

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique



UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR D'EL
OUED
FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES
Département De Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales

PAR

Sujet

**Périodicité des fonctions en analyse
et calcul fractionnaires**

Présenté par : Mansouri Ikram

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

BELOUL Said	MCA.	Président	Univ. El Oued
NISSE Lamine	Prof.	Rapporteur	Univ. El Oued
NISSE Kadidja	MC.	Examineur	Univ. El Oued

Promotion : 2019/2020

DÉDICACE

C'est avec l'aide de **DIEU** tout puissant que ce modeste travail a pu être réalisé, **DIEU** qui m'a donné foi, raison et lucidité.

Merci mille fois et que «**Allah**» vous garde et protège.

Mes chers parents ♡ " **Mansouri Abdesselam** " ♡ et ♡ " **Haniche Assia** " ♡
pour leurs amours, leurs patience et leur encouragement qui n'jamais cassé de me convenir

Durant mes années d'études,

♡ Mes soeurs " **Ichrak, Yousra** " ♡.

♡ Me frère " **Mouhamed Akram** " ♡.

♡ Mes amis proches ♡

♡ Toute ma famille " **Mansouri et Haniche** " ♡.

♡ Tous mes collègues de ma promotion **2020** ♡.

REMERCIEMENTS

Avant toutes chose, nous tiens à remercier «**Allah**» le tous puissant, pour m'avoir donné la force et la patience.

J'exprime ma profonde gratitude et mes remerciements :

À mon encadreur de mémoire **Dr : NISSE LAMINE** Maitre de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour avoir accepté de m'encadrer, pour son enseignement, son support, ses encouragements tout au long de ce travail.

Je tiens également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'on fait en acceptant de siéger à ma soutenance. Un remerciement spécial et sincère aux **mes parents**.

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de me famille.

me sentiments de reconnaissance et mes remerciements chaleureux vont également au mes camarades de la promotion 2020 de Mathématiques et tous mes amis.

Finalement, je tiens réservons une mention particulière à toutes les personnes qui m'ont apporté le soutien et l'aide attendu.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	viii
Notations générales	xi
1 Préliminaire et rappels sur le calcul fractionnaire	1
1.1 Quelques notions et résultats élémentaires de l'analyse fonctionnelle	1
1.1.1 Espaces fonctionnels	1
1.1.2 Ensembles utiles	3
1.1.3 Quelques Opérateurs	3
1.2 Quelques outils de la théorie du point fixe	4
1.2.1 Théorème du point fixe de Banach	5
1.2.2 Théorème du point fixe de Schauder	5
1.2.3 Théorème du point fixe de Leray-Schauder	5
1.3 Quelques fonctions importantes dans le calcul fractionnaire	6
1.3.1 La fonction Gamma	6
1.3.2 La fonction Béta	7
1.3.3 La fonction Mittag-Leffler	8
1.3.4 La transformation de Mellin	9
1.4 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a,b)$	10

TABLE DES MATIÈRES

1.5	Dérivée fractionnaire	12
1.5.1	Approche de Riemann-Liouville	12
1.5.2	Approche de Caputo	14
1.5.3	Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville	16
1.5.4	Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo . .	16
2	Étude de l'existence et l'unicité de la solution d'un problème différentiel fractionnaire de type Cauchy	17
2.1	Problème fractionnaire de type Cauchy au sens de Riemann-Liouville avec poids	17
2.1.1	Position du problème	17
2.1.2	Réduction du problème à une équation intégrale de Volterra	18
2.1.3	Théorème d'existence et d'unicité	20
2.2	Problème fractionnaire de type Cauchy de Caputo	23
2.2.1	Position du problème	23
2.2.2	Résultats d'existence et d'unicité	23
2.3	Problème fractionnaire de Riemann-Liouville sur le demi-axe	28
2.3.1	Position du problème	28
2.3.2	Réduction du problème à une équation intégrale de Volterra	28
2.3.3	Théorème d'existence	28
3	Les solutions périodiques des équations différentielles fractionnaires	37
3.1	Dérivées d'ordre fractionnaire de la fonction périodique	37
3.2	Non existence de solutions périodiques pour un système dynamique fraction- naire	40
3.3	Existence de solutions périodiques dans les systèmes d'ordre fractionnaire autonome	46
3.3.1	Dépendance en mémoire des solutions :	46
3.3.2	Existence des solutions périodiques dans un état stable	47
3.4	Conclusion	50

TABLE DES MATIÈRES

Conclusion générale	51
Références	52

TABLE DES FIGURES

1.1	La fonction gamma	6
1.2	La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres	9
3.1	La fonction $\cos(t)$ (bleu, pointillé) et $t^{1-\alpha}E_{2,2-\alpha}(-t^2)$ (rouge) pour $\alpha = 0.5$ (Pour l'interprétation des références à la couleur dans cette légende de la figure, le lecteur est renvoyé à la version Web de cet article).	40

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le calcul fractionnaire connaît à l'heure actuelle une grande popularité parmi les chercheurs en sciences fondamentales et appliquées. En fait, il étend les opérations de dérivation et d'intégration aux ordres non entiers. Au début c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens de renommée, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordres entiers à des ordres fractionnaires, permettant le calcul de la dérivée d'ordre α réel ou complexe d'une fonction différentiable $f(t)$ soit :

$$(D^\alpha f)(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}$$

Bien que le concept de la dérivation d'ordre fractionnaire ne soit pas nouveau, ces origines remontaient à la fin du 17^{ième} siècle, partant de la réponse de G.W. Leibniz concernant la question de l'Hôpital, posée sur la signification de $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$. Son intérêt n'est reconnu que durant les deux dernières décennies du 20^{ième} siècle où de nombreuses applications ont été développées utilisant ce concept. Un exposé historique détaillé est donné en introduction de [17, 19] ; de plus, cet ouvrage est sans doute l'un des premiers à rassembler des résultats épars.

Tout d'abord, plusieurs mathématiciens ont apporté des contributions importantes jusqu'à la moitié du dernier siècle : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), H. Holmgren (1865-67), A.K. Grünwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy and J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lévy

(1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945), E.R. Love (1938-1996), A. Erdélyi (1939-1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949). Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles". La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparition comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo. A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considérée comme une théorie abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie, la mécanique... (voir [8]).

L'un des domaines d'intérêt dans ces applications est les systèmes dynamiques^[24] et le chaos qui sont étudiés par de nombreux chercheurs (Attari, Haeri et Tavazoei, 2010 ; Barbosa, Machado, Vinagre et Calderon, 2007 ; Hartley, Lorenzo et Qammar, 1995 ; Li - Chen, 2004 ; Suansook et Paithoonwattanakij, 2009). Dans la théorie chaos, l'idée du contrôle du chaos est basée sur le fait que les attracteurs chaotiques ont un squelette composé d'un nombre infini d'orbites périodiques instables soumises à stabilisation (González-Miranda, 2004). Ainsi, pour le contrôle du chaos des systèmes d'ordres fractionnaires, il est important de montrer qu'il existe des solutions périodiques dans de tels systèmes. Tavazoei et Haeri (2009) ont prouvé que dans ces systèmes, aucune solution périodique ne peut être détectée sans conditions au préalable. Dans cet article, il est prouvé que les solutions périodiques peuvent être détectées en considérant certaines conditions (voire [25]).

Présentation de la thèse

Cette thèse se décompose de trois chapitres partagés de la façon suivante :

Chapitre 1 : Nous présentons des notions préliminaires nécessaires et rappels pour la bonne compréhension de ce manuscrit. Ce chapitre est partagé en cinq sections. La première section présente les notions et résultats élémentaires de l'analyse fonctionnelle. Dans la deuxième

section nous rappelons les différents théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail. La troisième section présente quelques fonctions importantes dans le calcul fractionnaire. Dans la quatrième section on donne la définition de l'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$. Enfin on introduit les deux plus importantes approches de la dérivation fractionnaire, celle de Riemann-Liouville et celle de Caputo. On présentera quelques unes de leurs propriétés et on précisera aussi la comparaison et la relation entre ces deux approches.

Chapitre 2 : L'objet du deuxième chapitre est l'étude de l'existence et l'unicité de la solutions pour le problème différentiel fractionnaire. Ce chapitre est partagé en trois sections. La première section présente l'existence et l'unicité de la solutions pour le problème fractionnaire de type Cauchy de Riemann-Liouville avec poids. La deuxième section présente l'existence et l'unicité de la solutions pour le problème fractionnaire de type Cauchy de Caputo. Enfin on présente l'existence et l'unicité de la solutions pour le problème fractionnaire de Riemann-Liouville sur le demi-axe.

Chapitre 3 : Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions périodiques pour des équations différentielles fractionnaires. Ce chapitre est partagé en trois sections. La première section présente les dérivées d'ordre fractionnaire de la fonction périodique. La deuxième section présente la non-existence de périodicité du système dynamique fractionnaire des fonctions périodiques non constantes. Enfin on présente l'existence de solutions périodiques pour les systèmes d'ordre fractionnaire autonome.

À la fin de ce document, on donne une conclusion et des références.

NOTATIONS GÉNÉRALES

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous listons ci-dessous :

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel réel de dimension n construit sur le corps des réels.
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$[a, b)$	Intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b .
$\mathcal{C} = \mathcal{C}(K, F)$	Ensemble des fonctions continues de K dans F .
$\mathcal{C}^n = \mathcal{C}^n([a, b])$	L'espace des fonctions n -fois continument différentiables dans $[a, b]$.
$D(U)$	Domaine de l'opérateur U .
$ \cdot $	Valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
$\Gamma(\cdot)$	Fonction Gamma d'Euler.
$B(\cdot, \cdot)$	Fonction Béta.
$E_{\alpha, \beta}(\cdot)$	Fonction Mittag-Leffler.
$\mathcal{M}(g)(\cdot)$	Transformation de Mellin.
I^α	Intégration d'ordre α .
${}^C D^\alpha$	Dérivation d'ordre α selon la définition de Caputo.
${}^{RL} D^\alpha$	Dérivation d'ordre α selon la définition de Riemann-Liouville.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE ET RAPPELS SUR LE CALCUL FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, nous donnons les éléments de base de la dérivation fractionnaire. On a cité quelques notions relatives à cet outil mathématique, quelques approches des dérivées fractionnaires sont introduites à savoir, l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo ainsi que leurs propriétés.

1.1 Quelques notions et résultats élémentaires de l'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espaces fonctionnels

Définition 1.1.1. [1] Soit $K := [0, L], L > 0$. Notons $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues définies de K dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|y\|_{\infty} = \sup \{|y(t)| : t \in K\},$$

où $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$ et $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces de Banach.

1.1 Quelques notions et résultats élémentaires de l'analyse fonctionnelle

Définition 1.1.2. [1] Une tribu sur $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ est une famille de parties de $\mathbb{R}^n$ contenant $(\emptyset, \mathbb{R})$, stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable (et donc par intersection dénombrable).

Si $\mathcal{B}$ désigne une tribu sur $\mathbb{R}^n$, les éléments de $\mathcal{B}$ s'appellent les ensembles mesurables : On dit que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ est un espace mesurable.

Définition 1.1.3. [1] (Mesure) Soit $\mathcal{B}$ une tribu de $\mathbb{R}^n$. Une mesure positive μ sur $\mathcal{B}$ est une application de $\mathcal{B}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. Pour toute famille dénombrable (B_i) d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints on a :

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty B_i\right) = \sum_1^\infty \mu(B_i),$$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré.

Définition 1.1.4. [1] Une fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si l'image réciproque de tout intervalle ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.5. [1] Soient Ω un ensemble de $\mathbb{R}^n$ et p un nombre réel positif. On note par $L^p(\Omega) (1 \leq p < \infty)$ les classes de toutes les fonctions mesurables f définies dans Ω , où

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty.$$

La fonctionnelle $\|\cdot\|_p$ définie par

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

est une norme dans $L^p(\Omega)$, pour $1 \leq p < \infty$.

Définition 1.1.6. [1] On pose

$$L^\infty = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable}, \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

La fonctionnelle $\|\cdot\|_{L^\infty}$ définie par

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\},$$

est une norme pour $p = \infty$.

Remarque 1.1. Si $f \in L^\infty$ on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ p.p sur } \Omega.$$

1.1 Quelques notions et résultats élémentaires de l'analyse fonctionnelle

Lemme 1.1.1. *L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach. L'espace $L^2(\Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$ est un espace de Hilbert.*

Inégalité de Hölder[1]

Soit p, q, r des nombres de $[1, +\infty]$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ (avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$). si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ le produit fg appartient à L^r , et on a

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \quad (1.1)$$

1.1.2 Ensembles utiles

Définition 1.1.7. (Ensemble convexe)[1] Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $K \subset E$, on dit que K est convexe si :

$$\forall (x, y) \in K^2, \forall \lambda \in [0, 1] \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in K.$$

Définition 1.1.8. (Ensemble compact)[1] Soit E un espace vectoriel normé et $K \subset E$, on dit que K est compact si toute suite d'élément de K admet une sous-suite convergente vers un point dans K .

Définition 1.1.9. (Ensemble borné)[1] Soit E un espace vectoriel normé et $K \subset E$, on dit que K est borné si : $\exists r > 0$, telle que : $K \subset B(0; r)$.

Définition 1.1.10. Soit E espace topologique, et K un sous espace de E , on dit que K est relativement compact si $\overline{K}$ est compact.

Définition 1.1.11. (Ensemble uniformément borné) [1] Soit K un ensemble relativement compact, $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$, soit $M \subset K$ on dit que M est uniformément borné si : $\exists c > 0, \forall x \in M, |x(t)| \leq c; \forall t \in K$.

1.1.3 Quelques Opérateurs

Définition 1.1.12. (Opérateur borné)[1] On appelle opérateur borné toute application de E dans F qui envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F .

Proposition 1.1.1. Soit U un opérateur linéaire d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1.2 Quelques outils de la théorie du point fixe

1. U est borné sur la boule unité fermée $B(0,1)$.
2. $\exists c > 0$, tq : $\|Ux\| \leq c\|x\|$, $\forall x \in E$.

Définition 1.1.13. (Opérateur continu)[1] Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et U un opérateur de E dans F . On dit que U est continu en $x_0 \in E$ ssi : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|Ux - Ux_0\| \leq \varepsilon$.

L'opérateur U est dit continu si U est continu en tout $x \in E$.

Définition 1.1.14. (Opérateur contractant)[1] Soit U un opérateur d'un espace normé E dans lui-même. On dit que U est un opérateur contractant (ou simplement une contraction) s'il existe une constante k , $0 \leq k < 1$ telle que pour tout x et y de E on ait : $\|U(x) - U(y)\|_E \leq k\|x - y\|_E$.

Définition 1.1.15. (Opérateur compact)[1] Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et U un opérateur de E dans F , on dit que U est un opérateur compact si l'image par U de la boule unité fermée de l'espace E , $U(B(0,1))$ est un ensemble relativement compact dans F .

Théorème 1.1.1. (Ascoli-Arzelà)[1] Soit $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues, et soit $M \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Alors M est relativement compact dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ ssi :

1. M est uniformément borné.
2. M est équicontinue, i.e, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, telle que : $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$, $\forall t_1, t_2 \in K$, $\forall x \in M$.

