الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي
كلية العلوم الدقيقة
قسم:الفيزياء

رقم الترتيب:
رقم التسلسل:

مذكرة تخرج مقدمة لنيل شهادة

ماستر أكاديمي

مجال: علوم المادة

تخصص: فيزياء الأشعة

من إعداد: مروة رقيق

الموضوع

توزيع دفوع البوزونات الصلبة في كمون شبكة فائقة أحادية البعد

نوقشت يوم: 03 / 06 /2018

أمام لجنة المناقشة المكونة من الأساتذة

د. ديلمي سامية	أستاذ محاضر أ	رئيسا
د. احميم رشيد	أستاذ محاضر ب	مناقش
أ. زواري أحمد فاطمة	أستاذ مساعد أ	مؤطر

الموسم الجامعي 2017 / 2018

شكر وعرفان

أشكر الله عز وجل الذي وفقني إلى هذا .

يسرني أن أنتهز فرصة هذا العمل المتواضع لأتقدم بعظيم الشكر والإمتنان لمن كان لهم خير البر والإحسانَ "الوالدين الكريمين" الذين كانت دعواتهم ترافقني طوال حياتي .

أشكر جامعة الشهيد حمه لخضر التي ساهمت في تكويني ووصولي إلى هذا المستوي من الدراسة .

مستهلة بتوجيه أسمى وأعمق عبارات الشكر والعرفان إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة جميع أساتذتي الكرام الذين أشرفوا على تكويني طيلة المشوار الجامعي .

أتقدم بعظيم الشكر والتقدير إلى الأستاذة "زواري أحمد فاطمة" التي كانت نعم المشرف بالنسبة لي بتواضعها وتشجيعها المتواصل ونصائحها وتوجيهاتها التي كانت خير سند لي طوال فترة إعداد المذكرة .

أتقدم بجزيل الشكر إلى أعضاء اللجنة الأستاذ احميم رشيد والأستاذة ديلمي سامية على قبولهم مناقشة هذا العمل وجهودهم المبذولة في تقييم هذا البحث .

يطيب لي أن أتقدم بخالص الشكر والتقدير إلى صديقات الدراسة وإلى طلبة سنة ثانية ماستر فيزياء إشعاعية دفعة 2018 .

الإهداء

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين.

أهدي هذا العمل المتواضع

إلى من سهرت في تعليمي وأعانتني بدعائها، نور دربي

أمي الحبيبة.

إلى من أعانني بدعائه وتعب في تعليمي، سندي في الدنيا

أبي الغالي.

إلى إخوتي وأخواتي ، وإلى أولاد الإخوة والأخوات.

فهرس المحتويات

- فهرس الأشكال
- قائمة الرموز
- قائمة المصطلحات
- قائمة الإختصارات

المقدمة العامة 01

الفصل الأول: تبريد الذرات بالليزر

1-1 آلية التبريد بالليزر 04

1-1-1 تبريد دوبلر 05

1-1-1-1 ذرة في حالة راحة 05

1-1-1-2 ذرة في حالة حركة 06

1-1-2 تبريد سيزيف 07

1-1-2-1 ذرة في حالة راحة 07

1-1-2-2 ذرة في حالة حركة 08

1-1-2-3 التموقع الذري 09

1-1-3 التبريد التبخيري 10

1-2 حصر الذرات 11

1-2-1 الحصر المغناطيسي 11

1-3 الشبكات الضوئية 12

الفصل الثاني: البوزونات الصلبة (HCB) في بعد واحد

2-1 غاز تونكس جيرارد (البوزونات الصلبة) في بعد واحد 14

2-2 غاز تونكس-جيرارد في التجارب 15

2-3 نموذج بوز هوبارد 16

2-3-1 الاشتقاق الميكروسكوبي لنموذج بوز هوبارد 16

2-3-2 هاملتون بوز-هوبارد 19

2-3-3 هاملتون بوز-هوبارد للبوزونات الفائقة البرودة 19

2-3-3-1 هاملتون البوزونات الصلبة (HCB) 19

4-2 توافق بوز فرمي..... 20

الفصل الثالث: دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة (HCB)

3-1 مصفوفة كثافة جسيم واحد (**OPDM**)..... 22
3-1-1 حساب العنصر المصفوفي الغير قطري ρ_{ij} لمصفوفة كثافة جسيم واحد..... 22
3-1-2 حساب العنصر القطريρ_{ii} لمصفوفة كثافة جسيم واحد..... 27
3-2 دالة توزيع الدفوع..... 28
3-3 البوزونات الصلبة (**HCB**) في شبكة ضوئية..... 29
3-4 البوزونات الصلبة (**HCB**) في شبكة فائقة..... 30
3-4-1 البوزونات الصلبة (HCB) في كمون توافقي..... 31

الفصل الرابع: النتائج والمناقشة

4-1 مخطط العمل..... 33
4-2 توزيع دفوع البوزونات الصلبة في شبكة ضوئية أحادية البعد..... 34
4-2-1 تغير دالة توزيع الدفوع بدلالة درجة الحرارة..... 34
4-2-1-1 تحليل ومناقشة نتائج توزيع دفوع البوزونات الصلبة بدلالة درجة الحرارة: 35
4-2-2 تغير دالة توزيع الدفوع بدلالة درجة الحرارة والحجم (عدد مواقع الشبكة)..... 36
4-2-3 تغير القيمة العظمى لدالة توزيع الدفوع بدلالة درجة الحرارة..... 38
4-2-4 تحليل ومناقشة نتائج توزيع دفوع البوزونات الصلبة بدلالة درجة الحرارة والحجم..... 38
4-3 توزيع دفوع البوزونات الصلبة في كمون شبكة فائقة..... 39
4-3-1 توزيع دفوع البوزونات الصلبة عند إضافة كمون توافقي..... 39
4-3-1-1- تغير دالة توزيع الدفوع بدلالة عمق الكمون لمختلف درجات الحرارة..... 39
4-3-1-2- تغير دالة توزيع الدفوع بدلالة درجة الحرارة لنفس عمق الكمون..... 41
4-3-1-3 تحليل ومناقشة نتائج توزيع دفوع البوزونات الصلبة عند إضافة كمون توافقي.. 43
4-3-2 توزيع دفوع البوزونات الصلبة عند إضافة كمون جيبي..... 43
4-3-2-1 تغير دالة توزيع الدفوع بدلالة عمق الكمون لمختلف درجات الحرارة..... 43
4-3-2-2 تغير دالة توزيع الدفوع بدلالة درجة الحرارة لنفس عمق الكمون..... 44
4-3-2-3 تحليل ومناقشة نتائج توزيع دفوع البوزونات الصلبة عند إضافة كمون جيبي... 45

4-4 التفسير 45
الخاتمة العامة 46

فهرس الأشكال

ترتيب الشكل	عنوان الشكل	الصفحة
	الفصل الأول	
(1-1)	رسم توضيحي لعملية تبادل الدفع بين الذرة وفوتون الليزر خلال دورة امتصاص وإصدار تلقائي.	04
(2-1)	رسم بياني يوضح القوى المطبقة على الذرة من قبل موجتي ليزر متعاكستين في الإنتشار أثناء عملية تبريد دوبلر بالليزر.	06
(3-1)	رسم تخطيطي يوضح الاستقطابات الخطية المتعامدة في بعد واحد لموجتان متعاكستان من نفس التردد والشدة، ينتشران على طول المحور o_z (a) التردد الدوري لحقل الليزر (b) التغيير المكاني لحالات انزياح الضوء في المستويين الفرعيين المغناطيسيين من الحالة الأساسية	08
(4-1)	رسم تخطيطي يوضح تأثير سيزيف في تكوين الاستقطابات الخطية المتعامدة في بعد واحد.	09
(5-1)	رسم تخطيطي يوضح مبدأ تقنية التبريد التبخري.	10
(6-1)	رسم تخطيطي لمصيدة أيوف.	12
(7-1)	شكل الفخ المغناطيسي الضوئي (MOT) في ثلاثة أبعاد.	12
(8-1)	الغازات الذرية في شبكة ضوئية ثنائية البعد **(2D).**	13
	الفصل الثاني	
(1-2)	توزيع الدفع لغاز تونكس جيرارد وغاز فرمي المثالي	15
(2-2)	الشبكات الضوئية التي تم انشاؤها عن طريق فرض موجات دائمة متعامدة الناتجة في مجموعة أنابيب أحادية البعد	16
	الفصل الثالث	
(1-3)	دالة توزيع الدفوع للبوزونات الصلبة من (a)إلى (c) و للفرميونات الغير متفاعلة من (d)إلى (f) لنظام نصف ممتلئ مع 1000 موقع مشبكي عند مختلف درجات الحرارة	30
	الفصل الرابع	
(1-4)	رسم تخطيطي للبرنامج.	33

(2-4)	دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة لأنظمة نصف ممتلئة مع 50 موقع شبكي عند مختلف درجات الحرارة.	34
(3-4)	دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة لأنظمة نصف ممتلئة مع 100 موقع شبكي عند مختلف درجات الحرارة.	35
(4-4)	دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة لأنظمة نصف ممتلئة. عند T=8t، وذلك مع مختلف عدد المواقع الشبكية.	36
(5-4)	دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة لأنظمة نصف ممتلئة. عند T=2t، وذلك مع مختلف عدد المواقع الشبكية.	36
(6-4)	دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة لأنظمة نصف ممتلئة. عند T=0.8t، وذلك مع مختلف عدد المواقع الشبكية.	37
(7-4)	دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة لأنظمة نصف ممتلئة. عند T=0.1t،وذلك مع مختلف عدد المواقع الشبكية.	37
(8-4)	دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة عند k=0 بدلالة درجة الحرارة لأنظمة نصف ممتلئة مع مختلف عدد الموقع الشبكية	38
(9-4)	دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة في كمون توافقي لأنظمة نصف ممتلئة عند درجة الحرارة T=0.1tمع 100 موقع شبكي.	39
(10-4)	توزيع دفوع البوزونات الصلبة في كمون توافقي لنظام نصف ممتلئ عند درجات الحرارة T=1t مع 100 موقع شبكي.	40
(11-4)	يمثل منحنيات توزيع دفوع البوزونات الصلبة في كمون توافقي لنظام نصف ممتلئ عند درجة الحرارة T=8tمع 100 موقع شبكي.	40
(12-4)	توزيع دفوع البوزونات الصلبة في كمون توافقي $v=0.01t$لنظام نصف ممتلئ عند مختلف درجات الحرارة مع 100 موقع شبكي.	41
(13-4)	توزيع دفوع البوزونات الصلبة في كمون توافقي $v=0.2t$ لنظام نصف ممتلئ عند مختلف درجات الحرارة مع 100 موقع شبكي.	42
(14-4)	توزيع دفوع البوزونات الصلبة في كمون توافقي $v=0.8t$لنظام نصف ممتلئ عند مختلف درجات الحرارة مع 100 موقع شبكي.	42
(15-4)	يمثل دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة بتطبيق كمون جيبي عند درجة الحرارة T=1t مع 100 موقع شبكي لنظام نصف ممتلئ.	43
(16-4)	يمثل دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة بتطبيق كمون جيبي عند درجة الحرارة T=8t مع 100 موقع شبكي لأنظمة نصف ممتلئة.	44

(17-4) دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة بتطبيق كمون جيبي v=1t مع 100 44
موقع شبكي عند مختلف درجات الحرارة لأنظمة نصف ممتلئة.

قائمة الرموز

H	الهاملتون
t	طاقة الانتقال (القفز)
$b_i^\dagger$	مؤثر الإنشاء البوزوني في الموقع i
b_j	مؤثر الإفناء البوزوني من الموقع j
U	طاقة التفاعل بين الجسيمات
n_i	مؤثر العدد $[n_i = b_i^\dagger b_j]$
V_2	عمق الكمون
x_i^2	شكل دالة الكمون
h. c.	مرافق $b_i^\dagger b_j$ ويعطى بالعلاقة $b_i b_j^\dagger$
$f_i^\dagger$	مؤثر الإنشاء الفرميوني في الموقع i
f_i	مؤثر الإفناء الفرميوني في الموقع i
n_i^b	مؤثر الكثافة الموضعي للبوزونات
n_i^f	مؤثر عدد الجسيمات الموضعي للفرميونات
ρ_{ij}	عنصر مصفوفة كثافة جسيم واحد
μ	الكمون الكيميائي
K_B	ثابت بولتزمان $[1.380 \times 10^{-23} J/K = 8.617 \times 10^{-5} eV/K]$
T	درجة الحرارة
Z	دالة التوزيع
N_b	عدد البوزونات
N_f	عدد الفرميونات
ρ	مؤثر الكثافة
N	عدد الجسيمات في النظام
N_0	عدد الجسيمات بالمستوي الأرضي
L	عدد المواقع الشبكية
n_k	دالة توزيع الدفوع
$\tilde{\rho}$	مميز الكثافة
ζ	مقياس طول الفخ
N_b	عدد البوزونات الصلبة
ħ	ثابت بلانك المخفض $[1.054 \times 10^{-34} J.s = 6.582 \times 10^{-16} eV.s]$
ω	تواتر الموجة
λ	الطول الموجي

α	ثابت الشبكة
ξ	مدى الترابط
k	العدد الموجي
P	الدفع الخطي
$\vec{E}$	الحقل الكهربائي
$\vec{B}$	الحقل المغناطيسي
$\vec{\mu}$	العزم المغناطيسي
$\vec{K}$	شعاع الموجة
U	الطاقة الكامنة
β	معامل بولتزمان $[\beta = 1/K_B T]$
m_z	عدد الكم المغناطيسي.
J_g	الدفع الزاوي للحالة g.
J_e	الدفع الزاوي للحالة e.
$\|g\rangle$	شعاع الحالة الأساسية.
$\|e\rangle$	شعاع الحالة المثارة.
σ^+	الاستقطاب الدائري عكس عقارب الساعة
σ^-	الاستقطاب الدائري مع عقارب الساعة
E_R	طاقة الارتداد
v	سرعة الذرة
ω_L	تردد الليزر
ω_A	تردد الرنين الذري
δ	إنزياح الليزر
Ω	تردد رابي (Rabi Frequency)
α	معامل التثبيط
Γ	معدل الانحلال للحالة المثارة
Γ^{-1}	مدة الحياة للحالة المثارة
$\vec{F}$	قوة دوبلر
$F(v)$	القوة الإشعاعية المتعلقة بالسرعة
F_0	القوة الإشعاعية المستقلة عن السرعة
$-\alpha v$	قوة الاحتكاك
τ	زمن التثبيط
w_D	فعل دوبلر(حيث $w_D = k_L . v$)

l	الدفع الزاوي المداري
c	سرعة الضوء
$\vec{\nabla}$	شعاع التدرج
P_R	دفع ارتداد ذرة
δP	مجال تغير الدفع
g_{1D}	مؤثر قوة التفاعل في بعد واحد
$\psi_B(x_1, \cdots x_N,)$	دالة موجة أجسام كثيرة لغاز من البوزونات
$S(x_1, \cdots x_N)$	دالة تخطيط تونكس-جيرارد
$\psi_F(x_1, \cdots x_N)$	دالة موجة أجسام كثيرة لغاز من الفرميونات
$\rho_B(x, y)$	مصفوفة كثافة جسيم واحد.
m	كتلة الجسيم.

قائمة المصطلحات العلمية

Quantum gases	الغازات الكمية
Momentum distribution	توزيع الدفع
Hard Core Bosons	البوزونات الصلبة
Bose Hubbard Model	نموذج بوز هوبارد
Finite Temperature	درجة الحرارة المنتهية
Ultracold	فائق البرودة
Optical Lattices	الشبكات الضوئية
Lattice site	موقع شبكي
Superlattice	الشبكة الفائقة
Potential	الكمون
Cold Atomes	الذرات الباردة
Laser Cooling	التبريد بالليزر
Spinless fermions	فرميونات عديمة اللف
Non-interacting	غير متفاعلة
Hamiltonian	مؤثر الطاقة
Jordan-Wigner Transformation	تحويل جوردن-فيغنر
Creation operator	مؤثر الإنشاء
Annihilation operator	مؤثر الإفناء
Local density operator	مؤثر الكثافة الموضعي
Commute	التبادل
Anticommute	ضد التبادل
Momentum space	فضاء الدفع
Hopping parameter	وسيط القفز
Harmonic trap	حصر توافقي
Properties	خصائص
Grand-Canonical Ensemble	المجموعة القانونية الكبرى
Boundary conditions	الشروط الحدية
Additional constraints	القيود الإضافية
One-Particle Density Matrix	مصفوفة كثافة جسيم واحد
Open systems	أنظمة مفتوحة
Bose gas	غاز بوز
Tonks-Girardeau gas	غاز تونكس جيرارد
Ground state	الحالة الأساسية
Chemical potential	الكمون الكيميائي

Partition function	دالة التوزيع
Off-diagonal	غير قطري
Fermionic system	نظام فرميوني
Optical pumping	الضخ الضوئي
Doppler Cooling	تبريد دوبلر
Sisyphus Cooling	تبريد سيزيف
Evaporative Cooling	التبريد تبخيري
Trace	الأثر
Eigenvalues	القيم الذاتية
Eigenvectors	الأشعة الذاتية
Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Orthogonal matrix	مصفوفة متعامدة
Diagonalizing matrix	تقطير مصفوفة
Diagonal elements	العناصر القطرية
Correlation length	مدى الترابط
Resonant	الرنين
Quasi-resonant	شبه الرنين
Fourier Transformation	تحويل فوري
Brillouin zone	منطقة بريلوان
Green function	دالة قريين
Vector sum	المجموع الشعاعي
Doppler shift	انزياح دوبلر
Zeeman shift	انزياح زيمان
Linear Polarization	استقطاب خطي
Plane Polarization	استقطاب مستو
Trap atom	حصر ذرة
Optical Molasses	الدبس الضوئي
Detuning	الانزياح
Mapping	التمثيل
Pauli exclusion principle	مبدأ الاستبعاد لباولي
Field operator	مؤثر الحقل
Finite size effect	فعل الحجم المحدود

