

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



UNIVERSITÉ D'EL-OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Présenté par: CHERGUI Halima

HANANCHA Salma

TLILI Rachida

Thème

**L'intégration numérique et
applications**

Soutenu le 3 juin 2014

Devant le jury composé de:

Mr. FERHAT.M.S

Mr. ZAOUCHE Elmehdi

Mr. NOUAR AZIZA Souad

MC (B) Univ. El Oued Président

MC (A) Univ. ElOued examinateur

MA (B) Univ. ElOued Rapporteur

Remerciements

Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail.

*Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de professeur "NOUAR AZIZA Souad", à l'université d' **El-Oued**, a qui nous voudrions exprimer nos profonde gratitude pour leur disponibilités, leur aides et leur conseils pour réaliser ce travail.*

*ainsi qu'à tous les professeurs de l'université d' **El-oued** .*

Nous remercions vivement nos familles surtout nos parents pour l'aide et le soutien moral.

*Nous tenons a remercier tous les étudiants de La promotion 2013/2014 de Maths de l'université d' **El-oued** .*

Notations générales

P_n : polynôme d'interpolation.

E_r : l'erreure d'interpolation.

$f^{(n)}$: la dérivée n-iem.

\mathfrak{R} : le corp des nombres réel.

\sum : signe de somme.

\prod : signe de produit.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Interpolation	2
1.1 L'existence du polynôme d'interpolation:	2
1.2 Intepolation linéaire:	3
1.3 Polynômes d'interpolation de Lagrange:	4
1.4 Polynôme d'interpolation de Newton:	6
2 Intégration numérique	8
2.1 Méthode des trapèzes:	8
2.1.1 Formule de trapeze simple:	8
2.1.2 Formule de trapéze composée:	11
2.2 Méthode de Simpson:	12
2.2.1 Méthode de Simpson simple:	12
2.2.2 Méthode de Simpson composée:	14
2.3 Méthode de Gauss:	15
2.4 Exemples de comparaison entre les méthodes:	24
2.4.1 Comparaison entre la méthode de Gauss et Newton Cotes:	24
2.4.2 Comparaison entre les methodes des Trapéze, point milieu et rectangle:	28
3 Applications	39
3.1 Première application:	39
3.2 Deuxième application:	43
4 <i>Biblagraphie</i>	44

Introduction générale

Ce travail est composée de trois parties, le premier chapitre s'intéresse à l'interpolation linéaire et donc on définit le polynôme de Lagrange et Pour la construction de ce polynôme d'interpolation; on pose un polynôme $P = P(x) = \sum_{n=1}^n f(x_0) \times L_i(x)$ et notons $E(x) = f(x) - P(x)$, l'erreur d'interpolation et $\prod_{n+1}(x)$ le polynôme de degré $(n+1)$ défini par $\prod_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$; la deuxième partie traite l'intégration numérique, sachant qu'elle est l'un des problèmes les plus importants que l'on rencontre en analyse. En effet on rencontre souvent des intégrales dont le calcul par des méthodes analytiques est très compliqué ou même impossible car il n'existe pas d'expression analytique de la primitive de la fonction à intégrer dans ces cas on peut appliquer des méthodes numériques pour évaluer la valeur de l'intégrale donnée, parmi ces méthodes on va se focaliser sur la méthode des trapèzes, Simpson et la quadrature de Gauss et leurs estimations d'erreurs et enfin la dernière partie est consacrée aux applications de l'intégration numérique.

Chapitre 1

Interpolation

1.1 L'existence du polynôme d'interpolation:

Ce chapitre et le chapitre suivant (intégration numérique) sont étroitement liés par ce qu'ils répondent à diverses facettes d'un même problème.

L'interpolation polynômiale consiste à faire passer des points par une fonction (polynôme) par des points; cette interpolation est souvent utilisée pour approcher une fonction par un polynôme c'est à dire: à partir d'une fonction f connue seulement en $(n + 1)$ points de la forme $((x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n)$, peut on construire une approximation de f pour tout x .

les points $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \dots, n)$ sont appelés points d'interpolation ou points de collocation et peuvent provenir de données expérimentales ou d'une table. on se propose alors d'approcher f par une fonction simple de type polynomiale; étant donnée une fonction f définie et supposée continue sur un interval fermé $[a, b]$, le théorème d'approximation de WEIERSTRASS prouve l'existence d'un polynôme aussi "proche" de la fonction donnée que l'on veut.

Théorème 1.1.1 (de Weierstrass):

Si f est définie et continue sur $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$ donnée, alors il existe un polynôme P , défini sur $[a, b]$ tel que:

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon; \forall x \in [a, b].$$

C'est une première justification de l'utilisation des polynômes pour approcher une fonction quelconque.

Une deuxième justification très importante est le fait que les dérivées et intégrales des polynômes sont faciles à calculer et sont encore des polynômes.

Le problème s'écrit alors: trouvons P tel que:

$$f = P + E(f),$$

Où $E(f)$, erreur d'approximation, réalise certaines conditions qui définissent la nature du problème.

Exemple 1.1.1 on pose $E(f)(x_j) = 0, 0 \leq j \leq n$ c'est-à-dire $P(x_j) = f(x_j)$,

$\forall 0 \leq j \leq n$. Et c'est ce que nous traiterons dans ce chapitre.

1.2 Intepolation linéaire:

Rappelons un résultat fondamental:

Théorème 1.2.1 un polynôme de degré n a au plus n racines dans \mathbb{R} et exactement n racines dans \mathbb{C} . Déterminons pour commencer un polynôme P passant par 2 points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) .

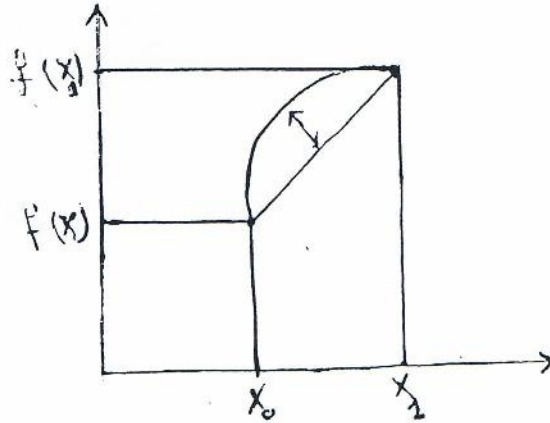
Ce problème revient à approcher une fonction f connue aux 2 points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ par un polynôme de degré 1 telle que la condition: $P(x_i) = f(x_i), i = 0, 1$.

Posons $P(x) = a_0 + a_1x$. On a $a = \begin{cases} y_0 = P(x_0) = a_0 + a_1x_0 \\ y_1 = P(x_1) = a_0 + a_1x_1 \end{cases}$ a_0 et a_1 inconnues.

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, a_0 = f(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \times x_0.$$

D'où:

$$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$



Ce qui précède est un exemple simple.

Problématique: si on a un grand nombre de points d'interpolation, la détermination du polynôme d'interpolation nécessitera un volume de calcul très important. Lagrange et Newton ont choisis la forme du polynôme P_n de manière assez différente et sont arrivés à des formules simples.

1.3 Polynômes d'interpolation de Lagrange:

Théorème 1.3.1 soient $x_0, x_1, \dots, x_n : (n + 1)$ points distincts et une fonction f connue en $f(x_i), 0 \leq i \leq n$. alors il existe un unique polynôme P de degré $\leq n$ telle que $P(x_i) = f(x_i), 0 \leq i \leq n$.

Preuve. Unicité: si P et Q sont 2 polynôme d'interpolation alors $d^0 P \leq n$ et $d^0 Q \leq n$. et $P(x_i) = Q(x_i) = f(x_i), 0 \leq i \leq n$. $d^0(P - Q) \leq n, (P - Q)(x_i) = 0, 0 \leq i \leq n \Rightarrow$ le polynôme $(P - Q)$ admet $(n + 1)$ racine, alors que $d^0(P - Q) \leq n$ donc $P - Q \equiv 0 \Rightarrow P \equiv Q \Rightarrow$ unicité de " P ".

Existence: On l'a déjà prouvé pour $n = 2: P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1$.

Cas général: n quelconque. Pour la construction du polynôme d'interpolation Lagrange: on pose un polynôme $P = P(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \times L_i(x)$ Avec $L_i \in P, L_i$ linéairement indique

telle que: $d^0 L_i \leq n$ et $L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ Car on a dans ce cas: $d^0 P \leq n$
 et $P_n(x_i) = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$, $L_i(x_j) = 0$ pour $0 \leq j \leq n$, $j \neq i \Rightarrow L_i$ a n
 racines différentes simples. Alors: $L_i(x) = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$ $L_i(x_i) = 1 = C \prod (x_i - x_j) \Rightarrow$
 $C = \frac{1}{\prod (x_i - x_j)}$ Donc: $L_i(x) = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ polynôme de Lagrange. d'où l'expression du
 polynôme d'interpolation du polynôme de Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \text{ ce qui prouve l'existence. } \blacksquare$$

Première expression de l'erreur d'interpole:

Notons $E(x) = f(x) - P(x)$, l'erreur d'interpole et $\prod_{n+1}(x)$ le polynome de $d^0(n+1)$
 définie par $\prod_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ $I = [a, b]$ le plus petit interval contenant x et les points x
 $0 \leq i \leq n$ alors:

Théorème 1.3.2 si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$, il existe $\xi \in]a, b[$ telle que:

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = \prod_{n+1}(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Preuve. pour chaque x fixé, $x \neq x_i$ $0 \leq i \leq n$ ou on considère la fonction:

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_{n+1}(x)} \pi_{n+1}(t) \quad d^0 F \leq (n+1)$$

$$F(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_{n+1}(x)} \times \pi_{n+1}(x_i)$$

$$F(x_i) = 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq n$$

$$F(x) = f(x) - P(x) - \frac{f(x) - P(x)}{\pi_{n+1}(x)} \pi_{n+1}(x)$$

$$F(x) = 0$$

Donc: F admet $(n+2)$ racines différentes dans $[a, b]$ d'après le théorème de Roll:

$$\left\{ \begin{array}{l} F: \text{ admet } (n+1) \text{ racines différentes dans }]a, b[\\ F': \text{ admet } n \text{ racines différentes dans }]a, b[\\ \dots \\ F^{(n+1)}: \text{ admet une racine dans }]a, b[\end{array} \right.$$

donc: $\exists \xi \in]a, b[$ telle que $F^{(n+1)}(\xi) = 0$

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P_n^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - P(x)}{\prod_{n+1}(x)} \times \frac{\prod_{n+1}(\xi)}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\xi) =$$

$$f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! \frac{f(x) - P(x)}{\prod_{n+1}(x)} = 0$$

$$E(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{n+1}(x). \blacksquare$$

1.4 Polynôme d'interpolation de Newton:

Soit P_n le polynôme d'interpolation de f aux points x_0, \dots, x_n . On peut déduire les différences divisées de f en ces points en considérant la représentation suivante de P_n :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}),$$

$$a_i \in C^{stc}, 0 \leq i \leq n.$$

Pour déterminer les a_0 , on utilise le fait que $P_n(x_0) = f(x_0)$, $a_0 = f(x_0)$

$$\text{De même pour } a_1 = P(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) \implies a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Définition 1.4.1 la différence divisée d'ordre 1 de la fonction f au point x_i est donnée par:

$$\delta[x_i] f = f(x_i)$$

La différence divisée d'ordre 2 de f aux points x_i, x_j est alors définie récursivement par:

$$\delta[x_i, x_j] f = \frac{\delta(x_i) f - \delta(x_j) f}{x_i - x_j}$$

et la différence divisée d'ordre k sera définie par:

$$\frac{\delta[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] f - \delta[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}] f}{x_{i+k} - x_i}$$

Propriétés:

1- $\delta[x_0, \dots, x_n] f$ est l'ordre arguments x_i .