1.2 Quelques outils de la théorie du point fixe

Le but de cette section est l'étude de quelques théorèmes du point fixe. On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. On verra ensuite le théorème du point fixe de Schauder. Enfin nous abordons le théorème du point fixe de Leray-Schauder (voir [7],[26])

Définition 1.2.1. Soit E un espace de Banach et soit $U : D(U) \subset E \rightarrow R(U) \subset E$, un opérateur, défini sur $D(U)$.

Un point $x^* \in D(U)$ est appelé point fixe de U si : $U(x^*) = x^*$.

Tout point fixe de U est donc solution de l'équation $x = U(x)$.

1.2 Quelques outils de la théorie du point fixe

1.2.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver, qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante.

Théorème 1.2.1. (*Point fixe de Banach*)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $U : E \rightarrow E$ une contraction. Alors U admet un point fixe unique dans E , c-a-d

$$\exists! x^* \in E \text{ telle que } Ux^* = x^*.$$

De plus, ce point peut- être obtenu comme limite de la suite engendrée par l'itération

$$x_{n+1} = Ux_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

avec x_0 un élément arbitraire dans E et

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{k^n}{(1-k)} \|x_1 - x_0\|.$$

1.2.2 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème de Schauder est de type topologique, et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 1.2.2. (*Point fixe de Schauder*)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, soit U une partie non vide, convexe et fermée de E . Si $T : U \rightarrow U$ est une application compacte. Alors T admet un point fixe.

1.2.3 Théorème du point fixe de Leray-Schauder

Théorème 1.2.3. (*Point fixe de Leray-Schauder*)

Soit U un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel normé E et supposons $0 \in U$. Soit $A : U \rightarrow U$ opérateur complètement continu et soit

$$\xi(A) = \{u \in U : u = \lambda Au \text{ pour quelque } 0 < \lambda < 1\}.$$

Alors soit $\xi(A)$ est non borné, ou A a un point fixe.

1.3 Quelques fonctions importantes dans le calcul fractionnaire

1.3.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma Γ (voir [4]).

Définition 1.3.1. La fonction Gamma Γ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma : \alpha \rightarrow \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{Re}(\alpha) > 0.$$

L'allure de la fonction gamma est donnée par la figure(1.1).

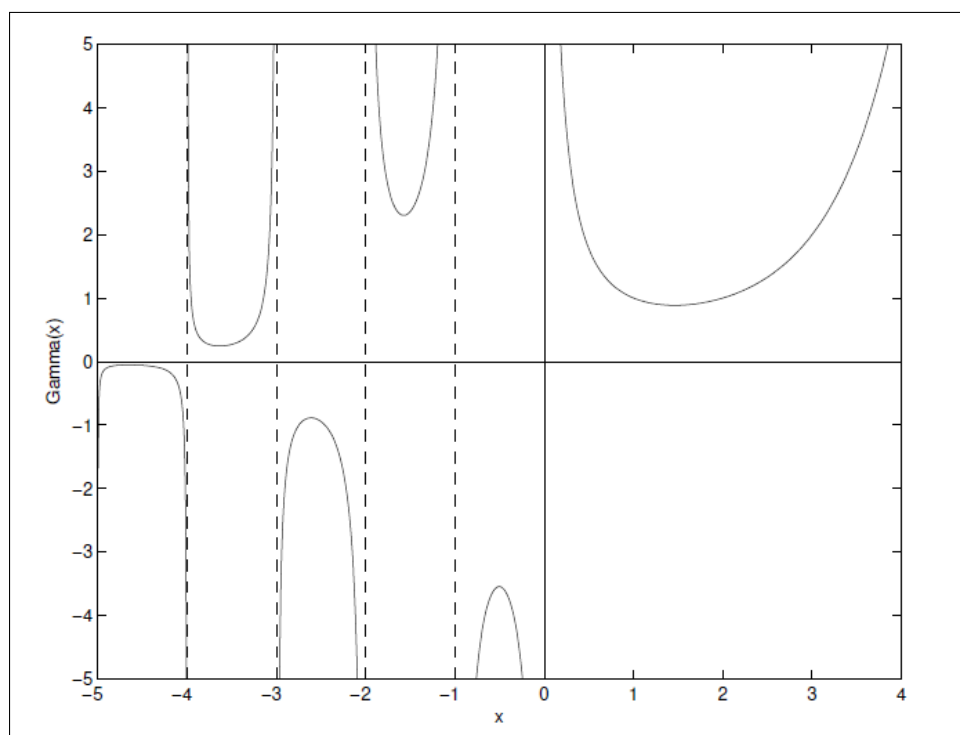


FIGURE 1.1 – La fonction gamma

Quelque propriétés : La fonction Γ satisfait les propriétés suivantes :

(1) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

En particulier $\Gamma(1) = 1$, on déduit que

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.3 Quelques fonctions importantes dans le calcul fractionnaire

C'est à dire que Γ est le prolongement de la factorielle à l'ensemble des nombre complexe excepté les entiers (≤ 0).

(2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ supérieur à 1 on a

$$\frac{\alpha + 1}{\Gamma(\alpha + 1)} = \frac{\alpha + 1}{\alpha \Gamma(\alpha)} < \frac{2}{\Gamma(\alpha)}.$$

(3) On donne quelques valeurs particulières de $\Gamma(t)$

$$\Gamma(0_+) = +\infty; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(4) $\Gamma(t)$ monotone et strictement décroissante $\forall t \in]0, 1[$.

1.3.2 La fonction Bêta

Définition 1.3.2. La fonction Bêta (voir [4]) est une fonction définie par :

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx; \quad (R(p) > 0, R(q) > 0).$$

Proposition 1.3.1. (voir [4]) La relation entre fonction Bêta d'Euler et Gamma d'Euler et donnée par

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (R(p) > 0, R(q) > 0). \quad (1.2)$$

Preuve 1.3.1. On a

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} x^{q-1} e^{-x} dx \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{p-1} r^{q-1} e^{-r-x} dx dr. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $r = h - x$ pour $0 \leq x \leq h$, on aura

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} \int_0^h x^{p-1} (h-x)^{q-1} e^{-h} dx dh \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-h} \left(\int_0^h x^{p-1} (h-x)^{q-1} dx \right) dh, \end{aligned}$$

on pose $x = sh$ on obtient que :

$$\begin{aligned} \int_0^h x^{p-1} (h-x)^{q-1} dx &= \int_0^1 (sh)^{p-1} (h-sh)^{q-1} h ds \\ &= h^{p+q-1} \int_0^1 s^{p-1} (1-s)^{q-1} ds \\ &= h^{p+q-1} B(p, q) \end{aligned}$$

1.3 Quelques fonctions importantes dans le calcul fractionnaire

i.e :

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= B(p, q) \int_0^1 e^{-h} h^{p+q-1} dh \\ &= B(p, q)\Gamma(p+q).\end{aligned}$$

Alore

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1.3.3 La fonction Mittag-Leffler

Définition 1.3.3. La fonction de Mittag-Leffler est nommée d'après un mathématicien suédois qui l'a défini en 1903. Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle e^x et il joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire. Les représentations de la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres peuvent être définies en terme d'une série de puissances (voir [18]) :

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad (1.3)$$

$$\text{si } \beta = 1, \quad E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0.$$

Proposition 1.3.2. La relation entre la fonction de Mittag-Leffler et la fonction Gamma se résulte que :

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x E_{\alpha, \alpha+\beta}(x).$$

Exemple 1.1. La fonction de Mittag-Leffler se réduit à de fonction simple :

Pour $\alpha = \beta = 1$

$$\begin{aligned}E_{1,1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= e^x.\end{aligned}$$

Fig.(1.2) montre le comportement de la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres pour différentes valeurs de α et β .

1.3 Quelques fonctions importantes dans le calcul fractionnaire

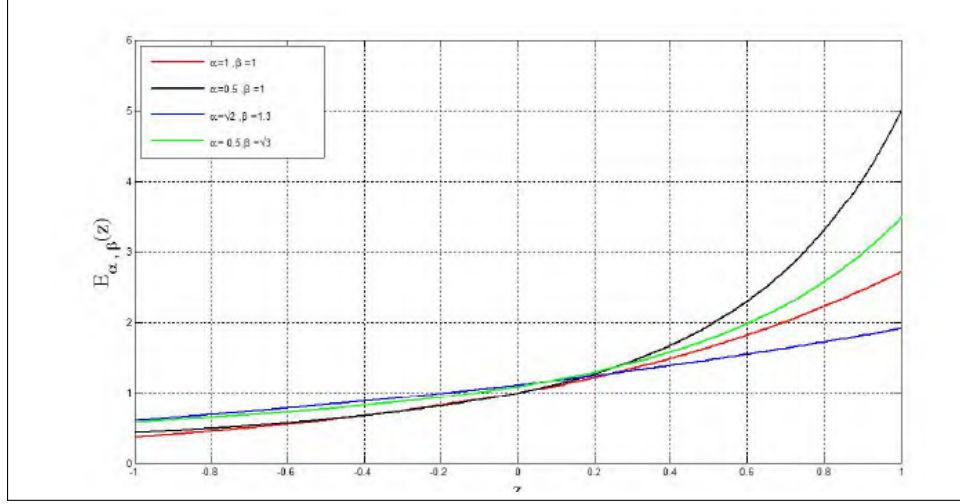


FIGURE 1.2 – La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres

1.3.4 La transformation de Mellin

Dans ce qui suit, nous rappellerons la définition de la transformée de Mellin et quelques propriétés. Pour un aperçu plus détaillé de la transformée de Mellin et de ses applications on peut voir [5, 6, 18].

Définition 1.3.4. *La transformée de Mellin d'une fonction localement intégrable (au sens de Lebesgue) $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par :*

$$\mathcal{M}(g)(z) = \int_0^\infty g(t)t^{z-1}dt.$$

La plus grande bande verticale ouverte du plan complexe, de la forme

$$S_g = \{z, \mathbb{C} : a < \operatorname{Re}(z) < b\},$$

dans laquelle l'intégrale converge, est appelée la bande d'analyticité (ou bande fondamentale) de la transformée de Mellin.

Proposition 1.3.3. *(Transformation de Mellin de la convolution)*

*Considérons la convolution $g * h$ de deux fonction $g, h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :*

$$(g * h)(t) = \int_0^\infty g(ts)h(s)ds.$$

l'égalité suivante vaut :

$$\mathcal{M}(g * h)(z) = \mathcal{M}(g)(z) \cdot \mathcal{M}(h)(1 - z) \quad (1.4)$$

1.4 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle [a,b)

pour tout z de la bande fondamentale de $\mathcal{M}(g)$, tel que $1 - z$ appartient à la bande fondamentale de $\mathcal{M}(h)$.

Proposition 1.3.4. (*Inversion de la transformation de Mellin*)

Soit $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable, telle que sa transformée de Mellin $\mathcal{M}(g)$ a la bande fondamentale $S_g = \{z, \mathbb{C} : a < \operatorname{Re}(z) < b\}$. Si $c \in]a, b[$ tel que $\mathcal{M}(g)(c + is)$ est intégrable, alors l'égalité suivante est vérifiée :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M}(g)(z) t^{-z} dz = g(t),$$

presque partout sur $]0, \infty[$.

1.4 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle [a,b)

Définition 1.4.1. Soit $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue sur $[a, b)$, b pouvant être fini ou infini. Une primitive de f est donnée par (voir [2]) :

$$(I_a^1 f)(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Pour la seconde primitive on aura

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(s) ds.$$

On utilise le théorème de Fubini pour transformer l'intégrale double à une intégrale simple

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x (x - t) f(t) dt.$$

Plus généralement le $n^{\text{ième}}$ itéré de l'opérateur I peut s'écrire :

$$\begin{aligned} (I_a^n f)(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} dx_3 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x - t)^{(n-1)} f^{(n)}(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann rendu compte que le second membre de (1.5) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

1.4 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle [a,b)

Définition 1.4.2. Soit $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et $\alpha \in \mathbb{R}^+$ l'intégrale

$$(I_{a^+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (1.6)$$

est appelée intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α telle que, $a \in \mathbb{R}$.

$$(I_{b^-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (1.7)$$

est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α telle que, $b \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.2. Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).

Théorème 1.4.1. Pour $f \in \mathcal{C}([a, b])$ l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe :

$$I_{a^+}^\alpha [I_{a^+}^\beta f(x)] = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x) \quad \text{pour } \alpha > 0, \beta > 0.$$

Exemple 1.2. L'intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction $f(x) = (x-a)^m$.

On a

$$I_{a^+}^\alpha (x-a)^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^m dt.$$

Pour calculer cette intégrale on fait le changement de variable le suivant : $t = a + s(x-a)$, d'où

$$\begin{aligned} I_{a^+}^\alpha (x-a)^m &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{m+\alpha} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^m ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{m+\alpha} B(m+1, \alpha). \end{aligned}$$

D'après la relation (1.2)

$$I_{a^+}^\alpha (x-a)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} (x-a)^{m+\alpha}. \quad (1.8)$$

Pour $\alpha = 0.75$, $m = 1$ et $a = 0$, on aura :

$$I_{0^+}^{0.75} x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.75)} (x)^{\frac{7}{4}} = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\Gamma(2.75)}.$$

1.5 Dérivée fractionnaire

Les premiers pas ont été conformes à la philosophie de l'époque où la construction d'une fonction se faisait à partir de fonctions élémentaires telles que les monômes, les exponentielles, les sinus et cosinus (séries de Fourier) etc ... Considérons la suite des monômes x^n . On a

$$\frac{d}{dt}x^n = nx^{n-1} \quad (1.9)$$

et par récurrence

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^j x^n = n(n-1)\cdots(n-j+1)x^{n-j} = \frac{n!}{(n-j)!}x^{n-j}. \quad (1.10)$$

Cette formule peut s'écrire de la façon suivante :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^j x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{(n+1-j)!}x^{n-j} \quad (1.11)$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma d'Euler qui, on le sait, prolonge le factoriel aux valeurs non entières. Ainsi on pourrait poser comme définition de la dérivée fractionnaire pour les monômes :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{(n+1-\alpha)!}x^{n-\alpha} \quad (1.12)$$

et prolonger par linéarité aux fonctions qui sont des sommes de séries entières par exemple.

1.5.1 Approche de Riemann-Liouville

Définition 1.5.1. Soit f une fonction intégrable sur $[a, x]$ et $\alpha \in]n-1, n[$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville (voir [12], [18]) la fonction définie par

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a^+}^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \\ &= \frac{d^n}{dx^n} (I_{a^+}^{n-\alpha} f(x)), \end{aligned} \quad (1.13)$$

où $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désigne la partie entière du nombre réel α .

En particulier, quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$, nous obtenons :

$${}^{RL}D_{a^+}^0 f(x) = f(x), \quad {}^{RL}D_{a^+}^n f(x) = f^{(n)}(x), \quad (1.14)$$

1.5 Dérivée fractionnaire

où $f^{(n)}(x)$ désigne la dérivée usuelle d'ordre n de $f(x)$.