قائمة الاختصارات

HCB	Hard-Core Bosons
BH	Bose-Hubbard
TG	Tonks-Girardeau
FT	Finite-Temperature
HT	Harmonic Trap
SF	Superfluid
MI	Mott Insulator
FF	Free Fermionic
OL	Optical Lattice
SL	Superlattice
MF	Main-Field
GCE	Grand-Canonical Ensemble
BEC	Bose-Einstein Condensate
BG	Bose Gas
JWT	Jordan-Wigner Transformation
OF	Off-Diagonal
HF	Half-Filled
QR	Quasi-Resonant
LC	Laser Cooling
OET	Optical Earnshaw Theorem
OM	Optical Molasses
TOF	Time-Of-Flight
MOT	Magneto-Optical Trap
VSCPT	Velosity Selective Coherent Population Trapping
NO	Natural Orbitals
OPDM	One-Particle Density Matrix
BZ	Brillouin Zone
AMO	Atomic, Molecular and Optical
HO	Harmonic Oscillator
QMC	Quantum Monte Carlo

المقدمة العامة

كان التعامل مع ذرات أو جزيئات مفردة ومعالجتها حلما راود الباحثين الفيزيائيين كثيرا وقد كان مهمة لا يمكن تصورها، نظرا لأهميتها في رفع دقة البحوث العلمية والتقنية الجديدة فيما يسمى بالنانوتكنولوجي، وكدا الوصول لطور تكاثف بوز-أينشتاين المتوقع من قبل أينشتاين سنة 1924م، والذي يمثل طورا غامضا للمادة أين تميل كل جسيمات النظام للتواجد بالمستوي الكمومي الأساسي مشكلة ما يعرف بطور الميوعة الفائقة [1، 2]. ومع ذلك، كانت الفيزياء الذرية، الجزيئية والضوئية (AMO) قادرة على التغلب على كل العقبات التكنولوجية والنظرية التي كانت تواجه هذا التطلع [1]. حيث كانت الخطوة الأهم للتعامل مع الذرات هي تبريدها إلى درجات حرارة قريبة من الصفر المطلق (0°K) وذلك باستخدام تقنية التبريد بالليزر، والتي أقترحت من طرف العالم ألفرد كاستلر سنة 1950م [1، 3]. تقوم هذه التقنية على مبدأ امتصاص الذرة لإشعاع الليزر وعندها تصبح في حالة مثارة، ولكي تعود إلى حالتها الأساسية تصدر الذرة فوتون له طاقة اكبر قليلا من طاقة الفوتون الممتص، وبما إن الطاقة الكلية محفوظة فالفرق في طاقة الفوتون ينتزع من حركة الذرات فتتباطأ [4-7]. وبذلك أصبح ضوء الليزر أداة متعددة الاستعمالات لمراقبة ومعالجة الذرات بشكل مفرد. حيث يمكن لضوء الليزر أن يبرد الذرات أو حتى يمكنه محاصرتها [1، 8].

أولا، تم تحقيق محاصرة أيونات مفردة، كخطوة ثانية تمكن الباحثون في مجال التبريد بالليزر من تبريد الذرات المحايدة لدرجات حرارة منخفضة جدا. في أبسط أشكال التبريد بالليزر نجد تبريد دوبلر، حيث تفضل الذرات إمتصاص الفوتونات المنزاحة نحوى الأحمر من ترددها الذري، والمنتشرة في الفضاء عكس إتجاهها، ثم إعادة إصدارها بإجراء الانبعاث التلقائي للفوتونات في اتجاهات عشوائية مما يؤدي إلى كبح الذرة، وبالتالي تبريدها. لكن هذا القدر من التبريد لم يكن كافيا للحصول على تكاثف بوز أينشتاين. وخلال محاولات تخفيض درجة حرارة الذرات، إبتكر الباحثون طرق جديدة مطورة لمواصلة التبريد إلى حد أدنى من حد دوبلر. مثل التبريد المتدرج الاستقطاب (تبريد سيزيف) أو الحصر المتماسك الانتقائي السرعة (VSCPT) حيث تمكنوا من تبريد أنواع معينة من الذرات إلى درجات حرارة تصل إلى النانوكلفن [1، 9]. حيث من أجل التبريد ومحاصرة الذرات والأيونات بضوء الليزر منحت جائزة نوبل في عام 1997 لكلود كوهين تانودجي (Claude Cohen-Tannoudji)، ستفين تشو (Steven Chu) وويليام فيليبس (William Phillips) [1، 5].

مع هذا المستوي العالي من السيطرة والتعامل مع الذرات المفردة والجزيئات المفردة، كانت الخطوة التالية هي تحقيق ظاهرة تكثف بوز اينشتاين [1، 2، 10] حيث أدرك كل من بوز واينشتاين أن جزء ماكروسكوبي من البوزونات يتم تبريده إلى درجات حرارة منخفضة للغاية حيث تشغل كل البوزونات نفس الحالة الكمومية الأساسية. وفي عام 1995، تم تحقيق تكثف بوز اينشتاين (BEC) تجريبيا وذلك مع طريقة جديدة وهي التبريد التبخيري [1، 2]. وقد فتح هذا المجال لتحقيق ما يعرف بالليزر الذري حيث جل الذرات لها نفس الطول الموجي وتنتشر في نفس الإتجاه [1، 2، 11]. التقدم الحديث في دراسة ظاهرة تكثف بوز اينشتاين مكن من تكثيف البوزونات مع سبين غير معدوم مثل ذرات ^{23}Na و ^{87}Rb وذلك بحصرها بواسطة الحصر المغناطيسي [1، 4، 9، 12]

في السنوات الأخيرة أصبح مجال دراسة الغازات الكمية فائقة البرودة المحملة على شبكات ضوئية نشط جدا سواء في البحث النظري أو التجريبي نظرا لمحاكاة هذه الشبكات الضوئية المحملة بالذرات الباردة والتي تهتز فقط حول وضع توازن أسفل البئر الكمومي الضوئي، للأنظمة الكثيفة وكذا سهولة التعامل معها في تحديد خصائص المادة مع قدرة الفصل بين التفاعلات المعقدة التي تعتبر عائقا في سبيل دقة دراسة المادة الكثيفة [3، 13-15]

إن تجارب الفيزياء الذرية مع غازات بوز وفرمي الكمية المنحلة تتميز بالصفات التالية: أولا فهم ماكروسكوبي مفصل لهاملتون الأنظمة، ثانيا السيطرة الكاملة على العوامل المتغيرة في النظام عبر الحقول الخارجية، على وجه الخصوص يمكن محاصرة الذرات والسيطرة على حركتها بواسطة الحصر المغناطيسي والضوئي مما يسمح على سبيل المثال بتحقيق الغازات الكمية ذات الأبعاد المختلفة عند درجة حرارة الصفر المطلق. بالإضافة إلى أن الذرات تحتوي على العديد من الحالات الذاتية التي يمكن التعامل معها باستخدام ضوء الليزر والذي يمكن استخدامه لتحقيق خصائص ذرات الغاز وخصائص تصادماتها [8]

عند تبريد غاز من البوزونات أحادية البعد إلى درجات حرارة منخفضة جدا مع كثافات منخفضة جدا ومع إختيار عمق الكمون الدوري -الذي يحاصر البوزونات- أقل من طاقة التفاعل بين البوزونات ذاتها. فان البوزونات ستتصرف كغاز من جسيمات غير قابلة للاختراق، أي أن كل بوزون سيحتل بئرا كموميا خاصا به ويطرد باقي البوزونات منه، وبالتالي ستتصرف البوزونات وكأنها فرميونات، تعرف هذه البوزونات بالبوزونات الصلبة (Hard Core Bosons) اختصارا نرمز لها ب- HCB's [13، 16، 17].أو ما يسمى ببوزونات تونكس [17، 18]. حيث تتميز هذه البوزونات بوجود تفاعل لانهائي قيما بينها [13، 19]. هذا الغاز الأحادي البعد يسمى حديثا بغاز تونكس جيرارد (Tonks-Girardeau) والذي قدمه جيرارد (Girardeau)، مؤسس التمثيل الدقيق بين هذه البوزونات قوية التفاعل وفرميونات عديمة اللف غير متفاعلة [13].

حتى الآن، ترتكز التجارب في الغالب على الذرات المتفاعلة بقوة في أدنى مدار طاقي في الشبكة الضوئية [15]. كما أن الشبكات أحادية البعد تسهل تحقيق نظام البوزونات الصلبة، وكذا يطرح نظام البعد الواحد إختلافات كثيرة عن نظام ثلاثي الأبعاد [13]. عند درجات الحرارة المنخفضة خلافا للنظام البوزوني ثلاثي الأبعاد، حيث يكون تكثف بوز أينشتاين النظامي، يحدث شبه تكثف للبوزونات الصلبة إذ أن عدد البوزونات التي تشغل المستوي الأساسي متناسبة مع $\sqrt{N_b}$ (N_b العدد الكلي للبوزونات الصلبة في النظام) [13]، ولدراسة خصائص البوزونات الصلبة بدقة و الواقعة في شبكات ضوئية عند درجات الحرارة المنتهية نستعمل نموذج بوز هوبارد الذي يستخدم لدراسة الأنظمة الكمية الكثيفة، والذي يتوقع حالة الانتقال من طور الميوعة الفائقة SF إلى طور عازل موت MI عند درجات الحرارة المنخفضة مع زيادة نسبة التفاعل U في نفس الموقع (بفضل تنافر الذرات) بالقياس إلى عنصر مصفوفة القفز t –قفز الذرات بين مواقع الشبكة- في حالة الشبكات الضوئية، حيث أن هذه النسبة يمكن أن تتغير بتغير شدة الليزر [20]

فما هي البوزونات الصلبة ؟ و كيف تتوزع في الشبكات الفائقة عند درجات الحرارة المنتهية ؟ وما هو تأثير أشكال وأعماق الكمونات المختلفة على دالة توزيع الدفوع لهذه البوزونات في شبكات ضوئية أحادية البعد ؟

سنتطرق في هذه المذكرة إلى أربعة فصول. حيث سنتكلم في الفصل الأول عن التبريد بالليزر بمختلف تقنياته. كما سنتناول في الفصل الثاني دراسة البوزونات الصلبة في بعد واحد. حيث سيتم تمثيل هاملتون

البوزونات الصلبة على هاملتون فرميونات عديمة اللف غير متفاعلة وذلك بإستخدام تحويل جوردن-فيغنر (JWT).

في الفصل الثالث سنقوم بدراسة دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة، من خلال حساب عناصر مصفوفة كثافة جسيم واحد، ثم بعد ذلك حساب دالة توزيع الدفوع المعطاة بواسطة تحويل فوري لعناصر مصفوفة كثافة جسيم واحد، والذي يقوم بتحويل مصفوفة الكثافة من فضاء المواقع إلى فضاء الطاقات.

في الفصل الرابع والأخير سنقوم بتحليل ومناقشة نتائج حساب دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة لمختلف درجات الحرارة وكذا لمختلف أشكال الكمون الخارجي المضاف للنظام، حيث يتولد لنا ما يعرف بالشبكة الفائقة. وسنجد بأن هذه الدراسة تثبت إنتقال من طور تكاثف بوز أينشتاين أو الميوعة الفائقة، حيث أغلب الذرات تشغل المستوى الكمومي الأساسي للنظام، إلى طور عازل موت، حيث كل المستويات الطاقية لها نفس الكثافة أو عدد الإسكان، وذلك عند زيادة درجة الحرارة وكذا عند زيادة عمق المواقع الشبكية بزيادة عمق الكمون، كما أن شكل الكمون المضاف يلعب دورا هاما في سرعة الإنتقال بين الطورين.

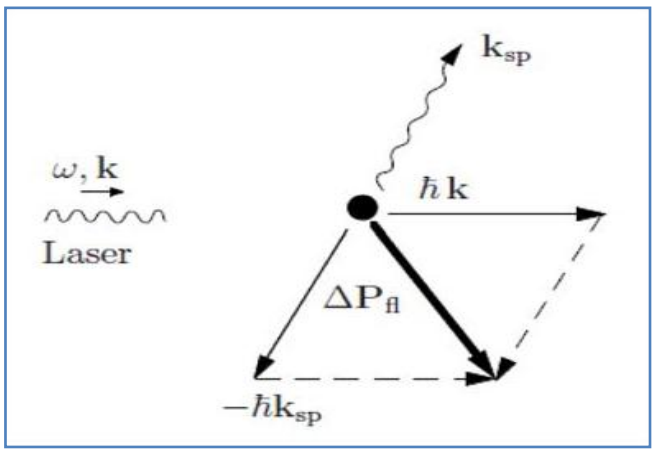
الفصل الأول

تبريد الذرات بالليزر

مؤخرا مرت الفيزياء الذرية بتقدم مذهل مرتكز على تقنية حديثة تدعى التبريد بالليزر والحصر، والتي من خلالها تم تبريد الذرات إلى درجات حرارة منخفضة للغاية تصل إلى الميكروكلفن وحتى النانوكلفن، مع سرعات صغيرة جدا (cm/s أو mm/s). ومع إبتكار تقنية جديدة تدعى التبريد التبخيري. ظهرت العديد من الانجازات الجديدة، بدءا من التحليل الطيفي عالي الدقة والساعات الذرية إلى التداخل الذري وتكثف بوز اينشتاين (BEC) [6، 21، 22]. إن التبريد بالليزر يتطلب تبادل الدفع بين الذرة والحقل الضوئي، ولذلك فإن طاقة الضوء $\hbar\omega$ تغير الطاقة الداخلية للذرة، حيث أن الدفع الزاوي للضوء يغير الدفع الزاوي المداري l للذرة، أما الدفع الخطي للضوء $p = \hbar\omega/c = \hbar k$ لا يغير من درجات الحرية الداخلية للذرة ولكنه يغير دفع الذرات، لذا فالقوة الناتجة من تبادل الدفع بين الحقل الضوئي والذرات يمكن أن تستخدم للسيطرة على حركة الذرات وبالتالي كبحها [23].

1-1 آلية التبريد بالليزر:

يعتمد التبريد بالليزر على استغلال خاصية امتصاص الذرة للضوء من أجل كبحها و الحد من سرعتها. فمن المعروف أن الذرة تمتص أمواجا قريبة من إنتقالاتها الطاقية الداخلية المسموحة، وبما أن الموجة تمتلك دفعا فإنه وعند امتصاص الفوتون سيؤثر على الدفع الخطي للذرة إما بزيادة سرعتها إذا ماكان دفع الموجة بنفس اتجاه دفع الذرة، وإما بخفض سرعتها إذا ما كانا متعاكسين في الاتجاه، وبإصدار هذا الفوتون تلقائيا يتغير دفع الذرة من جديد إما بالزيادة وإما بالنقصان، ولكن وبما أن عملية الإصدار التلقائي هي إجراء عشوائي - أي في اتجاهات مختلفة كل مرة - لذلك وبعدعدة دورات امتصاص وإصدار فإن مجموع الدفع الناتج عن عملية الإصدار التلقائي يكون معدوما بالمتوسط [25].



الشكل (1-1): رسم توضيحي لعملية تبادل الدفع بين الذرة وفوتون الليزر خلال دورة امتصاص وإصدار تلقائي [25].

1-1-1 تبريد دوبلر:

يتضمن تبريد الذرات بالليزر خفض درجة حرارة الغاز الذري وذلك من خلال كبح السرعة الذرية. وبما أن الذرات موجودة بشكل إنفرادي فقط في الغازات الذرية، فهي بالتأكيد تمتلك سرعات معتبرة إذا ما إعتبرنا تواجد الغاز في درجة الحرارة النظامية، لذا فلا يمكن أبدا تجاهل فعل دوبلر. أول اقتراحات التبريد بالليزر كان للايونات والذرات المحاصرة، والمعروف باسم تبريد دوبلر بالليزر، الذي أعطاه كل من وينلاند (Wineland) ودهيملت (Dehmelt) وهانس (Hansch) وشوالو (Schawlow) في عام 1975م [5]. حيث كان الابطاء من حركة الذرات باستغلال فعل دوبلر من أول تجارب التبريد بالليزر، ويتم ذلك من خلال تبادل الدفع مع الذرات (وبالتالي تبادل القوة) المعتمد على السرعة، حيث يتم توجيه شعاع ليزر في الاتجاه المعاكس لحركة الذرات، وحتى تتمكن الذرات من امتصاص الضوء والذي من الواجب أن يكون منزاحا نحو الأحمر بالنسبة للإنتقال الذري المستهدف، وبحسب فعل دوبلر فإن الذرات المتجهة نحوى هذا الضوء ستراه مطابقا لإنتقالها الذري فتمتصه، وبالتالي ستكتسب دفعه ħk المعاكس لدفعها وبالتالي سينخفض دفعها مرات عديدة على طول مسارها [23].