2- $\delta[x_0, \dots, x_n] f$ est linéaire par rapport à l'argument de la fonction i.e:

$$\delta[x_0, \dots, x_n] (f + g) = \delta[x_0, \dots, x_n] f + \delta[x_0, \dots, x_n] g.$$

Théorème 1.4.1 *le polynôme d'interpolation de Newton est donnée par:*

$$P_n(x) = \delta[x_0]f + (x - x_0) * \delta[x_0, x_1]f + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \delta[x_0, \dots, x_n]f$$

Soit:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right) \delta[x_0, \dots, x_i]$$

Et la 2^{ie} expression de l'erreur d'interpolation est donnée par:

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = \prod_{n+1} (x) \delta[x_0, \dots, x_n]f.$$

Chapitre 2

Intégration numérique

Dans le chapitre précédent, on a remplacé f par son polynôme d'interpolation stricte (interpolation exemple Lagrange-Newton qui passe par les points donnés) à l'erreur E près:

$$f(x) = P_n(x) + E(x)$$

L'intégration numérique est basée principalement sur la relation:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} P_n(x) dx + \int_{x_0}^{x_n} E_n(x) dx$$

Où $P_n(x)$ est un polynôme d'interpolation et $E_n(x)$ l'erreur associé. En faisant varier x , on obtient les formules de Newton-Cotes.

Plus n est élevé, plus grande est (en principe) la précision liée à la valeur de l'intégrale recherchée.

En pratique, les numériciens utilisent $n \leq 5$.

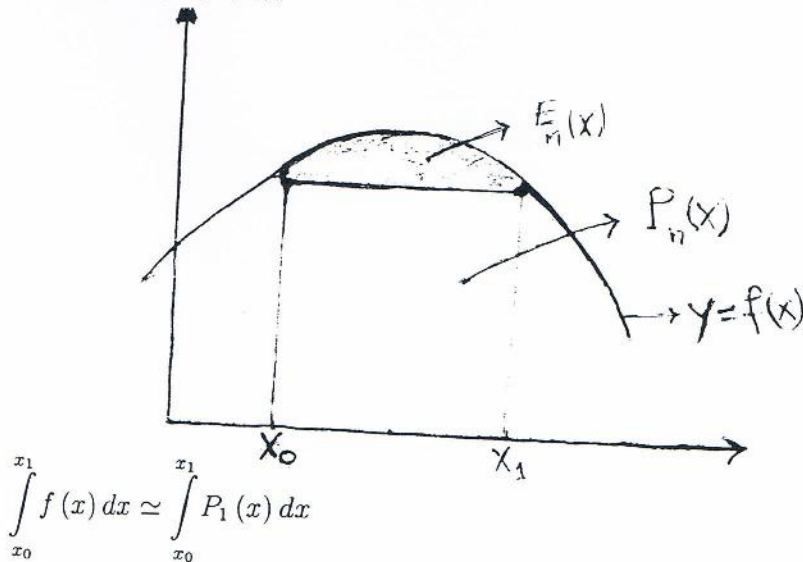
Nous traiterons des quadratures de GAUSS très fréquemment utilisées dans les méthodes numériques plus avancées comme celle des éléments finis.

2.1 Méthode des trapèzes:

2.1.1 Formule de trapeze simple:

C'est la méthode la plus simple. on souhaite évaluer $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$ ou f est une fonction connue seulement en 2 point ou une fonction n'ayant pas primitive.

première solution: On Remplace $f(x)$ par le polynome de $d^\circ = 1$ passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$.



$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \simeq \int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx$$

L'aire hachurée (en gris) est $\int_{x_0}^{x_1} E_n(x) dx =$ erreur d'intégration.

Cette méthode est la méthode des trapèzes.

On a:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} E_1(x) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [f(x_0) + (x - x_0) \delta[x_0, x_1] f] dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(\xi(x))}{2!} (x - x_0)(x - x_1) dx \end{aligned}$$

Si on intègre le polynôme $\left(\delta[x_0, x_1] f = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \right)$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = (x_1 - x_0) f(x_0) + \frac{1}{2} (f(x_1) - f(x_0))$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(f(x_0) + (x - x_0) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right) dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(\xi(x))}{2!} (x - x_0)(x - x_1) dx$$

$$= [(x_1 - x_0) f(x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^2]_{x_0}^{x_1} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(\xi(x))}{2!} (x - x_0)(x - x_1) dx$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 - x_0) f(x_0) + \frac{1}{2} (x_1 - x_0) (f(x_1) - f(x_0)) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(\xi(x))}{2!} (x - x_0)(x - x_1) dx \\
&= \frac{(x_1 - x_0)}{2} (f(x_0) + f(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(\xi(x))}{2!} (x - x_0)(x - x_1) dx
\end{aligned}$$

Changement de variable:

(En supposant que les points (si $n \geq 1$) sont équidistants):

$$s = \frac{x - x_0}{h}$$

D'où on tire:

$$x - x_i = (s - i)h, dx = hds$$

Le terme d'erreur devient:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(\xi(x))}{2!} (x - x_0)(x - x_1) dx = \int_0^1 \frac{f''(\xi(x))}{2!} s(s-1) h^3 ds$$

On peut en core simplifier cette expression en utilisant le théorème de la moyenne.

Théorème 2.1.1 Soit f_1 une fonction continue dans l'intervalle $[a, b]$ et f_2 une fonction intégrable qui ne change pas de signe dans $[a, b]$, $\exists \eta \in [a, b]$ tel que:

$$\int_b^a f_1(x) f_2(x) dx = f_1(\eta) \int_b^a f_2(x) dx$$

Comme la fonction $s(s-1)$ ne change pas de signe dans $[0, 1]$, on écrit:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{f''(\xi(x))}{2} s(s-1) h^3 ds &= \frac{f''(\eta)}{2} h^3 \int_0^1 s(s-1) ds \\
&= \frac{-f''(\eta)}{12} h^3, \eta \in [0, 1]
\end{aligned}$$

La méthode de trapèze se résume donc à l'égalité:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &= \frac{(x_1 - x_0)}{2} (f(x_0) + f(x_1)) - \frac{f''(\eta)}{12} h^3 \\
h &= x_1 - x_0, \eta \in [0, 1]
\end{aligned}$$

Exemple 2.1.1 on veut évaluer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ (valeur exacte=1)

Méthode de trapèze:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} \left(\sin 0 + \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4} = 0,78539816$$

l'erreur est de l'ordre $\sim 2.10^{-1}$ erreur importante par rapport à la valeur exacte 1.

2.1.2 Formule de trapèze composée:

Une stratégie intéressante pour améliorer la précision consiste à décomposer l'intervalle d'intégration $([a, b])$ en n sous intervalle de longueur $h = \frac{b-a}{n}$.

Les points engendrés sont notés $x_i, i = 0, \dots, n$ des valeurs aux extrémités sont $a = x_0$ et $b = x_n$. On applique la méthode du trapèze sur chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on a alors:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

$$\simeq \frac{h}{2} [(f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \dots + (f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})) + (f(x_{n-1}) + f(x_n))]$$

Donc:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

C'est la formule des trapèzes composées ou généralisées dans chaque sous intervalle, on commet l'erreur liée à la méthode du trapèze car:

$$h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow n = \frac{b-a}{h}$$

L'erreur totale commise est:

$$n \left(-\frac{f''(\eta) h^3}{12} \right), \eta \in [0, 1]$$

$$n \left(-\frac{f''(\eta) h^3}{12} \right) = -\frac{(b-a)}{h} \times \frac{f''(\eta) h^3}{12}$$

$$= -\frac{(b-a)}{12} f'''(\eta) h^2$$

Remarque 2.1.1 Sur chaque sous-intervalle, on devrait avoir η , différent pour chaque sous-intervalle mais si on applique le théorème de la moyenne on peut conclure qu'il $\exists \eta \in [a, b]$ tel que l'erreur totale soit $\frac{b-a}{12} h^2 f'''(\eta)$

comme l'erreur globale est $\frac{b-a}{12} f'''(\eta) h^2$ pour $\eta \in [a, b]$

La méthode des trapèzes composées est d'ordre 2.

Exemple 2.1.2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

Intervalle de longueur: $h = \frac{b-a}{4} = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq \frac{\pi}{16} \left[\sin 0 + 2 \left(\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{8} \right) + \sin \frac{\pi}{2} \right] \simeq 0,9871158.$$

L'erreur absolue est 0,01288 par rapport à la valeur exacte $1(1 - 0,9871158)$

pour 8 sous-intervalles $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq 0,9967852 \Rightarrow \text{erreur} \simeq 0,0032.$

Remarque 2.1.2 La méthode des trapèzes donne un résultat exacte si $f \in P_1$

Définition 2.1.1 Les formules d'intégration numérique sont dites formules de Quadrature.

Définition 2.1.2 Le degré de précision d'une formule de quadrature est la valeur maximale de n pour la quelle cette formule de quadrature intègre exactement le polynôme de degré $d^n \leq n$.

La formule des Trapèzes a pour degré de précision 1.

2.2 Méthode de Simpson:

2.2.1 Méthode de Simpson simple:

Pour $n = 2$ la formule de Newton-côte donne la formule de Simpson:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

2.2.1 Méthode de Simpson simple

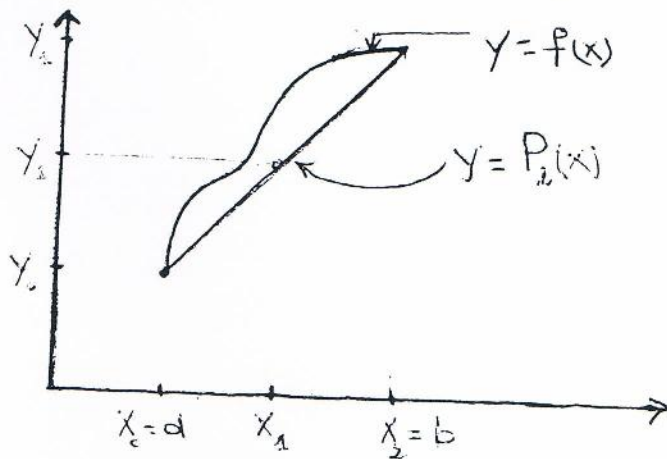
Pour $n = 2$ la formule de Newton-côte donne la formule de Simpson:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Interprétation géométrique:

On approche $f(x)$ par la parabole passant par les points $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ alors:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \int_a^b P_2(x) dx$$



Evaluation de l'erreur:

on pose:

$$f(x) \simeq f(x_1) + \frac{x - x_1}{h} \times \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2} + \left(\frac{x - x_1}{h} \right)^2 \left(\frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{2} \right)$$

$$f(x) \simeq P_2(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x_0) = P_2(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$$

$$f(x_1) = P_2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c$$

même chose pour:

$$f(x_2) = P_2(x_2)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \simeq \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in]x_0, x_2[$$

2.2.2 Méthode de Simpson composée:

En répétant le même procédé (Simpson simple) sur plusieurs paires de sous intervalle de $[a, b]$, on obtient la formule de Simpson généralisée:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

Exemple 2.2.1 calculer les valeurs approchées de $I = \int_1^3 \sqrt{x} dx$.