Si $0 < \alpha < 1$, alors :

$${}^{RL}D_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt, \quad (x > a). \quad (1.15)$$

Exemple 1.3. La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville. En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$${}^{RL}D_{a^+}^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^\alpha.$$

Exemple 1.4. Reprenons l'exemple de la fonction $f(t) = (x-a)^\beta$. On aura

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a^+}^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{d^n}{dx^n} (I_{a^+}^{n-\alpha} (x-a)^\beta) \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} (x-a)^{\beta+n-\alpha} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

A titre d'exemple pour $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ et $a = 0$, on aura :

$${}^{RL}D_{0^+}^{0.5} (x)^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

Lemme 1.5.1. Soit $\alpha \in]n-1, n[$ et f une fonction vérifiant ${}^{RL}D_{a^+}^\alpha f = 0$ (appartenant au noyau de l'opérateur ${}^{RL}D_{a^+}^\alpha$). Alors

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (x-a)^{j+\alpha-n} \quad (1.17)$$

où les c_j sont des constantes quelconques.

Preuve 1.5.1. Partons de ${}^{RL}D_{a^+}^\alpha f = \left(\frac{d}{dx} \right)^n [I_{a^+}^{n-\alpha} f](x) = 0$, alors on a d'abord

$$[I_{a^+}^{n-\alpha} f](x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (x-a)^j$$

et par application de $I_{a^+}^\alpha$ on obtient

$$[I_{a^+}^n f](x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} (x-a)^{j+\alpha}$$

ensuite par dérivation (classique) on obtient le résultat.

1.5 Dérivée fractionnaire

Proposition 1.5.1. *Les dérivées de Riemann-Liouville ont les propriétés suivantes (voir [12],[18]) :*

- (1) pour $\alpha > 0$, et $x > a$ est : ${}^{RL}D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f(x) = f(x)$.
- (2) Soient $\alpha \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$. Si les deux dérivées fractionnaires ${}^{RL}D_{a^+}^\alpha f(x)$, ${}^{RL}D_{a^+}^m f(x)$ existent, alors nous avons :

$${}^{RL}D_{a^+}^m {}^{RL}D_{a^+}^\alpha f(x) = {}^{RL}D_{a^+}^{\alpha+m} f(x). \quad (1.18)$$

- (3) Si la dérivée fractionnaire d'ordre α , ($n - 1 \leq \alpha < n$), d'une fonction $f(x)$ est intégrable, alors

$$[I_{a^+}^\alpha ({}^{RL}D_{a^+}^\alpha f)](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \left\{ \lim_{x \rightarrow a^+} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^j I_{a^+}^{n-\alpha} f \right](x) \right\}. \quad (1.19)$$

- (4) ${}^{RL}D_0^\alpha . D_0^{-\alpha} f(x) = f(x)$ pour tout $\alpha > 0$.

Plus généralement, ${}^{RL}D_0^\alpha . D_0^{-\beta} f(x) = {}^{RL}D_0^{\alpha-\beta} f(x)$ pour tout $\beta > 0$. Si $\alpha < \beta$, alors ${}^{RL}D_0^{\alpha-\beta} f(x) = D_0^{\alpha-\beta} f(x)$.

Corollaire 1.5.1. [14] Si $f(x)$ est définie dans $[a, b]$ et $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = 0$, pour $\alpha > 0$ et pour tout $t \in [a, b]$, alors $f(x) = 0$.

Preuve 1.5.2. La condition implique que $D_0^{-\alpha} f(x) = 0$. Prendre l'opérateur dérivé **RL** des deux côtés et l'application de la **Propriété 1.5.1** (4) donne $f(x) \equiv 0$ dans $[a, b]$.

1.5.2 Approche de Caputo

On introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 1.5.2. (voir [9, 12]) Soit f une fonction, telle que $\frac{d^n}{dx^n} f$ est intégrable, la dérivée fractionnaire d'ordre α (avec $n - 1 \leq \alpha \leq n$) au sens de Caputo est définie par :

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt \\ &= I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

1.5 Dérivée fractionnaire

Exemple 1.5. La dérivée de la fonction constante au sens de Caputo.

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle,

$${}^C D_a^\alpha C = 0.$$

Exemple 1.6. Reprenons l'exemple de la fonction $f(x) = (x - a)^\beta$. On aura

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha (x - a)^\beta &= I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dx^n} (x - a)^\beta \right) \\ &= I_a^{n-\alpha} \left(\frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - n)} (x - a)^{\beta-n} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - n)} I_a^{n-\alpha} ((x - a)^{\beta-n}) \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - n)} \frac{\Gamma(\beta + 1 - n)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (x - a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (x - a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Proposition 1.5.2. Les dérivées de Caputo ont les propriétés suivantes :

(1) Si f est une fonction continue on a :

$${}^C D_{a^+}^\alpha [I_{a^+}^\alpha f(x)] = f(x). \tag{1.22}$$

(2) Si ${}^C D_{a^+}^\alpha f(x) = 0$ alors $f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (x - a)^j$, c_j constantes réelles.

(3) $I_{a^+}^\alpha [{}^C D_{a^+}^\alpha f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x - a)^j}{j!} f^{(j)}(a).$

Lemme 1.5.2. f continue sur $[a, b]$; $\alpha > 0$ alors $\lim_{t \rightarrow a^+} (I_{a^+}^\alpha f)(x) = 0$.

Preuve 1.5.3. On a

$$\begin{aligned} |(I_{a^+}^\alpha f)(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} |f(t)| dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} (x - a)^\alpha \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corollaire 1.5.2. Si $0 < \alpha < 1$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ alors

$$(I_{a^+}^\alpha \circ {}^{RL} D_{a^+}^\alpha) f = f \quad \text{et} \quad ({}^C D_{a^+}^\alpha \circ I_{a^+}^\alpha) f = f.$$

1.5 Dérivée fractionnaire

C'est-à-dire que les dérivations au sens de Riemann-Liouville et de Caputo respectivement constituent l'inverse à droite et à gauche de l'opérateur de Riemann-Liouville (au moins sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$). En voici un autre corollaire intéressant.

Corollaire 1.5.3. *Si $0 \leq \alpha$, $\beta \geq 1$ avec $\alpha + \beta \leq 1$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ alors*

$$({}^C D_a^\alpha \circ {}^C D_a^\beta) f = {}^C D_a^{\alpha+\beta} f = ({}^C D_a^\beta \circ {}^C D_a^\alpha) f.$$

1.5.3 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

- (1) L'avantage principal de l'approche **Caputo** est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de **Caputo** acceptent la même forme que celles des équations différentielles d'ordre entier.
- (2) Une autre différence entre **Riemann-Liouville** et **Caputo** est que la dérivée d'une constante est nulle par **Caputo**, par contre celle de **Riemann-Liouville** elle est

$${}^{Rl} D^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(n - \alpha)} (x - a)^\alpha.$$

1.5.4 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de caputo et celle au sens de Riemann-Liouville (voir [11], [12]).

Théorème 1.5.1. *Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$. Si f possède $(n - 1)$ dérivée en a . Alors*

$$({}^C D_a^\alpha f)(x) = D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^j(a)}{j!} (x - a)^j \right]$$

presque par tout sur $[a, b]$.

Remarque 1.3. *Le résultat du théorème signifie que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction f est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de f .*

CHAPITRE 2

ÉTUDE DE L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ DE LA SOLUTION D'UN PROBLÈME DIFFÉRENTIEL FRACTIONNAIRE DE TYPE CAUCHY

2.1 Problème fractionnaire de type Cauchy au sens de Riemann-Liouville avec poids

2.1.1 Position du problème

Le problème de valeur initiale (PVI) d'ordre fractionnaire de type Cauchy au sens de Riemann-Liouville (voir [2, 16]) est défini par :

$$\begin{cases} ({}^{RL}D^\alpha u)(x) = f(x, u(x)); & 0 < x \leq L \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} u(x) = u_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

2.1 Problème fractionnaire de type Cauchy au sens de Riemann-Liouville avec poids

où f est une fonction continue sur $\Omega =]0, L] \times]u_0 - \delta, u_0 + \delta[$ pour $(\delta > 0)$ et l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]0, 1[$ défini par :

$${}^{RL}D^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} u(t) dt \quad (2.2)$$

on s'intéresse ici aux solutions continues. Pour cela, et en tenant compte aussi de la condition aux limites (2.1), on va chercher à résoudre le PVI (2.1) dans l'espace :

$$\mathcal{C}_\alpha([0, L]) = \left\{ f :]0, L] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} f(x) \text{ existe} \right\}. \quad (2.3)$$

Il est clair que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_\alpha([0, L])$, la fonction $(\cdot)^{1-\alpha} f(\cdot)$ est prolongeable par continuité sur $[0, L]$, de plus f est définie sur $]0, L]$.

Théorème 2.1.1. [16] L'espace $\mathcal{C}_\alpha([0, L])$ défini par (2.3), muni de la norme :

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x \in [0, L]} |x^{1-\alpha} f(x)| \quad (2.4)$$

donc $(\mathcal{C}_\alpha([0, L]), \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace de Banach.

2.1.2 Réduction du problème à une équation intégrale de Volterra

Le point de départ pour la transformation du problème à une équation intégrale sera le lemme suivant :

Lemme 2.1.1. [2] Soient f une fonction continue sur $]0, L]$ et $\alpha \in]0, 1[$. Si

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} f(x) = c$$

alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (I^{1-\alpha} f)(x) = c\Gamma(\alpha).$$

Preuve 2.1.1. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} f(x) = c$, on a

$$\forall \varepsilon' > 0; \exists \delta(\varepsilon') \text{ tel que pour } 0 < t < \delta : |t^{1-\alpha} f(t) - c| < \varepsilon'. \quad (2.5)$$

D'après la relation (1.8) on a

$$\Gamma(\alpha) = (I^{1-\alpha}(t)^{\alpha-1})(x). \quad (2.6)$$

2.1 Problème fractionnaire de type Cauchy au sens de Riemann-Liouville avec poids

En introduisant la définition de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville donné par (1.6), ainsi que la relation (2.6), on obtient :

$$\begin{aligned}
| (I^{1-\alpha} f)(x) - c\Gamma(\alpha) | &= | (I^{1-\alpha} f)(x) - c(I^{1-\alpha} t^{\alpha-1})(x) | \\
&= | I^{1-\alpha} (f(x) - c.t^{\alpha-1})(x) | \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} (f(t) - ct^{\alpha-1}) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} |f(t) - ct^{\alpha-1}| dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} .t^{\alpha-1} |t^{1-\alpha} .f(t) - c| dt.
\end{aligned}$$

Maintenant si on prend $0 < x < \delta$ alors $0 < t < x < \delta$, et donc d'après (2.5) on arrive à

$$\begin{aligned}
| (I^{1-\alpha} f)(x) - c\Gamma(\alpha) | &< \frac{\varepsilon'}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} .t^{\alpha-1} dt \\
&= \varepsilon' .(I^{1-\alpha} t^{\alpha-1})(x).
\end{aligned}$$

Ainsi d'après (2.6) on trouve

$$| (I^{1-\alpha} f)(x) - c\Gamma(\alpha) | < \varepsilon' .\Gamma(\alpha). \quad (2.7)$$

Il suffit alors de choisir $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}$ pour aboutir au résultat désiré.

Théorème 2.1.2. [16] Si $u \in \mathcal{C}(]0, L[)$, alors u satisfait le PVI (2.1) si et seulement si u satisfait l'équation intégrale suivante :

$$u(x) = u_0 x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt. \quad (2.8)$$

Preuve 2.1.2. On a pour $x \in]0, L]$:

$$D^\alpha u(x) = f(x, u(x)).$$

En composant par l'opérateur d'intégration d'ordre α dans les deux côtés de l'équation précédente, on obtient :

$$I^\alpha [D^\alpha u](x) = I^\alpha [f(., u(.))](x). \quad (2.9)$$

Donc en appliquant la propriété (3) de la proposition (1.5.1) pour $0 < \alpha < 1$ et $a = 0$, on obtient

$$u(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{x \rightarrow 0^+} (I^{1-\alpha} u)(x) = I^\alpha [f(., u(.))](x). \quad (2.10)$$

2.1 Problème fractionnaire de type Cauchy au sens de Riemann-Liouville avec poids

D'autre part, d'après la lemme (2.1.1) et la condition aux limites du problème PVI (2.1), on a

$$u(x) - u_0 x^{\alpha-1} = I^\alpha[f(., u(.))](x). \quad (2.11)$$

Enfin,

$$u(x) = u_0 x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt. \quad (2.12)$$

D'où le résultat.

2.1.3 Théorème d'existence et d'unicité

Après avoir transformé le PVI (2.1) en équation intégrale de type Volterra (2.8) dont la solution est identifiée à un point fixe d'un opérateur, qui sera défini par la suite, on va donner des conditions suffisantes sur f qui conduisent à l'existence et l'unicité d'une solution continue du PVI (2.1) par le principe de contraction de Banach. Plusieurs variantes de ce genre de résultats, dans un cadre plus général et dans des espaces différents (de fonctions absolument continues, de fonctions intégrables, d'espaces avec poids...) peuvent être trouvés dans [11] - [12].

On définit l'opérateur T sur $\mathcal{C}_\alpha([0, L])$ par :

$$(Tu)(x) = u_0 x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt. \quad (2.13)$$

On suppose que les hypothèses suivantes soient satisfaites :

H.1

$$\forall y \in]u_0 - \delta, u_0 + \delta[: f(., y) \in \mathcal{C}_\alpha([0, L]), \quad (2.14)$$

H.2 f est uniformément lipschitzienne par rapport à la deuxième variable i.e,

$$\exists \omega > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \omega |y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega \quad (2.15)$$

avec

$$\omega < \frac{\Gamma(2\alpha)}{L^\alpha \Gamma(\alpha)}. \quad (2.16)$$

Voyons d'abord si pour $u \in \mathcal{C}_\alpha([0, L])$ on aura $Tu \in \mathcal{C}_\alpha([0, L])$.

Proposition 2.1.1. *Sous les hypothèses (2.14)-(2.15), l'opérateur T est une injection continue sur $\mathcal{C}_\alpha([0, L])$.*

2.1 Problème fractionnaire de type Cauchy au sens de Riemann-Liouville avec poids

Preuve 2.1.3. *Il est clair que u est continue sur $]0, L]$.*

De plus, Pour la condition de limite en 0^+ on a :

$$\begin{aligned}
\left| x^{1-\alpha}(Tu)(x) - u_0 \right| &\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t, u(t))| dt \\
&\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [|f(t, u(t)) - f(t, u_0)| + |f(t, u_0)|] dt \\
&\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [\omega |u(t) - u_0| + |f(t, u_0)|] dt \\
&\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [\omega |u(t)| + \omega |u_0| + |f(t, u_0)|] dt \\
&\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \omega |u_0| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt + \\
&\quad + \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} [\omega t^{1-\alpha} |u(t)| + t^{1-\alpha} |f(t, u_0)|] dt.
\end{aligned}$$

D'après le fait que $u \in \mathcal{C}_\alpha([0, L])$ et la deuxième hypothèse sur f (2.14)-(2.15), il existe M tel que

$$\sup_{[0, L]} [\omega t^{1-\alpha} |u(t)| + t^{1-\alpha} |f(t, u_0)|] = M$$

d'où :

$$\left| x^{1-\alpha}(Tu)(x) - u_0 \right| \leq \frac{x}{\Gamma(\alpha+1)} \omega |u_0| + \frac{M\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} x^\alpha. \quad (2.17)$$

En faisant tendre x vers 0^+ dans l'inégalité (2.17), on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha}(Tu)(x) = u_0$$

par suite $Tu \in \mathcal{C}_\alpha([0, L])$.

