N° d’ordre :
N° de série :

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العــالي والبحث العلمـي

جامعة الشهيد حمة لخضر بالــوادي

كلية العلوم والتكنولوجيا

مذكرة التخرج

ليسانس أكاديمي

مجال: الرياضيات و الاعلام الآلي
شعبة الرياضيات
التخصص: نمذجة رياضية و محاكاة عددية

من إعداد: مراد عبد القادر
بكاكرة علي
بكري زكريا

الموضوع

نظرية الرواسب وتطبيقاتها

تحت إشراف

زاوش المهدي   أستاذ محاضر

السنة الجامعية 2015 – 2014

شكــر وعرفـــان

بســــــــم الله الرحــمن الرحيــم

<< لَئِنْ شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ>>صدق الله العظيم

الحمد لله ذو الفضل و المنة، نشكره و نحمده أن منَّ علينا بإتمام هذا العمل المتواضع ونسأله جلّ و علا أن يجعله فاتحة خير علينا ومصدر إفادة لغيرِنا إن شاء الله .

وبعدْ إنه لمِن الجميل رد الجميل لصاحبه و لو بالشكر والتشكر، فالشكر كل الشكر و الاحترام و أسمى معاني العرفان و التقدير نوجّهها إلى كل من مدّ لنا يد العون من قريب أو بعيد لإنجاز هذه المذكرة و نخص بالذكر "الوالدين..." من أعطونا يد العون و الأستاذ المشرف "زاوش المهدي" الذي لم يبخل علينا بتوجيهاته، و الذي كان مثالاً للحكمة و الرزانة و رمزاً للكرم كما كان لنا بمثابة السراج المضيء في ظلمة البحث العاتمة، و لم يتركنا إلى أن أنار لنا درب الطريق من خلال توجيهاته و إرشاداته القيمة، فدمت ذخراً للطلبة والبحث العلمي يا من كدت أن تكون رسولاً.

الإهــــداء

نهدي عملنا المتواضع الى التي ذابت مثل الشمعة كي تنير لنا الطريق امامنا في مشوار كفاحنا الطويل

أطال الله في أعمارهن وادام رضاءهن عنا.... امهاتنا الغاليات .

الى من بذل كل العطاء وأفنى نفسه في سبيل هنائنا الى من يشقى ليريحنا صاحب كل الفضل في كوننا

هذا....آباؤنا طال الله في أعمارهم.

الى من قاسمنا الحب والحنان اصحاب الرفقة البريئة والضحكة اللطيفة.... اخواننا واخواتنا .

كما لا ننسى زملائنا الاعزاء في الدراسة .

والى كل من كان عونا لنا اساتذتنا الكرام خاصة الأستاذ : " **زاوش المهدي** "

والى كل من نسينا ذكره وكل يد ارتفعت لنا بالدعاء والنجاح .

الفهـــــــــــرس

الفصل الثالث
تطبيقـات على نظريـة الرواسب

مقدمة

إن ما يتضمنه التحليل العقدي أكثر ما يعانيه طلبة الجامعات بصفة عامة والمتخصصين في شعبة الرياضيات بصفة خاصة التي توضح بعض المسائل الصعبة الفهم بالنسبة إليهم.

هذا ما أثار في نفوسنا وحفزنا للبحث في إحدى هذه المسائل، والمتمثلة في حساب المجاميع غير المنتهية والتكاملات باستعمال المتغيرات العقدية والتي طالما تخوف منها البعض،والبعض الآخر اعتبرها مستحيلة الحل.

ونظرا لما يحمله هذا الموضوع من أهمية: علمية وعملية، وما يسعه التحليل العقدي من معلومات غزيرة ومتشعبة ارتأينا أن نقتصر دراستنا على جزء صغير منه، باعتمادنا على نظرية الرواسب.

وقد قسمنا هذه الدراسة إلى ثلاثة فصول،ففي الفصل الأول قدمنا لمحة موجزة عن مجموعة الأعداد العقدية ومعظم خصائصها،مذكرين بتعريف التابع العقدي وخصائصه، وأثناء مسيرتنا في الفصل الأول عرّفنا أيضا التوابع التحليلية وتمثيلها بسلسلة قوى،أما الفصل الثاني فتناولنا فيه بعض النظريات في تكاملات التوابع ذات المتغيرات العقدية كنظرية كوشي للتكامل ونتائجها التطبيقية وفي آخر هذا الفصل تطرقنا إلى نظرية الرواسب وكيفية حساب هاته الرواسب عند أقطاب التوابع العقدية بمختلف رتبها.

وقد خصصنا الفصل الثالث للتعرف على أهم الطرق لحساب المجاميع غير المنتهية باستعمال المتغيرات العقدية وبراهينها وزودناه بأمثلة، وفي النهاية عرضنا ما توصلنا إليه من خلال خلاصة مختصرة.

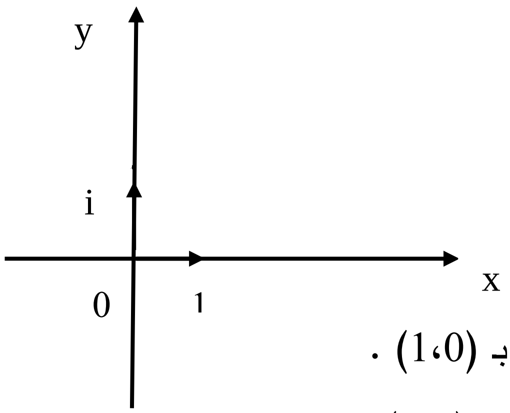
وأخيرا نتمنى أن هذا البحث المتواضع بنتائجه يفيد المتخصصين في الرياضيات وبالأخص في موضوع التحليل العقدي وأن يضيف إلى المكتبة الجامعية مرجعا متواضعا جديدا حول هذا الموضوع.

والله ولي التوفيق

1.1. تعاريف و خواص:

1.1.1. تعريف العدد العقدي:

هو كل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية $z=(x,y)$ و الذي يمكن تمثيله بنقطة $M=(x,y)$ في المستوي XOY .



نرمز لمجموعة الأعداد العقدية بالرمز $\mathbb{C}$، نكتب:

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) / \ x \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{C}\}$$

نزود المستوي بمعلم متعامد ومتجانس

يسمى(OX) بالمحور الحقيقي و يرمز للوحدة عليه بـ (1،0) .

يسمى (OY) بالمحور التخيلي و يرمز للوحدة عليه بـ $i=(0،1)$.

2.1.1. تعريف الجمع و الضرب في $\mathbb{C}$:

نعرف مجموع و جداء عددين عقديين $z_1=(x_1,y_1),z_2=(x_2,y_2)$ كما يلي:

$$+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$(z_1, z_2) = \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \to z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\times: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$(z_1, z_2) = \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \to z_1 \times z_2$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

إن مجموعة الأعداد العقدية مع عمليتي الجمع والضرب أي $(\mathbb{C}, +, \times)$، تشكل بنية حقل حيث:

- العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع هو (0,0).
- العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الضرب هو (1,0).
- نظير (x,y) بالنسبة للجمع هو (-x,-y).
- نظير (x,y) بالنسبة للضرب هو $\left(\frac{x}{x2+y2}, \frac{y}{x2+y2}\right)$ مع $(x,y) \neq (0,0)$.

3.1.1. تساوي عددين عقديين:

نقول عن عددين $z_2=(x_2,y_2)$, $z_1=(x_1,y_1)$ أنهما متساويان إذا كان $x_1= x_2$ و $y_1=y_2$.

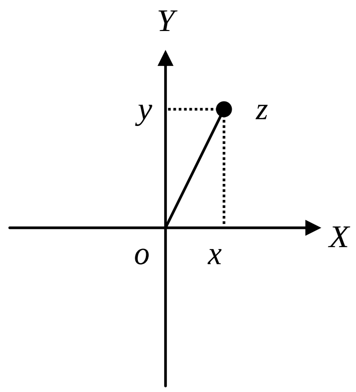
2.1. الكتابات المختلفة لعدد عقدي:

1.2.1. الكتابة حسب التعريف:

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y)/x \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{C}$$

2.2.1. الكتابة الجبرية:

كما هو موضح في الشكل المقابل:



$$\begin{aligned} z \in \mathbb{C} &\Leftrightarrow z = (x, y) \\ &\Leftrightarrow z = x(1,0) + y(0,1) \\ &\Leftrightarrow z = x.1 + \mathrm{i}.y \\ &\Leftrightarrow z = x + \mathrm{i}y \end{aligned}$$

نسمي x بالجزء الحقيقي لـ z ونرمز له بـ Rez.

نسمي y بالجزء التخيلي لـ z ونرمز له بـ $Im\ z$.

