Fabio Benatti, M. Fannes, R. Floreanini and D. Petritis, Quantum Information, Computation and Cryptography : An Introductory Survey of Theory, Technology and experiments; Springer, Germany (2010).
- [47] Gianfranco Cariolaro, Quantum Communications, Springer, United States Of America (2015).
- [48] Ableitinger Alexander, Decoherence and open quantum systems, Magister dissertation, University of Vienna, Austria (2008).
- [49] H. J. Carmichael, Statistical Methods in Quantum Optics 1, Corrected second edition, Springer, Germany (2002).
- [50] Heinz-Peter Breuer and Francesco Petruccione, The Theory of Open Quantum Systems, Oxford University Press, Great Britain (2003).
- [51] C. A. Brasil, F. F. Fanchini and R. de Jesus Napolitano, A simple derivation of the Lindblad equation, Rev. Bras. Ensino Fís., vol.35, no.1 (2013).

- [52] Sándor Imre and F. Balázs, Quantum Computing and Communications : An Engineering Approach, Wiley, Germany (2005).
- [53] Giuliano Benenti, Giulio Casati and Giuliano Strini, Principles Of Quantum Computation And Information, Volume I, World Scientific Publishing, Singapore (2005).
- [54] Emmanuel Desurvire, Classical and Quantum Information Theory : An Introduction for the Telecom Scientist, Cambridge University Press, United States of America (2009).
- [55] A.F.J.Levi, Applied Quantum Mechanics, Second Edition, Cambridge University Press, United States of America (2006).
- [56] W. K. Wootters and W. H. Zurek, A single quantum cannot be cloned, Nature, vol. 299 (1982).
- [57] Stephen M. Barnett, Quantum Information, Oxford University Press, United States Of America (2009).
- [58] Benjamin Schumacher and Michael D. Westmoreland, Quantum Processes, Systems, and Information, Cambridge University Press, United States of America (2010).
- [59] Marvin V. Zelkowitz, Advances in Computers, volume 56, Academic Press, Great Britain (2002).
- [60] Alexander Streltsov, Quantum Correlations Beyond Entanglement : and Their Role in Quantum Information Theory, Springer, Germany (2015).
- [61] Volodymyr Krasnoholovets and Frank H. Columbus, Trends in Quantum Physics, Nova Science publishers, United States of America (2004).
- [62] Martin B. Plenio and Shashank Virmani, An introduction to entanglement measures, Quantum Inf. Comput., Vol. 7, iss. 1(2007).
- [63] Michal Horodecki, Entanglement Measures, Quantum Inf. Comput., Vol. 1, No. 1(2001).
- [64] M. Hayashi, S. Ishizaka, A. Kawachi, G. Kimura and T. Ogawa, Introduction to Quantum Information Science, Springer, Germany (2015).

- [65] Martin B. Plenio and Vlatko Vedral, Teleportation, Entanglement and Thermodynamics in the Quantum World, *Contemp. Phys.*, Vol. 39, No. 6 (1998).
- [66] Reinhard F. Werner, Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable mode, *Phys. Rev. A*, Vol. 40, No. 8 (1989).
- [67] Gordon W. F. Drake, *Springer Handbook of Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Springer, Germany (2006).
- [68] Dirk Bouwmeester, Artur K. Ekert and Anton Zeilinger, *The Physics of Quantum Information : Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation*, Springer, United States of America (2000).
- [69] William K. Wootters, Entanglement Of Formation And Concurrence, *Quantum Inf. Comput.*, Vol. 1, No. 1 (2001).
- [70] Aiden A. Bruen and Mario A. Forcinito, *Cryptography, Information Theory and Error-Correction : A Handbook for the 21st Century*, Wiley, United States of America (2005).
- [71] V. Vedral, M.B. Plenio, M.A. Rippin and P. L. Knight, Quantifying Entanglement, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 78, No.12 (1997).
- [72] K. Audenaert, F. Verstraete and B. De Moor, variational characterization of separability and entanglement of formation, *Phys. Rev. A*, Vol. 64, iss. 5 (2000).
- [73] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin and William K. Wootters, Mixed-state entanglement and quantum error correction, *Phys. Rev. A*, Vol. 54, No. 5 (1996).
- [74] William K. Wootters, Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 80, Iss. 10 (1998).