1-1-1-1 ذرة في حالة راحة:

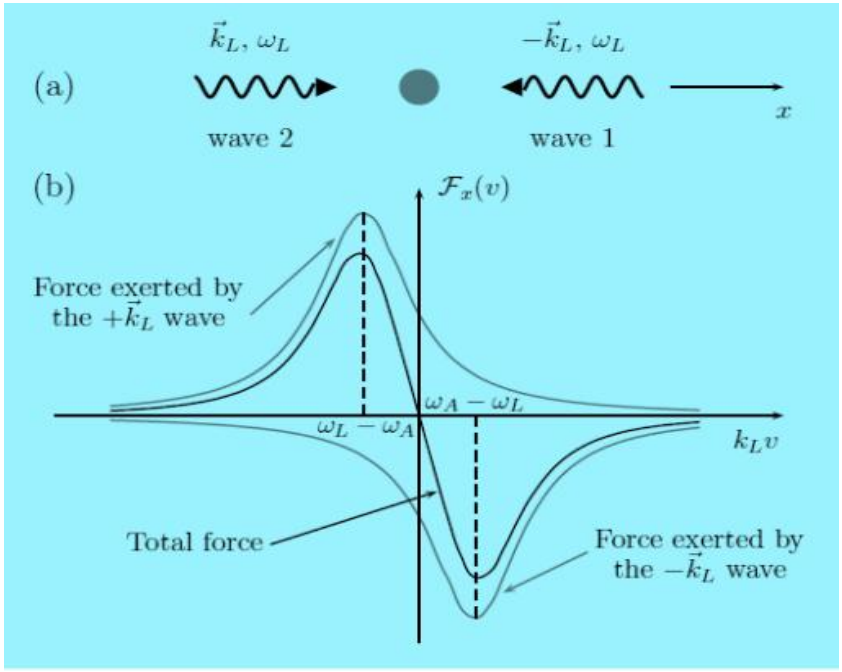
الآن يتم توضيح القوى المطبقة على الذرة جراء تطبيق حقلين ليزرين متعاكسين ذو إنزياح δ عن الإنتقال الذري المستهدف من أجل التبريد حيث:

$$\delta = \omega_L - \omega_A \qquad (1-1)$$

من اجل شدات ضعيفة لموجات الليزر وسرعات ذرية صغيرة بما فيه الكفاية، بحيث تأثيرات التداخل وتأثيرات دوبلر الأعلى رتبة يمكن أن تكون مهملة، حيث كل موجة تؤثر بشكل مستقل على الذرة وببساطة القوة الناتجة $\vec{F}$ التي تؤثر على الذرة بواسطة الموجتين تعطى عن طريق المجموع الشعاعي للقوتين أي $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ، والشكل (1-2) (b) يوضح مجموع القوتين $\vec{F}_1$ و$\vec{F}_2$ التي تمارسها الموجتين ومجموعها الشعاعي $\vec{F}$ كدالة للسرعة الذرية وفعل دوبلر $k_L.v$، بالنسبة لذرة في حالة راحة فان $k_L.v = 0$، وبما أن القوتين متساويتين ومتعاكستين في الاتجاه فان مجموعهما صفر، وبالتالي يتم الغاؤهما. لذلك لا توجد قوة صافية تؤثر على الذرة. القوة المتوسطة المبددة بالقرب من $v = 0$ التي تمارسها موجة ليزر متنقلة على الذرة هي [5].

$$F(v) = F_0 - \alpha v \qquad (2-1)$$

حيث F_0 هي القوة المستقلة عن السرعة و αv – هي قوة الاحتكاك وهي تعتمد على سرعة الذرات، حيث α معامل التثبيط الذي تمارسه الموجتان على الذرة.



الشكل(1-2) : رسم بياني يوضح القوى المطبقة على الذرة من قبل موجتي ليزر متعاكستين في الانتشار أثناء عملية تبريد دوبلر بالليزر [5، 23].

الفوة المطبقة على الذرة بواسطة الموجة 1 حيث $\vec{k} = -\vec{k}_{\mathrm{L}}$

$$\vec{\mathrm{F}}_1 = -\hbar\vec{k}_{\mathrm{L}}\Gamma\frac{\Omega^2/4}{\left(\delta - \vec{k}_{\mathrm{L}}.\vec{\mathrm{v}}\right)^2 + (\Gamma^2/4) + (\Omega^2/2)} \qquad (3-1)$$

الفوة المطبقة على الذرة بواسطة الموجة 2 حيث $\vec{k} = +\vec{k}_{\mathrm{L}}$

$$\vec{\mathrm{F}}_2 = +\hbar\vec{k}_{\mathrm{L}}\Gamma\frac{\Omega^2/4}{\left(\delta - \vec{k}_{\mathrm{L}}.\vec{\mathrm{v}}\right)^2 + (\Gamma^2/4) + (\Omega^2/2)} \qquad (4-1)$$

حيث $\Gamma = 1/\tau$ و τ هو زمن الحياة للإنتقال الذري المستهدف، أما $\delta = \omega_{\mathrm{L}} - \omega_{\mathrm{A}} < 0$ هو الإنزياح نحوى الاحمر لكل من الامواج $\vec{k}_{\mathrm{L}}.\vec{\mathrm{v}} = \pm \mathrm{k}_{\mathrm{L}}.\mathrm{v}$ حيث في حالة ذرة مع موجتين :

- الاشارة (-) تتوافق مع عكس حهة الانتشار.
- الاشارة (+) تتوافق مع جهة الانتشار.

2-1-1-1 ذرة في حالة حركة:

بالنسبة لذرة تتحرك مع سرعة v وبفضل فعل دوبلر، تصبح الموجة المعاكسة لجهة الانتشارأقرب الى الرنين بينما الموجة التي مع جهة الانتشار تكون أبعد من الرنين. لذالك تمارس الموجة المعاكسة لجهة الانتشار على الذرة قوة أكبر من التي تمارسها الموجة التي تكون مع جهة

الانتشار. بفضل تحسين معدل دورات الامتصاص والانبعاث التلقائي الأقرب الي الرنين وبالتالي، بسبب عدم توازن السرعة بين قوتي الضغط الاشعاعي المتعاكستين، تتنتج قوة تعرف بقوة الاحتكاك أو التثبيط، بحيث تكون ضد الحركة الذرية. لذلك فإنه من اجل $\delta < 0$ نجد أن $\alpha > 0$ ويكون اتجاه قوة التثبيط $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ معاكس لاتجاه شعاع السرعة $\vec{v}$ والتبريد الناتج عن قوة التثبيط هذه يسمى تبريد دوبلر بالليزر [5].

2-1-1 تبريد سيزيف :

سيزيف ابن أيلوص، شخصية من الأساطير اليونانية. وفقا للأساطير، استطاع سيزيف أن يخدع إله الموت، وكعقاب له أرغم سيزيف على دحرجة صخرة ضخمة إلى أعلى التل ودائما قبل أن يبلغ قمة التل تفلت الصخرة منه ويعيد دحرجتها إلى أعلى التل من جديد، ويستمر بفعل ذلك إلى الأبد. وفي عملية مشابهة لهذا التعذيب مع عملية التبريد بالإستقطابات الخطية المتعامدة في بعد واحد، قام الباحثين جون داليبارد (Jean Dalibard) وكلود كوهين تانودجي (Claude Cohen-Tannoudji) بابتكار فكرة هذه الآلية الفيزيائية [26].

يتم إعتبار ذرة ذات مستويين أي ذات انتقال محدد بين الحالة الأساسية (g) ذات الدفع الزاوي $J_g = \frac{1}{2}$ والحالة المثارة (e) ذات الدفع الزاوي $J_e = \frac{3}{2}$. تتطور الذرة في وجود موجتين متتاليتين، مع وجود تردد معروف ω_L منزاحة نحو الأحمر للانتقال الذري عند ω_0 (أي خلاف رنين الليزر حيث الإنزباح: $\delta = \omega_L - \omega_0$ يكون سالبا). تنتشر الموجتان في اتجاهين متعاكسين، على طول المحور o_z ولهما إستقطابان خطيان متعامدان، اتجاهي الاستقطاب في الحقل الكهربائي E هما o_x ،o_y (أنظر الشكل 1-3)، الحقل الإجمالي الناتج عن التداخل بين الحزمتين يولد تدرج الاستقطاب على مقياس الطول الموجي الضوئي λ، أي أنه سيولد موجة ذات استقطاب دوري، وعلى وجه الخصوص، يكتسب الحقل الاستقطاب الدائري بالتناوب بالتغير بين σ^- و σ^+ عند النقاط $z_p = p\lambda/4$ حيث $p \in Z$، ويتم فصل هذه المواقع بواسطة نقاط الاستقطاب الخطي $z_q = (2q+1)\lambda/8$، حيث $q \in Z$، كما موضح بالشكل (1-3) [26، 27].

لتوضيح تأثير سيزيف بكل بساطة يتم وضع وجهة نظر شبه كلاسيكية، حيث يتم التعامل مع درجات الحرية الداخلية للذرة بشكل كمي، بينما تكون الحركة الإنسحابية تقليدية [26، 27].

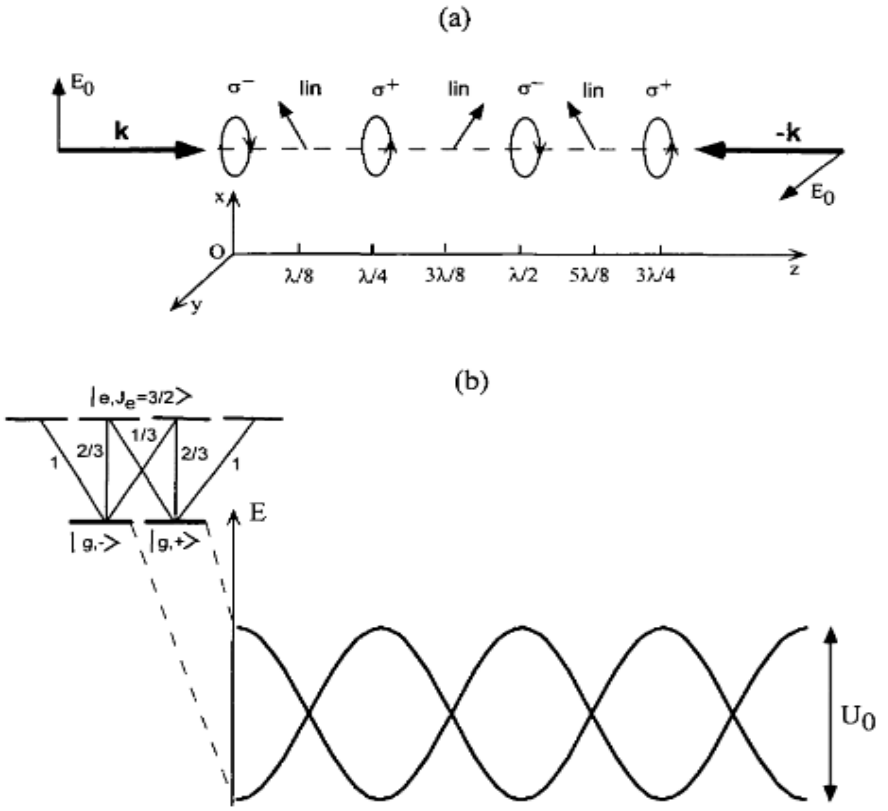
1-2-1-1 الذرة في حالة راحة:

في البداية يكون الاهتمام بالحالة الداخلية لذرة في حالة راحة، حيث سيتبين أن هذه الحالة تعتمد بشدة على الموضع z الذي تكون فيه الذرة.

إن ترابط الذرة مع حقل الليزر يزيل الانحطاط بين مستويات زيمان الفرعية للحالة الأساسية $|g, m_z\rangle$ (حيث $m_z = \pm\frac{1}{2}$ يمثل عدد الكم المغناطيسي)، عن طريق إحداث تغيرات خفيفة، هذه التعديلات تتغير فضائيا على غرار نموذج تدرج الاستقطاب للحقل الناتج عن تداخل

الموجتين. علاوة على ذلك، فإن كثافة مجال الترابط ذرة-حقل متناسب مع مربعات معاملات كليبش جوردن للتحول $\frac{1}{2} \leftarrow \frac{3}{2}$، لذا فالمستوي $|g,-\rangle$ (أو $|g,+\rangle$) أكثر ترابطا بثلاثة أضعاف من المستوي $|g,+\rangle$ (أو $|g,-\rangle$) حيث الاستقطاب هو σ^+ (أوσ^-) (أنظر الشكل1-3). لاحظ أنه بالنسبة للإنزياح نحوى الأحمر δ فان المستوي الفرعي الأكثر ترابطا مع الحقل هو أيضا المستوى الأدنى للطاقة [26].

علاوة على ذلك، ينتج عن تدرج الاستقطاب للحقل التعديل المكاني لمعادلات الضخ الضوئية بين المستويين الفرعيين الأساسين للذرة، حيث يميل الحقل دائما إلى ضخ الذرة ضوئيا نحو المستوي الفرعي الأدنى للطاقة [26].

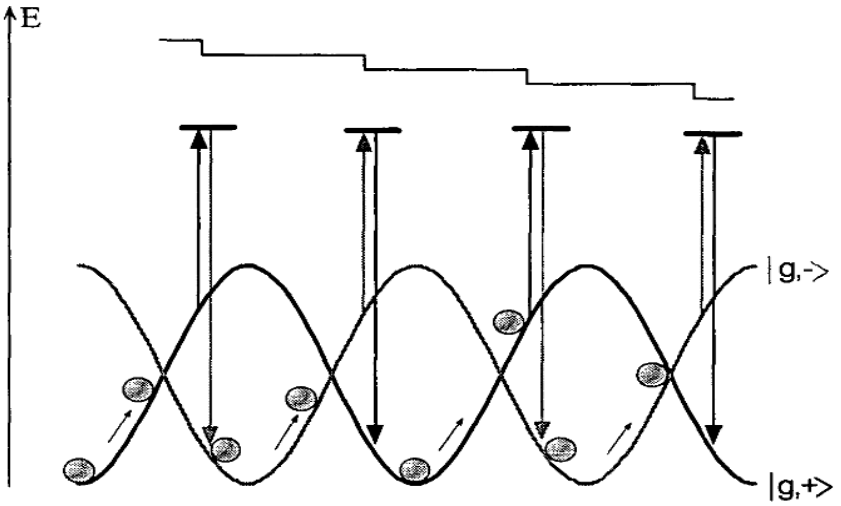


الشكل (1-3) رسم تخطيطي يوضح الإستقطابات الخطية المتعامدة في بعد واحد لموجتان متعاكستان من نفس التردد والشدة، ينتشران على طول المحور o_z (a) التردد الدوري لحقل الليزر (b) التغيير المكاني لحالات انزياح الضوء في المستويين الفرعيين المغناطيسيين من الحالة الأساسية [23، 26، 27].

1-1-2-2 الذرة في حالة حركة:

باعتبار الآن أن الذرة تتحرك بسرعة v، وهي كبيرة بما فيه الكفاية بحيث تستطيع الذرة أن تسلك أطوال موجية عديدة خلال مدة الحياة Γ^{-1} للحالة المثارة. إن الانتقالات الضوئية للمستويين الفرعيين المغناطيسيين تتصرف مثل الكمونات الخارجية لذرة. التأثير المشترك لهذه الكمونات الخارجية وكذا الضخ الضوئي المكاني يؤدي إلى تباطؤ الحركة الذرية. فعند افتراض

أن الذرة لها حركة مستقيمة على طول المحور o_z تتميز بالسرعة v، فإنه في البداية عند $z = 0$ تكون الحالة الذرية في أسفل البئر الكموني حيث يكون الاستقطاب σ^- (الحالة الداخلية المقابلة لذلك $|g, -\rangle$)، وأثناء حركتها تتسلق الذرة البئر الكموني الموجودة فيه، قبل تغيير الحالة الداخلية في محيط قمة الرأس والتي عندها تكون الحالة الذرية في أسفل البئر الكموني المجاور المرتبط بالاستقطاب σ^+ عند $z = \frac{\lambda}{4}$. في الواقع يتم ضخ الذرة ضوئيا بشكل تفضيلي نحوى أدنى مستوي فرعي للطاقة وخلال هذه الدورة فان الذرة عند صعودها التلال الكمونية يتم تحويل الطاقة الحركية إلى طاقة كامنة، وفي عملية الضخ الضوئي تشع الطاقة الكامنة بعيدا لأن الانبعاث التلقائي يكون عند تردد أعلى من الامتصاص. تتكرر هذه العملية خلال كل دورة ضخ ضوئي، حتى تصبح الطاقة الحركية الذرية صغيرة جدا بحيث لا يمكن أن تصعد التل الكموني الموالي، وهكذا مع استمرار صعود التل الكموني تفقد الذرات طاقتها أي تتباطأ حركة الذرة أو بمعنى آخر يتم تبريد الغاز الذري [26]. هذه العملية تجلب إلى الذهن الأسطورة اليونانية وبالتالي تسمى" تبريد سيزيف بالليزر" الذي يعطي درجة حرارة توازن أدنى من درجة حرارة التوازن لنهاية تبريد دوبلر [23، 26].



الشكل (1-4): رسم تخطيطي يوضح تأثير سيزيف في تكوين الإستقطابات الخطية المتعامدة في بعد واحد [23، 26، 27].

في الشكل (1-4) يبين أنه عندما تتسلق الذرة الكمون فإن جزءا من طاقتها الحركية يتحول إلى طاقة كامنة. ثم يتم تبديد هذه الطاقة عن طريق إصدار فوتون في عملية الضخ الضوئي. هذا التعاقب المتكرر خلال كل دورة ضخ ضوئي، يؤدي إلى تبريد الذرة [23، 26، 27].

1-1-2-3 التموقع الذري:

آلية "سيزيف" التي سبق وصفها، تؤدي إلى التبريد الفعال، حيث تفقد الذرة طاقتها باستمرار حتى تنفذ، بالإضافة إلى كمية الطاقة الكافية لتسلق التل الكموني إلى أن تبقى محاصرة داخل البئر. ثم يتم وصف حركتها بشكل كلاسيكي من خلال حركة التذبذب في محيط الجزء السفلي (القاع) من البئر. يتم وصف الوضع النهائي بشكل جيد من قبل مجموعة من الذرات

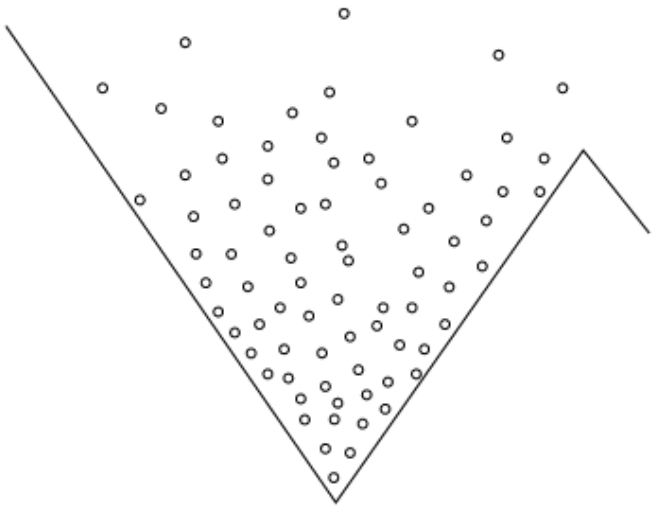
الموجودة في أسفل الآبار الكمونية الموزعة على شبكة منتظمة على طول o_z، ويتم تقييد الحركة الذرية أساسا إلى الاهتزاز حول موقع توازن أسفل البئر الكموني، هذه الحركة يتم وصفها عن طريق تحديد مستويات الطاقة الاهتزازية المنفصلة داخل كل بئر. ونتيجة لذلك يتم الحصول على بنية تشبه الشبكة البلورية للمادة الكثيفة، وهو ما يسمى بالشبكات الضوئية [26].