فيكون: $z = x + iy \Leftrightarrow z = Rez + i\ Im\ z$

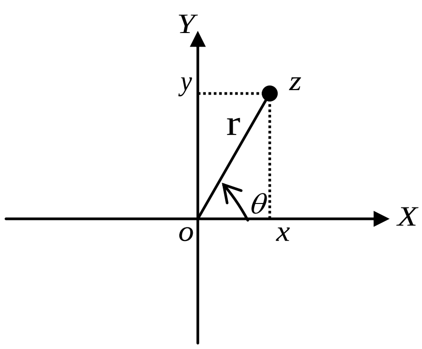
و من تعريف $\mathbb{C}$ ينتج: $i^2 = (0.1).(0.1)$

$= (-1.0) = -1$

3.2.1. الشكل المثلثي لعدد عقدي:

لتكن (r,θ) الإحداثيات القطبية للنقطة $z=(x,y)$ والتي تمثل العدد العقدي $z=x+iy$

لدينا من الشكل:



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

ويكون لدينا: $z = x + iy$

$= r(\cos\theta+\sin\theta)= re^{i\theta}$

تسمى طويلة العدد العقدي$z = (x,y)$ العدد الحقيقي الموجب الذي يرمز له بـ: $|z|$

حيث: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

تسمى θ عمدة العدد العقدي z و نرمز لها بـ: $\arg(z) = \theta$ مع $\theta = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

حيث: $0 \le \theta < 2\pi$ و $x \neq 0$.

نذكر أنه إذا كان z_1 , z_2 عددين عقديين فإن:

1) $\arg(\overline{z}_1) = -\arg(z_1)$

2) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1)+\arg(z_2)$

3) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1)-\arg(z_2)$ حيث $z_2 \neq 0$

4) إذا كان z عدد مركب طويلته r وعمدته θ فان :

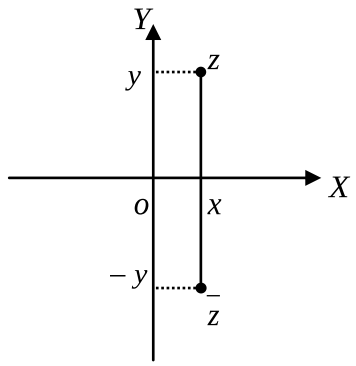
$\forall n \in IN: (\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)$ **(علاقة دي موافر)**

3.1. مرافق عدد عقدي:

ليكن $z = (x,y)$ عددا عقديا، نعرف مرافق العدد z

بالعدد العقدي الذي نرمز له بـ $\overline{z}$ حيث:

$\overline{z} = (x,- y)$ ، و يمثل كما في الشكل المقابل:



1.3.1. خواص: [7]

ليكن z_1 , z_2 عددين عقديين عندئذ يكون لدينا الخواص التالية:

1) $z_1.\overline{z}_2=|z_1|^2$

2) $|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|$

3) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$; $z_2\neq 0$

4) $|z_1+z_2|\le|z_1|-|z_2|$

5) $|z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|$

6) $-|z_1|\leq \mathrm{Im}\, z_1\leq|z_1|$

7) $-|z_1|\leq \mathrm{Re}\, z_1\leq|z_1|$

8) $|z_1|\leq|\mathrm{Re}\, z_1|+|\mathrm{Im} z_1|\leq\sqrt{2}.|z_1|$

9) $\sqrt{|z_1|}=|\sqrt{z_1}|$

10) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$

11) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$

12) $\overline{z_1.z_2}=\overline{z}_1.\overline{z}_2$

13) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$, $z_2\neq0$

يعتمد برهان هذه الخواص مباشرة على تعريف الطويلة و المرافق.

4.1. الجذور النونية لعدد عقدي:

نسمي مجالا رئيسيا للزاوية θ كل مجالٍ طوله 2π أي أن:

$$-\pi\leq\theta<\pi \quad \text{أو} \quad 0\leq\theta<2\pi$$

و نسمي θ في هذه الحالة زاوية رئيسية.

و نسمي قيمة عدد عقدي z الموافقة لزاوية رئيسية القيمة الرئيسية للعدد z.

أي انه إذا كانت: $-\pi\leq\theta_0<\pi$

فإن: $z_0=|z|.e^{i\theta_0}$ هي القيمة الرئيسية لـ z.

إيجاد الجذور النونية للعدد العقدي $z=r.e^{i\theta}$ هو إيجاد عدد عقدي آخر $w=Re^{i\alpha}$ يحقق العلاقة $z=w^n$ و نكتب $w=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$ مع n عدد طبيعي.

تعرف الجذور النونية بـ:

$$Z^{1/n}=(r(\cos\theta+i\sin\theta))^{1/n}$$
$$=z^{1/n}e^{i(\theta+2k\pi)/n}$$
$$=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),\ k=0,1,\ldots,n-1.$$

ينتج من هذه العلاقة الأخيرة أنه يوجد n قيمة مختلفة للعدد العقدي $z^{1/n}$ أي n جذرا للعدد العقدي z.

5.1. التابع العقدي بمتغير عقدي:

1.5.1. تعريف:

لتكن D مجموعة من $\mathbb{C}$.

نقول أن التابع $w=f(z)$ معرف على المجموعة D إذا أرفقت بكل قيمة $z\in D$ قيمة واحدة أو أكثر من قيم w و نكتب:

$$\forall z \in D\,, \exists w \in \mathbb{C}:\; w = f(z)$$

أو:

$$f : D \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto w = f(z)$$

نسمي المجموعة D بمجموعة تعريف التابع f.

ونسمي المجموعة $\{w \in \mathbb{C}/\ z \in D, w = f(z)\}$ مجموعة قيم التابع f.

- نقول أن التابع $w=f(z)$ وحيد قيمة في المجموعة D إذا كان من أجل كل قيمة لـ z من D يقابلها قيمة وحيدة للتابع $f(z)$.
- نقول أن التابع $w=f(z)$ متعدد قيم في المجموعة D إذا كان من أجل كل قيمة لـ z من D يقابلها أكثر من قيمة للتابع $f(z)$.

2.5.1. تعريف نهاية تابع عقدي:

ليكن $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعا عقديا بمتغير عقدي معرف بجوار لنقطة z_0 عدا ربما عند z_0 .

نهاية التابع f عندما يقترب z من z_0 عبر كل السبل هي العدد w_0 (في حال وجودها) ونكتب:

$$(\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z \in D, |z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)-w_0| \le \varepsilon)$$

1.2.5.1. نظرية: [3]

ليكن التابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ المعرف على جوار لنقطة $z_0=x_0+iy_0$ عدا z_0.

عندئذ: $(\lim_{z\to z0} f(z) = u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0)\\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0)\end{cases}$$

2.2.5.1. نظرية: [3]

إذا كان f و g تابعين عقديين بمتغير عقدي معرفين على جوار z_0 ماعدا ربما z_0 و w_1 , w_2 عددان عقديان بحيث:

$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1, \lim_{z\to z_0} g(z) = w_2$ عندئذ لدينا:

1) $\lim_{z\to z_0}(f\pm g)(z) = w_1\pm w_2$

2) $\lim_{z\to z_0}(f.g)(z) = w_1.w_2$

3) $\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{w_1}{w_2} / w_2\neq 0$

3.5.1. استمرار التوابع العقدية:

نقول عن تابع f المعرف بجوار النقطة z_0 أنه مستمر في تلك النقطة إذا تحققت الشرط التالي:

$$\lim_{z\to(z_0)} f(z) = f(z_0)$$

نقول عن التابع f أنه مستمر على D إذا و فقط إذا كان f مستمر عند كل نقطة z_0 من D حيث $D \subseteq \mathbb{C}$.

ونكتب:

$$(\lim_{z\to z0} f(z)=f(z_0)) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall z\in D,|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)| \leq\varepsilon)$$

♦ **بعض خواص الاستمرار: [2]**

1) إذا كان التابع f مستمرا عند z_0 فإن $|f(z)|$ و $\overline{f(z)}$ مستمرين أيضا عند z_0 .

2) إذا كان $f(z)= u(x,y)+iv(x,y)$، فإن $f(z)$ مستمر عند $z_0=x_0+i\ y_0$ إذا وفقط إذا: u و v مستمران عند النقطة (x_0,y_0).

ونقول أنه حتى يكون f مستمرا عند نقطة يكفي ويلزم أن يكون جزءاه الحقيقي والتخيلي مستمران عند نفس النقطة.

4.5.1. الاشتقاق:

ليكن $w=f(z)$ تابعا عقديا وحيد قيمة في المجموعة المفتوحة D حيث $D \subseteq \mathbb{C}$ و لتكن النقطة $z_0 \in D$

نقول عن f أنه قابل للاشتقاق عند النقطة z_0 إذا وفقط إذا كانت النهاية $\lim_{z\to z0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ موجودة ووحيدة.

وتسمى هذه النهاية بمشتق التابع f عند z_0 ونرمز لها بالرمز $f'(z_0)$.

- إن النهاية في حال وجودها لا تتعلق بالسبيل أو الطريق الذي تسلكه z وهي تقترب من z_0 فهذا الاقتراب يتم عبر عدد غير منته من السبيل.