Théorème 2.1.3. [16] *Sous les hypothèses (2.14)-(2.15) et (2.16), il existe une unique solution de l'équation intégrale (2.8) dans l'espace $\mathcal{C}_\alpha([0, L])$.*

Preuve 2.1.4. *En tenant compte de la proposition (2.1.1), il suffit de prouver que T est un opérateur contractant. En effet.*

Soient $u, v \in \mathcal{C}_\alpha([0, L])$ on a :

$$\left| x^{1-\alpha}[(Tu)(x) - (Tv)(x)] \right| \leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t, u(t)) - f(t, v(t))| dt.$$

2.1 Problème fractionnaire de type Cauchy au sens de Riemann-Liouville avec poids

D'après (2.15), on trouve alors

$$\begin{aligned} \left| x^{1-\alpha}[(Tu)(x) - (Tv)(x)] \right| &\leq \frac{\omega}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |u(t) - v(t)| dt \\ &= \frac{\omega}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} t^{1-\alpha} |u(t) - v(t)| dt \\ &\leq \frac{\omega}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{1-\alpha} \cdot \sup_{[0,L]} t^{1-\alpha} |u(t) - v(t)| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} dt. \end{aligned}$$

En tenant compte de la norme de $\mathcal{C}_\alpha([0, L])$ définie par (2.4) et de la définition (1.6) de l'intégrale fractionnaire, on a

$$\left| x^{1-\alpha}[(Tu)(x) - (Tv)(x)] \right| \leq \frac{\omega \|u - v\|_\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{1-\alpha} \cdot \Gamma(\alpha) I^\alpha x^{\alpha-1}. \quad (2.18)$$

Ainsi d'après le résultat (1.8), l'inégalité (2.18) devient

$$\left| x^{1-\alpha}[(Tu)(x) - (Tv)(x)] \right| \leq \frac{\omega \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} x^\alpha \|u - v\|_\alpha.$$

Puisque $x \in]0, L]$ alors :

$$\left| x^{1-\alpha}[(Tu)(x) - (Tv)(x)] \right| \leq \frac{\omega \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} L^\alpha \|u - v\|_\alpha.$$

Par suite :

$$\|Tu - Tv\|_\alpha \leq \frac{\omega \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} L^\alpha \|u - v\|_\alpha.$$

Donc d'après l'hypothèse (2.16) $K = \frac{\omega \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} L^\alpha < 1$, l'opérateur T est contractant et le résultat découle alors du théorème (1.2.1).

Maintenant, comme conséquence directe des théorèmes (2.1.2) et (2.1.3) on a le résultat suivant :

Théorème 2.1.4. *Sous les hypothèses (2.14)-(2.15) et (2.16), il existe une unique solution continue du PVI (2.1).*

2.2 Problème fractionnaire de type Cauchy de Caputo

2.2.1 Position du problème

On s'intéresse aux problèmes à valeur initiale (PVI) d'ordre fractionnaire au sens de Caputo sous la forme suivante (voir [27]) :

$$\begin{cases} ({}^C D^\alpha u)(x) = f(x, u(x)); \\ u(x_0) = u_0, \end{cases} \quad (2.19)$$

où ${}^C D^\alpha$ est l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha \in]0, 1[$ et avec la limite inférieure x_0 définie par

$${}^C D^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x_0}^x (x-t)^{-\alpha} u'(t) dt$$

et $f(x, u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelée champ vectoriel, et la dimension $n \geq 1$. En particulier, $\mathbb{R}^n$ doté d'une norme appropriée $\|\cdot\|$ devient un espace métrique complet.

Soit $J = [x_0 - a, x_0 + a]$, $B = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u - u_0\| \leq b\}$ et $E = \{(x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid x \in J, u \in B\}$.

On dit qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$ est une solution de PVI (2.19) si u satisfait l'équation ${}^C D^\alpha u(x) = f(x, u(x))$ p.p. sur J , avec la condition $u(x_0) = x_0$.

2.2.2 Résultats d'existence et d'unicité

En utilisant différentes méthodes et nouvelles techniques, nous obtenons divers critères d'existence et d'unicité des solution pour le PVI (2.19).

Théorème 2.2.1. [27] *Supposons que la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie les conditions suivantes de type Carthéodory :*

- i) $f(x, u)$ est Lebesgue mesurable par rapport à x sur J .
- ii) $f(x, u)$ est continue par rapport u sur B .
- iii) il existe une constante $\beta \in]0, \alpha[$ et une fonction réelle $m(x) \in L^{\frac{1}{\beta}}(J)$ telle que $\|f(x, u)\| \leq m(x)$, pour presque tous les $x \in J$ et tous les $u \in B$.

Alors, pour $\alpha \in]0, 1[$ il existe au moins une solution pour le PVI(2.19) sur l'intervalle

$$[x_0 - h, x_0 + h] \text{ où } h = \min \left\{ a, \left[\frac{b\Gamma(\alpha)}{M} \left(\frac{\alpha - \beta}{1 - \beta} \right)^{1-\beta} \right]^{\frac{1}{\alpha-\beta}} \right\} \text{ et } M = \left(\int_{x_0}^{x_0+a} (m(t))^{\frac{1}{\beta}} dt \right)^\beta.$$

2.2 Problème fractionnaire de type Cauchy de Caputo

Preuve 2.2.1. Pour le PVI (2.19) seul le cas $x \in [x_0, x_0 + h]$ sera discuté. Une approche similaire pourrait être utilisée pour vérifier le cas où $x \in [x_0 - h, x_0]$. On sait que $f(x, u(x))$ est Lebesgue mesurable sur $[x_0, x_0 + h]$ selon les conditions (i) et (ii). Un calcul direct prouve que $(x - t)^{\alpha-1} \in L^{\frac{1}{1-\beta}}[x_0, x]$, pour $x \in [x_0, x_0 + h]$. Au vu de l'inégalité de Hölder, on obtient que $(x - t)^{\alpha-1} f(t, u(t))$ est intégrable par rapport à $t \in [x_0, x]$ pour tout $x \in [x_0, x_0 + h]$, et

$$\int_{x_0}^x \|(x - t)^{\alpha-1} f(t, u(t))\| dt \leq \left(\int_{x_0}^x ((x - t)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} dt \right)^{1-\beta} \left(\int_{x_0}^x (m(t))^{\frac{1}{\beta}} dt \right)^{\beta}$$

pour $u \in \mathcal{C}([x_0, x_0 + h], \mathbb{R}^n)$, définissons la norme $\|u\|_* = \sup_{t \in [x_0, x_0 + h]} \|u(t)\|$.

Ainsi $\mathcal{C}([x_0, x_0 + h], \mathbb{R}^n)$ avec $\|\cdot\|_*$ est un espace Banach.

Soit $\Omega = \{u \in \mathcal{C}([x_0, x_0 + h], \mathbb{R}^n) : \|u - u_0\|_* \leq b\}$. Alors, Ω est un fermé, borné et sous-ensemble convexe de $\mathcal{C}([x_0, x_0 + h], \mathbb{R}^n)$.

Nous définissons maintenant une application sur Ω comme suit. Pour un élément $u \in \Omega$, soit

$$(Ru)(x) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^x (x - t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt, \quad x \in [x_0, x_0 + h].$$

a) Nous montrerons que pour tout $u \in \Omega$, $Ru \in \Omega$.

En fait, en utilisant l'inégalité de Hölder et la condition (iii), on obtient

$$\begin{aligned} \|(Ru)(x) - u_0\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^x (x - t)^{\alpha-1} m(t) dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_{x_0}^x ((x - t)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} dt \right)^{1-\beta} \left(\int_{x_0}^x (m(t))^{\frac{1}{\beta}} dt \right)^{\beta} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} (x - x_0)^{\alpha-\beta} \left(\int_{x_0}^{x_0+h} (m(t))^{\frac{1}{\beta}} dt \right)^{\beta} \quad (2.20) \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} h^{\alpha-\beta} M \\ &\leq b, \quad \text{pour } x \in [x_0, x_0 + h]. \end{aligned}$$

Cela signifie que $\|(Ru)(x) - u_0\|_* \leq b$, pour $x \in [x_0, x_0 + h]$. Par conséquent, R est une application de Ω en lui-même.

b) Nous montrons maintenant que R est complètement continu.

Tous d'abord, nous montrerons que R est continu. Pour tout $u_m, u \in \Omega, m = 1, 2, \dots$

avec $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_* = 0$, on obtient

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x) = u(x), \quad \text{pour } x \in [x_0, x_0 + h].$$

2.2 Problème fractionnaire de type Cauchy de Caputo

Ainsi, par la condition (ii), nous avons

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(x, u_m(x)) = f(x, u(x)), \quad \text{pour } x \in [x_0, x_0 + h].$$

Donc, nous pouvons conclure que

$$\sup_{t \in [x_0, x_0 + h]} \|f(t, u_m(t)) - f(t, u(t))\| \rightarrow 0, \quad \text{comme } m \rightarrow \infty.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \|(Ru_m)(x) - (Ru)(x)\| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t, u_m(t)) - f(t, u(t))] dt \right\| \\ &\leq \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{t \in [x_0, x_0 + h]} \|f(t, u_m(t)) - f(t, u(t))\|, \end{aligned} \quad (2.21)$$

ce que implique

$$\|Ru_m - Ru\|_* \leq \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{t \in [x_0, x_0 + h]} \|f(t, u_m(t)) - f(t, u(t))\|. \quad (2.22)$$

Par conséquent

$$\|Ru_m - Ru\|_* \rightarrow 0 \quad \text{quand } m \rightarrow \infty.$$

Cela signifie que R est continu.

Ensuite, nous montrons que $R\Omega$ est relativement compact. Il suffit de montrer que la famille des fonctions $\{Ru : u \in \Omega\}$ est uniformément bornée et équicontinue sur $[x_0, x_0 + h]$.

Pour $u \in \Omega$, on obtient

$$\|Ru\|_* \leq \|u_0\| + b,$$

ce qui signifie que $\{Ru : u \in \Omega\}$ est uniformément bornée.

En revanche, pour tout $x_1, x_2 \in [x_0, x_0 + h]$, $x_1 < x_2$, en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

2.2 Problème fractionnaire de type Cauchy de Caputo

$$\begin{aligned}
& \| (Ru)(x_2) - (Ru)(x_1) \| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{x_0}^{x_1} ((x_2 - t)^{\alpha-1} - (x_1 - t)^{\alpha-1}) f(t, u(t)) dt + \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x_1} \| ((x_2 - t)^{\alpha-1} - (x_1 - t)^{\alpha-1}) f(t, u(t)) \| dt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} \| (x_2 - t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) \| dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x_1} ((x_1 - t)^{\alpha-1} - (x_2 - t)^{\alpha-1}) m(t) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} m(t) dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_{x_0}^{x_1} ((x_1 - t)^{\alpha-1} - (x_2 - t)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} dt \right)^{1-\beta} \left(\int_{x_0}^{x_1} (m(t))^{\frac{1}{\beta}} dt \right)^{\beta} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_{x_1}^{x_2} ((x_2 - t)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} dt \right)^{1-\beta} \left(\int_{x_1}^{x_2} (m(t))^{\frac{1}{\beta}} dt \right)^{\beta} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_{x_0}^{x_1} ((x_1 - t)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}} - (x_2 - t)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}}) dt \right)^{1-\beta} \left(\int_{x_0}^{x_0+h} (m(t))^{\frac{1}{\beta}} dt \right)^{\beta} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}} dt \right)^{1-\beta} \left(\int_{x_0}^{x_0+h} (m(t))^{\frac{1}{\beta}} dt \right)^{\beta} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} \left((x_1 - x_0)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}+1} + (x_2 - x_1)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}+1} - (x_2 - x_0)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}+1} \right)^{1-\beta} \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} \left((x_2 - x_1)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}+1} \right)^{1-\beta} \\
&\leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} (x_2 - x_1)^{\alpha-\beta}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Lorsque $x_1 \rightarrow x_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Par conséquent, $\{Ru : u \in \Omega\}$ est équicontinu sur $[x_0, x_0 + h]$ et donc $R\Omega$ est relativement compact. Par le **Théorème 1.2.2** du point fixe de Schauder, il existe un $u^* \in \Omega$ tel que $Ru^* = u^*$, qui est

$$u^*(x) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^x (x - t)^{\alpha-1} f(t, u^*(t)) dt, \quad x \in [x_0, x_0 + h]. \tag{2.24}$$

Il est facile de voir que u^* est une solution de le PVI (2.19) sur $[x_0, x_0 + h]$. Ceci complète la preuve.

Corollaire 2.2.1. Soit $f \in \mathcal{C}(J \times B, \mathbb{R}^n)$. Alors, pour $\alpha \in]0, 1[$, il existe au moins une solution du PVI (2.19) sur l'intervalle $[x_0 - h', x_0 + h']$, où $h' = \min \left\{ a, \left[\frac{b}{M'} \Gamma(\alpha + 1) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}$

2.2 Problème fractionnaire de type Cauchy de Caputo

et $M^I = \sup_{(x,u) \in J \times B} f(x, u)$.

Preuve 2.2.2. *La preuve du Corollaire 2.2.1 est similaire à celle de Théorème 2.2.1.*

Théorème 2.2.2. [27] *Supposons qu'il existe une constante $\gamma \in]0, \alpha[$ et une fonction réelle $\mu(x) \in L^{\frac{1}{\gamma}}[x_0, x_0 + a]$ telles que $\|f(x, u) - f(x, v)\| \leq \mu(x)\|u - v\|$, pour presque tous les $x \in J$ et tous les $u, v \in B$.*

Si la solution du PVI (2.19) existent sur $[x_0 - h, x_0 + h]$, alors cette solution est unique, où $h < \min \left\{ a, \left[\frac{\Gamma(\alpha)}{M_1} \left(\frac{\alpha - \gamma}{1 - \gamma} \right)^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{\alpha-\gamma}} \right\}$ et $M_1 = \left(\int_{x_0}^{x_0+a} (\mu(t))^{\frac{1}{\gamma}} dt \right)^{\gamma}$.