لاحظ أن الطاقات الحركية التي تم التوصل إليها في هذا النوع من الشبكات الضوئية ذات بعد واحد عادة ما تكون في مجال بضع عشرات من طاقات الارتداد، حيث طاقة الارتداد E_R هي الطاقة التي تم جمعتها من قبل الذرة خلال امتصاص فوتون واحد، إذا كانت الذرة في البداية في حالة راحة [26].

3-1-1 التبريد التبخيري:

يعتمد التبريد التبخيري على الطرد التفضيلي لتلك الذرات المحاصرة ذات الطاقة الأعلى من البئر الشبكي عن طريق خفض عمق البئر الكموني، فتتمكن الذرات الأعلى طاقة من الإفلات آخذة معها جزءا من طاقة النظام الكلية، فيصبح النظام في وضع غير متوازن أو عشوائي ثم بعد زمن معين يأخذ وضع توازن جديد ولكن بطاقة كلية أقل وهو ما يسمى بإعادة تمحرر الغاز الذري المتبقي (إعادة توزيع الحرارة) عن طريق التبادل الطافي بواسطة التصادمات المرنة بين عناصره، وبالتالي يبرد الغاز أكثر فأكثر، وعلى الرغم من أن التبخر عملية تحدث في الطبيعة فقد تم تطبيقها على تبريد الذرة للمرة الأولى في عام 1988م [23، 28].

إن هذا المستوى من التبريد يمكن من الحصول على ما يسمى بتكاثف بوز-أينشتاين *Bose-Einstein condensation* أين كل الذرات البوزونية تتواجد في نفس المستوي الكموني، وبالتالي تتصرف كوحدة واحدة حيث ينشأ ما يسمى بالمائع الفائق، ويعتبر هذا المجال مجال البحث الأول الذي من أجلة تم إبتكار كل طرق التبريد السابقة [23، 28].



الشكل (1-5): رسم تخطيطي يوضح مبدأ تقنية التبريد التبخيري [23، 28].

يوضح الشكل (1-5) أنه بمجرد أن يتم تخفيض عمق المصيدة، يمكن للذرات التي تحتوي على طاقة أعلى من عمق المصيدة أن تتسرب وتصل الذرات المتبقية إلى درجة حرارة منخفضة [23، 28].

2-1 حصر الذرات:

إن تفاعل النظام مع الوسط المتواجد فيه يحول دون الحفاظ على برودته، وبالتالي لا يوجد الوقت الكافي لإنشاء تجارب وإستنتاج نتائج، لذلك فكر الباحثون في حصر هذا النظام بعيدا عن جدران الأوعية التي تحويه من أجل منع التبادل الطافي بين الذرات والوسط. ومن بين طرق الحصر المستخدمة طريقة الحصر المغناطيسي.

1-2-1 الحصر المغناطيسي:

إن تجربة ستبرن-جيرلاخ (Stern-Gerlach) في عام 1924م أظهرت لأول مرة العمل الميكانيكي للحقول المغناطيسية غير المتجانسة المطبقة على الذرات المتعادلة والتي تمتلك عزوم مغناطيسية. لذا فإن الذرات التي لها عزم مغناطيسي $\vec{\mu}$ الذرات القلوية يمكن حصرها بواسطة حقول مغناطيسية غير متجانسة بسبب التفاعل بين العزم والحقل، هذا التفاعل ينتج قوة تعطى بالعلاقة التالية [9، 23، 24]:

$$\vec{\mathrm{F}} = -\vec{\nabla}\mathrm{U} \qquad (5-1)$$

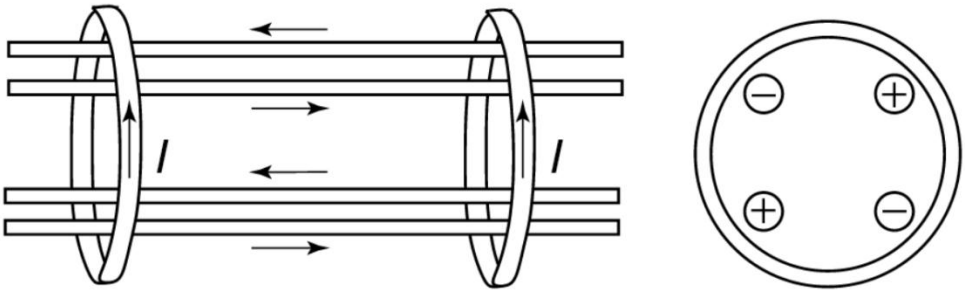
$$\vec{\mathrm{F}} = \vec{\nabla}\left(\vec{\mu}\cdot\vec{\mathrm{B}}\right) \qquad (6-1)$$

حيث عبارة الطاقة الكامنة:

$$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{\mathrm{B}} \qquad (7-1)$$

فمن أجل حصر ذرة في مكان معين من الفضاء لابد من جعل طاقتها الكامنة فيه أقل ما يمكن لكي تفضل البقاء فيه دون غيره. مغناطيسيا يمكن حصر الذرة إما في مكان أين الحقل المغناطيسي أكبر ما يمكن وذلك إذا كان عزمها المغناطيسي بنفس اتجاه الحقل المغناطيسي، وإما في مكان أين الحقل المغناطيسي أقل ما يمكن وذلك إذا كان عزمها المغناطيسي بعكس اتجاه الحقل المغناطيسي، وبما أن معادلات ماكسويل تحول دون إنشاء شدة حقل مغناطيسي كبيرة في مكان من الفضاء خال من الشحنات فإنه لا خيار لذلك إلا بحصر الذرة في مكان به شدة حقل ضعيفة جدا أو تساوي الصفر [23].

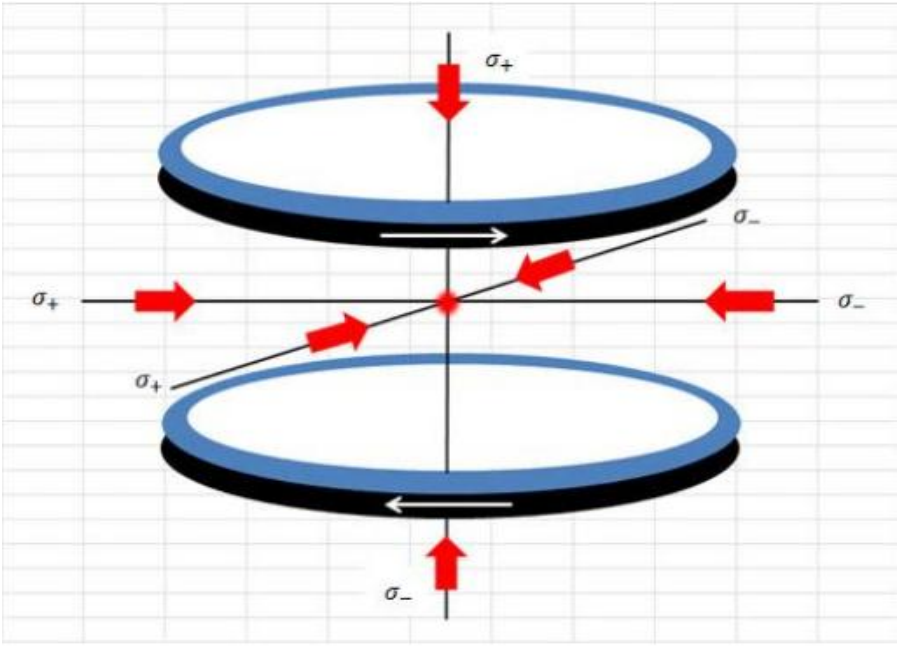
وتعتبر مصيدة أيوف من بين طرق الحصر المستخدمة حيث يكون الحقل المغناطيسي معدوم عند مركز هذه المصيدة، ويزداد في كل الاتجاهات كما هو موضح في الشكل (1-6) وبالتالي تميل الذرات إلى البقاء في مركزه، وقد استخدمت مصيدة أيوف في العديد من تجارب تكثف بوز أينشتاين BEC [23].



الشكل (1-6): رسم تخطيطي لمصيدة أيوف [23].

تتكون مصيدة أيوف من أربعة خطوط تيار مستقيمة التي تشكل حقول خطية رباعية الاستقطاب. يتم انجاز الحصر الأفقي مع نهاية الملفات (الأسلاك الموصلة الملفوفة) كما هو مبين في الشكل (1-6) . هذه الحقول يمكن انجازها مع العديد من تشكيلات التيارات المختلفة طالما يتم الحفاظ على الهندسة [23].

غالبا ما يستخدم الحصر المغناطيسي مع الحصر الضوئي فيما يسمى بالحصر المغناطيسي الضوئي (MOT) كما هو موضح بالشكل (1-7) [5].

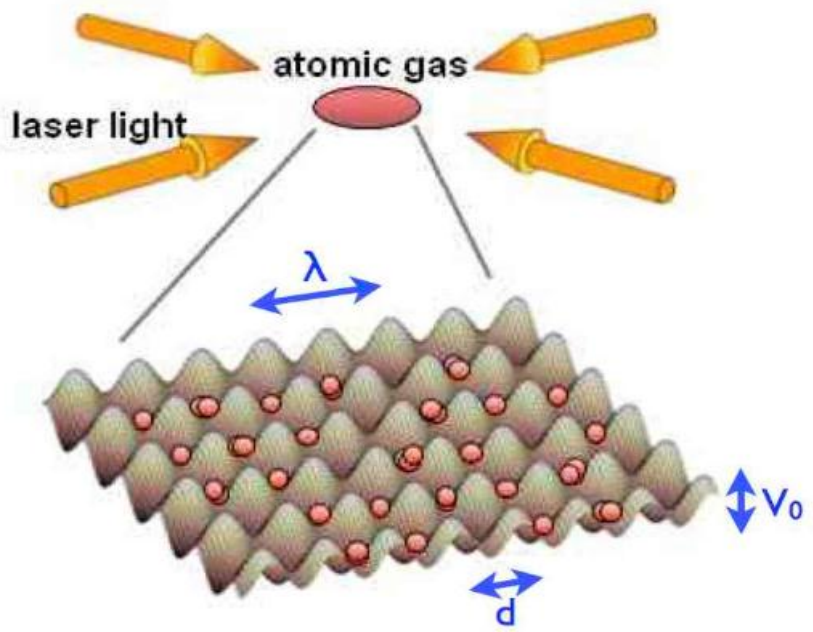


الشكل (1-7): شكل الفخ المغناطيسي الضوئي (MOT) في ثلاثة أبعاد [5].

1-3 الشبكات الضوئية:

الشبكات الضوئية هي كمونات دورية، مولدة بواسطة تفاعل الذرات المحايدة مع نمط تداخل (interference pattern) حزم الليزر المتقاطعة [1].

إن تداخل الأمواج المولدة بواسطة الانتشار العكسي لضوء الليزر، يولد موجة مستمرة (دائمة) (standing wave)، ومحيط هذه الأمواج المستمرة يسمى بالشبكة الضوئية ذات الشدة V_0 والمتباعدة $d = \lambda/2$ كما هو موضح في الشكل (1-8) [29].



الشكل (1-8): الغازات الذرية في شبكة ضوئية ثنائية البعد (2D) [29].

الانتشار العكسي لموجات الليزر في موجة مستمرة أو الشبكة الضوئية، بفضل تأثير تداخل الأمواج. شدة الشبكة هي V_0 الطول الموجي λ وبالتالي المباعدة $d = \lambda/2$ [29].

وتعتبر الشبكات الضوئية من أهم أنظمة المحاكاة للمادة الكثيفة، وقد انكبت الدراسات في العقود الأخيرة عليها من أجل دراسة خصائص المادة الصلبة الكثيفة التي يحول التعقيد الحاصل في شبكاتها وكذا تفاعلاتها الغير قابلة للفصل دون دراستها بشكل دقيق، إذ توفر الشبكات الضوئية نموذجا مبسطا للمادة الكثيفة يمكن الباحث من إضافة كل تفاعل على حدى حتى يتسنى له تحديد خصائص المادة المدروسة بدقة كبيرة [29].

الفصل الثاني

البوزونات الصلبة (HCB)
في بعد واحد

إن من أهم محطات التقدم التجريبي في السنوات الحديثة في مجال التبريد بالليزر هو إنشاء غاز تونكس-جيرارد المتكون من البوزونات الصلبة [13]. كما أصبح مؤخرا تفاعل الذرات الفائقة البرودة المحاصرة في مصيدة موضوع بحث ضخم جدا [31]، لذلك تمت دراسة غاز البوزونات الصلبة في بعد واحد على نطاق واسع من خلال تقنيات مختلفة [13]. ويعتبر التحقيق التجريبي لغاز تونكس-جيرارد (TG) الأحادي البعد على حصر حلقي أو مفتوح، أين التفاعل الشديد اللانهائي بين الجسيمات في نفس الموقع الشبكي ذو أهمية كبيرة، حيث أنه يوصف نظريا بواسطة هاملتون قابل للحل بدقة [17]. إن تطور طرق الحصر أدى إلى التحكم الجيد في الذرات الباردة في الشبكات الضوئية، والتي يمكن وصفها بشكل دقيق كفاية بواسطة هاملتون بوز-هوبارد (Bose Hubbard)، حيث يصف هذا النموذج شبكة ضوئية تحوي بوزونات غازية بشكل يحاكي الشبكات البلورية، كما يعرض هذا النظام مختلف الانتقالات الطورية الكمية من الميوعة الفائقة إلى عازل موت (Mott) [32-34].

1-2 غاز تونكس جيرارد (البوزونات الصلبة) في بعد واحد:

يتطابق الحل الدقيق للنموذج النظري لتفاعل غاز بوز في بعد واحد من خلال كمون الاتصال أو ما يسمى بكمون دلتا، مع الحل الدقيق للمشكلة التي تقدمها نظرية تمثيل بوز-فرمي (Bose-Fermi mapping) للبوزونات الغير قابلة للاختراق (غاز تونكس-جيرارد)، حيث تكون التفاعلات شديدة ولانهائية بين الجسيمات $U \to \infty$، وهذا يرجع إلى حقيقة أن كمون دلتا والتفاعل اللانهائي يتطلب اختفاء الدالة الموجية عند تلامس جسمين، وينطبق الشيء نفسه على الفرميونات بسبب مبدأ الاستبعاد لباولي (Pauli)، لذا كانت فكرة جيرارد المذهلة هي أن مبدأ باولي يمكن أن يحدد تأثير التفاعل بين البوزونات ومنه فإن دالة موجة لنظام كثير الجسيمات للبوزونات شديدة التفاعل يمكن أن تستمد من دالة موجة نظام كثير الجسيمات لفرميونات عديمة اللف غير متفاعلة، كما أن القوة الحقيقية لهذه الطريقة أو هذا التمثيل تكمن في حقيقة أنه قادر على التعامل مع كمون خارجي كيفي إضافي إلى الهاملتون [17، 19، 35-37].

$$\psi_B(x_1, \cdots x_N,) = S(x_1, \cdots x_N)\psi_F(x_1, \cdots x_N) \qquad (1-2)$$

مع

$$S(x_1, \cdots x_N) = \prod_{i>j=1}^{N} sin(x_i - x_j) \qquad (2-2)$$

حيث $\psi_F(x_1, \cdots x_N)$ دالة موجة أجسام كثيرة لغاز من الفرميونات عديمة اللف (تصوري). هذا يعني الدالة $S(x_1, \cdots x_N)$ تعوض تغيير إشارة $\psi_F(x_1, \cdots x_N)$ عندما يتبادل أي جسمين وبالتالي دالة الموجة تخضع لإحصاء بوز [17، 19].