ونقول أن f يقبل الاشتقاق علىD إذا قبل الاشتقاق عند كل نقطة منD.

♦ بعض خواص الاشتقاق: [2]

ليكن f_1, f_2 تابعين عقديين قابلين للاشتقاق عند نقطة z_0 من $\mathbb{C}$ لدينا:

1) f_1+f_2 قابل للاشتقاق عند z_0.

2) $f_1\times f_2$ قابل للاشتقاق عند z_0.

3) $\frac{f1}{f2}$ قابل للاشتقاق عند z_0 مع $f_2\neq 0$.

5.5.1. نظرية: [3]

ليكن f و g تابعان عقديان قابلان للاشتقاق عند نقطة z_0 حيث :

$$f : D \to D$$
$$g : D \to \mathbb{C} \,/\quad z_0 \in D$$

عندئذ القوانين التالية صحيحة:

1) $(f\pm g)'(z_0)=f'(z_0)\pm g'(z_0)$

2) $(f\times g)'(z_0)=f'(z_0)\times g(z_0)+f(z_0)\times g'(z_0)$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0)=\frac{f'(z_0).g(z_0)-f(z_0).g'(z_0)}{g2(z_0)}/g(z_0)\neq0$

إذا كان g قابلا للاشتقاق عند $f(z_0)$ فإن:

4) $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0)).f'(z_0)$

6.1. التابع التحليلي:

1.6.1. تعريف:

نقول عن تابع f أنه تحليلي في المجموعة المفتوحة D إذا كان $f(z)$ يقبل الاشتقاق عند كل نقطة من D.

وتحليلي عند النقطة z_0 إذا وجد جوار لـ z_0 بحيث f تحليلي عليه.

2.6.1. نظرية: [7]

إذا كان التابعين f و g تحليليين على المجموعة المفتوحة D فإن التوابع: $f\pm g$, $f\times g$ تحليلية على المنطقة D .

وإذا فرضنا أن $\forall z\in D/g(z)\neq0$ فإن $\frac{f}{g}$ تحليلي كذلك على D.

7.1. التابع الممثل بسلسلة قوى:

1.7.1. نظرية: [5]

لتكن $\sum_{n\geq0} a_n(z-a)^n$ سلسلة قوى متقاربة ونصف قطر تقاربها R حيث:

$0\leq R\leq+\infty$ و $(a_n)_n$ متتالية من الأعداد العقدية و a عدد عقدي.

عندئذ يصبح لهذه السلسلة مجموعا معينا $f(z)$ عند كل نقطة من ساحة تقاربها D(a,R).

وهكذا يعرف $f(z)$ بـ:

$$f: D(a,R) \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto f(z) = \sum_{n\geq1}^{\infty} a_n\,(z-a)^n$$

نقول في هذه الحالة أن سلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ ممثلة بالتابع $f(z)$ والتابع f ممثل بسلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$.

2.7.1. نظرية: [5]

ليكن لدينا: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$

ولنفرض أن نصف قطر تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ هو $0\leq R\leq +\infty$.

عندئذ:

1) التابع f تحليلي على $D(a,R)$ و يعطى المشتق $f^{(k)}(z)$ عند النقطة z بالسلسلة:

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n z^{n-k},\ k\geq 1\ ,\ z\in D(a,R)$$

2) تعطى الأمثال a_n بـ : $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a),\ n\geq 0$

3) إذا كان لدينا سلسلتي قوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ متقاربتان ولهما نفس المجموع في $D(a,R)$ فإنهما متطابقتين أي: $\forall n\geq 0: a_n=b_n$ في القرص $D(a,R)$.

8.1. التابع الأسي في $\mathbb{C}$:

نعرفه بسلسلة القوى $e^z=\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ حيث أن نصف قطر تقارب هذه السلسلة هو $R=+\infty$.

أي أنها متقاربة في كل $\mathbb{C}$ و بالتالي فالتابع الممثل لها تحليلي في كل $\mathbb{C}$.

9.1. التوابع المثلثية في $\mathbb{C}$:

نعرف في $\mathbb{C}$ التابعين العقديين $\sin z$ و $\cos z$ بسلسلتي القوى:

$\text{Sin}\ z=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ و $\cos\ z=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ حيث سلسلتي القوى متقاربتين في كل $\mathbb{C}$.

وعليه $\sin z$ و $\cos z$ تحليليين في كل $\mathbb{C}$.

ومشتقاتها تعطى بـ: $\sin' z=\cos z$

$$\cos' z=-\sin z$$

فيما يخص دساتير التحويل المعروفة في $\mathbb{C}$ فإنها تبقى قائمة في $\mathbb{C}$.

10.1. التوابع القطعية:

يعرف كل من التابعان العقديان $\operatorname{sh} z$ و $\operatorname{ch} z$ بسلسلتي قوى كالتالي:

$$\operatorname{ch} z=\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{و} \quad \operatorname{sh} z=\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

حيث سلسلتي القوى متقاربتان في كل $\mathbb{C}$.

وعليه $\operatorname{sh} z$ و $\operatorname{ch} z$ تحليليان في كل $\mathbb{C}$.

ومشتقاتها تعطى بـ: $\operatorname{sh}' z = \operatorname{ch} z$

$$\operatorname{ch}' z = \operatorname{sh} z$$

1.10.1. نتائج:

لدينا من أجل كل z من$\mathbb{C}$:

1) $\cos z+ i\sin z= e^{iz}$
2) $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
3) $\sin z= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
4) $\operatorname{tg} z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}$
5) $\operatorname{ch} z+ \operatorname{sh} z= e^{z}$
6) $\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$
7) $\operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

1.2. بعض التعاريف:

1.1.2.المجموعة المفتوحة:

تكون مجموعة النقاط $\mathcal{D}$ من المستوي العقدي $\mathbb{C}$ مفتوحة إذا وجد لكل نقطة z من $\mathcal{D}$ جوار محتوى بكامله فيD .

2.1.2. المجموعة المغلقة:

تكون مجموعة النقاط $\mathcal{D}$ مغلقة إذا كانت متممتها بالنسبة للمستوي العقدي $\mathbb{C}$ تشكل مجموعة مفتوحة.

3.1.2. المجموعة المترابطة:

تكون مجموعة $\mathcal{D}$ مترابطة إذا أمكن أن نصل أي نقطتين في $\mathcal{D}$ بمسار يتكون من قطع خطوط مستقيمة (مسار مضلع) كل نقاطه تكون في $\mathcal{D}$.

4.1.2. المنطقة:

تكون مجموعة النقاط S منطقة إذا وفقط إذا كانت مفتوح ومترابطة.

5.1.2. القرص المفتوح:

نسمي قرصا مفتوحا مركزه a ونصف قطره R المجموعة:

$D(a,R)=\{z\in \mathbb{C}: |z-a|<R\}$ مع R عدد حقيقي موجب و a عدد عقدي.

6.1.2. القرص المغلق:

نسمي قرصا مغلقا مركزه a و نصف قطره R المجموعة:

$\bar{D}(a,R)=\{z\in \mathbb{C}: |z-a|\leq R\}$ مع R عدد حقيقي موجب و a عدد عقدي.

9.1.2. القرص المفتوح محذوف المركز:

نسمي قرصا مفتوحا محذوف المركز a ذا نصف القطر R المجموعة:

$D(a,R)-\{a\}=\{z\in \mathbb{C}: 0<|z-a|<R\}$ مع R عدد حقيقي موجب و a عدد عقدي.

10.1.2.تعريف المنحنى:

ليكن التابع γ المعرف ب:

$$\gamma:[a,b]\rightarrow D\subseteq\mathbb{C}$$

$$t\rightarrow\gamma(t)=\operatorname{Re}\gamma(t)+i\operatorname{Im}\gamma(t)$$

حيث D منطقة.

* نسمي γ منحنيا في D إذا وفقط إذا كان γ مستمرا على $[a,b]$.

* نسمي γ منحنيا أملسا في D إذا وفقط إذا كان γ و γ' مستمران على $[a,b]$.

نقول عن التابع γ حيث $\gamma:[a,b]\rightarrow D$ أنه ذو تغير محدود إذا وجد ثابت موجب M على نحو تتحقق فيه المتراجحة التالية وذلك من اجل كل تجزئة $P=\{a=t_0\leq t_1\leq\ldots\leq t_m=b\}$ لـــ $[a,b]$.

$$v(\gamma,p)=\sum_{k=1}^{k=m}\left|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\right|\leq M.$$

ونعرف التغيير الكلي لـ γ والذي نرمز له بـ $v(\gamma)$ والمعرف على النحو التالي $v(\gamma)=Sup\{v(\gamma,p)\}$ مع p تجزئة لـ $[a,b]$.

انه من الواضح ان $|Z|\leq|X|+|Y|\leq\sqrt{2}|Z|\,/\,Z=x+iy$.