Preuve 2.2.3. *Supposons que $v(x)$ et $u(x)$ sont solutions de le PVI (2.19) sur $[x_0, x_0 + h]$.*

Alors

$$v(x) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, v(t)) dt, \quad x \in [x_0, x_0 + h]$$

et

$$u(x) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt, \quad x \in [x_0, x_0 + h].$$

Par conséquent

$$\|v(x) - u(x)\| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t, v(t)) - f(t, u(t))] dt \right\|, \quad x \in [x_0, x_0 + h].$$

Ainsi d'après l'hypothèse du théorème, nous avons

$$\|v(x) - u(x)\| \leq c \max_{t \in [x_0, x_0 + \delta]} \|v(x) - u(x)\|, \quad x \in [x_0, x_0 + h],$$

où $c = \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1 - \gamma}{\alpha - \gamma} \right)^{1-\gamma} h^{\alpha-\gamma} \in]0, 1[$. *Par conséquent*

$$\max_{t \in [x_0, x_0 + \delta]} \|v(x) - u(x)\| \leq c \max_{t \in [x_0, x_0 + \delta]} \|v(x) - u(x)\|, \quad x \in [x_0, x_0 + h],$$

ce qui implique

$$u(x) \equiv v(x), \quad x \in [x_0, x_0 + h].$$

La preuve est complète.

2.3 Problème fractionnaire de Riemann-Liouville sur le demi-axe

2.3.1 Position du problème

Le problème différentiel non linéaire à valeur initiale (PVI) d'ordre fractionnaire sur le demi-axe (voir [13]) est défini par :

$$\begin{cases} ({}^{RL}D_{0^+}^\alpha u)(x) = f(x, u(x)); & x \in]0, +\infty[\\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} u(x) = u_0, \end{cases} \quad (2.25)$$

où $f :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et ${}^{RL}D^\alpha$ est l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]0, 1[$ défini par (1.13) et $a = 0$.

On veut résoudre le problème (2.25) dans l'espace :

$$\mathcal{C}_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+) = \{u(x) \mid u :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x^{1-\alpha} u(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)\}. \quad (2.26)$$

2.3.2 Réduction du problème à une équation intégrale de Volterra

Lemme 2.3.1. [13] Soit $f :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x, u(x)) \in \mathcal{C}_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+)$ pour tout $u(x) \in \mathcal{C}_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+)$. Si $u(x) \in \mathcal{C}_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+)$, alors $u(x)$ est une solution de PVI(2.25) si et seulement si $u(x)$ satisfait l'équation intégrale de Volterra :

$$u(x) = u_0 x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt, \quad x \in]0, +\infty[. \quad (2.27)$$

2.3.3 Théorème d'existence

Lemme 2.3.2. [13] Soit $E = \left\{ u(x) \mid u(x) \in \mathcal{C}_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+), \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha} |u(x)|}{1+x^2} = 0 \right\}$

muni de la norme :

$$\|u\|_\alpha = \sup_{x \geq 0} \frac{x^{1-\alpha} |u(x)|}{1+x^2} \quad (2.28)$$

alors $(E, \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace de Banach.

Lemme 2.3.3. [13] Soit $M \subset E$. Alors M est précompact si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

2.3 Problème fractionnaire de Riemann-Liouville sur le demi-axe

- i) $\left\{ \frac{x^{1-\alpha} u(x)}{1+x^2} : u \in M \right\}$ est uniformément borné;
- ii) $\left\{ \frac{x^{1-\alpha} u(x)}{1+x^2} : u \in M \right\}$ est équicontinu dans $[0, +\infty)$;
- iii) $\left\{ \frac{x^{1-\alpha} u(x)}{1+x^2} : u \in M \right\}$ est équiconverge à zéro tant que $x \rightarrow +\infty$,
- i.e, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists T > 0$, telle que pour tout $u \in M$ et $x \geq T$, $\left| \frac{x^{1-\alpha} u(x)}{1+x^2} \right| < \varepsilon$.

Pour plus de commodité, nous écrivons $u(x) = o(x^r)$ ($x \rightarrow +\infty$) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{x^r} = 0$, où $r > 0$.

Maintenant, nous pouvons donner les principaux résultats et les prouver.

Théorème 2.3.1. [13] Soit $f :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $f(x, u(x)) \in \mathcal{C}_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+)$ pour tout $u(x) \in \mathcal{C}_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+)$ et il existe trois fonctions continues non négatives $p(x), w(x)$ et $q(x)$ définies sur $\mathbb{R}^+$, telles que

$$|f(x, u)| \leq p(x)w\left(\frac{|u|}{1+x^2}\right) + q(x), \quad (2.29)$$

et

$$\sup_{x \geq 0} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-1}}{1+x^2} p(t) dt < \Gamma(\alpha) \quad (2.30)$$

où $w(r) \leq r$ et $p(x), q(x)$ est borné sur $[0, \infty)$.

Alors le PVI(2.25) a au moins une solution $u \in \mathcal{C}_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+)$ et $u(x) = o(x^{\alpha+1})(x \rightarrow +\infty)$.

Preuve 2.3.1. Nous utiliserons le théorème alternatif de Leray-Schauder pour compléter la preuve et la diviser en quatre étapes.

Considérons l'opérateur A défini par :

$$(Au)(x) = u_0 x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt, \quad x \in]0, +\infty[, \quad u \in E. \quad (2.31)$$

Etape 1 : Nous prouvons d'abord que l'opérateur A envoie E dans lui même.

Notons que

$$\frac{x^{1-\alpha}(Au)(x)}{1+x^2} = \frac{u_0}{1+x^2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} f(t, u(t)) dt. \quad (2.32)$$

2.3 Problème fractionnaire de Riemann-Liouville sur le demi-axe

Il suffit de prouver

$$\int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} f(t, u(t)) dt \in \mathcal{C}_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} f(t, u(t)) dt = 0.$$

Nous considérons d'abord la continuité de $\int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} f(t, u(t)) dt$ sur $\mathbb{R}^+$.

Pour le cas de $x_0 \in]0, +\infty[$. Soit $x > x_0, x - x_0 < 1$, On a

$$\frac{x_0^{1-\alpha}(x_0-t)^{\alpha-1}}{1+x_0^2} > \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2}, \quad 0 \leq t < x_0, \quad (2.33)$$

et

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{x_0} \frac{x_0^{1-\alpha}(x_0-t)^{\alpha-1}}{1+x_0^2} f(t, u(t)) dt - \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} f(t, u(t)) dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^{x_0} \left(\frac{x_0^{1-\alpha}(x_0-t)^{\alpha-1}}{1+x_0^2} - \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} \right) f(t, u(t)) dt \right| \\ & + \left| \int_{x_0}^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} f(t, u(t)) dt \right| \\ & \leq \|f(t, u(t))\|_{\mathcal{C}_{1-\alpha}([0, x_0+1])} \left\{ \int_0^{x_0} \left(\frac{x_0^{1-\alpha}(x_0-t)^{\alpha-1}}{1+x_0^2} - \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} \right) t^{\alpha-1} dt \right. \\ & \left. + \int_{x_0}^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} t^{\alpha-1} dt \right\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Maintenant, nous allons examiner les deux termes entre parenthèses respectivement.

C'est facile à savoir

$$\int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} t^{\alpha-1} dt = \frac{x^\alpha}{1+x^2} B(\alpha, \alpha). \quad (2.35)$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $\delta_1 > 0$ ($< x_0$), tel que, si $0 \leq x \leq \delta_1$, alors

$$\left| \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} t^{\alpha-1} dt \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.36)$$

Il résulte de (2.33) et (2.36) que :

2.3 Problème fractionnaire de Riemann-Liouville sur le demi-axe

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{\delta_1} \left(\frac{x_0^{1-\alpha}(x_0-t)^{\alpha-1}}{1+x_0^2} - \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} \right) t^{\alpha-1} dt \right| \\
& \leq \int_0^{\delta_1} \frac{x_0^{1-\alpha}(x_0-t)^{\alpha-1}}{1+x_0^2} t^{\alpha-1} dt + \int_0^{\delta_1} \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} t^{\alpha-1} dt \\
& \leq 2 \int_0^{\delta_1} \frac{\delta_1^{1-\alpha}(\delta_1-t)^{\alpha-1}}{1+\delta_1^2} t^{\alpha-1} dt \\
& \leq \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

D'autre part, par (2.33), On a :

$$\begin{aligned}
& \int_{\delta_1}^{x_0} \left(\frac{x_0^{1-\alpha}(x_0-t)^{\alpha-1}}{1+x_0^2} - \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} \right) t^{\alpha-1} dt \\
& \leq \delta_1^{\alpha-1} \int_{\delta_1}^{x_0} \left(\frac{x_0^{1-\alpha}(x_0-t)^{\alpha-1}}{1+x_0^2} - \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} \right) dt \\
& = \frac{\delta_1^{\alpha-1}}{\alpha} \left(\frac{x_0^{1-\alpha}(x_0-\delta_1)^{\alpha}}{1+x_0^2} - \frac{x^{1-\alpha}(x-\delta_1)^{\alpha}}{1+x^2} + \frac{(x-x_0)^{\alpha}}{1+x^2} \right).
\end{aligned}$$

Ce qui implique qu'il existe un $\delta_2 > 0$ tel que pour $0 < x - x_0 < \delta_2$, on a

$$\int_{\delta_1}^{x_0} \left(\frac{x_0^{1-\alpha}(x_0-t)^{\alpha-1}}{1+x_0^2} - \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} \right) t^{\alpha-1} dt < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.38}$$

Puis (2.37), avec (2.38), conduit à

$$\int_0^{x_0} \left(\frac{x_0^{1-\alpha}(x_0-t)^{\alpha-1}}{1+x_0^2} - \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} \right) t^{\alpha-1} dt < \varepsilon. \tag{2.39}$$

Pour le deuxième terme entre parenthèses, par un calcul direct, on a

$$\int_{x_0}^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} t^{\alpha-1} dt \leq x_0^{\alpha-1} \frac{x^{1-\alpha}(x-x_0)^{\alpha}}{\alpha(1+x^2)}.$$

Ce qui implique qu'il existe un $\delta_3 > 0$ tel que pour $0 < x - x_0 < \delta_3$, on a

$$\int_{x_0}^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} t^{\alpha-1} dt \leq \varepsilon. \tag{2.40}$$

En lumière(2.39) et (2.40), nous l'avons prouvé

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{x^{1-\alpha}(Au)(x)}{1+x^2} = \frac{x_0^{1-\alpha}(Au)(x_0)}{1+x_0^2}, \quad x_0 \in (0, +\infty),$$

2.3 Problème fractionnaire de Riemann-Liouville sur le demi-axe

i.e, $\frac{x^{1-\alpha}(Au)(x)}{1+x^2}$ est continu à droite pour tout $x_0 \in]0, +\infty[$.

De même, nous pouvons savoir qu'il est continu à gauche pour tout $x_0 \in]0, +\infty[$.

Pour le cas $x_0 = 0$, par (2.31), on peut facilement voir la continuité de $x^{1-\alpha}(Au)(x)$.

Enfin, nous montrons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}(Au)(x)}{1+x^2} = 0$.

En vertu de (2.29), on a

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} f(t, u(t)) dt \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} \left(p(t)w\left(\frac{u(t)}{1+t^2}\right) + q(t) \right) dt \right| \\ & \leq \frac{\|u\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} t^{\alpha-1} dt + \frac{\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} dt, \end{aligned}$$

où $\|p\|_\infty = \sup_{x \geq 0} |p(x)|$, $\|q\|_\infty = \sup_{x \geq 0} |q(x)|$.

Notons que :

$$\int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} dt = \frac{x}{1+x^2} B(\alpha, 1). \quad (2.41)$$

À partir de (2.35), on a

$$\left| \frac{x^{1-\alpha}(Au)(x)}{1+x^2} \right| \leq \frac{\|u\|}{\Gamma(\alpha)} \frac{\|p\|_\infty B(\alpha, \alpha)}{1+x^2} \frac{x^\alpha}{1+x^2} + \frac{\|q\|_\infty B(\alpha, 1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{x}{1+x^2}. \quad (2.42)$$

Par conséquent, la conclusion requise est vraie.

Etap 2 : Nous montrons que l'opérateur A est continu.

Il suffit de prouver que, si $\{u_n\} \subset E$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\| = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \|Au_n - Au\| &= \sup_{x \geq 0} \left| \frac{x^{1-\alpha}(Au_n)(x)}{1+x^2} - \frac{x^{1-\alpha}(Au)(x)}{1+x^2} \right| \\ &= \sup_{x \geq 0} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} (f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))) dt \right| \quad (2.43) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\| = 0$, il existe une constante $K > 0$ telle que $\|u_n\| \leq K$ ($n = 1, 2, \dots$) et $\|u\| < K$.

En lumière (2.29), (2.35) et (2.41), pour tout n , on a

2.3 Problème fractionnaire de Riemann-Liouville sur le demi-axe

$$\left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} (f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))) dt \right| \leq \frac{2K \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \alpha) \frac{x^\alpha}{1+x^2} + \frac{2\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, 1) \frac{x}{1+x^2}. \quad (2.44)$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe une constante $T > 0$ et $\delta > 0$, telle que,

$$\left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} (f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))) dt \right| < \varepsilon, \quad x > T \quad (2.45)$$

et

$$\left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} (f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))) dt \right| < \varepsilon, \quad 0 \leq x \leq \delta. \quad (2.46)$$

D'autre part, à partir de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [\delta, T]} |u_n(t) - u(t)| = 0$ et la continuité uniforme de f sur tout sous-ensemble compact, on a

$$\sup_{t \in [\delta, T]} |f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, il existe un $N > 0$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\delta^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} (f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))) dt \right| \\ & \leq \sup_{t \in [\delta, T]} |f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))| \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \sup_{t \in [\delta, T]} \int_\delta^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} dt \\ & \leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \sup_{t \in [\delta, T]} |f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))| \\ & < \varepsilon. \end{aligned}$$

Cette estimation, associée à (2.45) et (2.46), implique (2.43) est valable, i.e, A est continu.

Etape 3 : Nous pouvons que A est un opérateur compact.

Soit $M \subset E$ un ensemble borné. Il existe alors un $C > 0$ tel que $\|u\| \leq C$ pour tout $u \in M$. Il suffit de prouver que AM satisfait aux condition du lemme 2.3.3.

En vertu de (2.42), nous pouvons facilement vérifier que (i) et (iii) sont satisfaits.

De plus, pour tout $u \in M$ et $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, $x_1 < x_2$,

2.3 Problème fractionnaire de Riemann-Liouville sur le demi-axe

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{x^{1-\alpha}(Au_n)(x)}{1+x^2} - \frac{x^{1-\alpha}(Au)(x)}{1+x^2} \right| \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} \left(\frac{x_1^{1-\alpha}(x_1-t)^{\alpha-1}}{1+x_1^2} - \frac{x_2^{1-\alpha}(x_2-t)^{\alpha-1}}{1+x_2^2} \right) f(t, u(t)) dt \right| \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} |f(t, u(t))| dt \\
& \leq \frac{C\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} \left(\frac{x_1^{1-\alpha}(x_1-t)^{\alpha-1}}{1+x_1^2} - \frac{x_2^{1-\alpha}(x_2-t)^{\alpha-1}}{1+x_2^2} \right) t^{\alpha-1} dt \right| \\
& + \frac{\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} \left(\frac{x_1^{1-\alpha}(x_1-t)^{\alpha-1}}{1+x_1^2} - \frac{x_2^{1-\alpha}(x_2-t)^{\alpha-1}}{1+x_2^2} \right) dt \right| \\
& + \frac{C\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} dt + \frac{\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} dt.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Par des argument similaires à ceux de l'étape 1, nous pouvons savoir

$\left\{ \frac{x^{1-\alpha}(Au)(x)}{1+x^2} : u \in M \right\}$ est équicontinu. Ainsi, A est compact.