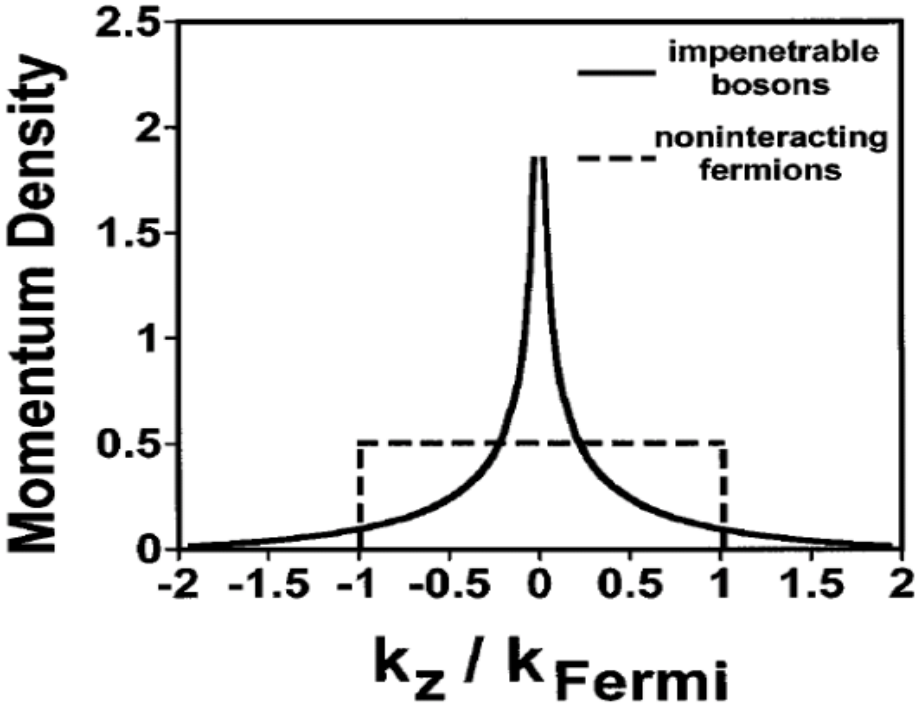
لقد أعطى جيرارد تقديرا لتوزيع الدفع يعطى بالعلاقة التالية [17، 19، 35، 37]:

$$n_B(k) = \int dx \int dy e^{ik(x-y)} \rho_B(x,y) \qquad (3-2)$$

حيث $\rho_B(x,y)$ مصفوفة كثافة جسيم واحد وتعطى بالعلاقة التالية [17، 19، 35] :

$$\rho_B(x,y) = \mathrm{N}\int dx_2 \cdots dx_{\mathrm{N}} \Psi^*_{TG}(x,x_2,\cdots x_N,t)\Psi_{TG}(y,x_2,\cdots x_N,t) \qquad (4-2)$$

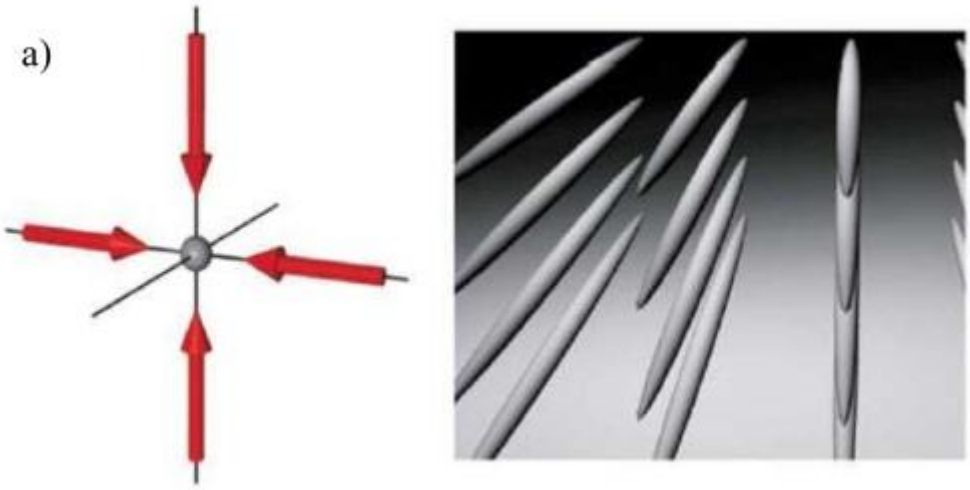
إن المقارنة النوعية بين توزيع الدفع الفرميوني وتوزيع الدفع البوزوني الموضحين في الشكل (2-1)، تثبت أنه وكما هو متوقع في الحالة البوزونية تكون حالات الدفع صفر أكثر انشغالا من حالات الدفع المرتفع، ومع ذلك وفي الوقت نفسه لا تزال هناك احتمالية عالية لانشغالات غير معدومة لباقي حالات الدفع المرتفع. هذا على النقيض من غاز فرمي الحر حيث يكون احتمال الانشغال متجانس ويساوي الواحد للدفع $0 < k < k_F$، أين k_F يمثل دفع فرمي، ويساوي الصفر غير ذلك [17].



الشكل (2-1): منحنى توزيع الدفع لغاز تونكس جيرارد وغاز فرمي المثالي [17].

2-2 غاز تونكس-جيرارد في التجارب:

إن نظام تونكس-جيرارد المتفاعل بشدة الذي تمت مناقشته سابقا (الجزء2-2) تمت ملاحظته تجريبيا في عام 2004م من قبل مجموعتين مختلفتين، كلتا المجموعتين استخدمت طرق حصر متباينة الخواص من أجل الحصول على أنابيب شبه دائرية. ومع ذلك فقد استخدموا طرقا مختلفة للوصول الى نظام التفاعل الشديد [17].



الشكل (2-2): الشبكات الضوئية التي تم انشاؤها عن طريق فرض موجات دائمة متعامدة الناتجة في مجموعة أنابيب أحادية البعد [17، 37].

3-2. نموذج بوز هوبارد:

الذرات الفائقة البرودة المعرضة لكمون دوري من الشبكات الضوئية هي في الأغلب مماثلة للنظام الممثل بنموذج بوز هوبارد (BHM) [38].

في الأصل، يستخدم نموذج بوز هوبارد لدراسة الأنظمة في نظرية المادة المكثفة [1] مثل الكترونات في التراكيب البلورية الدورية [1، 38]، وعلى سبيل المثال فإن فيشر (Fisher) وآخرون كان من أول من بحث مرحلة تمثيل وتبسيط هاملتون البوزونات الصلبة عند درجة الحرارة $T = 0$. وقد كان تطبيق نموذج (BHM) على الذرات المبردة ذا أهمية كبرى لتشكيلة واسعة متصورة من التطبيقات المتوقعة في فيزياء المادة المكثفة [1، 8].

1-3-2 الاشتقاق الميكروسكوبي لنموذج بوز هوبارد:

لنعتبر ذرة ذات مستويين في شبكة ضوئية أحادية البعد تحتوي على عدد L من المواقع الشبكية مولدة من الانتشار العكسي لحزم الليزر. يعطى هاملتون النظام لذرة واحدة والموصوف بواسطة قوانين التكميم الثاني بالعلاقة التالية (P: 35-39) [1].

$$H = \int \mathrm{dx}\Psi^{\dagger}(\mathrm{x})\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mathrm{V}(\mathrm{x})\right)\Psi(\mathrm{x}) + \frac{1}{2}\iint \mathrm{dxdy}\Psi^{\dagger}(\mathrm{x})\Psi^{\dagger}(\mathrm{y})\, U(x,y)\Psi(\mathrm{x})\Psi(\mathrm{y}) \qquad (5-2)$$

حيث:

$\Psi(\mathrm{x})$ يمثل مؤثر الحقل (field operatore) للجسيمات البوزونية.

$\mathrm{V}(x)$ يمثل الكمون الخارجي بالنسبة لجسيم واحد ويعطى بالعلاقة التالية:

$$V(x) = V_0 \cos^2(k_L x) + V_T(x) \qquad (6-2)$$

حيث

$V_0 \cos^2(k_L x)$ يمثل كمون الشبكة و $V_T(x)$ يمثل كمون الحصر الخارجي.

$U(x,y)$ يمثل طاقة التفاعل بين جسيمين.

في الأنظمة ذات درجة الحرارة المنخفضة تكون المساهمة الهامة لطاقة التفاعل بين جسيمين منحصرة في تفاعلات الاتصال $U(x,y)$ أين تكون التصادمات بين الجسيمات منحصرة فقط في التصادمات ضعيفة الطاقة أو ما يسمى بتصادمات الموجة المستمرة (collisions s-wave)، وبالتالي تقرب كمون طاقة تفاعل جسيمين إلى ما يسمى بكمون تفاعل الاتصال حسب العلاقة التالية (P: 35-39) [1]:

$$U(x,y) = g_{1D}\delta(x-y) \qquad (7-2)$$

حيث g_{1D} عامل الاقتران أو الازدواج أحادي البعد هي دالة لطول انتشار الموجة المستمرة g_{1D}، وهو العامل الوحيد لوصف تفاعلات جسمين في نظام من الجسيمات شديدة البرودة. هذا يعني أن الجسيمات المتفاعلة هي فقط تلك التي تتواجد في نفس البئر الشبكي حتى يكون التفاعل ملحوظا بواسطة $U(x,y)$. في الحالة ثلاثية الأبعاد يعطى هذا الكمون بالعلاقة التالية (P: 35-39) [1]:

$$U(x) = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}\delta^3(x) = g\delta^3(x) \qquad (8-2)$$

من أجل اشتقاق نموذج بوز-هوبارد، يتم تبسيط مؤثر الحقل في أساس فانيي (Wannier) [1، 8]

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{L}\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(x - x_i)\, b_{n,i} \qquad (9-2)$$

حيث $\omega_n(x-x_i)$ دالة فانيي، و $b_{n,i}$ مؤثر الإفناء البوزوني لجسيم في عصابة الطاقة n الموجود عند الموقع i والمحاصر في بئر شبكة حول أدنى كمون عند x_i. كأول تقريب، يتم اعتبار درجة الحرارة T منخفضة بحيث أن الطاقة الموافقة تكون أدنى بكثير من الفاصل الطاقي (energy gap) بين عصابتي بلوخ الدنيا، تقريبا تعطى ب $\hbar\omega_{HO}$. وبما أن الطاقات ضعيفة جدا فإن المجموع الثاني في العلاقة (2-9) سيأخذ فقط أدنى عصابة للطاقة $n = 0$ [1، 8، 19، 20، 39-41]:

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{L} \omega(x - x_i) b_i \qquad (10-2)$$

حيث $\omega(x) \equiv \omega_0(x)$ و $b_i \equiv b_{0,i}$. باستبدال مؤثر الحقل في العلاقة (2-5) بهذه العبارة الموضحة في العلاقة الأخيرة (2-10)، يتم الحصول على الهاملتون التالي [1، 20، 40، 42] :

$$H = \sum_{k,l} E_{kl} b_k^\dagger b_l + V_0 \sum_{k,l} J_{kl}\, b_k^\dagger b_l + \sum_{k,l} V_{kl}\, b_k^\dagger b_l + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} U_{ijkl}\, b_i^\dagger b_j^\dagger b_k b_l \quad (11-2)$$

حيث العناصر المصفوفية تعطى بـ [1، 19، 20، 40، 42]:

$$E_{kl} = \int \mathrm{dx}\, \omega(\mathrm{x} - \mathrm{x_k}) \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \omega(\mathrm{x} - \mathrm{x_l}) \quad (12-2)$$

$$J_{kl} = \int \mathrm{dx}\, \omega(\mathrm{x} - \mathrm{x_k}) \cos^2(\mathrm{kx})\, \omega(\mathrm{x} - \mathrm{x_l}) \quad (13-2)$$

$$V_{kl} = \int \mathrm{dx}\, \omega(\mathrm{x} - \mathrm{x_k}) V_\mathrm{T}(\mathrm{x}) \omega(\mathrm{x} - \mathrm{x_l}) \quad (14-2)$$

عناصر المصفوفة بالنسبة لتفاعل على موقع تعطى كما في العلاقة التالية:

$$U_{ijkl} = g_{1D} \int \mathrm{dx}\, \omega(\mathrm{x} - \mathrm{x_i}) \omega(\mathrm{x} - \mathrm{x_j}) \omega(\mathrm{x} - \mathrm{x_k}) \omega(\mathrm{x} - \mathrm{x_l}) \quad (15-2)$$

بالإضافة إلى الكمون الخارجي:

$$V_\mathrm{T}(\mathrm{x}) \omega(\mathrm{x} - \mathrm{x_i}) = V_\mathrm{T}(\mathrm{x_i}) \omega(\mathrm{x} - \mathrm{x_i}) \quad (16-2)$$

لذا فبفضل السوية الطبيعية لدوال فانيي نجد:

$$V_\mathrm{kl} = \mathrm{V_T}(\mathrm{x_k}) \int \mathrm{dx}\, \omega(\mathrm{x} - \mathrm{x_k}) \omega(\mathrm{x} - \mathrm{x_l}) \quad (17-2)$$

$$V_\mathrm{kl} = \mathrm{V_T}(\mathrm{x_k}) \delta_\mathrm{kl} \quad (18-2)$$

$$V_\mathrm{kl} = \epsilon_\mathrm{k} \delta_\mathrm{kl} \quad (19-2)$$

أخيرا، بجمع كل هذه التقريبات يتم الحصول على هاملتون بوز-هوبارد بالشكل التالي [1، 19]:

$$H = (E_0 + J_0 V_0) \sum_{i=1}^{L} n_i + (\mathrm{E} + \mathrm{JV_0}) \sum_{\langle i,j \rangle} b_i^\dagger \mathrm{b_j} + \frac{U}{2} \sum_{i=1}^{L} n_i\, (n_i - 1) + \sum_{i=1}^{L} \epsilon_i n_i \quad (20-2)$$

حيث $n_i = \mathrm{b}_i^\dagger \mathrm{b}_i$ يمثل مؤثر العدد للجسيمات في الموقع i حيث: $N = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{L}} n_i$ و L عدد الآبار، $\langle i,j \rangle$ يمثل الجمع على كل المواقع المجاورة i و j .

الجمع الأول هو تماما شامل لجميع الجسيمات وهو يمثل طاقة الشبكة الضوئية ويمكن أن يكون مرجعا للطاقات. وإذا أهملنا الحصر الخارجي المضاف تصبح العلاقة (2-20) بالشكل التالي:

$$H = (\mathrm{E} + \mathrm{JV}_0) \sum_{<i,j>} b_i^{\dagger} \mathrm{b_j} + \frac{U}{2} \sum_{i=1}^{L} n_i \, (n_i - 1) \qquad (21-2)$$

2-3-2 هاملتون بوز-هوبارد:

يحوي نموذج بوز-هوبارد الفيزياء الأساسية لتفاعل البوزونات في شبكة، وهو النموذج كثير الأجسام البوزونية الأصغر ولا يمكن أن يخفض إلى نموذج جسيم واحد. إن للبوزونات طاقات تنافر ويمكن أن تكتسب طاقة بالقفز إلى المواقع المجاورة في الشبكة، لذا يعطى هاملتون بوز-هوبارد لجسيمات بوزونية في شبكة حيث التفاعلات تكون فقط مع أقرب موقع مجاور لها يعطى بالعلاقة التالية [32-34، 39، 40، 43-45] :

$$H = -t \sum_i \left(\mathrm{b}_i^{\dagger} \mathrm{b}_{i+1} + h.c. \right) - \sum_i \mu n_i + \frac{U}{2} \sum_i n_i (n_i - 1) - V \sum_i n_i n_{i+1} \qquad (22-2)$$

3-3-2 هاملتون بوز-هوبارد البوزونات الفائقة البرودة:

إن البوزونات الفائقة البرودة الموضوعة على شبكات ضوئية أحادية البعد يمكن أيضا وصفها بواسطة نموذج بوز-هوبارد (BHM) في بعد واحد بالشكل التالي [32، 40,43-49] :

$$H = -t \sum_{i,j} \left(\mathrm{b}_i^{\dagger} \mathrm{b}_j + h.c. \right) + \frac{U}{2} \sum_i n_i (n_i - 1) + V_0 \sum_{i,j} n_i \, n_j - \sum_i \mu_i n_i \qquad (23-2)$$

حيث:

- $\mathrm{b_i^{\dagger}}$ و $\mathrm{b_j}$ هما على التوالي مؤثر الإنشاء في الموقع i ومؤثر الإفناء من الموقع j.
- $n_i = \mathrm{b}_i^{\dagger} \mathrm{b}_i$ مؤثر العدد ويمثل عدد الجسيمات في الموقع i.
- t طاقة القفز بين الموقع i والموقع j [38، 50، 51]

✓ في حالة U=0 فانه لا يوجد تفاعل بين الجسيمات أي أنه نظام بوزونات حرة .
✓ في حالة $U \to \infty$ فانه يوجد تفاعل كبير جدا بين الجسيمات وهو نظام غاز تونكس جيرارد [17، 19].

1-3-3-2 هاملتون البوزونات الصلبة (HCB)

في حالة البوزونات الصلبة أو ما يسمى ببوزونات تونكس فان [18، 52] :

- $U \to \infty$ لان البوزونات بينهما قوة تنافر لانهائية [19، 36، 52] حيث لا يسمح لأكثر من بوزون شغل موقع شبكي.
- طاقة الانتقال t صغيرة جدا وبالتالي لا تسمح بالانتقال إلا من الموقع i والموقع المجاور له مباشرة (i+1 أو i-1).
- الدراسة تتم بنموذج بوز-هوبارد على نظام نصف ممتلئ أي $\mu = 0$.

ومنه يصبح هاملتون البوزونات الصلبة (HCB) في شبكة أحادية البعد [13، 19، 41، 53-55] كالتالي:

$$H = -t\sum_i \left(b_i^\dagger b_{i+1} + h.c.\right) + V_i \sum_i n_i^b\, n_{i+1}^b \qquad (24-2)$$

حيث $n_i^b = b_i^\dagger b_i$ و $n_i^b = 0, 1$ يمثل مؤثر العدد.

لدينا علاقات ضد التبادل لمؤثر الإفناء والإنشاء الفرميوني]19، 54[:

$$\{f_j, f_i^\dagger\} = f_j f_i^\dagger + f_i^\dagger f_j = \delta_{ij} \qquad (25-2)$$

$$\begin{cases} i = j \to \{f_i, f_j^\dagger\} = 1 \\ i \neq j \to \{f_i, f_j^\dagger\} = 0 \end{cases} \qquad (26-2)$$

$$\{f_i^\dagger, f_j^\dagger\} = \{f_i, f_j\} = 0 \qquad (27-2)$$

- علاقات التبادل لمؤثر الإفناء والإنشاء البوزوني [20، 43، 56، 54] :

$$[b_i, b_j^\dagger] = b_i b_j^\dagger - b_j^\dagger b_i = \delta_{ij} \qquad (28-2)$$

$$\begin{cases} i = j \to [b_i, b_j^\dagger] = 1 \\ i \neq j \to [b_i, b_j^\dagger] = 0 \end{cases} \qquad (29-2)$$

$$[b_i, b_j] = [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = 0 \qquad (30-2)$$

يتميز نظام البوزونات الصلبة بالشرطين الإضافيين لشبكة أحادية البعد [13، 19، 36، 53] وهما:

1. لا يمكن الإنشاء أو الإفناء في نفس الموقع مرتين

$$b_i^{2\dagger} = b_i^2 = 0 \qquad (31-2)$$

2. مؤثر الإنشاء والإفناء البوزوني لا يتبادلان ضديا في نفس الموقع:

$$\{b_i, b_i^\dagger\} = 1 \qquad (32-2)$$

وهذا ما يجعل نظام البوزونات الصلبة شبيها بنظام الفرميونات الحرة عديمة اللف، لذا ومن أجل تبسيط دراسة نظام البوزونات الصلبة، أين يمكن لعدد كبير من الجسيمات شغل نفس الموقع الشبكي، لابد من إيجاد تحويل معين يربط هذا النظام بنظام الفرميونات الحرة عديمة اللف أين لا يمكن أن يشغل موقع شبكي معين بأكثر من جسيم وهذا ما يسمى بتحويل جوردن-فيغنر(JWT) [13].