En utilisant, la formule de Simpson ou 3 points $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$; majorer l'erreur d'approximation:

$$I = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi(x)) \right) \quad \xi \in]1, 3[$$

$$h = 1, f(x_0) = 1, f(x_1) = \sqrt{2}, f(x_2) = \sqrt{3}$$

$$I = \frac{1}{3} (1 + 4\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

Majoration de l'erreur:

$$E_r = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = -\frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16} x^{-\frac{7}{2}}$$

Pour majorer $f^{(4)}(\xi)$ il faut étudier la variation de $f^{(4)}(x)$:

$$f^{(5)}(x) = \frac{7 * 15}{32} x^{-\frac{9}{2}} > 0 \Rightarrow f^{(4)} \text{ et croissant}$$

Et:

$$f^{(4)}(x) < 0, \forall x \in]1, 3[$$

$$|f^{(4)}(x)| < |f^{(4)}(1)| = \frac{15}{16}$$

$$|E_r| \leq \frac{1}{90} \cdot \frac{15}{16} \simeq 0,01.$$

On traite $\int_1^3 \sqrt{x} dx$ avec la méthode de trapèze:

$$x_0 = 1, x_2 = 3$$

$$I \simeq \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_2)) = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) \simeq 2,713.$$

$$E_r = \frac{-h^3}{12} f'''(\xi), \xi \in]1, 3[$$

f''' croissant et négative sur:

$$]1, 3[: |f'''(\xi)| \leq |f'''(1)| = \frac{1}{4}.$$

$$|E_r^T| \leq \frac{1}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{48} \simeq 0,016.$$

2.3 Méthode de Gauss:

Les formules de Newton-côte ont un degré de précision au moins égal à n , nous allons construire une formule de quadrature de telle sorte que son degré de précision n soit le plus grand possible, ainsi l'erreur sera minimisée.

Définition 2.3.1 On appelle polynôme de Legendre les expressions de la forme:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n), n = 0, 1, \dots$$

Propriétés fondamentales de ces polynômes:

- 1) $P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n, n \geq 0$
- 2) $\int_{-1}^1 P_n(x) \Phi_k(x) dx = 0, k < n$ ou $\Phi_k \in P_n$
- 3) Le polynôme de Legendre P_n possède n racines réelles distinctes $\in [-1, 1]$.

La formule de quadrature de Gauss consiste à sélectionner les points x_1, x_2, \dots, x_n et les coefficients A_1, \dots, A_n pour que le degré de la précision de formule:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

Soit le plus grand possible.

Cette formule contient $2n$ inconnues x_1, x_2, \dots, x_n et A_1, \dots, A_n , un polynôme de degré $d \leq 2n-1$ contient $2n$ coefficients, donc le degré de précision le plus grand possible est $N = 2n-1$.

Estimation de l'erreur:

posons:

$$E_r = \int_a^b f(x) dx - \sum A_i f(x_i)$$

Un entier n est appelé le degré de précision de première formule de quadrature si:

$$\begin{cases} E_r(P_k) = 0, P_k \in P_n \\ E_r(P_{n+1}) \neq 0, P_{n+1} \in P_{n+1} \end{cases}$$

Le degré de précision de $\sum A_i f(x_i)$ est $2n-1$, si et seulement si:

$$E_r(x^k) = 0$$

$$E_r(x^{2n}) \neq 0 \quad k \leq 2n-1$$

donc:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum A_i f(x_i)$$

Est exacte pour les fonctions $1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}$.

où encore:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b dx = \sum_{i=1}^n A_i \\ \int_a^b x dx = \sum_{i=1}^n A_i x_i, \text{ ou } \int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \\ \int_a^b x^{2n-1} dx = \sum_{i=1}^n A_i x_i^{2n-1} \end{array} \right.$$

$$0 \leq k \leq 2n - 1$$

D'où:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \int_a^b P(x) dx$$

où:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) l_i(x)$$

$$d^\circ P \leq n - 1, f(x_i) = P(x_i), 0 \leq i \leq n - 1$$

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \int_a^b \left[\sum f(x_i) l_i(x) \right] dx = \sum f(x_i) A_i$$

Où

$$A_i = \int_a^b l_i(x) dx$$

Comme f est égale à son polynôme d'interpolation si f est un polynôme de $d^\circ \leq n - 1$, cette formule donne la valeur exacte d'interpolation pour les polynôme de $d^\circ \leq n - 1$.

Noeuds et poids de Gauss:

théoreme sur les noeuds de Gauss:

Soit Q un polynôme de degré n tel que:

$$\int_a^b Q(x) x^k dx = 0$$

$$0 \leq k \leq n - 1$$

Soient x_1, x_2, \dots, x_n les racines de Q , alors la formule:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

Avec les x_i comme noeuds, sera exacte pour tout polynôme de $d^\circ \leq 2n - 1$.

Preuve. Soit f un polynôme de $d^\circ \leq 2n - 1$

$$d^\circ = q \leq n, f = pq + r$$

$$d^\circ = p \leq n - 1$$

$$d^\circ = r \leq n$$

$$d^\circ p \leq n - 1 \Rightarrow p$$

Est une combinaison linéaire de $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$, par hypothèse:

$$\int_a^b Q(x) x^k dx = 0.$$

Et

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i \Rightarrow \int_a^b Q(x) p(x) dx = 0.$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p(x) Q(x) dx + \int_a^b r(x) dx = \int_a^b r(x) dx$$

$$f(x_i) = P(x_i) Q(x_i) + r(x_i), 1 \leq i \leq n$$

$Q(x_i) = 0$ car x_i racines de Q , donc:

$$f(x_i) = r(x_i), 1 \leq i \leq n. \dots \ast$$

Comme $d^\circ r \leq n - 1$, la formule (1) donnera:

$$\int_a^b r(x) dx, \text{ exactement.}$$

$$((1) \int_a^b r(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i r(x_i)) \text{ Alors: } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b p(x) Q(x) dx + \int_a^b r(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i r(x_i)$$

$$* \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \text{ La formule est exacte pour polynôme de } d^\circ \leq 2n - 1 \text{ donc}$$

avec des noeuds arbitraires, les formules $\int_a^b f(x) dx \simeq \sum A_i f(x_i)$ seront exactes pour tout

polynôme de $d^\circ \leq n - 1$ avec les noeuds: de Gauss, la formule $\int_a^b f(x) dx \simeq \sum A_i f(x_i)$ sera exacte pour tout polynôme de $d^\circ \leq 2n - 1$. ■

Les formules de quadrature déduites de ce théorème sont appelées quadrature de Gauss.

En particulier, il y'a des méthode efficaces pour générer des polynomes particulier dont les racines sont utilisés comme noeuds dans la formule de quadrature de Gauss, si on pose $q_n(1) = 1$ ces polynome sont les polynomes de legendre.

Changement d'intervalle: $I = [-1, 1]$

Pour retrouver un intervalle quelquon que il suffire de faire le changement de variables:

$$x = \frac{(b-a)t + (b+a)}{2} \begin{pmatrix} t = -1, x = a \\ t = 1, x = b \end{pmatrix}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right) \left(\frac{b-a}{2}\right) dt = \left(\frac{b-a}{2}\right) \int_{-1}^1 g(t) dt \text{ ou } g(t) = f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right)$$

I est donc impossible de revenir à l'intérieur $[-1, 1]$ de maniere générale, ou cherche des expressions de la forme:

$$\int_{-1}^1 g(t) dt = \sum_{i=1}^n w_i g(t_i) \begin{pmatrix} w_i : \text{appelés poids} \\ t_i : \text{noeuds ou} \end{pmatrix}$$

Tel que: d° précision le plus élevé possible points d'integration.

Quadrature à 1 point:

$$(2) \int_{-1}^1 g(t) dt \simeq w_1 g(t_1) \text{ exacte pour des polynome de degré le plus élevé possible.}$$

Polynôme de $d^0 = 0$: (2) doit être exacte pour $g(t) = 1$:

$$\int_{-1}^1 dt = 2 = w_1 \Rightarrow \text{l'unique poids } w_1 \text{ est déterminé } w_1 = 2$$

Polynôme de $d^0 = 1$: $g(t) = t$:

$$\int_{-1}^1 t dt = w_1 g(t_1) = w_1 t_1 = 2t_1 \Rightarrow t_1 = 0$$

Donc: la formule de quadrature de Gauss à 1 point s'écrit $\int_{-1}^1 g(t) dt \simeq g(0)$.

Remarque 2.3.1 : La quadrature de Gauss à 1 point ou formule du point milieu à la même précision que la méthode des trapèzes (formule à 2 points).

Quadrature de Gauss à 2 points:

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \simeq w_1 g(t_1) + w_2 g(t_2), (t_1 \neq t_2)$$

$$g(t) = 1, \int_{-1}^1 dt = w_1 + w_2$$

$$g(t) = t, \int_{-1}^1 t dt = w_1 t_1 + w_2 t_2$$

$$g(t) = t^2, \int_{-1}^1 t^2 dt = w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2$$

$$g(t) = t^3, \int_{-1}^1 t^3 dt = w_1 t_1^3 + w_2 t_2^3$$

D'où le système à 4 inconnues et 4 équations:

$$\begin{cases} 2 = w_1 + w_2 \dots\dots\dots (1) \\ 0 = w_1 t_1 + w_2 t_2 \dots\dots (2) \\ \frac{2}{3} = w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2 \dots\dots (3) \\ 0 = w_1 t_1^3 + w_2 t_2^3 \dots\dots (4) \end{cases}$$

Système non linéaire:

$$(2) \times t_1^2 - (4) : w_2 t_2 (t_1^2 - t_2^2) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_2 = 0 \text{ (écarter car si non quadrature à 1 point)} \\ \text{ou} \\ t_2 = 0 \text{ et } (2) \Rightarrow w_1 t_1 = 0 \Rightarrow t_1^2 = t_2^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_1 = t_2 \\ \text{ou} \\ t_1 = -t_2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$t_1 = -t_2; (2) \Rightarrow t_1 (w_1 - w_2) = 0$$

Comme:

$$t_1 \neq 0, w_1 = w_2$$

On:

$$(1) = w_1 + w_2 = 2 \Rightarrow w_1 = w_2 = 1$$

$$(3) \Rightarrow \frac{2}{3} = w_1 t_1^2 + w_1 t_1^2 = 2w_1 t_1^2 = 2t_1^2 \Rightarrow t_1^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow t_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Donc:

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$t_1 = -t_2 = \frac{+\sqrt{3}}{3}$$

Donc quadrature de Gauss à 2 points:

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \simeq g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + g\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$$

d° precision = 3 alors que trapèze (2 points) à un d° = de precision = 1.