* γ ذو تغيير محدود $\Longleftrightarrow$ تغير كل من $\operatorname{Re}\gamma(t)$ و $\operatorname{Im}\gamma(t)$ محدود .

وينتج هذا باستعمال العلاقة : $|Z|\leq|X|+|Y|\leq\sqrt{2}|Z|\,/\,Z=x+iy$.

11.1.2. تعريف السبيل:

نسمي كل منحني γ ذي تغير محدود سبيلا .

2.2. التكامل المحدد :

ليكن $\gamma:[a,b]\rightarrow\mathbb{C}$ سبيلا ، وليكن $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{C}$ تابع ذا قيم محدودة ($|f(x)|\leq k$)،

ولتكن P تجزئة لـ $[a,b]$. $P=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$

وليكن S_P مجموعا موافقا لهذه التجربة: $S_P=\sum_{k=1}^{n}f(\tau_k)[\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})]$

نقول أن f يقبل المكاملة بالنسبة لـ γ على [a,b] ونرمز لذلك بالرمز:

$$\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(t) d\gamma(t)$$

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} S_P = \ell$ موجودة و محدودة حيث $\ell \in \gamma$.

3.2. التكامل المنحني:

ليكن $\gamma:[a,b]\to\{\gamma\}=\gamma([a,b])$ حيث γ سبيلا و f تابعا مستمرا على $\{\gamma\}$.

إذن $f o\gamma :[a,b]\to \mathbb{C}$ مستمرا.

ومنه $f o\gamma$ يقبل المكاملة بالنسبة لـ γ على [a,b] أي أن $\int_a^b (f o\gamma)(t) d\gamma(t)$ موجود.

ومنه: $\int_a^b (f o\gamma)(t) d\gamma(t)=\int_a^b f(\gamma(t)) d\gamma(t)$

يسمى هذا الأخير تكاملا منحنيا أو تكاملا عقديا للتابع العقدي f على السبيل γ ونرمز له بالرمز $\int_\gamma f(z)dz$.

أي أن $\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))d\gamma(t)$ وبالتـــالي يكـــون التكامـــل العقـــدي $\int_\gamma f(z)dz$ موجودا إذا وفقط إذا كان γ سبيلا و f تابعا مستمرا على $\{\gamma\}$.

4.2. التكامل المنحني العقدي:

ليكن $\gamma :[a,b]\to \mathbb{C}$ سبيلا و $f:[a,b]\to \mathbb{C}$ محدود

نقول عن f أنه يقبل المكاملة بالنسبة لـ γ على [a,b] ويرمز لها بالرمز $\int_a^b f(t) d\gamma(t)$ إذا وفقط إذا $\lim_{n\to+\infty} S_p = L$ بحيث S_p هو المجموع المرافق لتجزئة P لـ $[a,b]$ المعطى بـ:

$S_p=\sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k)[\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})]/\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$.

1.4.2. نظرية: [8]

إذا كان $\gamma :[a,b]\to \mathbb{C}$ سبيلا أو منحنيا أملسا وكان $f:[a,b]\to \mathbb{C}$ تابعا مستمرا فإن f يقبل المكاملة بالنسبة لـ γ على [a ,b] أي أن $\int_a^b f(t) d\gamma(t)$ موجود .

وإذا كان γ أملسا فإن: $d\gamma(t)=\gamma'(t)dt$

ومنه: $\int_a^b f(t) d\gamma(t) = \int_a^b f(t)\gamma'(t)dt$.

5.2. نظريات كوشي التكاملية:

1.5.2. نظرية كوشي:

إذا كان γ سبيلا مغلقا في منطقة $\mathcal{D}$ وكان f تابعا تحليليا على $\mathcal{D}$ فإن: $\int_{\gamma} f(z)dz=0$.

2.5.2. صيغة كوشي التكاملية:

إذا كان γ سبيلا مغلقا **و** f تحليلية على γ وداخله و a نقطة تقع داخل γ فإن:

$$\begin{cases} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a) \\ \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a) \ / \ \forall\ n \geq 1 \end{cases}$$

6.2. تعريف النقاط الشاذة:

النقاط الشاذة لتابع f هي تلك النقاط التي لا يكون هذا الأخير تحليليا عندها.

1.6.2. أنواع النقاط الشاذة:

1.1.6.2. الشاذة المنعزلة:

لتكن z = a نقطة شاذة لـ f نقول أن z = a منعزلة إذا وجد جوار لـ a لا يشمل من الشواذ سواها أي أنه: $\exists R \succ 0: f \in H(\{z \in \mathbb{C}: 0<|z-a| \leq R\})$.

2.1.6.2.الشاذة القابلة للإزالة:

نقول عن نقطة شاذة z= a لـ f أنها شاذة قابلة للإزالة إذا:

$$\exists\ g \in H(D(a,R)): g(z)=f(z), \forall z \in ann(a,0,R)/ann=\{z \in \mathbb{C}: 0 \prec |z-a| \leq R\}$$

حيث (ann(a,0,R تسمى حلقة ذات المركز a ونصف القطر الداخلي صفر والخارجي R.

3.1.6.2. نظرية: [6]

لتكن z= a نقطة شاذة لـ f ، عندئذ:

$$\text{z= a قابلة للإزالة} \Leftrightarrow \lim_{z \to a} \frac{z-a}{z} = 0$$

4.1.6.2. نقاط شاذة أساسية:

نقول عن z = a نقطة شاذة أساسية لـ f إذا $\lim_{z \to a} f(z)$ غير منتهية أو غير موجودة.

7.2. نشر لوران: [6]

ليكن f تابعا تحليليا على الحلقة المفتوحة $ann(a,R_1,R_2)=\{z: R_1\prec|z-a|\prec R_2\}$ و $z=a$ نقطة شاذة منعزلة لــ f عندئذ لدينا ما يلي:

$$(*)....f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(z-a)^n=$$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=-1} a_n(z-a)^n+\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n(z-a)^n$$

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}+\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_{-n}(z-a)^n$$

يسمى الجزء $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ بالجزء التحليلي **للوران** ، بينما الجزء الباقي الذي يتكون من الأس السالب للمقدار $z-a$ فيسمى بالجزء الرئيسي **للوران**.

- تعطى الأمثال a_n و a_{-n} بالعلاقة:

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)-n+1}dz \qquad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)n+1}dz$$

حيث γ هو: $\begin{cases} \gamma(\theta)=a+re^{i\theta} \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \wedge R_1\prec r\prec R_2 \end{cases}$

- السلسلة في (*) متقاربة بانتظام على كل حلقة مغلقة:

$$\begin{cases} \overline{ann}(a,r_1,r_2) \\ R_1\prec r_1\prec r_2\prec R_2 \end{cases}$$

وبالتالي فإن: $\int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(z-a)^n dz=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\int_\gamma a_n(z-a)^n dz$

- النشر في (*) يكون وحيدا.

1.2.مثال:

كتابة نشر لوران للتابع $f(z)=\frac{1}{z-1}$

- في القوى المختلفة لـ z.
- في القوى المختلفة لـ$z-2$.

<u>الحل:</u>

لدينا $z=1$ نقطة شاذة منعزلة لـ f.

القوى المختلفة لـ z تعني القوى المختلفة لـ $(z-0)$، نضع الواحد على محيط القرص فنحصل على أن $f\in H(ann(0,0,1))$ و $f\in H(ann(0,1,+\infty))$

وبالتالي تكون هناك حالتين:

$z\in ann(0,0,1)\Leftrightarrow 0\prec |z| \prec 1$

تصبح : $f(z)=\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{1-z}=-\sum_{n\geq 0} z_n$

$z\in ann(0,1,\infty)\Leftrightarrow 1\prec |z-0| \prec\infty$

$\Leftrightarrow 1\prec |z| \prec\infty$

$\Leftrightarrow \frac{1}{|z|}\prec 1$

يصبح: $f(z)=\frac{1}{z-1}=\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$.

8.2. الأقطاب:

نفرض أن z= a هي النقطة الشاذة الوحيدة لـ f داخل D(R,a) يصبح

$f\in H(ann(a,0,R))$

ومنه حسب لورانت فإن f ينشر وفق سلسلة قوى :

$f(z)=\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{a-k}{(z-a)k}+\ldots\ldots+\frac{a-1}{(z-a)}+\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$

* إذا كان k =1 فإن z= a يسمى قطبا بسيطا.

* إذا كان $a_{-k}\neq 0$ و $a_{-m}=0\quad \forall m\succ k$ فإن z= a يسمى قطبا من الرتبة k للتابع f.

* إذا كان الجزء الرئيسي يحتوي على عدد غير منته فان النقطة الشاذة z=a نقطة شاذة أساسية.

9.2. أصفار تابع تحليلي:

نسمي z= a جذرا أو صفرا لـ f من المرتبة الأولى إذا وفقط إذا كان:

$f(z)=(z-z)g(a)$

مع $g(a)\neq 0$.