4-2 توافق بوز-فرمي:

تتم دراسة البوزونات الصلبة على شبكات أحادية البعد على أساس تحويل جوردن-فيغنر الذي يمثل هاملتون البوزونات الصلبة على فرميونات عديمة اللف، وبغض النظر عن كونها دقيقة، تسمح هذه الطريقة باعتبار عدد كبير نسبيا من الجسيمات وأحجام النظام، والتي يمكن أن تكون أكبر حتى من تلك الموجودة في الإعدادات التجريبية الحالية [16].

من اجل حساب خصائص البوزونات الصلبة أحادية البعد بدقة وبسهولة نستعمل تحويل جوردن-فيغنر الذي يمكن من تمثيل نظام بوزوني ذو N بوزون على فرميونات حرة [13، 19، 41، 56، 53]:

- تحويل يربط مؤثر الإنشاء البوزوني $b_i^\dagger$ بمؤثر الإنشاء الفرميوني $f_i^\dagger$

$$b_i^\dagger = f_i^\dagger \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{-i\pi f_\beta^\dagger f_\beta} \qquad (33-2)$$

- تحويل يربط مؤثر الإفناء البوزوني b_i إلى مؤثر الإفناء الفرميوني f_i

$$b_i = \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{i\pi f_\beta^\dagger f_\beta} f_i \qquad (34-2)$$

بحيث نجد أن:

$$f_i^\dagger f_i = b_i^\dagger b_i \quad ; \quad N = \sum_{i=1}^{L} b_i^\dagger b_i = \sum_{i=1}^{L} f_i^\dagger f_i \qquad (35-2)$$

باستخدام هذا التحويل الذي يمثل هاملتون البوزونات الصلبة على فرميونات عديمة اللف غير متفاعلة يصبح هاملتون البوزونات الصلبة بالضبط هاملتون فرميونات غير متفاعلة في شبكة أحادية البعد [13، 50، 53]:

$$H = -t \sum_{i=1}^{L-1} (f_i^\dagger f_{i+1} + h.c.) + V_0 \sum_{i=1}^{L} n_i^f n_{i+1}^f \qquad (36-2)$$

التمثيل المبين في العلاقة الأخيرة **(2-36)** صالح فقط في حالة أنظمة مفتوحة كما أنه من ممكن تحقيقه تجريبيا.

في مثل هذه الحالات البوزونات الصلبة والفرميونات تملك بالضبط نفس الطيف.

الفصل الثالث

دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة (HCB)

البوزونات الصلبة هي بوزونات لا يمكن لها أن تشغل نفس الحالة الكمية مثل الفرميونات، لكن من دون تغير تناظر الدالة الموجية. لذلك فإن نظام HCB في بعد واحد يشترك مع نظام الفرميونات عديمة اللف غير المتفاعلة في العديد من الخصائص: الخصائص الترموديناميكية مثل الطاقة الكلية والخصائص المجهرية مثل الكثافة. على العكس من ذلك، فإن الكميات مثل دالة توزيع الدفع n_k تختلف بالنسبة لنظام البوزونات الصلبة عنها للفرميونات عديمة اللف. هذا يرجع إلى السلوك المختلف للعناصر الغير قطرية (OD) لمصفوفة كثافة جسيم واحد (OPDM) في كلا النظامين [13]. فما هي علاقة دالة توزيع الدفوع بالعنصر المصفوفي القطري والغير قطري لمصفوفة كثافة جسيم واحد ؟

1-3 مصفوفة كثافة جسيم واحد (OPDM):

إن لمصفوفة كثافة جسيم واحد لها أهمية كبيرة في حساب دالة توزيع الدفوع ولإيجاد OPDM يجب أن نمر بحساب عناصرها القطرية والغير قطرية .

1-1-3 حساب العنصر المصفوفي الغير قطري ρ_{ij} لمصفوفة كثافة جسيم واحد:

إن العنصر المصفوفي الغير قطري (OD) لمصفوفة كثافة جسيم واحد يحسب بالعلاقة التالية [16، 19]:

$$\rho_{ij} = \langle b_i^\dagger b_j \rangle \qquad (1-3)$$

أي في حالة $i \neq j$، حيث ρ_{ij} يمثل عنصر مصفوفة كثافة جسيم واحد (OPDM).

إن القيمة المتوسطة لأي مؤثر **O** يعبر عن كمية فيزيائية تعطى بالعلاقة التالية [57]:

$$\langle O \rangle = Tr(O\rho) \qquad (2-3)$$

حيث ρ يمثل مؤثر الكثافة ومنه يصبح :

$$\rho_{ij} = \langle b_i^\dagger b_j \rangle = Tr\left(b_i^\dagger b_j \rho\right) \qquad (3-3)$$

بالنسبة لنظام ذو درجة حرارة منتهية (منخفضة جدا) يتم اعتبار المجموعة القانونية الكبرى (GCE)، وهو نظام ذو عدد غير ثابت من الجسيمات ويتبادل الطاقة مع الوسط المحيط به بحيث تكون القيمة المتوسطة للطاقة ثابتة، وهو النظام الأقرب للواقع. في هذه الحالة يكون الاختلاف بين مصفوفة كثافة البوزونات الصلبة والفرميونات فقط في العناصر الغير قطرية (OD) لمصفوفة كثافة جسيم واحد للنظام [13].

يعطى مؤثر الكثافة في المجموعة القانونية الكبرى كما هو موضح في العلاقة التالية:

$$\rho_{\mathrm{gc}} = \frac{1}{\mathrm{Z}} exp\left[-\left(H_F - \mu \sum_i n_i^{\mathrm{f}}\right)/K_B T\right] \qquad (4-3)$$

حيث:

- ✓ Z تمثل دالة التوزيع.
- ✓ μ يمثل الكمون الكيميائي.
- ✓ $\mathrm{K_B}$ ثابت بولتزمان.
- ✓ **T** درجة الحرارة.

تعطى دالة التوزيع Z في المجموعة القانونية الكبرى (GCE) حسب العلاقة التالية [13، 19، 57]:

$$Z = Tr\left\{exp\left[-\left(H_F - \mu \sum_i n_i^{\mathrm{f}}\right)/K_B T\right]\right\} \qquad (5-3)$$

ومنه تصبح علاقة العنصر المصفوفي الغير قطري لمصفوفة كثافة جسيم واحد حسب العلاقة التالية:

$$\rho_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{\mathrm{Z}} \mathrm{Tr}\left(b_i^{\dagger} b_j exp\left[-\left(H_F - \mu \sum_i n_i^{\mathrm{f}}\right)/K_B T\right]\right) \qquad (6-3)$$

لتسهيل حساب العنصر المصفوفي لمصفوفة كثافة جسيم واحد يتم إستعمال تحويل جوردن-فيغنر الذي تم تقديمه في الفصل الثاني والموضح في العلاقتين (2-33) و(2-34)، يتم الحصول على العلاقة التالية [13، 19]:

$$\rho_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{\mathrm{Z}} \mathrm{Tr}\{f_{\mathrm{i}}^{\dagger} \prod_{\beta=1}^{\mathrm{i}-1} \exp(-\mathrm{i}\pi \mathrm{n}_{\beta}^{\mathrm{f}}) \prod_{\gamma=1}^{\mathrm{j}-1} \exp(\mathrm{i}\pi \mathrm{n}_{\gamma}^{\mathrm{f}}) f_{\mathrm{j}}$$
$$\times \exp[-(\mathrm{H} - \mu \sum_{\mathrm{l}} \mathrm{n}_{\mathrm{l}}^{f})/\mathrm{k_B T}]\} \qquad (7-3)$$

من خواص أثر مصفوفة (Trace) نجد الخاصية الدورية التالية:

$$Tr(ABC) = Tr(BCA) \qquad (8-3)$$

ومنه وحسب هذه الخاصية فإن علاقة العنصر المصفوفي لمصفوفة كثافة جسيم واحد تصبح بالعلاقة التالية:

$$\rho_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{\mathrm{Z}} \mathrm{Tr}\{f_{\mathrm{i}}^{\dagger} f_{\mathrm{j}} \prod_{\beta=1}^{\mathrm{j}-1} \exp(\mathrm{i}\pi \mathrm{n}_{\beta}^{\mathrm{f}}) \exp[-(\mathrm{H} - \mu \sum_{\mathrm{l}} \mathrm{n}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{f}})/\mathrm{k_B T}]$$
$$\times \prod_{\gamma=1}^{\mathrm{i}-1} \exp(-\mathrm{i}\pi \mathrm{n}_{\gamma}^{\mathrm{f}})\} \qquad (9-3)$$

لتسهيل حساب الأثر بواسطة فضاء فوك يتم استخدام خاصية رياضية أخرى للأثر والمعطاة حسب العلاقة التالية [4، 13، 17، 19]:

$$\mathrm{Tr}[exp\left(\sum_{ij} f_i^{\dagger} X_{ij} f_j\right) exp\left(\sum_{kl} f_k^{\dagger} Y_{kl} f_l\right) \dots exp\left(\sum_{mn} f_m^{\dagger} Z_{mn} f_n\right)]$$
$$= \det[\mathrm{I} + \mathrm{e}^{\mathrm{X}}\mathrm{e}^{\mathrm{Y}} \dots \mathrm{e}^{\mathrm{Z}}] \qquad (10-3)$$

مما يسمح مباشرة بحساب دالة التوزيع Z الموضحة بالعلاقة التالية:

$$\mathrm{Z} = det\left[I + \mathrm{e}^{-(\mathrm{H_F}-\mu \mathrm{I})/\mathrm{K_B T}}\right] \qquad (11-3)$$

$$\mathrm{Z} = \prod_i \left[1 + \mathrm{e}^{-(\mathrm{E_{ii}}-\mu)/\mathrm{K_B T}}\right] \qquad (12-3)$$

حيث I هي مصفوفة الوحدة. تم الحصول على المعادلة الماضية بعد تقطير الهاملتون.

$$H_{\mathrm{F}}\mathrm{U} = \mathrm{UE} \qquad (13-3)$$

حيث:

- ✓ U مصفوفة الأشعة الذاتية.
- ✓ E مصفوفة القيم الذاتية و هي قطرية.

يتم حساب الأثر في المعادلة (3-9) بتحويله إلى الشكل الموضح في المعادلة (3-10) وذلك بالقيام ببعض التغيرات على المعادلة (3-9).

أولا، يتم تحويل $f_i^{\dagger} f_j$ إلى الشكل الأسي $e^{f_i^{\dagger} f_j}$ وذلك باستعمال نشر تايلور للدالة الأسية:

$$e^{f_i^{\dagger} f_j} = 1 + \frac{\left(f_i^{\dagger} f_j\right)}{1!} + \frac{\left(f_i^{\dagger} f_j\right)^2}{2!} + \frac{\left(f_i^{\dagger} f_j\right)^3}{3!} + \cdots \qquad (14-3)$$

لدينا

$$\left(f_i^{\dagger} f_j\right)^2 = \left(f_i^{\dagger} f_j\right)\left(f_i^{\dagger} f_j\right) \qquad (15-3)$$

ولدينا من علاقة التبادل [13، 19]

$$\{f_j, f_i^{\dagger}\} = 0 \rightarrow f_j f_i^{\dagger} + f_i^{\dagger} f_j = 0 \rightarrow f_j f_i^{\dagger} = -f_i^{\dagger} f_j \qquad (16-3)$$

نعوضها في العلاقة (3-15) نجد:

$$\left(f_i^{\dagger} f_j\right)^2 = f_i^{\dagger} f_j f_i^{\dagger} f_j = -f_i^{\dagger} f_i^{\dagger} f_j f_j \qquad (17-3)$$

وحسب الشرط المذكور سابقا في الفصل الثاني بالعلاقة $b_i^{2\dagger} = b_i^2 = 0$، فانه لا يمكن الإنشاء أو الإفناء في نفس الموقع مرتين ومنه:

$$\left(f_i^{\dagger} f_j\right)^2 = -f_i^{\dagger} f_i^{\dagger} f_j f_j = 0 \qquad (18-3)$$

$$\left(f_i^{\dagger} f_j\right)^2 = \left(f_i^{\dagger} f_j\right)^3 = \left(f_i^{\dagger} f_j\right)^4 = \dots\dots\dots\dots = 0 \qquad (19-3)$$

ومنه تصبح العلاقة بالشكل التالي :

$$e^{f_i^\dagger f_j} = 1 + f_i^\dagger f_j \qquad (20-3)$$

ومنه يصبح :

$$f_i^\dagger f_j = e^{f_i^\dagger f_j} - 1 \qquad (21-3)$$

بتعويض العلاقة (3-21) في العلاقة (3-9) نجد:

$$\rho_{ij} = \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\{(e^{f_i^\dagger f_j} - 1)\prod_{\beta=1}^{j-1}\exp(i\pi n_\beta^f)\exp[-(H-\mu\sum_l n_i^f)/k_B T$$

$$\times\prod_{\gamma=1}^{i-1}\exp(-i\pi n_\gamma^f)\} \qquad (22-3)$$

$$\rho_{ij} = \frac{1}{Z}[\mathrm{Tr}\{e^{f_i^\dagger f_j}\prod_{\beta=1}^{j-1}\exp(i\pi n_\beta^f)\exp[-(H-\mu\sum_l n_l^f)/k_B T$$

$$\times\prod_{\gamma=1}^{i-1}\exp(-i\pi n_\gamma^f)\} - \mathrm{Tr}\{\prod_{\beta=1}^{j-1}\exp(i\pi n_\beta^f)\exp[-(H-\mu\sum_l n_l^f)/k_B T]$$

$$\times\prod_{\gamma=1}^{i-1}\exp(-i\pi n_\gamma^f)\}] \qquad (23-3)$$

من اجل $i \neq j$ يتم تحويل $f_i^\dagger f_j$ إلى مجموع عناصر مصفوفة باستخدام الخاصية التالية [13]:

$$f_i^\dagger f_j = exp\left(\sum_{mn} f_m^\dagger A_{mn} f_n\right) - 1 \qquad (24-3)$$

بوضع:

$$\sum_{mn} f_m^\dagger A_{mn} f_n = A \qquad (25-3)$$

حيث A هي مصفوفة كل عناصرها معدومة ما عدى العنصر A_{ij}، أي $A_{ij} = 1$ والعناصر الأخرى $A_{mn} = 0$. يتم تحويل المجموع:

$$i\pi\sum_{\beta=1}^{j-1} f_\beta^\dagger f_\beta = \sum_{op} f_o^\dagger X_{op} f_p \qquad (26-3)$$

بوضع:

$$\sum_{op} f_o^\dagger X_{op} f_p = X \qquad (27-3)$$

حيث X هي مصفوفة كل عناصرها معدومة ما عدى العناصر القطرية إلى غاية j-1 أي $X_{op}=0$ و العناصر القطرية $X_{\beta\beta}=i\pi$ الى غاية j-1 [13].

أيضا:

$$-i\pi\sum_{\gamma=1}^{i-l} f_{\gamma}^{\dagger} f_{\gamma} = \sum_{kl} f_{k}^{\dagger} Z_{kl} f_{l} \qquad (28-3)$$

بوضع:

$$\sum_{kl} f_{k}^{\dagger} Z_{kl} f_{l} = Z \qquad (29-3)$$

حيث Z هي مصفوفة كل عناصرها معدومة ما عدى العناصر القطرية إلى غاية i-1، أي أن $Z_{kl}=0$ والعناصر القطرية $Z_{\gamma\gamma}=-i\pi$ إلى غاية i-1 [13].

باعتبار النظام نصف ممتلئ أي عدد الجسيمات يساوي نصف عدد المواقع الشبكية $\mu=0$ ومنه يصبح [58]:

$$\exp[-(H-\mu\sum_{l} n_{l}^{f})/k_{B}T] = \exp(-\beta H) \qquad (30-3)$$

$$e^{-\beta H} = e^{Y} \qquad (31-3)$$

بتعويض العلاقات (3-25)، (3-27)، (3-29) و(3-31) في العلاقة (3-23) يتم الحصول على العبارة التالية :

$$\rho_{ij} = \frac{1}{Z}[Tr\{\exp\left(\sum_{mn} f_{m}^{\dagger} A_{mn} f_{n}\right)\exp\left(\sum_{op} f_{o}^{\dagger} X_{op} f_{p}\right)\exp(Y)\exp\sum_{kl} f_{k}^{\dagger} Z_{kl} f_{l}\}$$

$$-Tr\{\exp\left(\sum_{op} f_{o}^{\dagger} X_{op} f_{p}\right)\exp(Y)\exp\sum_{kl} f_{k}^{\dagger} Z_{kl} f_{l}\}] \qquad (32-3)$$

باستخدام الخاصية الموضحة في العلاقة (3-14) وبتعويض العلاقات (3-24)، (3-26)، (3-28) و(3-30) في العلاقة الأخيرة (3-32) يصبح لدينا العلاقة التالية:

$$\rho_{ij} = \frac{1}{Z}[\det\{I+e^{A}e^{X}e^{Y}e^{Z}\}-\det\{I+e^{X}e^{Y}e^{Z}\}] \qquad (33-3)$$

حسب العلاقة (3-20) والعلاقة (3-24) فإن:

$$exp\sum_{mn} f_{m}^{\dagger} A_{mn} f_{n} = 1+\sum_{mn} f_{m}^{\dagger} A_{mn} f_{n} \qquad (34-3)$$

ومنه يصبح:

$$e^{A} = I + A \qquad (35-3)$$

بوضع:

$$e^{X} = O_{1} \qquad (36-3)$$

حيث $\mathbf{O_1}$ هي مصفوفة قطرية عناصرها القطرية تساوي **1-** إلى غاية العنصر ذو الترتيب$1 - j$ ثم تساوي **1** فيما بعد ذلك.

$$e^{Z} = O_2 \qquad (37-3)$$

حيث $\mathbf{O_2}$ هي مصفوفة قطرية عناصرها القطرية تساوي **1-** إلى غاية العنصر ذو الترتيب $1 - i$ ثم تساوي **1** فيما بعد ذلك.