Quadrature de Gauss à n points:

Il est possible de déterminer des quadratures de Gauss avec un grand nombre de points, ces quadratures sont efficaces et utilisées dans la méthode des éléments finis:

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \simeq \sum_{i=1}^n w_i g(t_i)$$

On détermine les $2n$ coefficients w_i et t_i en résolvant un système non linéaire de $2n$ équations.

Système qu'on obtient en prenant $g(t) = t^k, k = 0, \dots, 2n - 1$, on a: montrer que les points d'intégrale de Gauss sont les racines des polynômes de Legendre.

On a: vu par exemple que les points d'intégrale de la quadrature de Gauss à 2 points sont $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ et ses points sont les racines du polynôme de Legendre $L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, (Sachant $L_0(x) = 1, L_1(x) = (x)$).

Théorème 2.3.1 *La quadrature de Gauss à n points est exacte pour les polynômes de degré $(2n - 1)$ donc le degré de précision de cette quadrature est $2n - 1$.*

Le terme d'erreur est donnée par:

$$\frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n + 1) ((2n)!)^3} \times f^{(2n)}(\xi), \xi \in [-1, 1]$$

Définition 2.3.2 : La formule $\int_{-1}^1 g(t) dt \simeq \sum_{i=1}^n w_i g(t_i)$, où les w_i et t_i sont données par:

1)- $P_n(t_i) = 0, 1 \leq i \leq n$ où P_n polynôme de Legendre.

$$2)- \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n w_i = 2 \\ \sum_{i=1}^n w_i t_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n w_i t_i^{2n-1} = \frac{2}{2n-1} \\ \sum_{i=1}^n w_i t_i^{2n-1} = 0 \end{array} \right.$$

Est appelée formule de quadrature de Gauss.

Exemple 2.3.1
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \sin \left(\frac{\pi(t+1)}{4} \right) dt$$

Quadrature à 2 points:

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \simeq w_1 g(t_1) + w_2 g(t_2)$$

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$t_1 = -t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sin \left(\frac{\pi(t+1)}{4} \right) dt &\simeq g \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + g \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ &\simeq \sin \left(\frac{\pi \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \right)}{4} \right) + \sin \left(\frac{\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \right)}{4} \right) \\ &\simeq \sin(0, 331948322) + \sin(1, 238848005) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq \frac{\pi}{4} [\sin(0, 331948322) + \sin(1, 238848005)] \simeq 0, 998472614$$

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \simeq w_1 g(t_1) + w_2 g(t_2) + w_3 g(t_3)$$

$$g(t) = t^k, k = 0, 1, \dots, 5$$

$$\int_{-1}^1 \sin \left(\frac{\pi(t+1)}{4} \right) dt \simeq w_1 \sin \left(\frac{\pi(t_1+1)}{4} \right) + w_2 \sin \left(\frac{\pi(t_2+1)}{4} \right) + w_3 \sin \left(\frac{\pi(t_3+1)}{4} \right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq$$

$$\simeq \frac{\pi}{4} [(0,555555556) \sin(0,177031362) + (0,888888889) \sin(0,785398164) +$$

$$(0,555555556) \sin(0,774596669)] \simeq 1,0000081821.$$

Pour obtenir une précision similaire avec la méthode de Simpson, il a fallu utiliser 8 intervalles donc l'évaluation de la fonction.

2.4 Exemples de comparaison entre les méthodes:

Dans ce qui va suivre on va traiter des exemples qui permettront de bien voir la comparaison entre les méthodes.

2.4.1 Comparaison entre la méthode de Gauss et Newton Cotes:

a) $\int_3^5 \frac{dx}{x}$, valeur exacte $\ln \frac{5}{3} = 0.510825545$.

	Ordre de la méthode	Résultats
Méthode de Gauss	3 points	0.510822
	4 points	0.51082555
	5 points	0.51082555
Méthode de Cotes	2 points	0.53
	3 points	0.5111
	4 points	0.510955
	5 points	0.510828
	7 points	0.5108256
	8 points	0.51082558
Méthode Composite	10 points	0.510819
	25 points	0.51082555

Temps de calcul:

méthode de Gauss à 5 points: 23 secondes;

méthode de Cotes à 8 points: 37 seconde ;

méthode Composite à 25 points: 55 secondes.

Les chiffres en caractères gras sont les chiffres exacts.

b) $\int_3^{10} \frac{dx}{x}$, valeur exacte $\ln \frac{10}{3} = 1.203973$.

	Nombre de points	Résultats
Méthode de Gauss	3	1.2029
	4	1.2038
	5	1.203964
	6	1.2039720
	7	1.2039725
	8	1.2039725
Méthode de Cotes	2	1.5
	3	1.22
	4	1.21
	5	1.205
	6	1.2042
	10	1.203974
Méthode Composite	10	1.202
	20	1.20393
	40	1.203971
	103	1.20397277
	163	1.20397280

Temps de calcul:

méthode de Gauss à 7 points: 22 secondes;

méthode de Cotes à 10 points: 30 secondes;

méthode de Composite à 103 points: 210 secondes;

méthode de Composite à 163 points: 240 secondes.

c) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$

	Nombre de points	Résultats
Méthode de Gauss	3	1.85197
	4	1.8519366
	5	1.8519367
Méthode de Côtes	6	1.846
	8	1.8521
Méthode Composite	25	1.8519365

Temps de calcul:

méthode de Gauss à 4 points: 16 secondes;

méthode de Côtes à 8 points: 35 secondes;

méthode de Composite à 25 points: 100 secondes.

d) $\int_{\pi}^{8\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$

La méthode de Côtes donne des résultats totalement erronés. La seconde colonne est calculée en partageant l'intervalle 0.8π en 7 intervalles partiels et en appliquant la méthode de Gauss à chacun d'eux.

	Nombre de points par intervalle partiel	Nombre de points	Résultats
Méthode de Gauss		7	0.32
		10	0.320802
		12	0.32080592
		16	0.32080573
Méthode de Gauss avec 7 intervalles partiels	2		0.32087
	3		0.32080505
	4		0.32080559
Méthode de Composite		50	0.3207
		80	0.320791
		100	0.320799
		120	0.3208029

Temps de calcul:

- méthode de Gauss à 12 points: 37 secondes;
- méthode de Gauss à 7 intervalles partiels: 135 secondes;
- méthode de Gauss à 3 points par intervalle: 135 secondes;
- méthode de Composite à 100 points: 240 secondes;
- méthode de Composite à 120 points: 290 secondes.

La méthode de Cotes ou la méthode composite sont indispensables lorsque la fonction n'est connue que pour des valeurs équidistantes. Dès qu'une méthode de Cotes d'ordre 6 ou 7 ne donne pas une précision suffisante, il faudra employer une méthode composite.

La méthode composite présente de plus l'intérêt de simplifier les calculs, soit manuels, soit en calcul automatique, puisque les points centraux font intervenir $f(x_i)$, par simple addition. La méthode composite est particulièrement efficace lorsque les effets d'extrémités pas (fonction périodique).

La méthode de Gauss généralisée est excellente, mais ne peut être employée que dans les cas cités en appendice, en dehors de ces cas, il faudra utiliser la méthode de Cotes lorsqu'on pourra se limiter à un ordre pas trop élevé ou la méthode composite qui prend alors tout son intérêt.

2.4.2 Comparaison entre les méthodes des Trapèze, point milieu et rectangle:

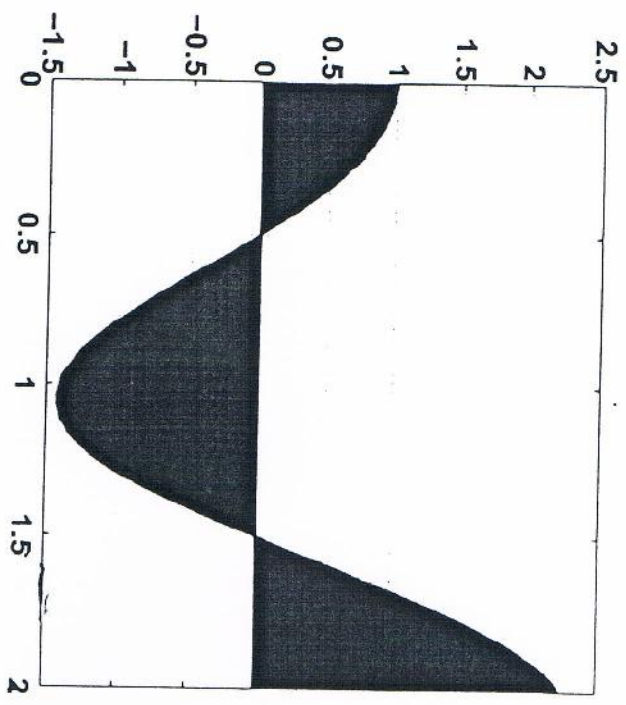
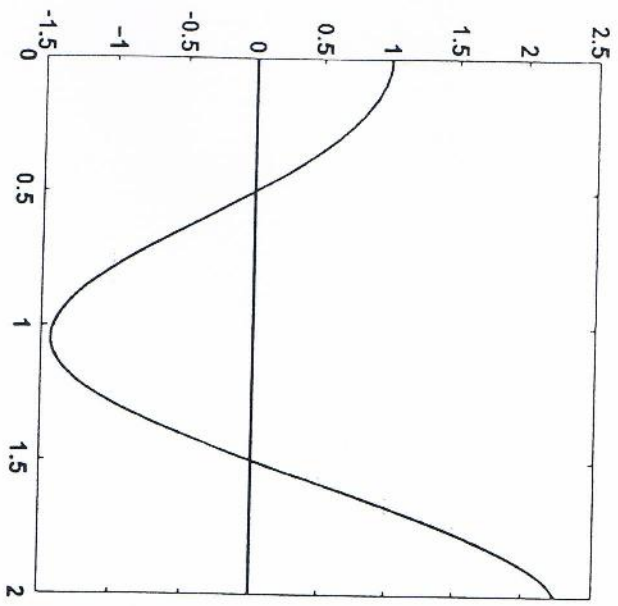
Motivation : Calcul approche d'intégrales