ونقول أن z= a صفرا من المرتبة m للتابع f إذا وفقط إذا كان:

. $f(z)=(z-a)^m g(z),\quad g(a)\neq 0$

10.2. نظرية روشيه: [5]

إذا كان f و g تابعين تحليليين على المنحني المغلق $\mathbb{C}$ وداخله وكان:

$$\forall z\in \mathbb{C}:\begin{cases} |g(z)|\leq|f(z)| \\ f(z)\neq 0\end{cases}$$

فإن التابعين f و $f+g$ لهما نفس العدد من الاصفار الواقعة داخل $\mathbb{C}$.

11.2. الرواسب:

1.11.2. تعريف الراسب:

ليكن التابع f وحيد قيمة وتحليلي داخل وعلى محيط الدائرة $\mathbb{C}$ ماعدا عند النقطة.

$z=a$ ، ولنفرض أن هذه النقطة هي مركز لها، عندئذ يمكن نشر التابع f بسلسلة حسب لوران حول النقطة $z=a$ كما يلي:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(z-a)^n=\dots\frac{a-2}{(z-a)2}+\frac{a-1}{(z-a)}+a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2\dots$$

والأمثال a_n تعطى بالعلاقة: $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-a)n+1}dz/n=0,\pm1,\pm2,\dots.$

و بشكل خاص:

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)dz$$

$$2\pi i\, a_{-1}=\oint f(z)dz$$

نسمي العدد a_{-1} راسب التابع f عند النقطة $z=a$ ويرمز إليه بالرمز $\operatorname{Res}(f,a)$

أي : $\operatorname{Res}(f,a)=a_{-1}$.

2.2.مثال :

لتكن f تابع تحليلي حيث : $f(z)=\frac{\cos\frac{1}{z}}{z}$

اوجد راسب التابع f

الحل:

لدينا : $\mathbb{C}=ann(0,0,\infty)$ حيث $\mathbb{C}^*$ حلقة مفتوحة .

حسب نشر تايلور نجد:
$$f(z)=\frac{1-\frac{1}{2z^{2}}+\frac{1}{4z^{4}}+\ldots}{z}+o(z)$$

$\forall z\in\mathbb{C}^{*}$
$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^{3}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+o(z)$$

a=0 نقطة شاذة أساسية و $\operatorname{Res}(f,0)=1$

إذن حسب نظرية الرواسب فان: $\int_{|z|=1} f(z)dz=2\pi i*1=2\pi i$

2.11.2. كيفية إيجاد الراسب لقطب بسيط:

لنفرض إن z=a قطب بسيط لـ $f(z)$, فإذا نشرنا هذا التابع بالنسبة إلى القطب أي عند z=a حسب سلسلة لوران ضمن حلقة $R_1<|z-a|<R_2$

فيمكننا إذن حسب تعريف القطب البسيط لـ f أن نكتب:
$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)\ldots.+a_n(z-a)\ldots$$

بضرب الطرفين في $(z-a)$ نجد :
$$(z-a)f(z)=a_{-1}+a_0(z-a)+a_1(z-a)^2+\ldots..$$

فإذا جعلنا z تنتهي إلى a نحصل على الراسب المطلوب a_{-1} أي:
$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\operatorname{Res}(f(z),a)=a_{-1}.$$

مثال:
$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}\qquad z\in\mathbb{C}$$

اوجد الراسب للتابع f

الحل:

$ann(1,0,2)$ حسب نظرية الرواسب للتابع البسيط نجد :

$$\operatorname{Res}(f,1)=-1$$
$$f(z)(z-1)^2=\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{-1+(z-1)}$$
$$=\lim_{z\to 1}-\frac{1}{-1+(z-1)}=-1(2\pi i)=-2\pi i$$

3.11.2. نظرية: [5]

ليكن f تابعا كسريا معرفا بـ $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ حيث أن كلا من التابعين p و q تحليلي عند z= a و $p(a)\neq 0$ و $q(a)=0$ و $q'(a)\neq 0$ أي z= a صفر بسيط لـ q أي z= a قطب بسيط لـ f عندئذ يعطى الراسب لـ $f(z)$ عند z= a بالشكل التالي:

$$\mathrm{Res}(f,a)=\frac{p(a)}{q'(a)}.$$

4.11.2. راسب القطب المضاعف:

عندما تكون النقطة z= a قطبا مضاعفا لـ $f(z)$ من المرتبة p حيث $p\geq 1$، عندئذ إذا نشرنا $f(z)$ عند النقطة z= a في الحلقة $0<|z-a|<R$ يكون هذا النشر من الشكل $f(z)=\frac{a_{-p}}{(z-a)^p}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+\dots+\dots$ وراسب $f(z)$ عند z= a هو:

$$a_{-1}=\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d^{p-1}(z-a)^p f(z)}{dz^{p-1}}\right].$$

12.2. نظرية الرواسب :[4]

ليكن f تابعا تحليليا داخل وعلى السبيل المغلق γ ما عدا عند عدد محدود من النقاط الشاذة المنعزلة $z_1,z_2,\dots,z_n$ الواقعة داخل γ، فإذا كانت $R_1,R_2,\dots,R_n$ رواسب التابع عند هذه النقاط على الترتيب فإن $\int_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{i=1}^{i=n} R_i$.

1.3. حساب مجاميع بعض السلاسل اللانهائية:

1.1.3.نظرية: [9]

إذا اعتبرنا المجموع تابع لـ n من الشكل $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n)$

لنبين أن: $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n) = -\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Res}(f(z)\pi \cot g\, \pi z, a_i)$

عندما تكون $\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma} f(z)\pi \cot g\, \pi z\, dz = 0$ حيث r نصف قطر γ.

حيث a_i أقطاب f الموجودة داخل سبيل مغلق γ.

البرهان:

ليكن f تابعا تحليليا ما عدا عند عدد محدود من الأقطاب $a_1, a_2, ..., a_k$

ونضع $A_i = \operatorname{Res}(f(z), a_i)$ حيث $i = 1, ...k$ و $(a_i \notin \mathbf{Z})$

وليكن γ سبيلا مغلقا يحتوي داخله النقاط $-n, -n+1, ..., n$: $n \in \mathrm{Z}$

مع $-n, -n+1, ..., n$ ليست أقطابا لـ f .

ولأجل ذلك نعتبر:

$$\begin{Bmatrix} \gamma(t) = (n+1/2)e^{it} \\ 0 \le t \le 2\pi \end{Bmatrix}$$

ولنحسب النهاية التالية : $\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma} f(z)\pi \cot g\, \pi z\, dz$

ذلك بإتباع الخطوات التالية :

1. تعيين أقطاب التابع $\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi \cot g\, \pi z$

$$\sin \pi z = 0 \Rightarrow \pi z_k = k\pi / k \in \mathbf{Z}$$
$$\Rightarrow z_k = k / k \in \mathbf{Z}$$

نأخذ منها فقط $k = -n, ..., n$ الواقعة داخل γ.

2. حساب الراسب لـ $f(z)\pi \cot g\, \pi z$ عند $z_k = k$ حيث $(-n \le k \le n)$

لدينا:

$$\operatorname{Res}(\pi \cot g\, \pi z f(z), k) = \lim_{z\to k} f(z)(z-k)\pi \cot g\, \pi z$$

$$= f(k) \lim_{z\to k} \pi(z-k) \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

لأن f تحليلي عند k.

وهي حالة عدم التعيين لذا نستعمل نظرية لوبيتال لحساب $\lim\limits_{z\to k}\pi(z-k)\dfrac{\cos\pi z}{\sin\pi z}$

$$\lim_{z\to k} f(z)\pi(z-k)\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}=\lim_{z\to k}\frac{\pi\cos\pi z-\pi^2(z-k)\sin\pi z}{\pi\cos\pi z}=1$$

$$\operatorname{Res}(\pi\cot g\,\pi z\, f(z),k)=f(k).1=f(k)$$

حسب نظرية الرواسب:

$$\int_\gamma \pi\cot g\,\pi z\, f(z)dz=2\pi i\left[\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Res}\left(f(z)\pi\cot g\,\pi z,a\right)+\sum_{m=-n}^{n}\operatorname{Res}\left(f(z)\cot g\,\pi z,k\right)\right]$$

$$=2\pi\left(\sum_{k=-n}^{n} f(k)+\sum_{i=1}^{k}A_i\,\pi\cot g\,\pi a_i\right)$$

ومنه: $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} f(k)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\pi\cot g\,\pi z dz-\sum_{i=1}^{k}A_i\,\pi\cot g\,\pi a_i$

بجعل $n\to+\infty$ أي $r=n+\dfrac{1}{2}\to+\infty$

نجد: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)=\lim_{r\to=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\pi\cot g\,\pi z dz-\sum_{i=1}^{}A_i\,\pi\cot g\,\pi a_i$.