بتعويض العلاقات (3-35)، (3-36) و(3-37) في العلاقة (3-30) نجد :

$$\rho_{ij} = \frac{1}{Z}[\det\{I + (I + A)O_1 e^{-(H-\mu I)/K_B T} O_2\} - \det\{I + O_1 e^{-(H-\mu I)/K_B T} O_2\}] \qquad (38-3)$$

بإضافة مصفوفة الإنتقال للعلاقة الأخيرة (3-38) نجد:

$$\rho_{ij} = \frac{1}{Z}[\det\{I + (I + A)O_1 U e^{-(E-\mu I)/K_B T} U^{\dagger} O_2\} - \det\{I + O_1 U e^{-(E-\mu I)/K_B T} U^{\dagger} O_2\}] \qquad (39-3)$$

وبالتالي تم الحصول في الأخير على علاقة العنصر المصفوفي لمصفوفة كثافة جسيم واحد كما هو موضح في العلاقة الأخيرة (3-39).

3-1-2 حساب العنصر القطري ρ_{ii} لمصفوفة كثافة جسيم واحد:

العناصر القطرية لمصفوفة كثافة جسيم واحد (OPDM) لنظام البوزونات الصلبة هي نفسها بالنسبة لنظام فرميونات غير متفاعلة، حيث في حالة $i = j$ فان العنصر المصفوفي القطري يحسب بالعلاقة التالية:

$$\rho_{ii} = \langle b_i^{\dagger} b_i \rangle \qquad (40-3)$$

لتسهيل حساب العناصر القطرية لمصفوفة (OPDM) نستعمل تحويل جوردن-فيغنر (أنظر العلاقتين (2-33) و(2-34) في الفصل الثاني):

$$\rho_{ii} = \langle f_i^{\dagger} \exp(-i\pi \sum_{\beta=1}^{i-1} f_{\beta}^{\dagger} f_{\beta}) \exp(i\pi \sum_{\beta=1}^{i-1} f_{\beta}^{\dagger} f_{\beta}) f_i e^{-\beta(H-\mu N)} \rangle \qquad (41-3)$$

لدينا حسب خواص الدالة الآسية فإن:

$$exp\left(-i\pi \sum_{\beta=1}^{i-1} f_{\beta}^{\dagger} f_{\beta}\right) \times \exp(i\pi \sum_{\beta=1}^{i-1} f_{\beta}^{\dagger} f_{\beta}) = 1 \qquad (42-3)$$

ومنه يصبح:

$$\rho_{ii} = \langle f_i^{\dagger} f_i \rangle \qquad (43-3)$$

العلاقة الأخيرة (3-43) تؤكد أن العناصر القطرية لمصفوفة كثافة جسيم واحد للبوزونات الصلبة هي نفسها بالنسبة للفرميونات الحرة عديمة اللف.

عند التحويل من فضاء المواقع إلى فضاء الطاقات نجد :

$$\rho_{\mathrm{ii}} = \sum_{\alpha\beta} U^*_{\alpha,i} U_{\beta,i} \langle f^*_\alpha f_\beta \rangle \qquad (44-3)$$

بما أن العناصر الغير قطرية معدومة بالنسبة لنظام الفرميونات الحرة عديمة اللف–ليس هناك تفاعل بين الجسيمات-، فإن الحدود الغير معدومة في العلاقة السابقة هي من أجل $\alpha = \beta$ ومنه:

$$U^*_{\alpha,i} U_{\beta,i} = U^*_{\alpha,i} U_{\alpha,i} = |U_{\alpha,i}|^2 \qquad (45-3)$$

أيضا بالنسبة للفرميونات وحسب إحصاء فرمي -ديراك فإن عدد الإشغال للمحط α هو:

$$\langle f^*_\alpha f_\alpha \rangle = \frac{1}{e^{(\epsilon_\alpha - \mu N)/K_B T} + 1} \qquad (46-3)$$

$$\rho_{\mathrm{ii}} = \sum_{\alpha\beta} |U_{\alpha,i}|^2 \frac{1}{e^{(\epsilon_\alpha - \mu N)/K_B T} + 1} \qquad (47-3)$$

$$\rho_{ii} = \frac{1}{I + e^{-(H-\mu I)/K_B T}} \qquad (48-3)$$

$$\rho_{ii} = \left[I + e^{-(H-\mu I)/K_B T} \right]^{-1}_{ii} \qquad (49-3)$$

$$\rho_{ii} = \left[U \left(I + e^{-(E-\mu I)/K_B T} \right)^{-1} U^\dagger \right]_{ii} \qquad (50-3)$$

باعتبار الكمون الكيميائي μ ثابت فإن مجموع العناصر القطرية لمصفوفة كثافة جسيم واحد يمثل عدد الجسيمات في النظام حسب العلاقة التالية [13] :

$$N_{\mathrm{b}} = \sum_{\mathrm{i}} \rho_{\mathrm{ii}} \qquad (51-3)$$

2-3 دالة توزيع الدفوع:

تعطى دالة توزيع الدفوع للبوزونات بواسطة تحويل فوري [30] الذي يحول عنصر مصفوفة الكثافة من خلال الدالة الموجية من فضاء المواقع إلى فضاء الطاقات حيث [37، 51. 55، 59، 60]:

$$|k\rangle = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{ikr_i}}}{\sqrt{\mathrm{v}}} |i\rangle \qquad (52-\mathbf{3})$$

ومنه يستلزم التحويل من فضاء المواقع إلى فضاء الطاقات:

$$|i\rangle = \sum_{\mathrm{k}=-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ikr_i}}}{\sqrt{\mathrm{V}}} |k\rangle \qquad (53-\mathbf{3})$$

المجموع يكون ضمن منطقة بريلوان الأولى [-π,π] [58، 59].

لدينا

$$|k\rangle\langle k| = \frac{1}{\left(\sqrt{\mathrm{V}}\right)^2}\sum_{ij=1}^{N} e^{-ikr_i}e^{ikr_j}\,|i\rangle\langle j| \qquad (54-3)$$

حيث:

$$|k\rangle\langle k| = n_k \qquad (55-3)$$

$$|i\rangle\langle j| = \rho \qquad (56-3)$$

ومنه تصبح علاقة دالة توزيع الدفوع بالشكل التالي [51]

$$\langle n_k\rangle = \frac{1}{V}\sum_{ij=1}^{N} e^{-ik(r_i-r_j)}\rho_{ij} \qquad (57-3)$$

حيث V حجم النظام، وهو نفسه طول الشبكة في حالة البعد الواحد.

3-3 البوزونات الصلبة (HCB) في شبكة ضوئية:

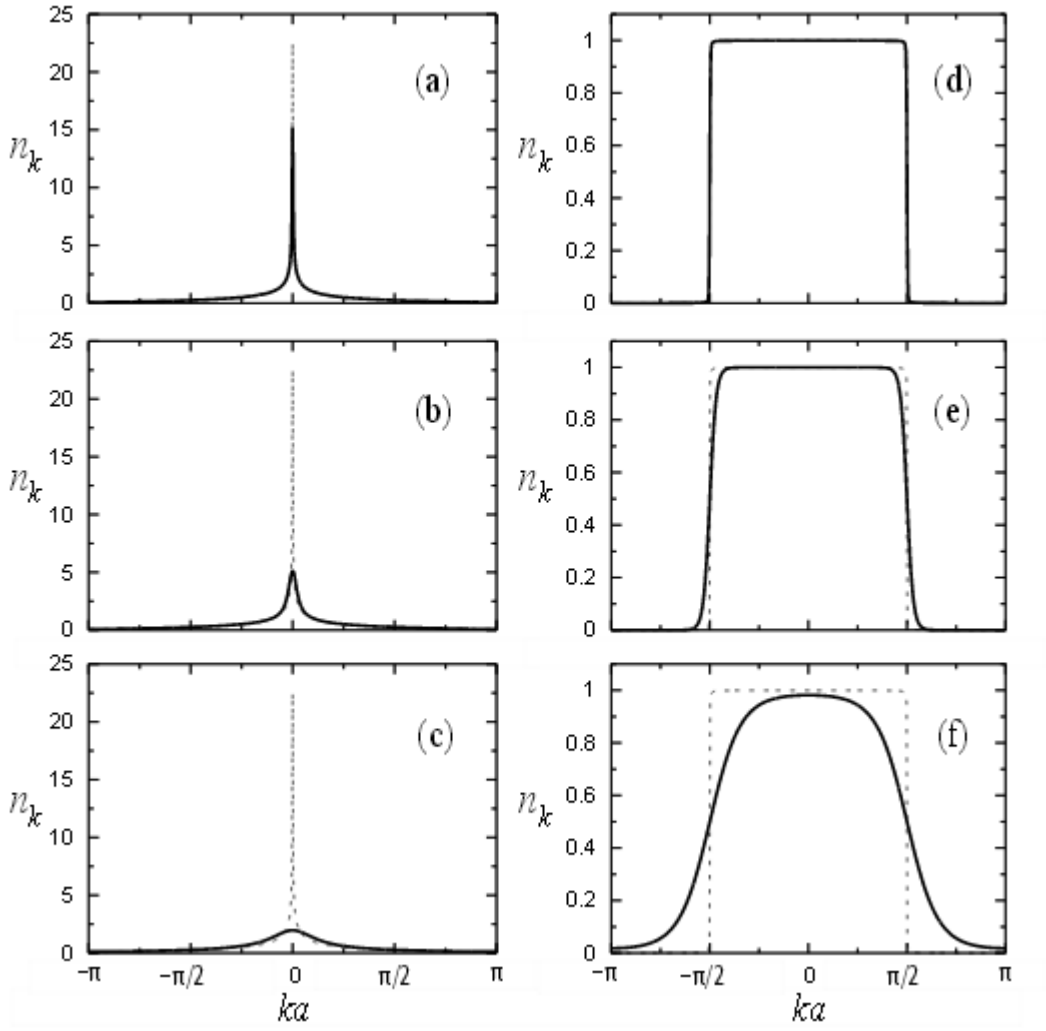
مسألة البوزونات الصلبة في شبكة ضوئية تعتبر كمسألة جسيم في علبة حيث الكمون الخارجي $\mathrm{V_{ext}}$ معدوم ما لم يلامس البوزون جدران العلبة. لذلك هاملتون البوزونات الصلبة في كمون شبكة ضوئية أحادية البعد حيث $V_{\mathrm{ext}} = 0$ يعطى بالعلاقة التالية [13، 19]:

$$\mathrm{H} = -\,\mathrm{t}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1}\left(\mathrm{f_i^{\dagger}f_{i+1}} + \mathrm{h.c.}\right) \qquad (58-3)$$

دالة توزيع الدفوع للبوزونات الصلبة في بعد واحد:

$$\langle n_k\rangle = \frac{1}{L}\sum_{ij} e^{-ik(r_i-r_j)}\rho_{ij} \qquad (59-3)$$

يمثل الشكل الموالي (3-1) دالة توزيع الدفوع للبوزونات الصلبة من (a) إلى (c) وللفرميونات الغير متفاعلة من (d) إلى (f) وذلك لنظام نصف ممتلئ مع 1000 موقع شبكي عند مختلف درجات الحرارة (الخط المستمر). درجة الحرارة [الطاقة] في أي حالة (a) و(d) k_BT=0.01t $[E = -6.362 \times 10^2 t]$ k_BT=0.10t (b) و(e)، $[E = -6.336 \times 10^2 t]$ (c) و(f) k_BT=0.50t $[E = -5.585 \times 10^2 t]$، يمثل الخط المتقطع في كامل الشكل نتائج الحالة الأساسية $[E = -6.363 \times 10^2 t]$ [13].



الشكل(3-1): دالة توزيع الدفوع للبوزونات الصلبة من (a) إلى (c) و للفرميونات الغير متفاعلة من (d) إلى (f) لنظام نصف ممتلئ مع 1000 موقع شبكي عند مختلف درجات الحرارة

4-3 البوزونات الصلبة (HCB) في شبكة فائقة:

في هذا الجزء ستتم دراسة البوزونات الصلبة في شبكة ضوئية أحادية البعد مضاف إليها كمون حصر خارجي يعطى بالعلاقة التالية:

$$V_{\text{ext}} = \sum_{\text{i}} \text{v}_{\text{ext}}(\text{i}) n_i \qquad (60-3)$$

حيث v_{ext} تمثل شكل الكمون الخارجي المطبق على البوزونات، وهذا ما يسمى بالشبكة الفائقة، أي إضافة إلى الشبكة التي يتواجد بها النظام في البداية نضيف شبكة إضافية لمعرفة مدى تأثيرها على النظام الأول.

3-4-1 البوزونات الصلبة (HCB) في كمون توافقي:

في هذا الجزء تتم دراسة البوزونات الصلبة المحاصرة في شبكة ضوئية مضاف لها كمون الحصر التوافقي، المعطى بالعلاقة التالية [10، 11، 13، 41]:

$$v_{ext}(x) = \frac{1}{2} m\omega_{HO}^2 x^2 \qquad (61-3)$$

$$\omega_{\mathrm{HO}} = \omega_0 \mathrm{k_l} \sqrt{\frac{\hbar}{2|\delta|\mathrm{m}}} \qquad (62-3)$$

$$\omega_{\mathrm{HO}} = 2\sqrt{\frac{|\mathrm{V_0}|\mathrm{E_R}}{\hbar^2}} \qquad (63-3)$$

حيث:

- ✓ $\mathrm{E_R}$ طاقة الارتداد.
- ✓ $\mathbf{V_0}$ عمق الكمون.

هاملتون البوزونات الصلبة في كمون توافقي :

$$\mathrm{H} = -\mathrm{t}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1}(f_{\mathrm{i}}^{\dagger} f_{\mathrm{i}+1} + \mathrm{h.c.}) + \sum_{\mathrm{i}} \frac{1}{2} m\omega_{HO}^2 x_i^2 n_i \qquad (64-3)$$

نضع :

$$V_2 = \frac{1}{2} m\omega_{HO}^2 \qquad (65-3)$$

$$\mathrm{H} = -\mathrm{t}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1}(f_{\mathrm{i}}^{\dagger} f_{\mathrm{i}+1} + \mathrm{h.c.}) + V_2 \sum_{\mathrm{i}} x_i^2 n_i \qquad (66-3)$$

عند $T = 0$ الأنظمة المتغايرة (inhomogeneous) تتميز بعدد الذرات الكلي وبمميز الطول ζ بفضل الحصر التوافقي ويعطى بالعلاقة التالي [13، 19، 38، 61]:

$$\zeta = \left(\frac{V_I}{t}\right)^{-1/2} \qquad (67-3)$$

حيث ζ مقياس طول حسب كمون الحصر المطبق وشبه دالة توزيع الدفوع n_k يتم تنظيمها حسب مقياس الطول ζ كما العلاقة التالية [13، 19، 38، 61]:

$$\langle n_k \rangle = \frac{\mathrm{a}}{\zeta} \sum_{jl=1}^{N} e^{-ik(x_i - j)} \rho_{ij} \qquad (68-3)$$

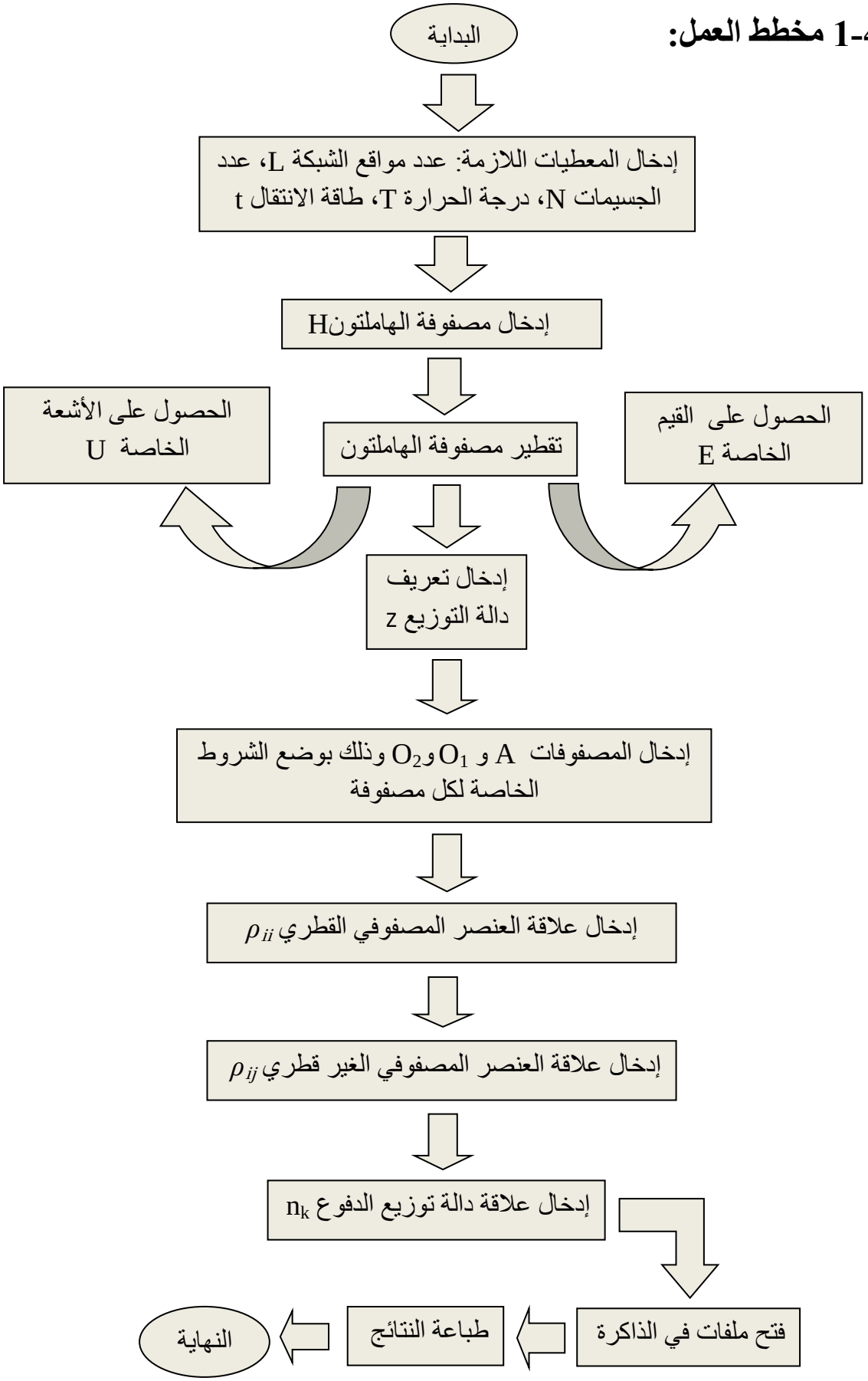
الفصل الرابع

النتائج والمناقشة

في هذا الفصل سنقوم بدراسة توزيع دفوع البوزونات الصلبة في فضاء الطاقات. ستتم أولا دراسة توزيع دفوع البوزونات الصلبة في الشبكات الضوئية والتي تتشكل من تداخل حزم الليزر المتعاكسة في الاتجاه والداخلة في عملية تبريد الذرات من البداية. ثانيا ستتم دراسة البوزونات الصلبة في الشبكات الفائقة حيث يتم الحصول على هذه الشبكات بتطبيق كمون خارجي إضافة إلى كمون الشبكة.