Soit la fonction

$$f(x) = \cos(\pi x) \sqrt{x^2 + 1}$$

Que vaut

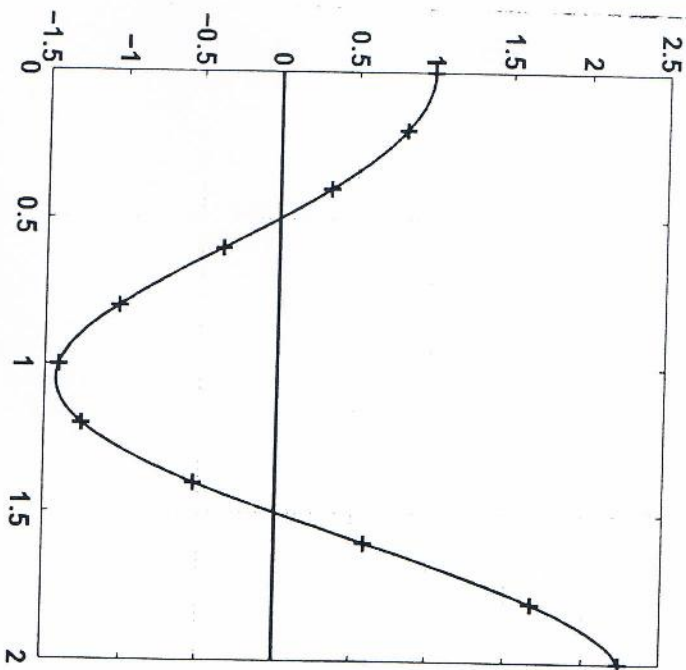
$$I = \int_0^2 f(x) dx \quad ?$$



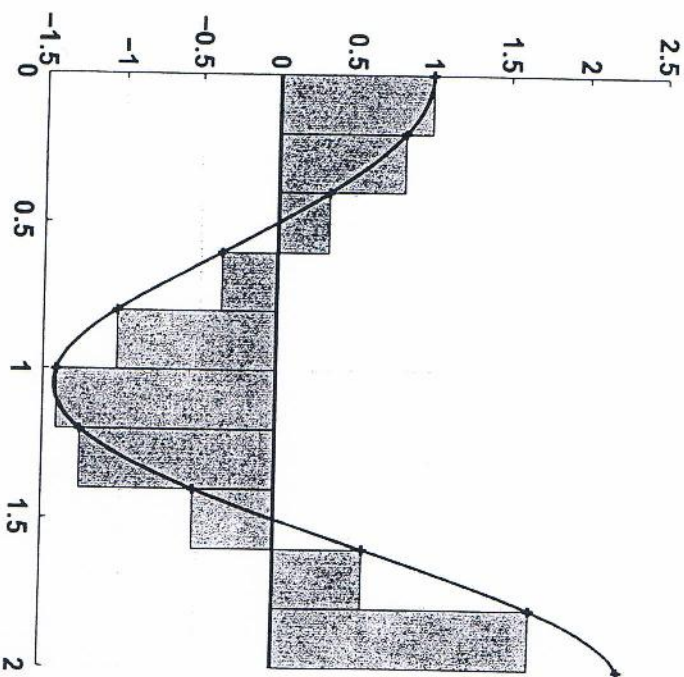
Methodes des rectangles à gauche

Approximation par une fonction constante par morceaux

2.4. Exemples de comparaison entre les méthodes:



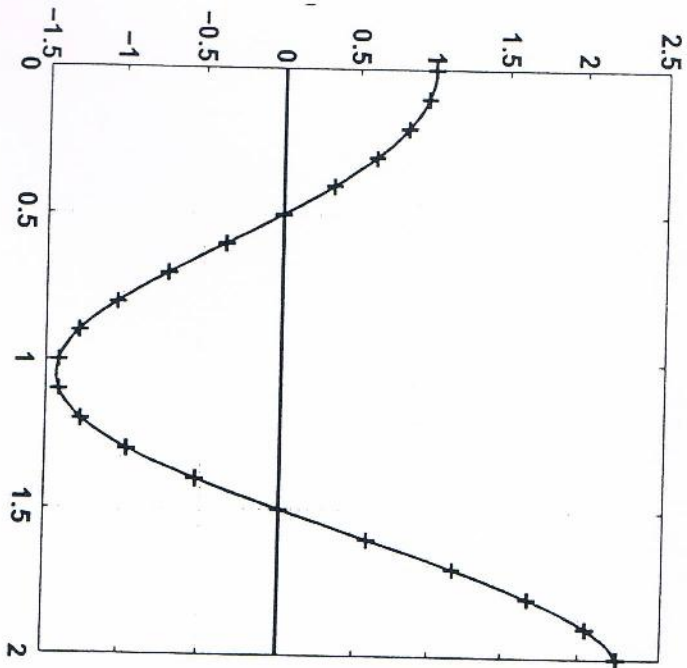
11 points



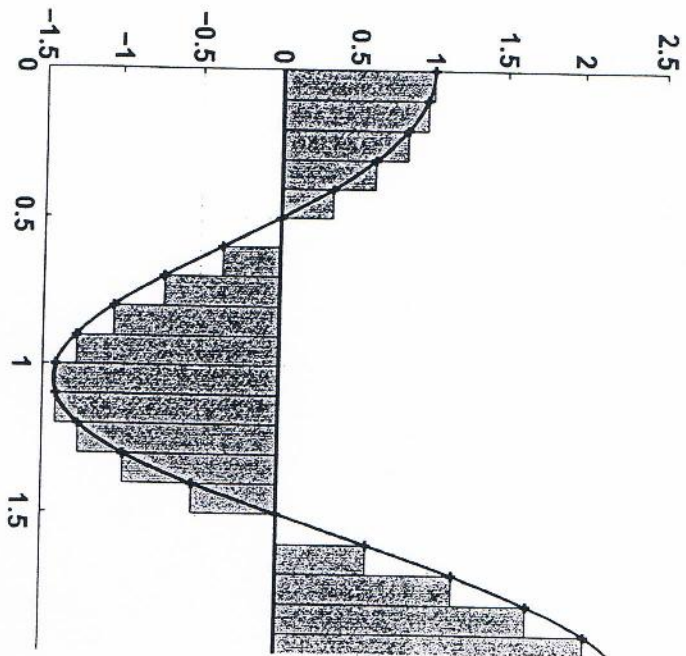
10 subdivisions

Méthodes des rectangles à gauche

Approximation par une fonction constante par morceaux

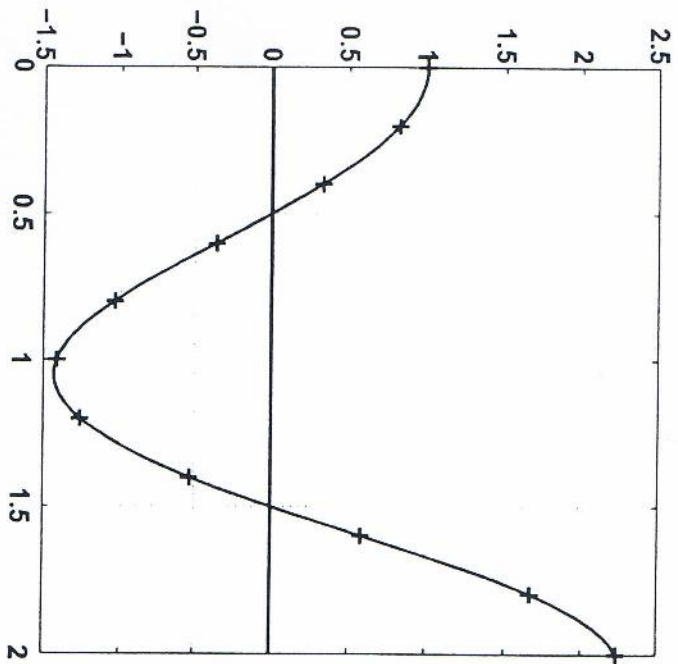


21 points

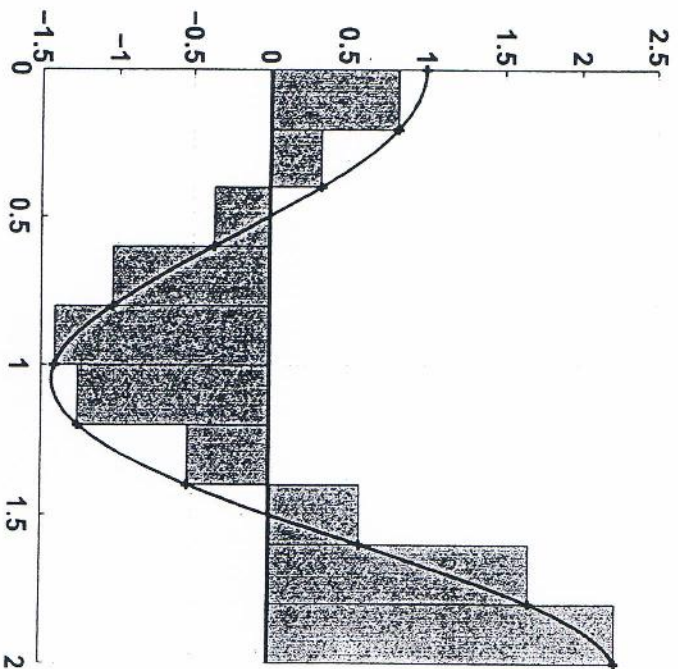


20 subdivisions

Approximation par une fonction constante par morceaux

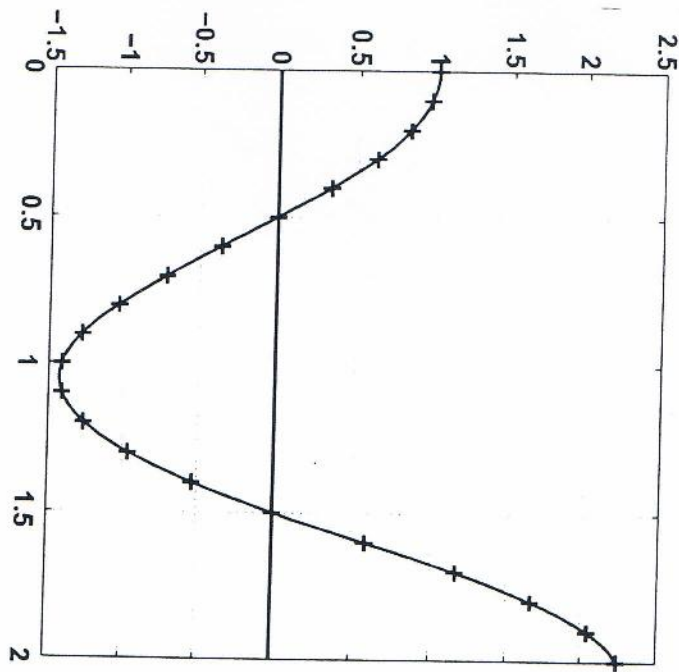


11 points

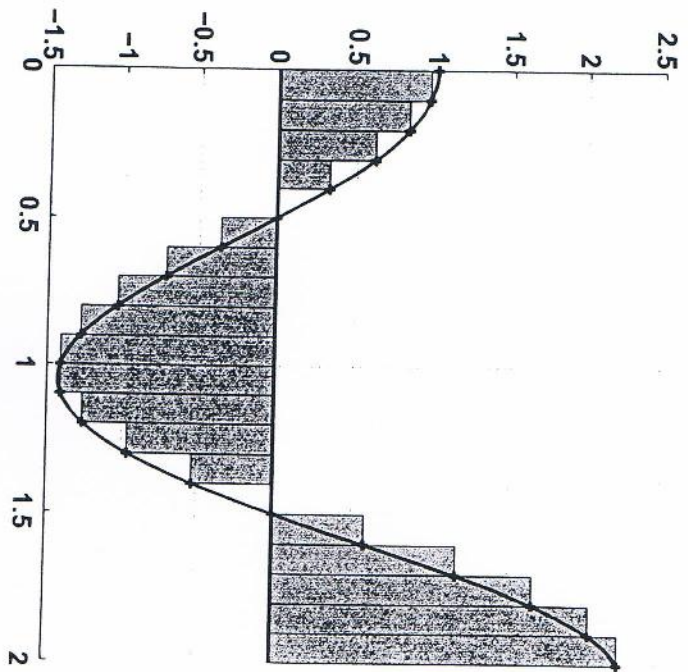


10 subdivisions

Approximation par une fonction constante par morceaux



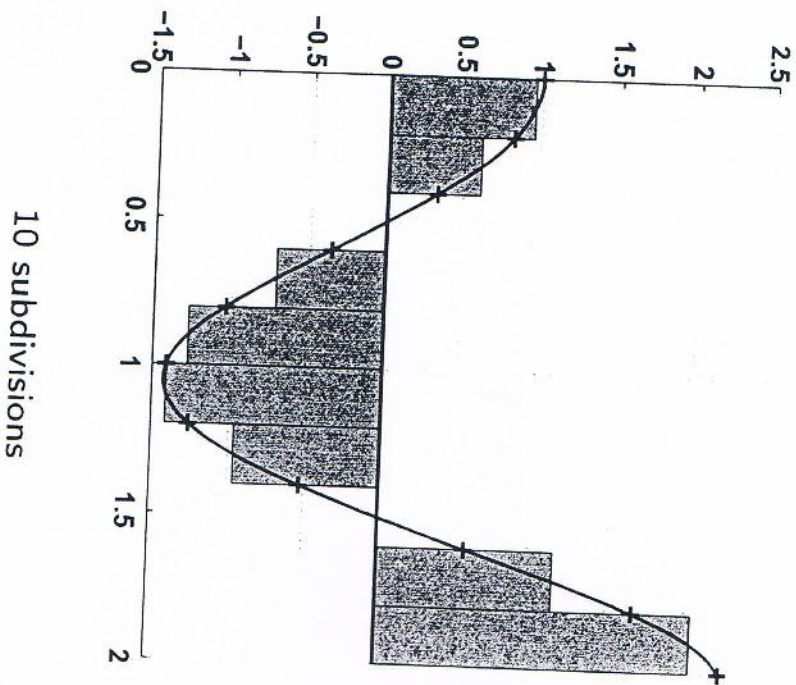
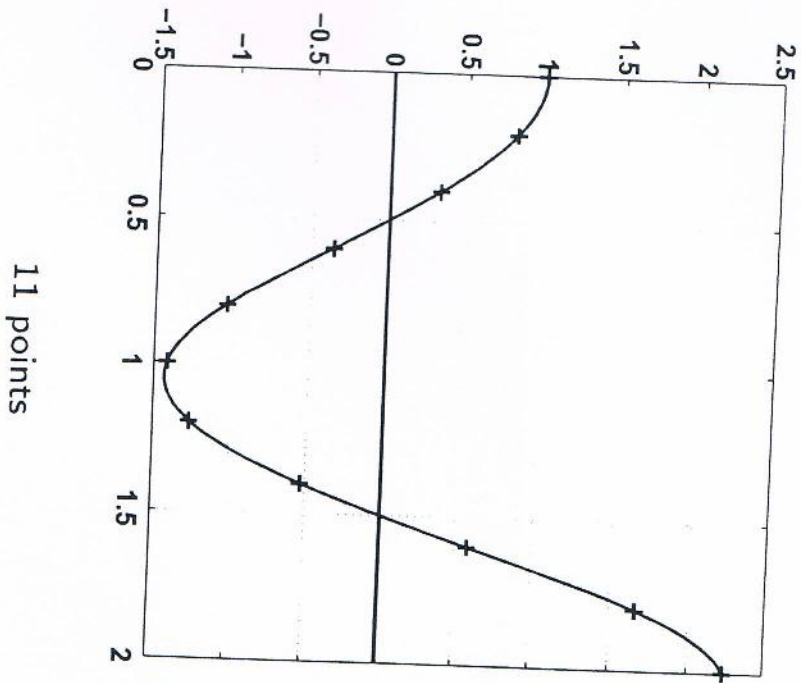
21 points