و بذلك نميز حالتين:

1. إذا كان : $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\left(\int_\gamma f(z)\pi\cot g\,\pi z dz\right)=0$ نحصل على :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(k)=-\sum_{i=1}^{k}A_i\,\pi\cot g\,\pi a_i$$

$$=-\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Res}\left(f(z)\pi\cot g\,\pi z,a_i\right)$$

2. إذا كان : $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\left(\int_\gamma f(z)\pi\cot g\,\pi z dz\right)\neq 0$.

فإننا نبحث عن طرق أخرى لحساب المجموع.

مثال 1:

لحساب المجموع التالي: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{n^2+a^2}/a\in\mathbb{N}$

نعتبر $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$

و منه $f(n)=\dfrac{1}{n^2+a^2}$

وعليه نأخذ: $f(z)=\dfrac{1}{z^2+a^2}$

وليكن: $\gamma(t)=\left(n=\dfrac{1}{3}\right)e^{it}=re^{it}\;/\;0\le t\le 2\pi$

f له قطبان بسيطان هما $z=\pm ia$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n)=\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\pi\cot g\,\pi z dz-\left[\operatorname{Res}\left(f(z)\pi\cot g\,\pi z,ia\right)+\operatorname{Res}\left(f(z)\cot g\,\pi z,-ia\right)\right]$$

نحسب نهاية التكامل

$$\left(\lim_{r\to+\infty}\int_\gamma f(z)\pi\cot g\,\pi z dz\right)$$

لدينا: $\exists M\succ 0:\left|\pi\cot g\,\pi z\right|\le M$

فإن :

$$0\le\left|\int_\gamma f(z)\pi\cot g\,\pi z dz\right|\le\int_\gamma\left|f(z)\pi\cot g\,\pi z\right|\left|dz\right|$$

$$(1)...\le M\int_\gamma\frac{1}{\left|z^2+a^2\right|}\left|dz\right|$$

$$(1)...=M\int_\gamma^{2\pi}\frac{1}{\left|r^2e^2it+a^2\right|}\left|ire^{it}\right|dt\quad\le M\int_\gamma^{2\pi}\frac{1}{r^2-a^2}dt\quad=\frac{2\pi rM}{r^2-a^2}\xrightarrow[r\to+\infty]{}0$$

إذن : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)=-\left[\operatorname{Res}\left(f(z)\pi\cot g\,\pi z,ia\right)+\operatorname{Res}\left(f(z)\right)\pi\cot g\,\pi z,-ia)\right]$

حيث :

$$\operatorname{Res}\left(f(z)\pi\cot g\,\pi z,ia\right)=\lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{\pi\cot g\,\pi z}{(z-ia)(z+ia)}$$

$$=\frac{-\pi}{2a}\cot g ia\pi\quad=\frac{-\pi}{2a}\coth a\pi$$

$$\operatorname{Res}\left(f(z)\right)\pi\cot g\,\pi z,-ia)=\lim_{z\to-ia}(z+ia)\frac{\pi\cot g\,\pi z}{(z-ia)(z+ia)}\quad=\frac{-\pi}{2a}\coth a\pi$$

ومنه:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=-\left(\frac{-2\pi}{2a}\coth a\pi\right)=\frac{\pi}{a}\coth a\pi$$

2.1.3.نظرية: [9]

إذا اعتبرنا المجموع تابع لـ n أي من الشكل $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n f(z)$

إثبات أن: $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n f(n)=-\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Res}\left(f(z)\frac{\pi}{\sin\pi z},a_i\right)$

عندما تكون $\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma} f(z)\frac{\pi}{\sin\pi z}dz=0$ حيث r نصف قطر γ

a_i أقطاب f الموجودة داخل سبيل مغلق γ .

البرهان :

ليكن f تابع تحليليا ما عدا عند عدد محدود من الأقطاب

$a_1,a_2,....,a_k\ (a_i\notin Z)$

ونضع $i=1,2,...,n$ $\quad A_i=\mathrm{Res}(f(z),a_i)$

وليكن γ سبيلا مغلقا يحتوي داخله النقاط $n\in IN: -n,-n+1,...,n$

مع $-n,-n+1,...,n$ ليست أقطاب ل f

ولأجل ذلك نعتبر: $\begin{cases}\gamma(t)=(n+1/2)e^{it}=re^{it}\\ 0\le t\le 2\pi\end{cases}$

ولنحسب النهاية $\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma} f(z)\frac{\pi}{\sin\pi z}dz$

بإتباع الخطوات التالية :

1. تعيين أقطاب التابع $\frac{\pi}{\sin\pi z}$

$$\sin\pi z=0\Rightarrow \pi z_k=k\pi/k\in\mathbf{Z}$$

$$\Rightarrow z_k=k/k\in\mathbf{Z}$$

نأخذ منها فقط $k=-n,..........,n$ الواقعة داخل γ

2. حساب الراسب لـ $f(z)\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ عند $z_k = k$ حيث $(-n \le k \le n)$

$$\operatorname{Res}\left(f(z)\frac{\pi}{\sin \pi z}, k\right) = \lim_{z \to k} f(z)(z-k)\frac{\pi}{\sin \pi z}$$

$$= f(k)\lim_{z \to k}(z-k)\frac{\pi}{\sin \pi z}$$

لحساب $\lim_{z \to k}(z-k)\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$

نستعمل نظرية لوبيتال لان f تحليلي عند k

$$\lim_{z \to k}(z-k)\frac{\pi}{\sin \pi z} = \lim_{z \to k}\frac{\pi}{\pi \cos \pi z} = (-1)^k$$

ومنه:

$$\operatorname{Res}\left(f(z)\frac{\pi}{\sin \pi z}, k\right) = (-1)^k f(k)$$

يصبح:

$$\int_\gamma f(z)\frac{\pi}{\sin \pi z}dz = 2\pi i\left[\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Res}\left(f(z)\frac{\pi}{\sin \pi z}, a_i\right) + \sum_{m=-n}^{n}\operatorname{Res}\left(f(z)\frac{\pi}{\sin \pi z}, k\right)\right]$$

$$= 2\pi i\left(\sum_{m=-n}^{n}(-1)^k f(k) + \sum_{i=1}^{k} A_i \frac{\pi}{\sin \pi a_i}\right)$$

وعليه :

$$\sum_{n=+\infty}^{+\infty}(-1)^n f(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\frac{\pi}{\sin \pi z}dz - \sum_{i=1}^{k} A_i \frac{\pi}{\sin \pi a_i}$$

بجعل $n \to +\infty$ أي $r = n + \dfrac{1}{2} \to +\infty$

نجد:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n f(n) = \lim_{r \to +\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\frac{\pi}{\sin \pi z}dz - \sum_{i=1}^{k} A_i \frac{\pi}{\sin \pi a_i}$$

نميز حالتين :

إذا كان $\lim\limits_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{\gamma} f(z)\dfrac{\pi}{\sin \pi z}dz\right)=0$ نجد :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n f(n)=-\sum_{i=1}^{k}A_i\frac{\pi}{\sin \pi a_i}$$

$$=-\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Res}\left(f(z)\frac{\pi}{\sin \pi z},a_i\right)$$

إذا كان $\lim\limits_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{\gamma} f(z)\dfrac{\pi}{\sin \pi z}dz\right)\neq 0$ فإننا نبحث عن طرق أخرى لحساب المجموع.

مثال 2 :

لحساب المجموع :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+a)^2}$$

حيث a عدد حقيقي و $a\notin IZ$

نعتبر: $\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n f(\mathrm{n})=\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+a)^2}$

و بالتالي فانه يجب أن يكون : $f(\mathrm{n})=\dfrac{1}{(n+a)^2}$

عندئذ نأخذ : $f(\mathrm{z})=\dfrac{1}{(z+a)^2}$

و ليكن: $\begin{cases}\gamma(t)=\left(n+\dfrac{1}{3}\right)e^{it}=re^{it}\\ 0\leq t\leq 2\pi\end{cases}$

إن f له قطب من الرتبة الثانية هو $z=-a$

لدينا:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)n\,f(n)=\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\frac{\pi}{\sin \pi z}dz-\left[\operatorname{Res}\left(f(z)\frac{\pi}{\sin \pi z},-a\right)\right]$$

نحسب نهاية التكامل $\left(\lim\limits_{r\to+\infty}\int\limits_{\gamma} f(z)\dfrac{\pi}{\sin \pi z}dz\right)$ فهو محدود

لدينا $\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ مستمر على المتراص γ أي : $\exists M\succ 0:\left|\dfrac{\pi}{\sin \pi z}\right|\leq M$

يصبح :

$$0 \leq \left| \int_{\gamma} f(z) \frac{\pi}{\sin \pi z} dz \right| \leq \int_{\gamma} \left| f(z) \frac{\pi}{\sin \pi z} \right| |dz|$$

$$\leq M \int_{\gamma} \frac{1}{\left| (z+a)^2 \right|} |dz|$$

$$= M \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{\left| re^{it} + a \right|^2} \left| ire^{it} \right| dt$$

$$\leq M \int_{0}^{2\pi} \frac{r}{\left(r - |a| \right)^2} dt$$

$$= \frac{2\pi r M}{\left(r - |a| \right)^2} \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$$