Etape 4 : Nous prouverons que l'ensemble

$\xi(A) = \{u \in E : u = \lambda Au \text{ pour quelque } 0 < \lambda < 1\}$ est borné.

En effet, soit $u \in \xi(A)$, alors $u = (\lambda A)(u)$ pour quelque $0 < \lambda < 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \sup_{x \geq 0} \left| \frac{x^{1-\alpha}(\lambda Au)(x)}{1+x^2} \right| \\
&\leq |u_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{x \geq 0} \left| \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} f(t, u(t)) dt \right| \\
&\leq |u_0| + \frac{\|u\|}{\Gamma(\alpha)} \sup_{x \geq 0} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} t^{\alpha-1} p(t) dt \\
&+ \frac{\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \sup_{x \geq 0} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} dt \\
&\leq |u_0| + \frac{\|u\|}{\Gamma(\alpha)} \sup_{x \geq 0} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}}{1+x^2} t^{\alpha-1} p(t) dt + \frac{\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} B(1, \alpha).
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (2.29), on obtient

$$\|u\| \leq \frac{|u_0|\Gamma(\alpha) + \|q\|_\infty B(\alpha, 1)}{\Gamma(\alpha) - \sup_{x \geq 0} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} p(t)}{1+x^2} dt}.$$

Enfin, en appliquant le théorème alternatif de Leray-Schauder (Théorème 1.2.3),

l'opérateur A a un point fixe $u(x) \in E$ qui est la solution de le PVI(2.25).

2.3 Problème fractionnaire de Riemann-Liouville sur le demi-axe

Notez que $u(x) \in E$ implique $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha} u(x)}{1+x^2} = 0$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{x^{\alpha+1}} = 0$.
i.e, $u(x) = o(x^{\alpha+1})$. La preuve est complète.

Le corollaire suivant donne un cas particulier du **Théorème 2.3.1**.

Corollaire 2.3.1. Soit $f(x, u)$ une fonction continue bornée définie sur $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ et $f(x, u(x)) \in \mathcal{C}_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+)$ pour tout $u(x) \in \mathcal{C}_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+)$. Alors le PVI (2.25) a au moins une solution $u \in \mathcal{C}_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+)$, et $u(x) = o(x^{\alpha+1})(x \rightarrow +\infty)$.

Preuve 2.3.2. Puisque f est borné, nous pouvons supposer $|f(x, u)| \leq B$ ($B > 0$ est une constante positive). En prenant $p(x) = w(x) \equiv 0$ et $q(x) = B$, à partir du **Théorème 2.3.1**, il est facile de savoir que la conclusion requise est vraie. La preuve est complète.

Dans le PVI(2.25), si $f(x, u)$ est linéaire en u , à partir du **Théorème 2.3.1**, nous pouvons obtenir la conclusion suivante.

Corollaire 2.3.2. Soit $f(x, u) = a(x)u + b(x)$, et $a(x), b(x)$ être des fonctions continues bornées définies sur $[0, +\infty)$. Supposons que

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} (1+t^2) a(t) dt < \Gamma(\alpha)(x^{\alpha-1} + x^{\alpha+1}), \quad x > 0. \quad (2.48)$$

Alors le PVI(2.25) a au moins une solution $u \in \mathcal{C}_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+)$, et $u(x) = o(x^{\alpha+1})(x \rightarrow +\infty)$.

Remarque 2.1. Dans le cas $a(x) \in \mathcal{C}([0, +\infty])$ et $|a(x)| \leq C(\beta) \frac{t^\beta}{1+t^2}$, où $0 \leq \beta < 2 - \alpha$ et $C(\beta)$ est une constante positive qui peut dépendre de β , il n'est pas difficile de vérifier que $a(x)$ fait tenir 2.48.

Exemple 2.1. Considérons le problème de la valeur initiale (PVI) de l'équation différentielle fractionnaire :

$$\begin{cases} {}^{RL}D_{0^+}^{\frac{1}{2}} u(x) = \frac{1}{100} \arctan\left(\frac{e^x+1}{x^2+2}\right) \left(\frac{u}{1+x^3}\right)^{\frac{2}{3}} \ln\left(\left(\frac{\min\{x,1\}u}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right) + 1 - \frac{\sin(x^2) - 1}{4}, & x > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} u(x) = 1, \end{cases} \quad (2.49)$$

où $\alpha = \frac{1}{2}$. Prenant $p(x) = \frac{1}{100} \arctan\left(\frac{\exp(x)+1}{x^2+2}\right) \left(\frac{1+x^2}{1+x^3}\right)^{\frac{2}{3}}$, $w(r) = r^{\frac{2}{3}} \ln(r^{\frac{1}{3}} + 1)$, $q(x) = 2$, ensuite

2.3 Problème fractionnaire de Riemann-Liouville sur le demi-axe

$$|f(x, u)| \leq p(x)w\left(\frac{|u|}{1+x^2}\right) + q(x).$$

Par des calculs simples, nous avons $w(r) \leq r$ pour $r \geq 0$. Notez que $\alpha = \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq 0} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} \frac{1}{100} \arctan\left(\frac{\exp(t)+1}{t^2+2}\right) \left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right)^{\frac{2}{3}}}{1+x^2} dt \\ \leq \frac{\pi}{50\Gamma(\alpha)} \cdot \sup_{x \geq 0} \int_0^x \frac{x^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-1}}{1+x^2} dt \\ = \frac{\pi}{50\Gamma(\alpha)} \cdot \sup_{x \geq 0} \frac{x^\alpha}{1+x^2} B(\alpha, \alpha) \\ < 1. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Donc, toutes les conditions du **Théorème 2.3.1** sont satisfaites. D'après le **Théorème 2.3.1**, le PVI(2.49) a au moins une solution $u \in \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+)$ et $u(x) = o(x^{\frac{3}{2}})$ ($x \rightarrow +\infty$).

CHAPITRE 3

LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES

L'existence d'une solution périodique est un sujet brûlant dans le domaine des systèmes dynamiques fractionnaires^[24] les dérivées fractionnaire sont différentes des dérivées d'ordre entier classiques, et la différence de base entre elles provient de la différence inhérente. À savoir, les dérivées fractionnaires sont des opérateurs de nature non locale.

3.1 Dérivées d'ordre fractionnaire de la fonction périodique

Définition 3.1.1. ^[10] (solution périodique)

On dit qu'une solution non constante $x(t)$ d'un système est une solution périodique s'il existe $T > 0$ tel que $x(t) = x(t + T)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ (Wiggins, 2003)

Lemme 3.1.1. ^[10] Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T > 0$. Si $x :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T -périodique non constante de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0, +\infty[$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, la dérivée d'ordre

3.1 Dérivées d'ordre fractionnaire de la fonction périodique

k , $x^{(k)}$ est également une fonction T -périodique non constante.

Preuve 3.1.1. Nous prouvons prouver ce lemme dans les étapes suivantes [10] :

i) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Si $x :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T -périodique non constante, i.e

$$x(t + T) = x(t) \quad \text{pour tout } t \in]0, +\infty[\quad (3.1)$$

alors

$$x^{(k)}(t + T) = x^{(k)}(t) \quad \text{pour tout } t \in]0, +\infty[. \quad (3.2)$$

ii) Pour la deuxième partie, nous supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ tel que $x^{(k)}(t)$ est une fonction constante.

Remarque 3.1. Dans la preuve du lemme précédent, lorsque nous différencions l'égalité (3.1) par rapport à t , nous nous appuyons implicitement sur la règle de la chaîne bien connue pour la dérivée d'ordre entier :

$$[f(g(t))]' = g'(t).f'(g(t)).$$

Cela nous permet de différentier le côté gauche de (3.1), conduisant à :

$$\frac{d}{dt}x(t + T) = \frac{d}{dt}(t + T).x'(t + T) = 1.x'(t + T) = x'(t + T),$$

et donc, $x'(t + T) = x'(t) \quad \forall t \in]0, \infty[.$

Par différentiation successive, on obtient l'égalité (3.2).

Cependant, il est bien connu qu'il n'y a pas de règle de la chaîne simple pour les dérivées d'ordre fractionnaire (voir, par exemple, la section 2.7.3 dans [18]). Par conséquent, en appliquant l'opérateur de dérivée fractionnelle D^α , avec $\alpha \in]0, \infty[\setminus \mathbb{N}$, des deux côtés de Eq.(3.2), ne conduira manifestement pas à

$$(D^\alpha x)(t + T) = (D^\alpha x)(t) \quad \forall t \in]0, \infty[.$$

Dans ce qui suit, nous présentons les résultats suivants :

Théorème 3.1.1. [10] Soit $\alpha \in]0, \infty[\setminus \mathbb{N}$ est $n = [\alpha] + 1$. Si $x :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T -périodique non constante de classe $\mathcal{C}^n$, alors sa dérivée de Caputo ${}^C D_0^\alpha x$, ne peut pas être une fonction T -périodique.

3.1 Dérivées d'ordre fractionnaire de la fonction périodique

la proposition du **Théorème 3.1.1** peut être étendue pour les dérivées d'ordre fractionnaire définies à partir de la définition de Grunwald-Letnikov ou de Riemann-Liouville. Ce point est énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 3.1.2. [10] Soit $\alpha \in]0, \infty[\setminus \mathbb{N}$ est $n = [\alpha] + 1$. Si $x :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T -périodique non constante de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0, \infty[$, c'est la dérivée de Riemann-Liouville ${}^{RL}D_0^\alpha x$ et sa dérivée de Grunwald-Letnikov ${}^{GL}D_0^\alpha x$ ne peut pas être une fonction T -périodique.

Preuve 3.1.2. Les preuves de **Théorèmes** (3.1.1) ~ (3.1.2) sont dans [10].

Remarque 3.2. La preuve du **Théorème 3.1.1** repose sur la définition de la dérivée de Caputo d'ordre $\alpha \in]0, \infty[\setminus \mathbb{N}$ et les propriétés de la transformée de Melin. Lorsque nous parlons des dérivées habituelles d'ordre entier, il est évident que la dérivée d'une fonction périodique différentiable sera une fonction périodique de la même période. Par conséquent, le **Théorème 3.1.1** met en évidence une différence très importante entre les dérivés d'ordre fractionnaire et d'ordre entier.

Nous soulignons que les arguments de la preuve de ce théorème ne sont pas valables dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, i.e lorsque nous traitons les dérivées habituelles d'ordre entier.

Exemple 3.1. En considérant $\alpha \in]0, 1[$ et la fonction $x(t) = \sin(t)$, basée sur le théorème 6 de [9], nous obtenons

$${}^C D^\alpha \sin(t) = \frac{1}{2} t^{1-\alpha} [E_{1,2-\alpha}(it) + E_{1,2-\alpha}(-it)],$$

où $E_{\alpha,\beta}$ désigne la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres.

D'après les propriétés de la fonction de Mittag-Leffler (voir l'équation (1.93) dans [18]), il s'ensuit que

$${}^C D^\alpha \sin(t) = t^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(-t^2).$$

Pour $\alpha \in]0, 1[$, cette fonction n'est pas périodique (elle peut être vérifiée par des simulations numériques, voir Fig.3.1), même si elle tend asymptotiquement à la fonction périodique $\sin(t + \frac{\alpha\pi}{2})$. Pour $\alpha = 1$, on a $t^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(-t^2) = E_{2,1}(-t^2) = \cos(t)$.

3.2 Non existence de solutions périodiques pour un système dynamique fractionnaire

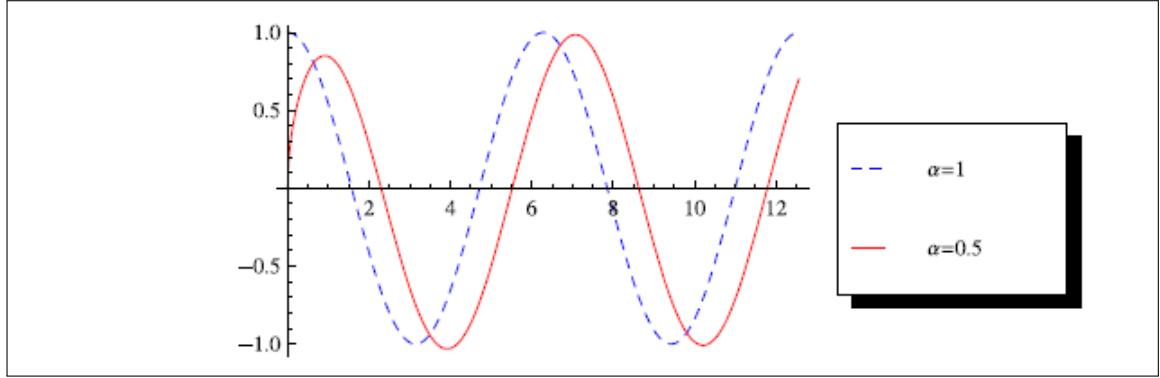


FIGURE 3.1 – La fonction $\cos(t)$ (bleu, pointillé) et $t^{1-\alpha}E_{2,2-\alpha}(-t^2)$ (rouge) pour $\alpha = 0.5$ (Pour l'interprétation des références à la couleur dans cette légende de la figure, le lecteur est renvoyé à la version Web de cet article).

3.2 Non existence de solutions périodiques pour un système dynamique fractionnaire

Tavazoei^[22] a tout d'abord donné un résultat bien connu sur la non-existence de solutions périodiques dans des systèmes d'ordre fractionnaire autonome.

Maintenant, nous considérons les problèmes de valeur initiale (PVI) d'ordre fractionnaire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^C D_0^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), & 0 < \alpha_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ x_i(t) |_{t=0} = x_i(0), & x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.3)$$

où ${}^C D_0^{\alpha_i}$ est la dérivée de Caputo, f_i sont des fonctions continue pour $i = 1, 2, \dots, n$ dans IVP (3.3).

Lemme 3.2.1. *Supposons que $g_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ est une fonction continue. Ensuite, le PVI (3.3) équivaut à l'équation intégrale non linéaire de Volterra du deuxième type*

$$x_i(t) = x_i(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g_i(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

3.2 Non existence de solutions périodiques pour un système dynamique fractionnaire

En d'autres termes, chaque solution de l'équation intégrale de Volterra (3.4) est également la solution de notre PVI (3.3) d'origine et vice versa.

Supposons que $\tilde{x}_i(t) = \tilde{x}_i(t+T)$ est une solution périodique continue non constante du PVI (3.3). Alors (3.4) peut s'écrire :

$$\int_0^T (T-s)^{\alpha_i-1} \tilde{g}_i(s) ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Où $\tilde{g}_i(t) = f_i(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t))$.