20 subdivisions

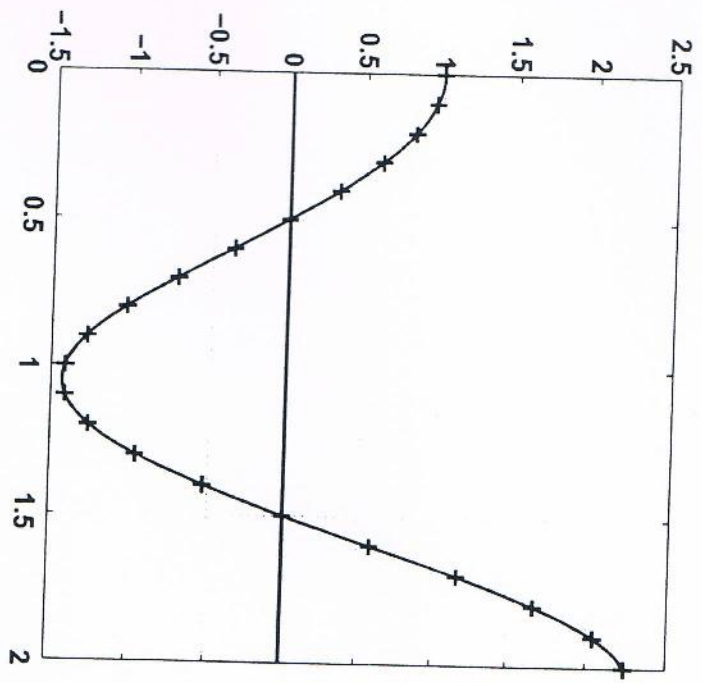
Méthodes des rectangles au point milieu

Approximation par une fonction constante par morceaux

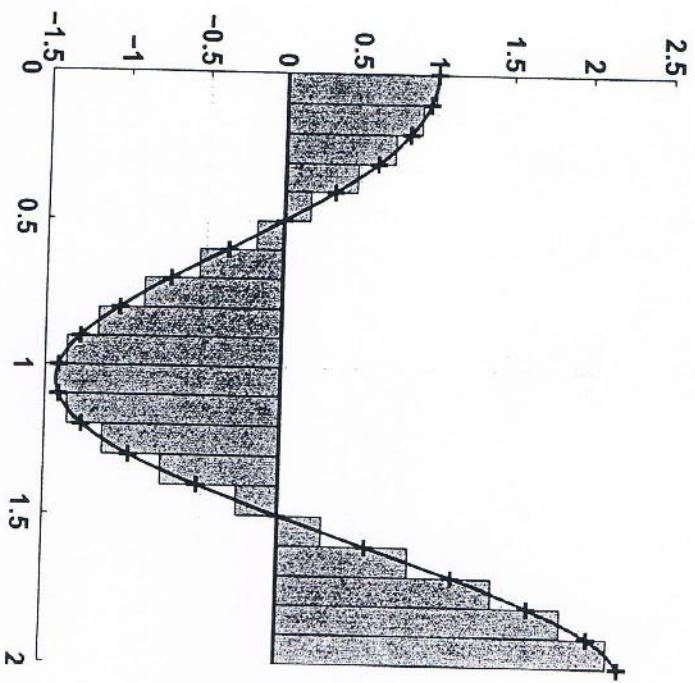


Méthodes des rectangles au point milieu

Approximation par une fonction constante par morceaux



21 points

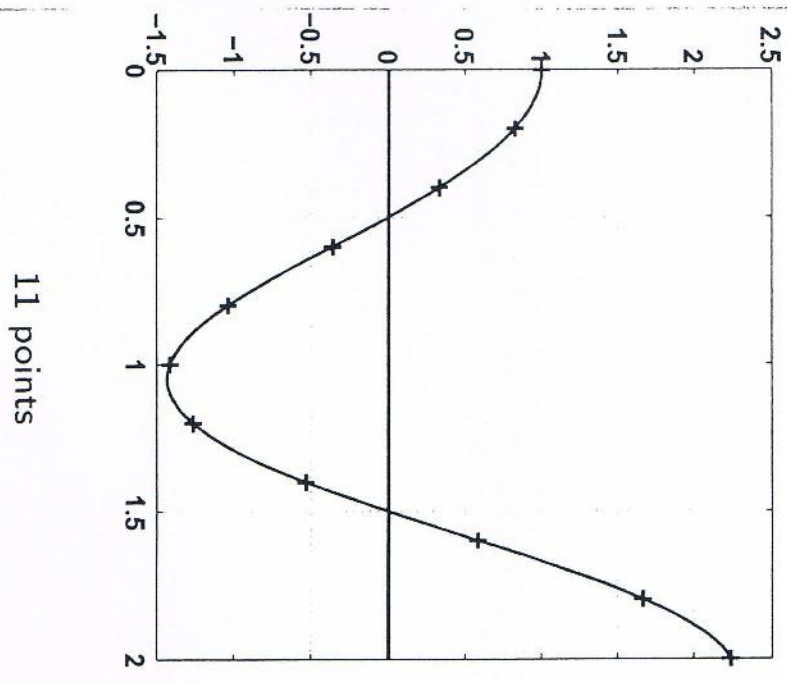


20 subdivisions

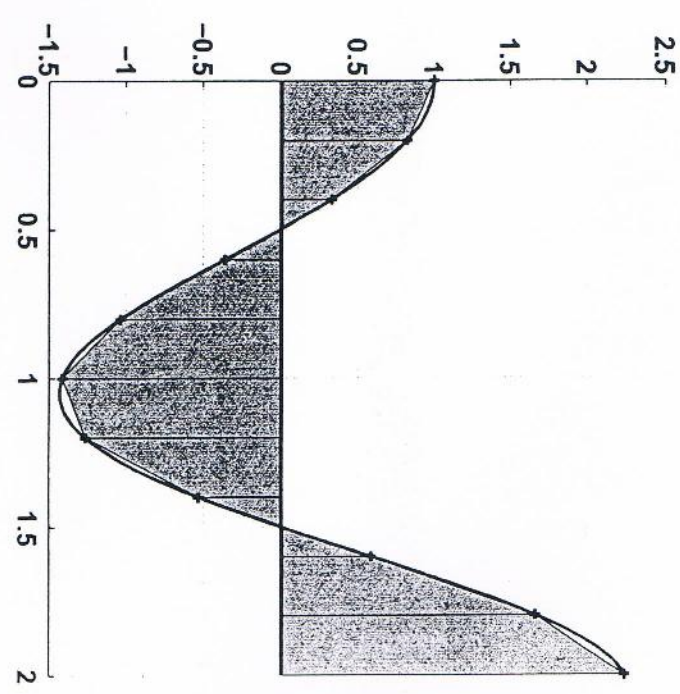
Méthodes des trapèzes

2.4. Exemples de comparaison entre les méthodes:

Approximation par une fonction affine par morceaux



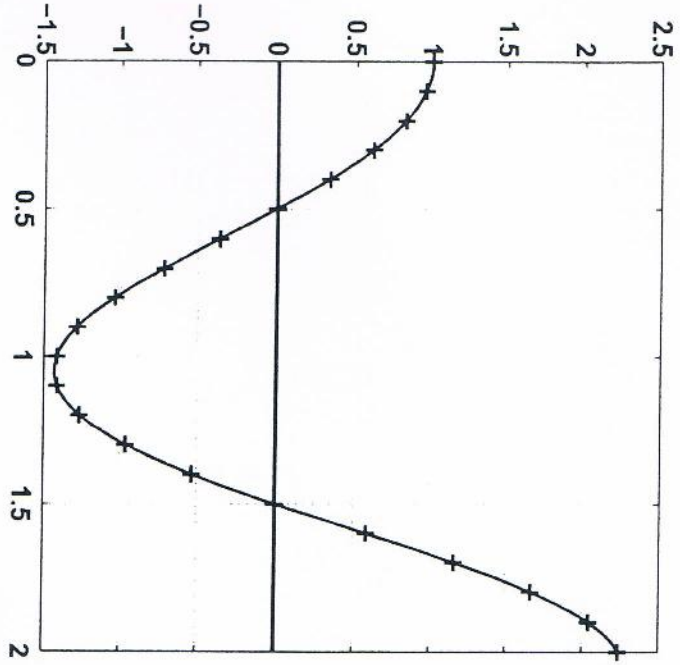
11 points



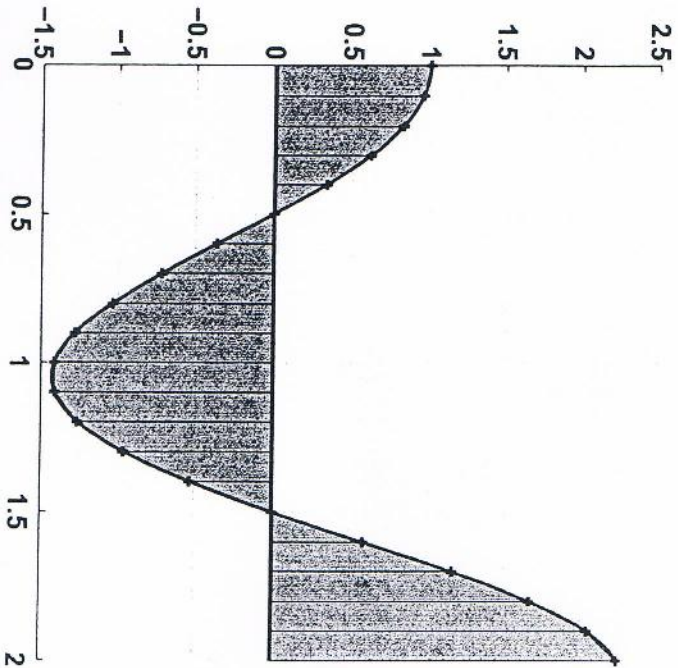
10 subdivisions

Méthodes des trapèzes

Approximation par une fonction affine par morceaux



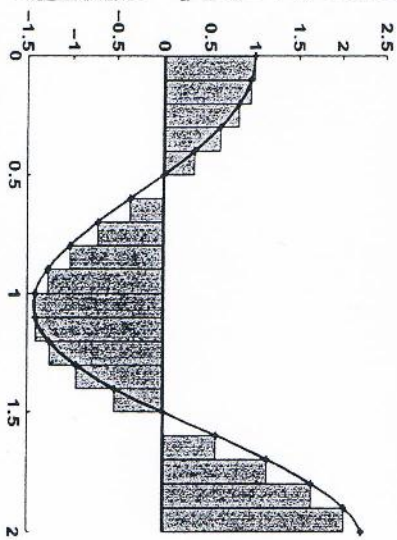
21 points



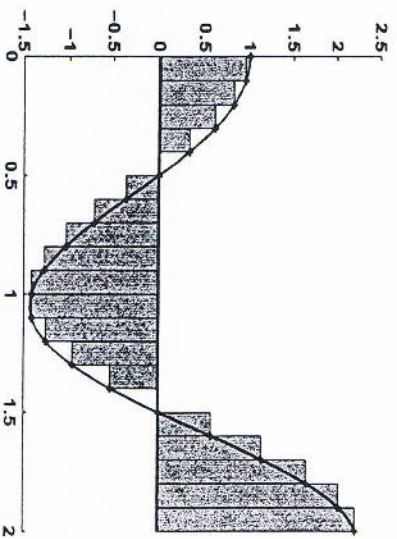
20 subdivisions

Comparaison des méthodes (20 subdivisions)

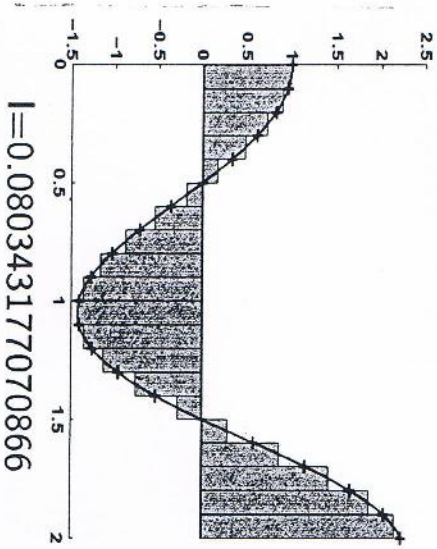
Rectangles à gauche



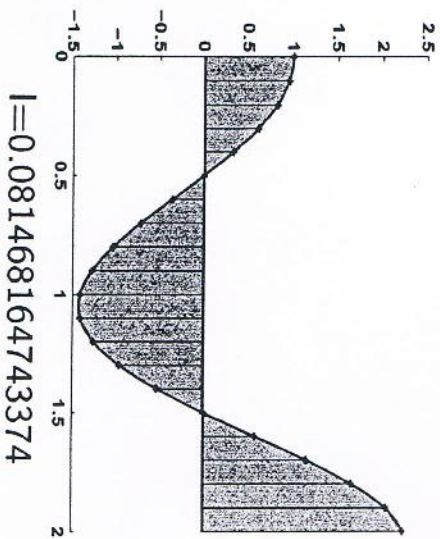
Rectangles à droite



Rectangles au point milieu

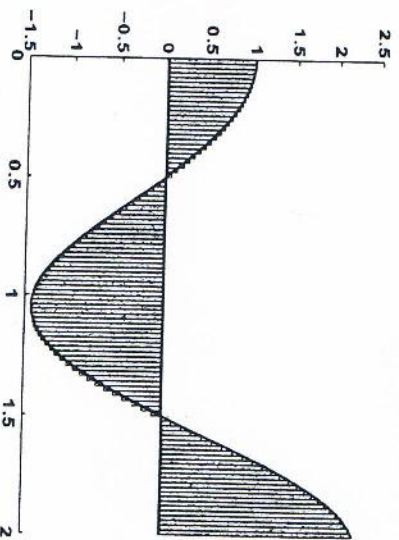


Trapèzes



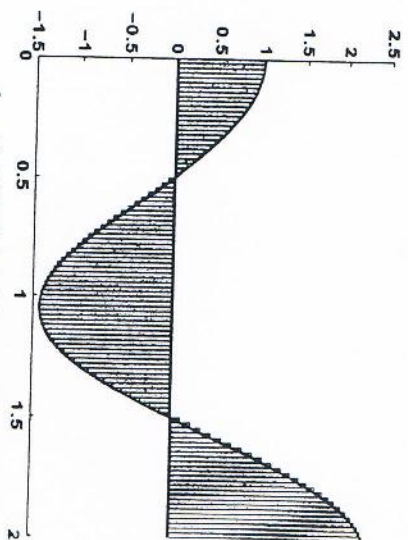
Comparaison des méthodes (100 subdivisions)

Rectangles à gauche



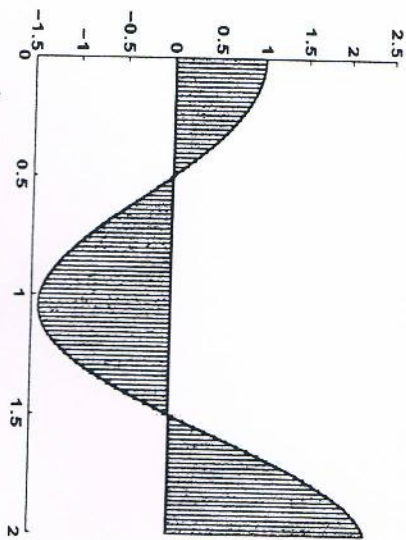
$$I \approx 0.068388241234746$$