إذن:

$$\lim_{r \to +\infty} \left(\int_{\gamma} f(z) \frac{\pi}{\sin \pi z} dz \right) = 0$$

وعليه:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n f(z) = -\operatorname{Re} s \left(f(z) \frac{\pi}{\sin \pi z}, -a \right)$$

لدينا:

$$\operatorname{Re} s \left(f(z) \frac{\pi}{\sin \pi z}, -a \right) = \lim_{r \to +\infty} \frac{d}{dz} \left((z+a)^2 f(z) \frac{\pi}{\sin \pi z} \right)$$

$$= \lim_{z \to -a} \frac{-\pi^2 \cos \pi z}{\sin^2 \pi z}$$

$$= \frac{-\pi^2 \cot g\, \pi a}{\sin \pi a}$$

ومنه:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2 \cot g\, \pi a}{\sin \pi a}$$

3.1.3.نظرية: [9]

إذا اعتبرنا المجموع تابع لـ n من الشكل: $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(\frac{2n+1}{2})$

نبين أن: $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \sum_{i=1}^{i=k} \text{Res}\left(f(z)\pi tg\,\pi z ; a_i\right)$

عندما تكون $\lim_{r\to+\infty}\int_\gamma f(z)\pi tg\,\pi z dz = 0$ حيث r نصف قطر γ

a_i أقطاب f الموجودة داخل سبيل مغلق γ.

البرهان:

ليكن f تابعا تحليليا ماعدا عند عدد محدود من الأقطاب $a_i \neq k+\frac{1}{2} / k \notin Z \quad i=1,2,...,k$

و نضع $A_i = \text{Res}\left(f(z), a_i\right) / i = 1,....k$

و ليكن γسبيلا مغلقا يحتوي داخله النقاط $-n, -n+1, ..., n-1, n : n \in \mathbb{N}$ ولأجل ذلك نعتبر:

$$\begin{cases} \gamma(t) = \left(n+\frac{3}{2}\right)e^{it} = re^{it} \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

ولنحسب النهاية التالية:

$\lim_{r\to+\infty}\int_\gamma f(z)\pi tg\,\pi z dz$ و ذلك بإتباع الخطوات التالية:

1. تعيين أقطاب التابع $\pi tg\,\pi z$

لدينا:

$$\cos\pi z = 0 \Rightarrow \pi z_k = \frac{(2k+1)}{2}\pi / k \in \mathbf{Z}$$
$$\Rightarrow z_k = \frac{2k+1}{2} / k \in \mathbf{Z}$$

وتصبح z_k و a_i هي أقطاب للتابع $f(z)\pi tg\,\pi z$ نأخذ منها فقط الواقعة داخل γ

2. حساب الراسب لـ $f(z)\pi tg\,\pi z$ عند النقاط $z_k = \frac{2k+1}{2}$ حيث $-n \leq k \leq n$ الواقعة داخل γ.

لدينا:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[f(z)\pi tg\,\pi z,\frac{2k+1}{2}\right]&=\lim_{z\to\frac{2k+1}{2}} f(z)\pi\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}\\&=f\left(\frac{2k+1}{2}\right)\lim_{z\to\frac{2k+1}{2}}\pi\left(z-\frac{2k+1}{2}\right)\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}\\&=f\left(\frac{2k+1}{2}\right)\lim_{z\to\frac{2k+1}{2}}\frac{\pi\sin\pi z+\pi^2\left(z-\dfrac{2k+1}{2}\right)}{-\pi\sin\pi z}=-f\left(\frac{2k+1}{2}\right)\end{aligned}$$

لأن f تحليلي عند: $\frac{2k+1}{2}=k+\frac{1}{2}$

إذن: $\operatorname{Res}\left[f(z)\pi tg\,\pi z,\frac{2k+1}{2}\right]=-f\left(\frac{2k+1}{2}\right)$

حسب نظرية الرواسب:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\pi tg\,\pi z dz&=2\pi i\left[\sum_{i=1}^{+n}\operatorname{Res}\left(f(z)\pi tg\,\pi z,a\right)+\sum_{m=-n}^{n}\operatorname{Res}\left(f(z)\pi tg\,\pi z,\frac{2k+1}{2}\right)\right]\\&=2\pi i\left[-\sum_{m=-n}^{n}f\left(\frac{2k+1}{2}\right)+\sum_{i=1}^{k}A_i\pi tg\,\pi a_i\right]\end{aligned}$$

ومنه: $\sum_{m=-n}^{n}f\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{-1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\pi tg\,\pi z dz+\sum_{i=1}^{k}A_i\pi tg\,\pi a_i$

بجعل $n\to+\infty$ أي $r=n+\frac{3}{2}\to+\infty$ نجد:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{2k+1}{2}\right)=-\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\pi tg\,\pi z dz+\sum_{i=1}^{k}A_i\pi tg\,\pi a_i$$

و ذلك نميز حالتين:

- ❖ إذا كان $\lim_{r\to+\infty}\int_\gamma f(z)\pi tg\,\pi z dz=0$ نحصل على

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}f\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\sum_{i=1}^{i=k}A_i\pi tg\,\pi a_i=\sum_{i=1}^{i=k}\operatorname{Res}\left(f(z)\pi tg\,\pi z,a_i\right)$$

- ❖ إذا كان $\lim_{r\to+\infty}\int_\gamma f(z)\pi tg\,\pi z dz\neq 0$ فإننا نبحث عن طريقة أخرى لحساب المجموع

مثال 3 :

حساب $I=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{8}{8n^3-4(1+2i)n^2-2(1-4i)n+1-2i}$

نكتب : $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\left(\frac{2n+1}{2}-i\right)\left(\frac{2n+1}{2}-1\right)} = I$

من أجل ذلك نعتبر: $f(z)=\frac{1}{(z-i)(z-1)^2}$

ولتكن : $\begin{cases} \gamma(t)=\left(n+\frac{1}{4}\right)e^{it}=re^{it} \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$

واضح أن $z=1$ قطب من المرتبة الثانية لـ $f(z)$ و $z=i$ قطب بسيط لـ $f(z)$

إذن لدينا:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\pi tg\,\pi z dz-\left[\operatorname{Res}\left(f(z)\pi tg\,\pi z,1\right)+\operatorname{Res}\left(f(z)\pi tg\,\pi z,i\right)\right]$$

بما أن $z=i$ قطب من المرتبة الثانية فإن:

$$\operatorname{Res}\left(f(z)\pi tg\,\pi z,1\right)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left\{(z-1)^2 f(z)\pi tg\,\pi z\right\}$$

$$=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left\{(z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z-i)}\pi tg\,\pi z\right\}$$

$$=\lim_{z\to1}\left\{\frac{\pi}{(z-i)}+\frac{\pi(z-i)\sin 2(\pi z)-\cos(\pi z)\sin(\pi z)}{(z-i)^2\cos^2(\pi z)}\right\}$$

$$=\frac{\pi^2}{2(1-i)}=\frac{\pi^2}{2}(1+i)$$

و $z=i$ قطب بسيط فإن:

$$\operatorname{Res}\left(f(z)\pi tg\,\pi z,i\right)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)\pi tg\,\pi z$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)}{(z-1)^2(z-i)}\pi tg\,\pi z$$

$$= \frac{\pi tg\,\pi i}{(i-1)^2} = \frac{i\,\pi th\,\pi}{(i-1)^2}$$
$$= \frac{-\pi}{2} th\,\pi$$

الآن نحسب $\lim\limits_{r\to+\infty}\int\limits_{\gamma} f(z)\pi tg\,\pi z dz$

نعلم أن التابع $\pi tg\,\pi z$ مستمر على المتراص γ إذن $\exists M \succ 0 : / |\pi tg\,\pi z| \le M$ و منه:

$$0 \le \left| \int\limits_{\gamma} f(z)\pi tg\,\pi z dz \right| \le M \int\limits_{\gamma} |f(z)||dz|$$

$$M\int\limits_{0}^{2\pi} \left| \frac{1}{(re^{it}-1)^2(re^{it}-1)} \right| \le M\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{r}{(r-1)^2(r-1)} dt$$

$$= \frac{2\pi M r}{(r-1)3} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

ومنه نحصل في الأخير على:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \left(\frac{-\pi}{2} th\,\pi + \frac{\pi^2}{2}(1+i)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}(-th\,\pi + \pi(1+i))$$

2.3.تطبيق نظرية الرواسب في حساب بعض التكاملات:

1.2.3. حساب التكاملات من الشكل: $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$

حيث $R(x,y)$ دالة كسرية للمتغيرين x و y و ليس لها أقطاب على الدائرة $|z|=1$.