Lemme 3.2.2. Si $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t))$ est une solution périodique de le PVI (3.3) avec période T , puis

$$\int_0^T (pT-s)^{\alpha_i-1} \tilde{g}_i(s) ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Maintenant, considérons le lemme suivant.

Lemme 3.2.3. Si (3.6) est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$, alors la relation suivante peut être déduite :

$$\int_0^T \tilde{g}_i(s) ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Dans ce qui suit, il est prouvé que lorsque (3.6) est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$ est un ensemble fixe de α_i satisfaisant $0 < \alpha_i < 1$, ($i = 1, 2, \dots, n$), alors ce sera vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout ensemble arbitraire de α_i où $0 < \alpha_i < 1$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

Lemme 3.2.4. Si (3.6) est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$, alors la relation suivante peut être obtenue

$$\int_0^T (pT-s)^{\beta_i-1} \tilde{g}_i(s) ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

Où β_i peut être choisi arbitrairement dans $]0, 1[$.

Depuis $\int_0^T (pT-s)^{\beta_i-1} \tilde{g}_i(s) ds = 0$, est constante (zéro) pour tout $\beta_i \in]0, 1[$, donc,

$$\frac{d^k}{d\beta_i^k} \left(\int_0^T (pT-s)^{\beta_i-1} \tilde{g}_i(s) ds \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

Où $k \in \mathbb{N} \cup [0]$. En remplaçant l'ordre de dérivation et d'intégration et en prenant k dérivées successives de $(pT-s)^{\beta_i-1}$ par rapport à β_i , on peut trouver la relation suivante :

$$\int_0^T (\ln(pT-s))^k (pT-s)^{\beta_i-1} \tilde{g}_i(s) ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.10)$$

3.2 Non existence de solutions périodiques pour un système dynamique fractionnaire

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup [0]$. En considérant l'expansion

$$\begin{aligned} (pT - s)^{r-\beta_i+1} &= e^{(r-\beta_i+1)\ln(pT-s)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(r-\beta_i+1)^k}{k!} (\ln(pT-s))^k, \end{aligned} \quad (3.11)$$

où $0 < s < pT$ et $r \in \mathbb{R}$, et en utilisant la relation (3.10), les résultats suivants peuvent être déduit

$$\int_0^T (pT - s)^r \tilde{g}_i(s) ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (3.12)$$

Lemme 3.2.5. Relation (3.12) se traduit par

$$\int_0^T (s - t_0)^m \tilde{g}_i(s) ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.13)$$

Pour chaque $t_0 \in]0, T[$ et $m \in \mathbb{N} \cup [0]$.

Preuve 3.2.1. Les preuves des **Lemmes 3.2.2 ~ 3.2.5** sont contenues dans [22].

En considérant l'expansain

$$e^{\frac{-(s-t_0)^2}{b^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(s-t_0)^{2k}}{b^{2k} k!}, \quad (3.14)$$

est en utilisant la **Lemme (3.2.5)**, on peut en déduire que

$$\int_0^T \frac{e^{\frac{-(s-t_0)^2}{b^2}}}{b\sqrt{\pi}} \tilde{g}_i(s) ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.15)$$

où $t_0 \in]0, T[$ et $b > 0$. D'après les propretés de la fonction Gaussienne, nous savons que

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{-(s-t_0)^2}{b^2}}}{b\sqrt{\pi}} = \delta(s - t_0) \quad (3.16)$$

où $\delta(t)$ désigne la fonction delta de Dirac. Par conséquent, lorsque $b \rightarrow 0^+$, (3.15) devient

$$\int_0^T \delta(s - t_0) \tilde{g}_i(s) ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.17)$$

Les $\tilde{g}_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sont des fonctions continues, donc (3.17) donne $\tilde{g}_i(t) = 0$ pour chaque $t \in]0, T[$. De plus, comme le $\tilde{g}_i(s)$ sont des fonctions continues, nous avons $\tilde{g}_i(0) = f_i(\tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(0), \dots, \tilde{x}_n(0)) = 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Cela signifie que la condition initiale $(\tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(0), \dots, \tilde{x}_n(0))$ est en fait un point fixe pour le système d'ordre fractionnaire (3.3). Par conséquent $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t))$ est une fonction constante et ce fait entre en conflit avec la définition d'une solution périodique.

3.2 Non existence de solutions périodiques pour un système dynamique fractionnaire

Remarque 3.3. Dans les articles [22, 23], les auteurs tentent de prouver le même résultat que celui présenté dans le **Théorème 3.1.1**, mais leurs arguments sont erronés. On peut clairement s'attendre à ce qu'à un certain point, les arguments fournis dans les preuves des déclarations échouent pour des valeurs entières positives de l'ordre α (en raison des faits décrits dans les remarques précédentes). Néanmoins, un examen attentif révèle que ce n'est pas le cas dans ces articles. En fait, il y a une erreur dans la preuve du **Lemme 3.2.4**, qui constitue l'une des pré-exigences des principaux résultats formulés dans le **Théorème 1** à partir de [23].

Plus précisément, l'erreur vient du fait que dans la preuve du **Lemme 3.2.4**, les zones $\overline{S}_i^+$ et $\overline{S}_i^-$ sont considérées à tort comme indépendantes de p . Cependant, puisque $\overline{S}_i^+$ et $\overline{S}_i^-$ désignent l'aire entre la courbe $(pT - t)^{\beta_i-1} \tilde{g}_i(t)$ et l'axe t , situés respectivement au-dessus et en dessous de l'axe (l'intervalle $[0, T]$ est considéré), ils dépendent clairement des valeurs $p \in \mathbb{N}$. En fait, Eq.(31) de [22] doit être écrit comme suit :

$$\int_0^T (pT - t)^{\beta_i-1} \tilde{g}_i(t) dt = \overline{S}_i^+(p) - \overline{S}_i^-(p).$$

Par conséquent, sur la base de (10) et (32) dans [22], certaines simplifications nous amènent à

$$(p)^{\alpha_i-\beta_i} \overline{S}_i^+(p) - (p-1)^{\alpha_i-\beta_i} \overline{S}_i^-(p) \leq 0 \leq (p-1)^{\alpha_i-\beta_i} \overline{S}_i^+(p) - (p)^{\alpha_i-\beta_i} \overline{S}_i^-(p),$$

où $\alpha_i < \beta_i$. Cela peut être réécrit comme

$$\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\alpha_i-\beta_i} \leq \frac{\overline{S}_i^+(p)}{\overline{S}_i^-(p)} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\alpha_i-\beta_i}.$$

En passant à la limite lorsque $p \rightarrow \infty$, on peut simplement obtenir que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\overline{S}_i^+(p)}{\overline{S}_i^-(p)} = 1,$$

mais il est impossible de conclure que $\overline{S}_i^+(p) = \overline{S}_i^-(p)$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, ce qui nous conduirait à la conclusion du lemme 3.2.4.

En conclusion, il faut souligner que l'affirmation du théorème 1 de [23] est correcte mais les preuves de cette affirmation s'appuient sur le lemme 3.2.4 de [22], ce qui est incorrect.

Nous soulignons que l'approche de la transformation de Mellin présentée pour la preuve du **Théorème 3.1.1** est essentiellement différente de celle tentée dans [22, 23].

Le principal résultat du présent travail peut être formulé dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. [20, 22] Les systèmes d'ordre fractionnaire autonome représentés par (3.3)

3.2 Non existence de solutions périodiques pour un système dynamique fractionnaire

ne peuvent pas avoir de solution périodique.

On peut facilement prouver ce théorème en utilisant les **Lemmes 3.2.2 ~ 3.2.5** et les relations (3.14)~(3.17). Mais la pruve de cet théorème est basée sur le **Lemme 3.2.4** et nous avons déjà expliqué dans la **Remarque 3.3** que la preuve du **Lemme 3.2.4** n'est pas correcte. En conclusion, il faut souligner que les énoncés des **Théoremes 1 ~ 2** dans [23] et du théorème principal 3.2.1 de [22] sont corrects mais les preuves sont incorrectes car ces preuves sont basées sur le **Lemmes 3.2.5**.

Li, et al.^[14] ont présenté un résultat sur la non-existence de solution périodique du problème de Cauchy fractionnaire non homogène suivant :

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha x(t) = f(x), & \alpha \in]0, 1[, x \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.18)$$

où ${}^C D_0^\alpha$ est la dérivée de Caputo.

Corollaire 3.2.1. (voir [14]) *Le problème (3.18) n'a pas de solution périodique si x_0 ne résout pas $f(x) = 0$, où $f(x)$ est continue.*

Preuve 3.2.2. *L'équation ci-dessus est équivalente à l'équation de Volterra [3] :*

$$x(t) = x_0 + D_0^{-\alpha} f(x(t)). \quad (3.19)$$

Si $x(t)$ est une solution périodique avec une période $T > 0$, alors fixons $t = T$ dans la formule ci-dessus et l'utilisation de la **Corollaire 1.5.1** à $f(x(T)) \equiv 0$; c'est-à-dire que x_0 résout $f(x) = 0$ en raison de $x(T) \equiv x_0$, qui est en contradiction avec l'hypothèse. Donc, le résultat est vrai.

Mais la corollaire ci-dessus ne convient pas au système fractionnaire non autonome avec la dérivée de Caputo. Le contre exemple est construit comme suit :

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha x(t) = x(t) + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{2k+1} \left[\frac{(2k+1)!}{\Gamma(2k+2-\alpha)} t^{-\alpha} + \frac{1}{(2k+1)!} \right], & \alpha \in]0, 1[, \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

et il a une solution périodique $x(t) = \sin t$.

Kaslik et Sivasundaram^[10] ont considéré une classe générale de systèmes différentiels d'ordre

3.2 Non existence de solutions périodiques pour un système dynamique fractionnaire

fractionnaire et ont prouvé qu'il n'y a pas de solutions périodiques constantes.

Soit $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$, avec $\alpha_i \in]0, +\infty[\setminus \mathbb{N}$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ et $m \in \mathbb{N}$. Nous considérons la classe générale suivante de systèmes différentiels d'ordre fractionnaire sous forme vectorielle

$$D^\alpha x = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)), \quad t \geq 0, \quad (3.21)$$

où $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{p(m+1)} \rightarrow \mathbb{R}^p$, est une fonction donnée et

$$D^\alpha x = (D^{\alpha_1} x_1(t), D^{\alpha_2} x_2(t), \dots, D^{\alpha_p} x_p(t))^T,$$

où $D^{\alpha_i}, i \in \{1, 2, \dots, p\}$, sont compris comme des dérivées d'ordre fractionnaire (Riemann-Liouville, Caputo).

Dans ce qui suit, nous notons $n = ([\alpha_1], [\alpha_2], \dots, [\alpha_p]) \in \mathbb{N}^p$ et on dit que la fonction $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t))^T$ est de classe $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}^p)$ si et seulement si $x_i(t)$ est de classe $\mathcal{C}^{n_i}(I, \mathbb{R})$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, où I désigne un intervalle réel.

Corollaire 3.2.2. ^[10] (le cas non autonome)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons que la fonction f est T -périodique par rapport à son premier argument. Ensuite, il n'y a pas de kT solution kT -périodique non constante de classe $\mathcal{C}^n$ du système (3.21).

Preuve 3.2.3. En supposant qu'il existe une solution non constante kT -périodique $x(t)$ de classe $\mathcal{C}^n$ du système (3.21), à partir de la périodicité T de la fonction f par rapport à son premier argument, il s'ensuit que $D^\alpha x(t)$ est également préiodique kT , ce qui contredit le **Théorème 3.1.1** ou **Théorème 3.1.2**.

De manière très similaire, le résultat suivant peut être prouvé dans le cas autonome.

Corollaire 3.2.3. ^[10] (le cas autonome)

Si la fonction f est constante par rapport à son premier argument, alors il n'y a pas de solutions périodiques non constantes de classe $\mathcal{C}^n$ du système (3.21).

Remarque 3.4. ^[20] Les **Corollaire 3.2.2** et **3.2.3** sont valables même pour certains (mais pas tout) des ordres de différentiation $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ du système (3.21) sont des entiers positifs, i.e, que certains (mais pas tous) des dérivées fractionnaires sont remplacées par des dérivées d'ordre entier. Même si, sur la base du **Corollaire 3.2.3**, la solution périodique exacte n'existe pas dans le cas autonome.

3.3 Existence de solutions périodiques dans les systèmes d'ordre fractionnaire autonome

Dans le **Théorème 3.2.1** ci-dessus, Tavazoei a affirmé que l'existence de la solution périodique de PVI (3.3) est impossible. Cependant, Yazdani et Salarieh^[25] ont prouvé qu'il ne s'agit pas d'une allégation générale et que les solutions périodiques peuvent exister dans le système d'ordre fractionnaire (3.3) sous certaines conditions. Les auteurs ont prouvé que la solution périodique de PVI (3.3) peut être détectée en considérant le comportement à l'état stationnaire des solutions. Puisque la dérivée fractionnaire dans PVI (3.3) n'est pas locale contrairement à une dérivée d'ordre entier, la solution de PVI (3.3) dépend de sa mémoire entière à tout instant. En d'autres termes, la solution périodique pourrait être détectée si la différence entre la borne inférieure et la borne supérieure dans la dérivée fractionnaire dans PVI (3.3) devait être choisie suffisamment grande, c'est-à-dire que la borne inférieure devrait s'approcher de l'infini. De la discussion ci-dessus, nous avons les résultats suivants (voire [20]).

3.3.1 Dépendance en mémoire des solutions :

L'opérateur dérivé dans le calcul fractionnaire semble différent de celui d'ordre entier car il n'est pas local. En d'autres termes, lorsque cet opérateur apparaît dans une équation, la solution à l'instant t dépend de sa mémoire aux instants avant t . Pour montrer ce fait, considérons le théorème suivant.

Théorème 3.3.1. [23] Soit $f(x)$ vérifiant la condition de Lipshitz. Alors les solutions du système d'ordre fractionnaire suivant dépendent de la mémoire

$$\begin{cases} {}^C D_a^\alpha x = f(x), \\ x(a) = x_a, \end{cases} \quad (3.22)$$

cela signifie que la solution de l'équation (3.22) qui est notée $\phi(t, x_a)$, et la solution de

$$\begin{cases} {}^C D_b^\alpha y = f(y), \\ y(b) = x_b \triangleq \phi(b, x_a), \quad b > a, \end{cases} \quad (3.23)$$

qui est notée $\psi(t, y_b)$, ne coïncident pas pour $t \geq b$.