Rectangles à droite



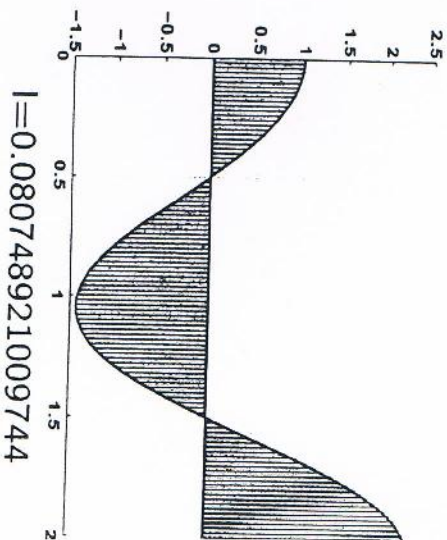
$$I \approx 0.093109600784742$$

Rectangles au point milieu



$$I \approx 0.080704188569061$$

Trapezèzes



$$I \approx 0.080748921009744$$

Chapitre 3

Applications

3.1 Première application:

Afin d'appliquer ce qui précède nous traitons l'exemple suivant:

Une étude de Génie des transports nécessite la détermination du nombre de voitures qui passent par une intersection durant les heures de pointes le matin. Un témoin posté sur le côté de la route compte le nombre de voitures qui passent toutes les quatre minutes à plusieurs instants. Les résultats sont indiqués dans le tableau ci-dessous:

T(Heure courante)	7:30	7:45	8:00	8:15	8:30	8:45	9:00
q(flux de voitures par 4 minutes)	18	24	14	24	21	9	4
q(flux de voitures par 1 minutes)	4.5	6	3.5	6	5.25	2.25	1
t(temps par minutes)	0	15	30	45	60	75	90

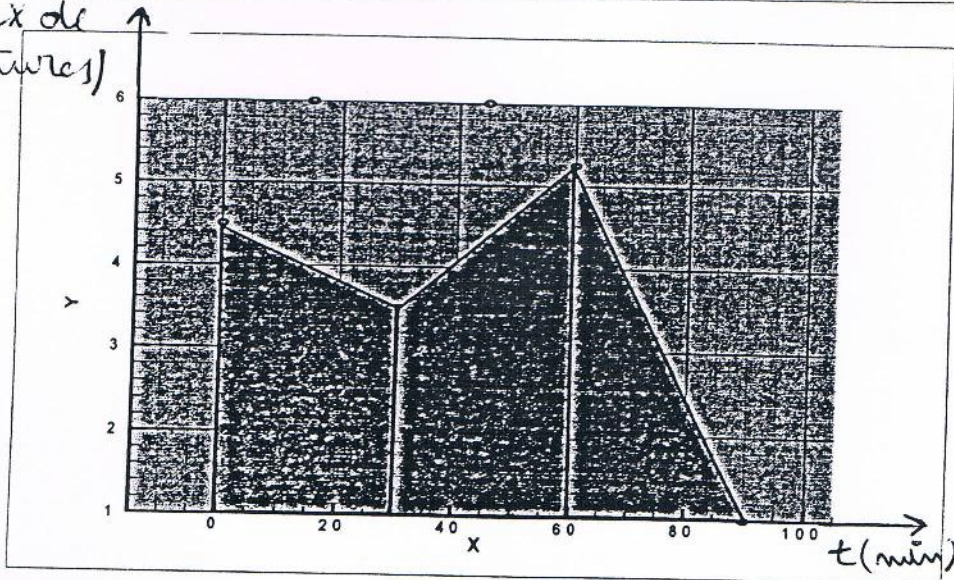
Le nombre N de voitures passant par l'intersection entre $t = a$ et $t = b$ peut être déterminé par la formule $N = \int_a^b q(t) dt$

Afin de déterminer le nombre total de voitures N qui passent entre 7:30 et 9:00 effectuons les étapes suivantes:

(1) Le flux de voitures à travers l'intersection par minute: est donné par la 3^{ème} ligne du tableau.