نضع $z= e^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$ ومنه :

$$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z};\sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz};d\theta=\frac{dz}{iz} = -i\frac{dz}{z}$$

لما θ تتغير من 0 إلى 2π فإن z ترسم الدائرة $|z|=1$ دورة واحدة و فى الاتجاه الموجب:

$$\int\limits_{0}^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \oint\limits_{|z|=1} -\frac{i}{z}R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)dz = \oint\limits_{|z|=1} R_1(z)dz$$

حيث: $R^1(z)dz = -\frac{i}{z}R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)$.

إذن حسب النظرية الأساسية للباقي فإن:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{R}(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[R_1(z), z_k]$$

حيث: z_k $(k = \overline{1, n})$ هي الأقطاب الموجودة في القرص $|z|<1$

مثال 4 :

لنحسب التكامل: $I_n(r)= \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{1+r^2-2r\cos\theta} d\theta \quad (n\in N, r\in C, |r|\neq 1)$

بإتباع الخطوات السابقة نحصل على أن: $I_n(r)=\frac{i}{r} \oint_{|z|=1} \frac{z^n dz}{(z-r)\left(z-\frac{1}{r}\right)}$

الدالة الكسرية $R(z) = \frac{z^n}{(z-r)\left(z-\frac{1}{r}\right)}$ لها قطبان $z=r$, $z=\frac{1}{r}$ واحد منهما فقط ينتمي إلى القرص $|z|<1$.

إذا كان $|r|<1$ فإن: $I_n(r) = \frac{i}{r}.2\pi i Res[R(z), r] = \frac{2\pi r i^n}{1-r^2}$.

أما إذا كان $|r|>1$ فإن : $I_n(r) = \frac{i}{r}.2\pi i Res\left[R(z), \frac{1}{r}\right] = \frac{2\pi}{r^n(r^2-1)}$.

3.2.2. حساب التكاملات من الشكل: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

نظرية1: [9]

إذا كانت f دالة تحليلية في نصف المستوي $Imz>0$ ما عدا عند عدد محدود من الأقطاب $z_1, z_2, \dots, z_n$ و مستمرة على المستقيم $Imz=0$ إذا حققت الدالة f الشرط $\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = 0$ في نصف المستوي $Imz\geq 0$ فإن :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), z_k]$$

مثال 5 :

لنحسب التكامل: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

الدالة $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ تحليلية في $Imz>0$ ما عدا عند القطبين البسيطين $z=i$ و $z=2i$ مستمرة على المستقيم $Imz\ 0$ ولدينا $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$

إذن حسب النظرية 1 فإن $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = 2\pi i(\text{Res}[f(z), i] +$
$\text{Res}[f(z), 2i]) = \frac{\pi}{6}$

3.2.3. حساب التكاملات من الشكل : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx, (\alpha>0)$

ليكن $\alpha>0$ و f دالة مستمرة في $D = \{z\in C: |Imz|\geq 0, |z|\geq R_0>0\}$ و ليكن القوس Γ_R

المعرف بـ : $\Gamma_R\{z\in C: |z| = R, Imz\geq 0\}$

نضع: $M(R) = \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)|$

توطئة جوردان: (Lemme de Jordan)

تحت الشروط السابقة . إذا كانت $\lim_{R\to+\infty} M(R) = 0$ فإن:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

نظرية 2 : [9]

لتكن f دالة تحليلية في نصف المستوي $Imz > 0$ ما عدا عند عدد محدود من الأقطاب

$z_1, z_2, \ldots, z_n$ و مستمرة على المستقيم $Imz = 0$ إذا حققت f شروط جوردان فإن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left[e^{i\alpha x} f(z), z_k\right], (\alpha>0)$$

مثال 6 :

لنحسب التكامل $(a\in R)$ $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$

لدينا :) $I(a) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2} dx$

الدالة $f(z) = \frac{e^{i\alpha x}}{1+z^2}$ لها قطبان بسيطان $z=i$ و $z=-i$

1) إذا كان $a>0$ فإن الدالة $g(z) = \frac{1}{z^2+1}$ تحليلية في $Imz > 0$ ما عدا عند القطب

البسيط $z=i$ و مستمرة على المستقيم $Imz = 0$ وتحقق الشروط الآتية:

أ) g مستمرة في $|z|\geq R_0>1$, $Imz \geq 0$

ب) $\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^2+1} = 0 \Rightarrow \lim_{R\to+\infty}\max_{z\in\Gamma_R}|g(z)| = 0$

حيث: $\Gamma_R = \{z\in C: |z| = R, Imz\geq 0\}$

إذن: $I(a) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}.2\pi i\text{Res}\left[\frac{e^{i\alpha z}}{1+x^2}, i\right] = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha}$

2) إذا كان $a<0$ فبإتباع نفس الخطوات:

$$I(a) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2}dx = -\frac{1}{2}.2\pi i\text{Res}\left[\frac{e^{i\alpha z}}{1+x^2}, -i\right] = \frac{\pi}{2}e^{\alpha}$$

3) إذا كان $a=0$ فإن : $I(0) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

إذن في كل الحالات لدينا $(a\in R)$: $I(a) = \frac{\pi}{2}\ e^{-|a|}$

فهرس المصطلحات

$\mathbb{C}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
$\mathbf{Z}$	العدد العقدي
$\boldsymbol{Rez}$	الجزء الحقيقي لعدد عقدي
$\boldsymbol{Imz}$	الجزء التخيلي لعدد عقدي
r أو R	نصف القطر
$\boldsymbol{\theta}$	الزاوية
$\lvert\mathbf{Z}\rvert$	طويلة العدد العقدي
$\bar{\mathbf{Z}}$	مرافق العدد العقدي
$\boldsymbol{f(z)}$	دالة في مجموعة الأعداد العقدية
$\mathrm{Res}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{a})$	راسب f عند القطب a
n=+∞	المجموع من n=1 إلى n=+∞
$\lim\limits_{r\to+\infty}$	النهاية عندما r تؤول إلى +∞
Ann	تحديد قطب النقطة الشاذة .

المـــــــراجع

- **قائمة المراجع العربية :**

1. **دويل ف، تشرتشل وجيمس، براون وروجرف، فيرهي:** المتغيرات المركبة وتطبيقاتها ترجمة ومراجعة: بديع توفيق محمد حسن إسماعيل عبد الرحمن أمين، دار ماكجر وهيل للنشر، الطبعة العربية، 1982.
2. **ق.ي. سميرنوف:** دروس في الرياضيات العالية، ج3، القسم الثاني، مطبعة جامعة دمشق، 1971.
3. **محمود محمد كتكت:** مبادئ التحليل المركب، ط1، دار جهينة عمان، 2001.
4. **موراري، شبيجل:** الدوال المركبة، ط4، الدار الدولية للنشر والتوزيع، القاهرة–مصر، 1997.
5. **موفق دعبول:** التحليل6، ط4، مطبعة جامعة، دمشق، 1991.
6. **موفق دعبول:** التحليل7، المطبعة الجديدة، دمشق، 1988.
7. **موفق دعبول:** التحليل 7، المطبعة الجديدة، دمشق، 1989.
8. **الهام حمصي:** الرياضيات –التحليل الشعاعي والتوابع العقدية، ج3، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1992.

- **قائمة المراجع الفرنسية :**

9. Lors Ahlfons : Analyse Complexe International student édition, 1992 .
10. P.Dolbeau : Analyse Complexe Masson Paris Milan Barcelone Mexico, 1990.

Conclusion

We conclude that after the last we do not know about most of the numerical chains only an idea of the divergence or convergence, and we have become, thanks to one of the mysteries of the nodal analysis and we mean sediment theory.

To calculate the deposit continued my contract, we can 'Ejad accurate value for these groups, and in several ways, including the four mentioned above, where at least one other affair.

And has tried in this modest note to clarify how to work in these ways the aid of some of the theories and definitions and properties related to the selection of appropriate ways and others, and we adopted the reader to understand the variety and detailed examples of the solution.

In conclusion, we ask the Almighty to make our work in this balance of good deeds, wishing you had benefited and if taking a little because little is better than leaving a lot.

الخلاصة

نستخلص في الأخير أنه بعدما كنا لا نعرف عن معظم السلاسل العددية إلا فكرة عن تباعدها أو تقاربها، وأصبحنا بفضل إحدى خبايا التحليل العقدي ونعني بذلك نظرية الرواسب.

لحساب راسب تابع عقدي، نستطيع 'يجاد قيمة دقيقة لهذه المجاميع، وذلك بعدة طرق من بينها الأربعة السالفة الذكر، حيث لا تقل إحداهما شأنا عن الأخرى.

وقد حاولنا في هذه المذكرة المتواضعة توضيح كيفية العمل بهذه الطرق مستعينين ببعض النظريات والتعاريف والخواص المتعلقة باختيار السبل المناسبة وغيرها، ولفهم القارئ اعتمدنا أمثلة متنوعة ومفصلة الحل.

وفي الختام نسأل العلي القدير أن يجعل عملنا هذا في ميزان الحسنات متمنين أن تكونوا قد استفدتم ولو بالقليل لأن أخذ القليل خير من ترك الكثير.