3.3 Existence de solutions périodiques dans les systèmes d'ordre fractionnaire autonome

Preuve 3.3.1. *Ce théorème est prouvé par l'absurde. En effet, supposons que la solution ne dépend pas de la mémoire.*

Selon de Podlubny^[18] (1999) Eq.(3.22) a une solution unique et continue. Par intégration, la solution de Eq.(3.22) est égale à :

$$\phi(t, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(\phi(s, x_a)) ds. \quad (3.24)$$

Il est donc obtenu que

$$y_b = \phi(b, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-s)^{\alpha-1} f(\phi(s, x_a)) ds. \quad (3.25)$$

De même la solution de Eq.(3.23) est obtenue par

$$\psi(t, y_b) = y_b + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^t (t-s)^{\alpha-1} f(\psi(s, y_b)) ds. \quad (3.26)$$

En remplaçant y_b de l'(3.25) dans la solution (3.26), on obtient :

$$\psi(t, y_b) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-s)^{\alpha-1} f(\phi(s, x_a)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^t (t-s)^{\alpha-1} f(\psi(s, y_b)) ds. \quad (3.27)$$

En raison de l'hypothèse que $\phi(t, x_a) = \psi(t, y_b)$ pour $t \geq b$, à partir de (3.24) et (3.27) on obtient que

$$\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(\phi(s, x_a)) ds = \int_a^b (b-s)^{\alpha-1} f(\phi(s, x_a)) ds + \int_b^t (t-s)^{\alpha-1} f(\phi(s, x_a)) ds. \quad (3.28)$$

En résultant

$$\int_a^b (t-s)^{\alpha-1} f(\phi(s, x_a)) ds = \int_a^b (b-s)^{\alpha-1} f(\phi(s, x_a)) ds \quad (3.29)$$

pour tout $t \geq b$, c'est une contradiction. Cela signifie que l'hypothèse n'est pas correcte et que la solution dans les systèmes d'ordre fractionnaire dépend de la mémoire.

Le résultat obtenu peut être extrait du concept d'initialisation non constante des systèmes d'ordre fractionnaire présenté par Lorenz et Hartley (2000).

3.3.2 Existence des solutions périodiques dans un état stable

Les orbites périodiques sont des solutions en état stable, ainsi dans un système d'ordre fractionnaire du fait de la dépendance mémoire des dérivées, toute la mémoire de la solution

3.3 Existence de solutions périodiques dans les systèmes d'ordre fractionnaire autonome

doit être prise en compte pour obtenir des orbites périodiques. Cela signifie que la différence entre la borne inférieure et la borne supérieure des dérivées doivent être choisies suffisamment grandes. Pour détecter une solution périodique, cela implique que la borne inférieure de la dérivée fractionnaire s'approche de l'infini. Pour le prouver, considérons le théorème suivant.

Théorème 3.3.2. [25] *Les systèmes d'ordre fractionnaire autonome présentés par (3.22) n'ont pas de solutions périodiques à moins que la borne inférieure de la dérivée soit $\pm\infty$.*

Preuve 3.3.2. *Supposons que l'Eq (3.22) ait une solution périodique avec une période T notée $\phi(t, x_a)$, alors*

$$\phi(t, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(\phi(s, x_a)) ds. \quad (3.30)$$

$$\phi(t+T, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t+T} (t+T-s)^{\alpha-1} f(\phi(s, x_a)) ds. \quad (3.31)$$

Puisque'on suppose que $\phi(t, x_a)$ est périodique, les côtés droits des Eqs (3.30) et (3.31) sont égaux. Modifions maintenant la variable d'intégration dans l'Eq(3.31) comme

$$s^* = s - T. \quad (3.32)$$

Par conséquent, Eq (3.31) peut être réécrite comme :

$$\phi(t+T, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a-T}^t (t-s^*)^{\alpha-1} f(\phi(s^*+T, x_a)) ds. \quad (3.33)$$

Le système est supposé avoir une solution périodique et le système est invariant dans le temps donc :

$$f(\phi(s^*+T, x_a)) = f(\phi(s^*, x_a)). \quad (3.34)$$

En remplaçant Eq (3.34) en (3.33), conduire à :

$$\phi(t+T, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a-T}^t (t-s^*)^{\alpha-1} f(\phi(s^*, x_a)) ds. \quad (3.35)$$

Maintenant, soustrayons Eq.(3.35) de l'Eq.(3.30). Par conséquent, l'équation suivante doit être maintenue pour tous les t .

$$\begin{aligned} \phi(t+T, x_a) - \phi(t, x_a) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a-T}^a (t-s)^{\alpha-1} f(\phi(s, x_a)) ds \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.3 Existence de solutions périodiques dans les systèmes d'ordre fractionnaire autonome

instantanément, alors que $f(\phi(s, x_a)) = 0$, on peut conclure que les limites de l'intégrale sont égales, c'est-à-dire

$$a = a - T \quad (3.37)$$

ce qui est une contradiction pour $T \neq 0$ sauf si $a = \pm\infty$. Par conséquent, seuls les systèmes fractionnaires avec la borne inférieure de $\pm\infty$ pourraient avoir des solutions périodiques.

Pour rendre cette preuve tangible, un exemple simple est étudié. Dans l'exemple présenté, il est montré que même pour un système dynamique invariant dans le temps très simple, lorsque l'ordre de la dérivée n'est pas entier, les solutions périodiques sont éliminées et uniquement lorsque la borne inférieure de la dérivée fractionnelle est égale à $-\infty$ que des solutions périodiques peuvent apparaître, tandis que dans une équation différentielle d'ordre entier similaire, presque toutes les trajectoires sont périodiques.

Exemple 3.2. Considérons l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$${}^C D_a^\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \omega_0^\alpha \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha\pi}{2} & \sin \frac{\alpha\pi}{2} \\ -\sin \frac{\alpha\pi}{2} & \cos \frac{\alpha\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

où $0.5 < \alpha < 1$. Si les états sont changés par la transformation suivant

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin \frac{\alpha\pi}{2} \\ -\omega_0^\alpha & \cos \frac{\alpha\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

L'équation différentielle (3.38) peut être réécrite comme

$${}^C D_a^\alpha \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^{2\alpha} & 2\omega_0^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Ainsi, cette équation d'espace d'état peut être écrite comme suit

$${}^C D_a^{2\alpha} y_1 - 2\omega_0^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} {}^C D_a^\alpha y_1 + \omega_0^{2\alpha} y_1 = 0. \quad (3.41)$$

Pour montrer la périodicité de la réponse de l'équation (3.41), considérons la solution analytique de l'Eq(3.41) qui est montré dans l'(3.42). Il faut noter que cette solution est obtenue en prenant la transformation de Laplace à partir de l'Eq(3.41) puis en appliquant l'inverse de la transformation de Laplace.

$$y_1(t) = \frac{\sin_{\alpha,2-\alpha}(\omega_0(t-a))}{\omega_0^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}} \dot{y}_1(a) + \frac{\sin_{\alpha,1-\alpha}(\omega_0(t-a))}{\omega_0^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}} y_1(a) - \frac{2\omega_0^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} \sin_{\alpha,1}(\omega_0(t-a))}{\omega_0^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}} y_1(a) \quad (3.42)$$

3.4 Conclusion

où $\sin_{\alpha,\beta}(\cdot)$ est défini par :

$$\sin_{\alpha,\beta}(z) \triangleq \frac{t^{\beta-1}}{2j} \left((E_{\alpha,\beta}(z^\alpha e^{j\frac{\alpha\pi}{2}}) - E_{\alpha,\beta}(z^\alpha e^{-j\frac{\alpha\pi}{2}})) \right)$$

et $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ est la fonction de Mittag-Leffler qui est définie par (1.3).

Bein que $\sin_{\alpha,\beta}(z)$ ne sont pas une fonction périodique pour toute valeur finie de z , lorsque z tend vers l'infini, il montre un comportement périodique, c'est-à-dire

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \sin_{\alpha,\beta}(\omega_0 t) = \frac{\omega_0^{1-\beta}}{\alpha} \sin\left(\omega_0 t + \frac{(1-\beta)\pi}{2}\right). \quad (3.43)$$

Ainsi, lorsque le terminal inférieur tend vers l'infini, l'équation (3.41) a une solution périodique avec la fréquence de ω_0 .

3.4 Conclusion

En général la non existence de solutions périodiques pour les problèmes fractionnaires ou les EDFs a été bien établie. Cependant, sous certaines conditions l'existence de solutions périodiques est vérifiée pour des problèmes d' EDFs non linéaires de type Riemann-Liouville ou Caputo.

D'autre part, dans les systèmes d'ordre fractionnaire lorsque la borne inférieure de l'opérateur dérivée a tend vers $-\infty$, des solutions périodiques peuvent être détectées.

On peut également conclure que, comme tout autre système d'ordre entier, on pourrait s'attendre à l'existence d'orbites périodiques dont les attracteurs chaotiques des systèmes d'ordre fractionnaire.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions de problème pour des équations différentielles non linéaires du type Volterra d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et Caputo avec conditions initiale. Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe.

De plus, on a vu que la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction périodique n'est pas nécessairement une fonction périodique de même période. On a présenté aussi, quelques résultats de l'existence ou de la non-existence de la solution périodique pour des EDF, y compris la solution à long terme.

RÉFÉRENCES

- [1] HAÏM BREZIS, Analyse fonctionnelle, théorie et application. Masson. Paris, 1983.
- [2] Hacen DIB, Equations différentielles fractionnaires, EDA-EDO (4ème Ecole) ,Tlemcen 23-27 mai 2009.
- [3] K. Diethelm and N.J. Ford, “Analysis of fractional differential equations,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 265, no. 2, pp. 229–248, 2002.
- [4] A.Erdelyi , W.Magnus, Oberhettinger F and Tricomi F, Higher Transcendental Functions, Vol.III,Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1981).
- [5] G. Fikioris, Mellin-Transform Method for Integral Evaluation, Morgan and Claypool, 2007.
- [6] P. Flajolet, X. Gourdon, P. Dumas, Mellin transforms and asymptotics : harmonic sums, Theoretical Computer Science 144 (1995) 3-58.
- [7] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [8] MEDJEKAL Hamza, 3^{ème} Doctorat : Mathématiques et Applications, EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION D’UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FRACTIONNAIRE IMPULSIVE DE TEMPS INFINI DANS UN ESPACE DE BANACH, 2015.
- [9] M. Ishteva, L. Boyadjiev, R. Scherer, On the Caputo operator of fractional calculus and C-Laguerre functions, Mathematical Sciences Research Journal 9 (2005) 161–170.

RÉFÉRENCES

- [10] E. Kaslik, S. Sivasundaram, Non-existence of periodic solutions in fractional-order dynamical systems and a remarkable difference between integer and fractional-order derivatives of periodic functions [J]. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 2012, 13(3) : 1489-1497.
- [11] S.G. Samko , A.A. Kilbas and O.I. Marichev (1993), *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*, Gordon and Breach, New York
- [12] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential Equations*, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).
- [13] Chunhai Koua, Huacheng Zhoua, Ye Yanb, Existence of solutions of initial value problems for nonlinear fractional differential equations on the half-axis, *Nonlinear Analysis*, 74, (2011) : 5975–5986
- [14] Changpin Li, Deliang Qian and YangQuan Chen, *On Riemann-Liouville and Caputo Derivatives*, 2011.
- [15] C.P. Li, F.H. Zeng, *Numerical Methods for Fractional Differential Calculus* [M]. Boca Raton, USA : Chapman and Hall/CRC, 2015.
- [16] Kaddouri Meriem, *Mémoire de master : Analyse, Géométrie et Applications, Problèmes pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire*, 2017.
- [17] K.S Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations* [M]. New York : John Wiley and Sons, Inc, 1993.
- [18] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations* [M]. New York : Academic Press, 1999.
- [19] B. Ross, *Fractional Calculus and its Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1975
- [20] Shahzad, Sarwar, Non-periodic solutions to fractional differential equations, vol.31, no.3, pp.250-264, 2017.
- [21] Y. Suansook , K. Paithoonwattanakij, Chaos in fractional order logistic model [C]//2009 Inter-national Conference on Signal Processing Systems, 2009 : 297-301.
- [22] M. S. Tavazoei and M. Haeri, “A proof for non existence of periodic solutions in time invariant fractional order systems,” *Automatica*, vol. 45, no. 8, pp. 1886–1890, 2009.

RÉFÉRENCES

- [23] M. Tavazoei, A note on fractional-order derivatives of periodic functions [J]. Automatica, 2010, 46 : 945-948.
- [24] S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos [M]. New York :Springer-Verlag, 2003.
- [25] M. Yazdani, H. Salarieh, On the existence of periodic solutions in time-invariant fractional order systems [J]. Automatica, 2011, 47 : 1834-1837.
- [26] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Applications, Fixed Point Theorems Springer-Verlag, New York, 1986.
- [27] Yong Zhou, EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS FOR A SYSTEM OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, VOLUM 12, NUMBER 2(2009) :195-204.

Résumé

Dans ce mémoire, en utilisant quelques théorèmes de point fixe, nous établissons l'existence et l'unicité de la solution pour le système d'équation différentielle fractionnaire non linéaire de type cauchy, où les dérivés fractionnaires au sens de Riemman-Liouville et Caputo ont été utilisés.

De plus, il a été prouvé que la dérivée classique d'ordre entier (si elle existe) de la fonction périodique est également une fonction périodique de la même période mais la dérivée d'ordre fractionnaire de la fonction périodique n'est pas une fonction périodique de la même période. Enfin, nous présentons la non-existence de la périodicité du système dynamique fractionnaire de fonctions périodiques non constantes et l'existence de la périodicité de la solution à long terme au système dynamique fractionnaire sont également examinées.

Mots clé : intégrale fractionnaire, dérivée fractionnaires, dérivée de Caputo, dérivée de Riemann-Liouville, théorèmes du point fixe, problème de Cauchy, solution périodique.

Abstract

In this memory, by employing some fixed point theorems, we establish the existence and uniqueness of the solution for system of non linear fractional differential equation Cauchy type, where the fractional derivatives in the sense of Riemman-Liouville and Caputo were used.

Also, it has been proved that the classical integer order derivative (if it exists) of periodic function is also a periodic function of the same period but the fractional order derivative of periodic function is not a periodic function of the same period. Finally, we present the non-existence of periodicity of fractional dynamical system of non-constant periodic functions and the existence of periodicity of the long-time solution to the fractional dynamical system are also reviewed.

Key words: fractional integral, fractional derivative, Caputo derivative, Riemann-Liouville derivative, fixed point theorems, Cauchy problem, periodic solution.

ملخص

في هذه المذكرة، من خلال توظيف بعض نظريات النقطة الثابتة، نثبت وجود و وحدانية الحل لنظام المعادلة التفاضلية الكسرية غير الخطية من نوع كوشي، حيث تم استخدام المشتقات الكسرية بمعنى ليوفيل و كابتو.

كذلك، نقدم اثبات ان المشتق الكلاسيكي ذو رتبة الصحيحة (اذا وجد) للدالة الدورية هو ايضا دالة دورية من نفس الدور لكن المشتق ذو الرتبة الكسرية للدالة الدورية ليس دالة دورية لنفس الدور. و أخيرا، نقدم عدم وجود دورية النظام الديناميكي الكسري للدوال الدورية غير الثابتة و تتم أيضا مراجعة وجود دورية الحل طويل المدى للنظام الديناميكي الكسري.

الكلمات المفتاحية: التكامل الكسري، المشتق الكسري، مشتق كابتو، مشتق ريمان ليوفيل، نظريات النقطة الثابتة، مسائل كوشي، الحل الدوري.