(2) Utilisons la règle trapézoïdale avec 3 intervalles pour évaluer le nombre N :

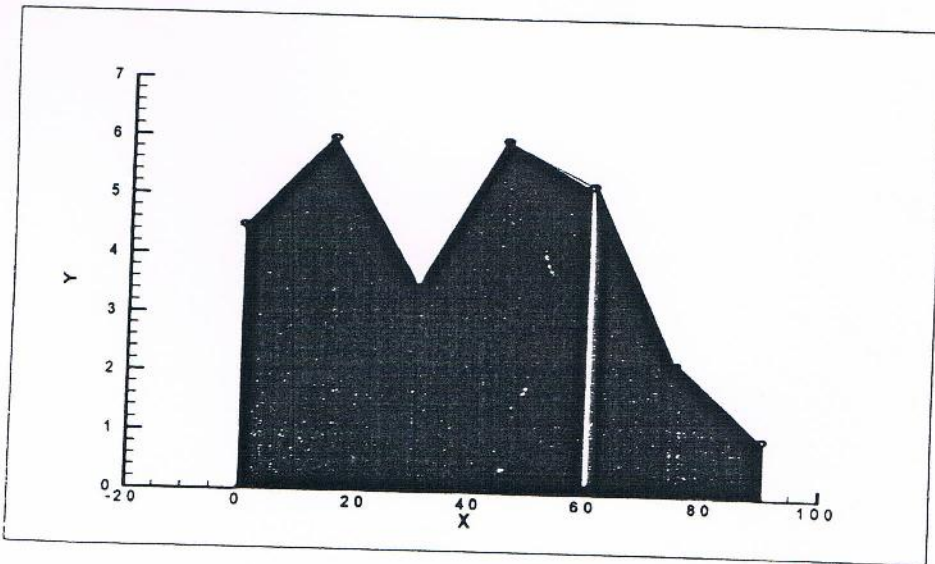
9 (Flux de
voitures)



Suivant la formule:

$$N = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_2) + 2f(x_4) + f(x_6)], \text{ et } h = 30 = x_2 - x_0 \text{ on obtient: } N = 345$$

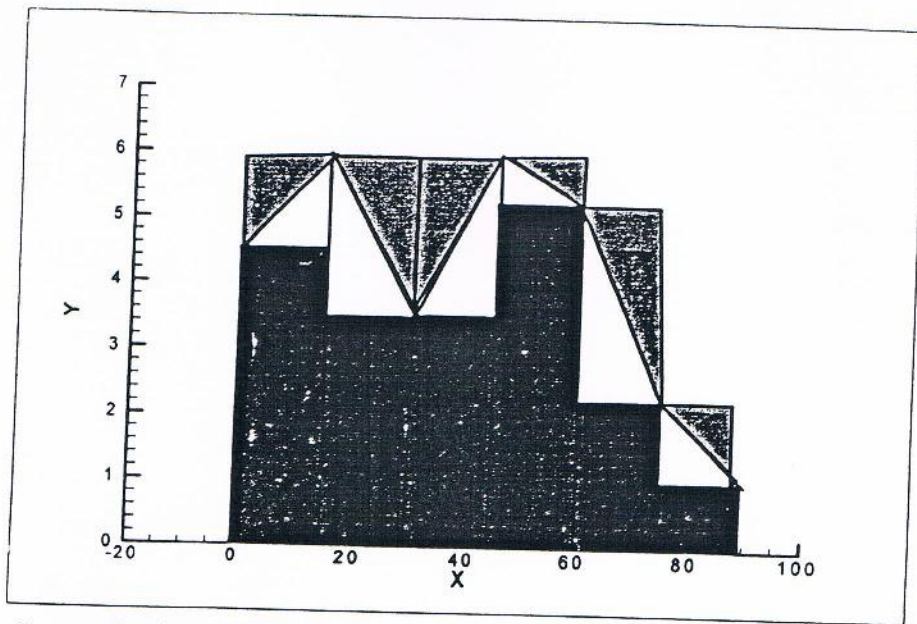
(3) Répétons le processus avec 6 intervalles:



Suivant la formule:

$$N = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)], \text{ et } h = 15 \text{ on obtient: } N = 386.25$$

(4) Evaluons N à l'aide de somme inférieure et de somme supérieure ainsi que la règle du point milieu, en utilisant tout les intervalles:



Suivant la formule de la somme supérieure:

$N = h[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6)]$, et $h = 15$ on obtient:

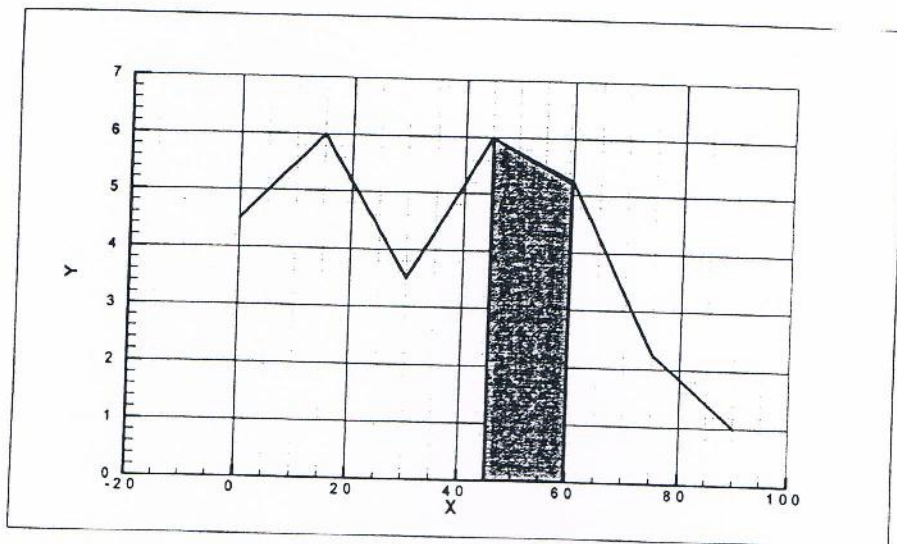
$$N = 360$$

Suivant la formule de la somme inférieure:

$N = h[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)]$, et $h = 15$ on obtient:

$$N = 412.5$$

Et suivant la formule du point milieu:



$N = h [f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)]$, et $h = 30$ on obtient: $N = 690$.

3.2 Deuxième application:

On lance une fusée verticalement du Sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accélération γ :

t (en s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
γ en m/s^2	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.23	46.70	50.67

Calcule la vitesse V de la fusée à l'instant $t=80s$, par la méthode des trapèzes puis par simpson.

1-Calculons I par la méthode des trapèzes. Ici d'après le tableau des valeurs, $h = 10$.

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{h}{2} \left(\gamma(x_0) + \gamma(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \gamma(x_i) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \times 10 (30 + 50.67 + 2 (31.63 + 35.47 + 40.33 + 46.70 + 33.44 + 37.75 + 43.23)) \\
 &= 3089 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

2-Calculons I par la méthode de simpson :

$$\begin{aligned}
 V(80) &= \frac{h}{3} (\gamma(x_0) + \gamma(x_n) + 4(\gamma(x_1) + \gamma(x_3) + \gamma(x_5) + \gamma(x_7)) + 2(\gamma(x_2) + \gamma(x_4) + \gamma(x_6))) \\
 &= \frac{10}{3} (30 + 50.67 + 4(31.63 + 35.47 + 40.33 + 46.70) + 2(33.44 + 37.75 + 43.23)) \\
 &= 3087 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

Remarque 3.2.1 Une autre applications pour l'intégration numérique avec la méthode trapezoidal est le calcul de la surface superficielle d'une coupe transversal d'une racine d'une dent, cette application s'utilise dans le domaine de la chirurgie dentaire, c'est une programmation avec le logiciel Matlab[5].

Bibliographie

Ressources de Livres

- [1] A.Quarteroni & R.sacco, F.Saleri; Méthodes numériques pour le calcul scientifique (programme sur Matlab) collection IRIS (Springer).
- [2] Jean-Pierre DEMAILLY; Analyse Numérique et Equations Differentielles;office des publications universitaires.
- [3] J. LEGRAS; Précis d'Analyse Numérique, dunod PARIS 1963.

Ressources sur internet

- [4] Analyse Numérique-R. TOUZANI
- [5] WWW.iasg.net/iasg Func= fulltext & ald=53240.

Résumé

Les polynômes sont les fonctions les plus faciles à calculer ; tout n'est pas polynômial, mais tout peut être approché, en un sens ou un autre par des polynômes. Nous avons étudié deux classes d'approximations : l'interpolation – vue en chapitre 1 – qui contraint les valeurs des polynômes approchant à coïncider avec celles de la fonction en un nombre fini de points. On va voir que le résultat n'était pas toujours satisfaisant en termes de convergence.

L'approximation de l'intégrale - Chapitre 2 – avec des méthodes tels que celle avec des trapèzes et Simpson et la quadrature de Gauss ; montre avec l'application du chapitre 3 les différentes exactitudes de l'approximation et la rapidité de la convergence de chaque méthode.

Les mots clés : L'intégrale Numérique, Polynôme d'interpolation, Interpolation linéaire, méthode numérique, Polynôme de Lagrange et Newton, Estimations d'erreurs.

Summary

Polynomials are the functions the easiest to calculate; everything is not polynomial, but everything can be approached, in a sense or an other one by polynomials. We studied two great classes of approximation: the interpolation - seen in -chapter 1 - Which forces the values of polynomials approaching to coincide with those of the function in a number finished by points. We saw that the result was not still satisfactory in terms of convergence.

The approximation of the complete - Chapter 2 - with methods such as that with trapezes and Simpson and the quadrature of Gauss; seen with the application of the chapter 3 the various accuracies of the approximation and the speed of the convergence of every method.

Keys words: the numerical integration, the interpolation polynomial, the linear interpolation, Numerical methode, polynome of Lagrange and Newton, error estimation.

الملخص

كل الدوال يمكن تقريبها بطريقة أو بأخرى، لكن كثيرات الحدود تعتبر من أسهل الدوال حساباً. لقد تطرقنا إلى صنفين من التقريب، في الفصل الأول رأينا التقريب بكثير الحدود الذي يتطلب قيم مقربة له لكي تتطابق مع قيم الدالة في عدد منته من النقط. ولاحظنا أن النتيجة ليست دائماً كافية بمعنى التقارب. أما في الفصل الثاني تحدثنا عن التقريب بالتكامل مع بعض الطرق العددية مثل التقريب بشبه المنحرف و سمبسون وتربيعيات غوص، ونبين بالتطبيق في الفصل الثالث إختلافات دقة التقريب وسرعة التقارب لكل طريقة.

الكلمات المفتاحية: التكامل العددي، التقريب بكثير الحدود، التقريب الخطي، الطرق العددية، كثير حدود لاغرانج ونيوتن، تقدير الخطأ.