ولمعرفة كيفية توزع دفوع البوزونات الصلبة في الشبكات الضوئية أو الشبكات الفائقة قمنا بإعداد برنامج حاسوبي بلغة الماتلاب (MATLAB) وهو برنامج يقوم بعمليات تحليل وتمثيل البيانات من خلال معالجتها تبعا لقاعدة البيانات الخاصة به وكذا المدخلات الخاصة بنظامنا.

1-4 مخطط العمل:



الشكل (4-1): رسم تخطيطي للبرنامج.

4-2 توزيع دفوع البوزونات الصلبة في شبكة ضوئية أحادية البعد:

فيما يلي سنأخذ في الحساب طاقة الانتقال (القفز) t كمرجع وحدة بالنسبة لدرجة الحرارة (الطاقة الحرارية) وكذا بالنسبة للكمون الخارجي الإضافي المطبق على النظام.

سوف نعتبر فقط الجزء الحقيقي لدالة توزيع الدفوع التالية:

$$n_k = \frac{1}{L}\sum_{ij} e^{-ik(r_i - r_j)}\rho_{ij} = \frac{1}{L}\sum_{ij}\cos(k(r_i - r_j))\rho_{ij} \qquad (1-4)$$

وسنأخذ:

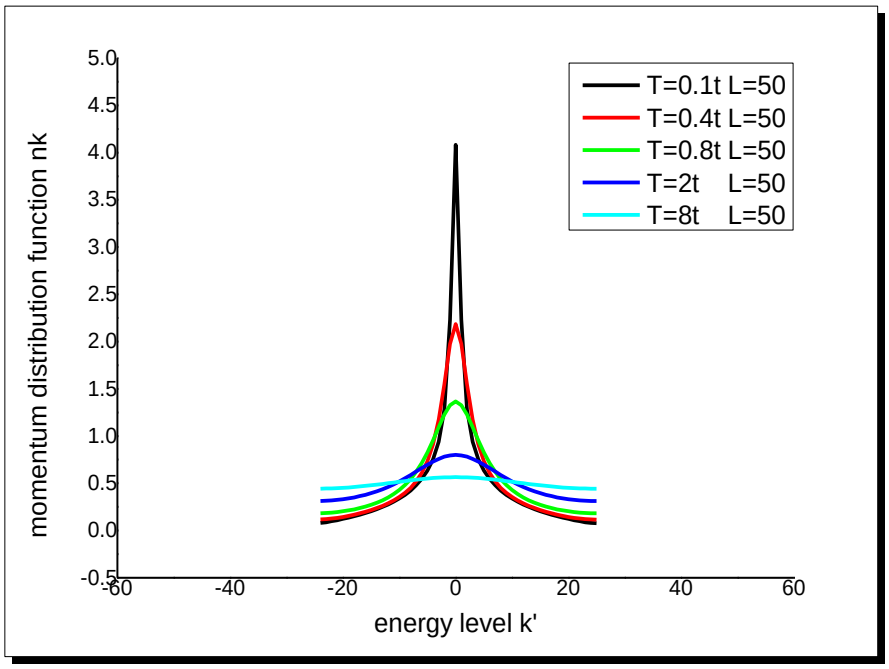
$$k = \frac{2\pi}{L}k' \qquad (2-4)$$

حيث k' عدد صحيح: [59]

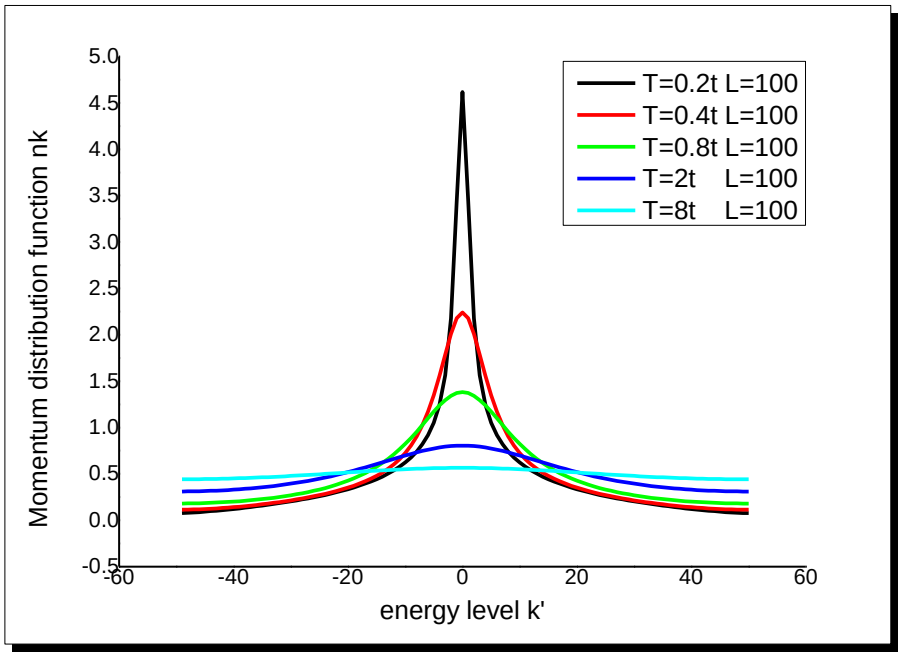
$$k' = -\frac{L}{2} + 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{L}{2} \qquad (3-4)$$

وذلك باعتبار منطقة بريلوان الأولى فقط.

4-2-1- تغير دالة توزيع الدفوع بدلالة درجة الحرارة:



الشكل (4-2): دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة لأنظمة نصف ممتلئة مع 50 موقع شبكي عند مختلف درجات الحرارة.



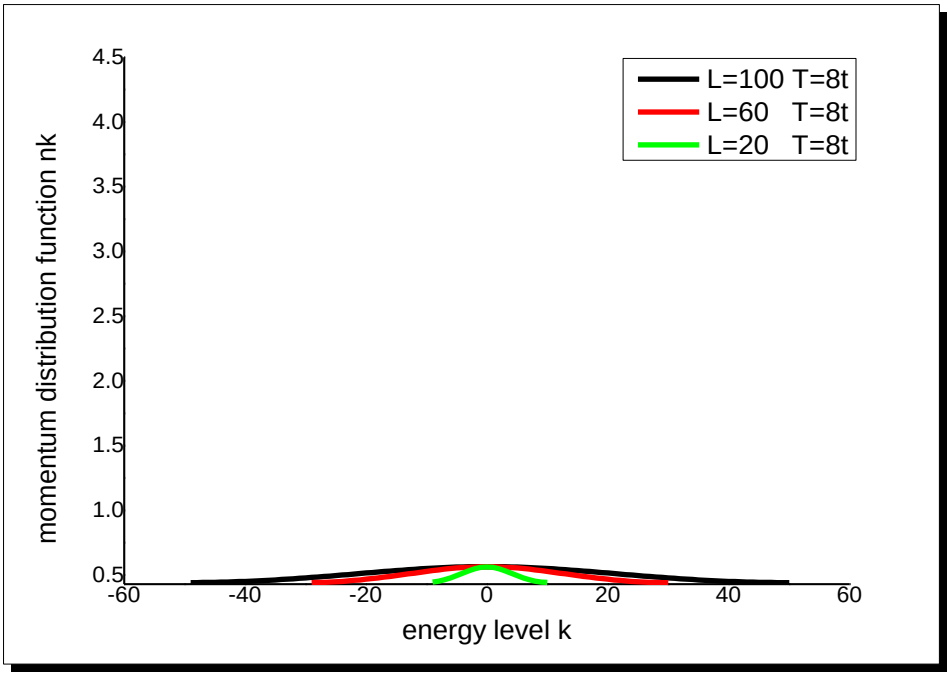
الشكل (4-3): دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة لأنظمة نصف ممتلئة مع 100 موقع شبكي عند مختلف درجات الحرارة.

4-2-1-1 تحليل ومناقشة نتائج توزيع دفوع البوزونات الصلبة بدلالة درجة الحرارة:

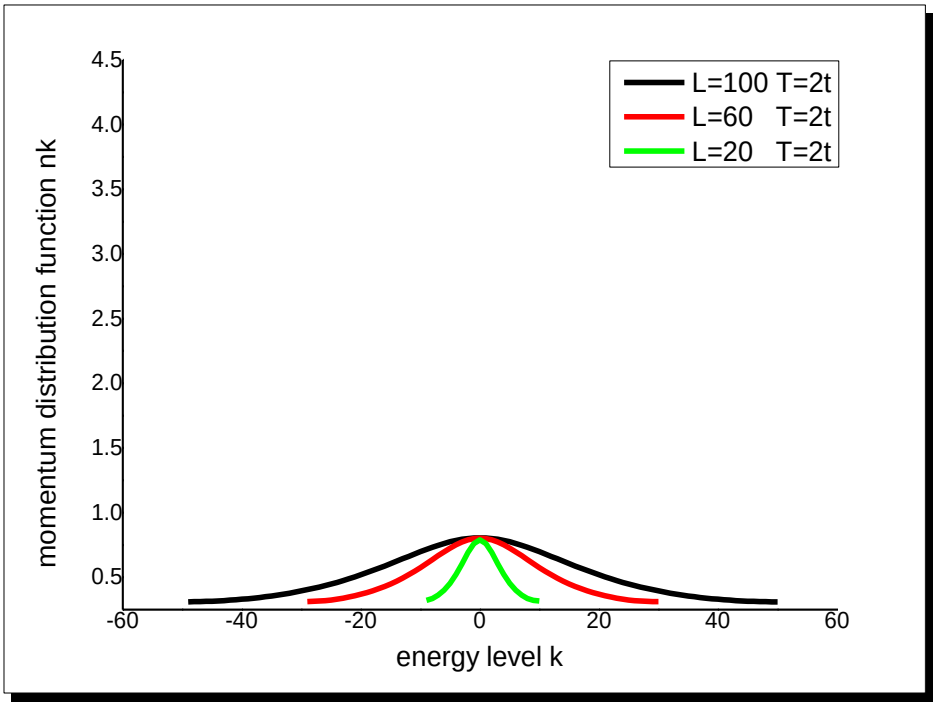
1- كلما انخفضت درجة الحرارة فإن دالة توزيع الدفوع تزداد شدتها عند اقترابها من المستوي الأساسي k=0 -أي زيادة عدد الجسيمات المتواجد في المستوي الأساسي-، حيث تبلغ أقصى قيمة لها عند درجة الحرارة T=0.2t ، وهذا ما يعرف بشبه تكاثف بوز أينشتاين في الأنظمة أحادية البعد، أين يتناسب عدد الجسيمات المتكاثف في الحالة الأساسية بالتقريب مع الجذر التربيعي لعدد الجسيمات الكلي، مختلفا عن تكاثف بوز أينشتين النظامي في حالة نظام ثلاثي البعد والذي يتناسب فيه عدد الجسيمات المتكاثف في الحالة الأساسية مع العدد الكلي للجسيمات، وفي كلتا الحالتين يعتبر هذا النظام المتكاثف مائعا فائقا وهو أحد انتقالات الطور الكمومية.

2- عند T=8t فإن دالة توزيع الدفوع تكون تقريبا ثابتة عند $n_k=0.5$ مهما كان المستوي الطاقوي k، أي أن عدد الجسيمات غير متكاثف في مستو معين وإنما متوزع على كافة المستويات بنفس الكثافة، وهو أيضا انتقال طور معروف باسم عازل موت، وهذه خاصية هامة جدا في دراسة انتقال بعض المواد الكثيفة من أنصاف نواقل إلى عوازل عن طريق تغيير عدد الإسكان لمستويات الطاقة المتاحة للنظام.

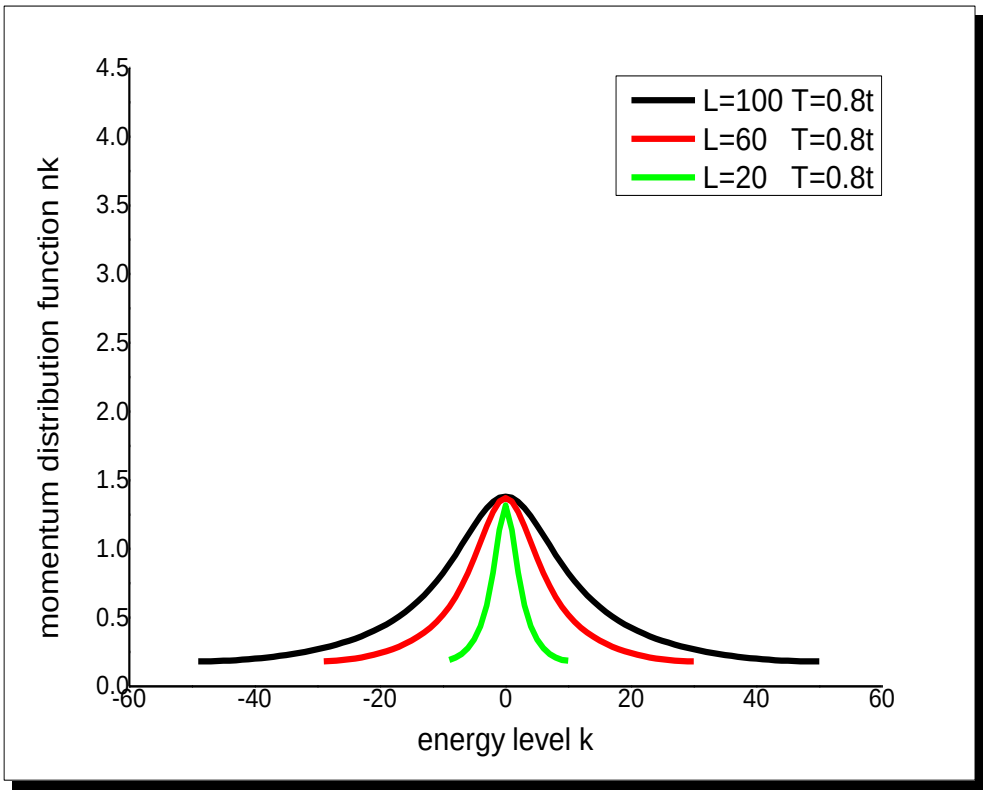
2-2-4 تغير دالة توزيع الدفوع بدلالة درجة الحرارة والحجم (عدد مواقع الشبكة):



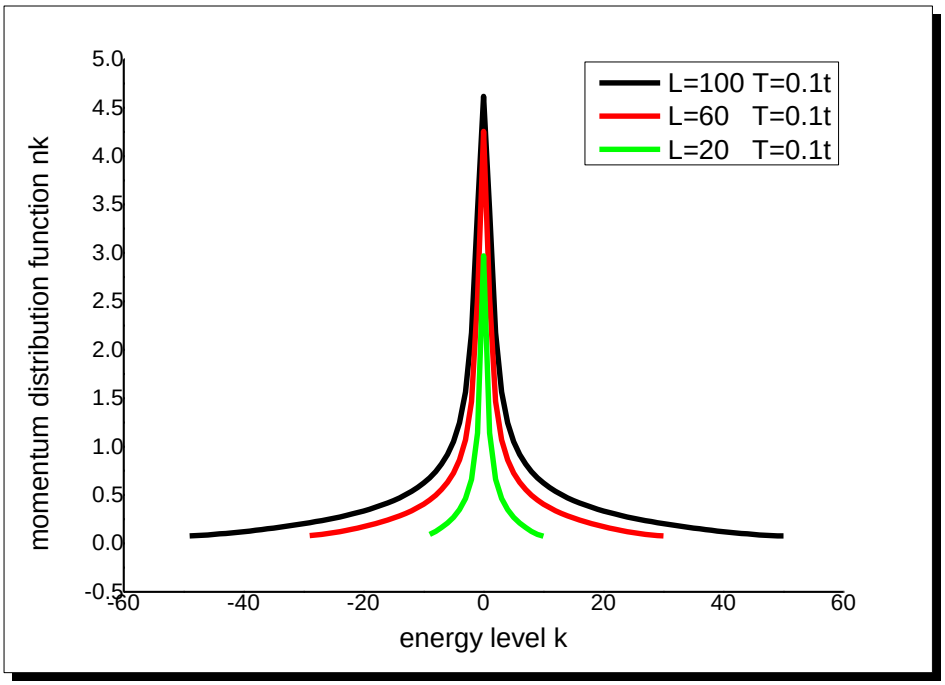
الشكل (4-4): دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة لأنظمة نصف ممتلئة. عند T=8t، ،وذلك مع مختلف عدد المواقع الشبكية.



الشكل (4-5): دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة لأنظمة نصف ممتلئة. عند T=2t، وذلك مع مختلف عدد المواقع الشبكية.

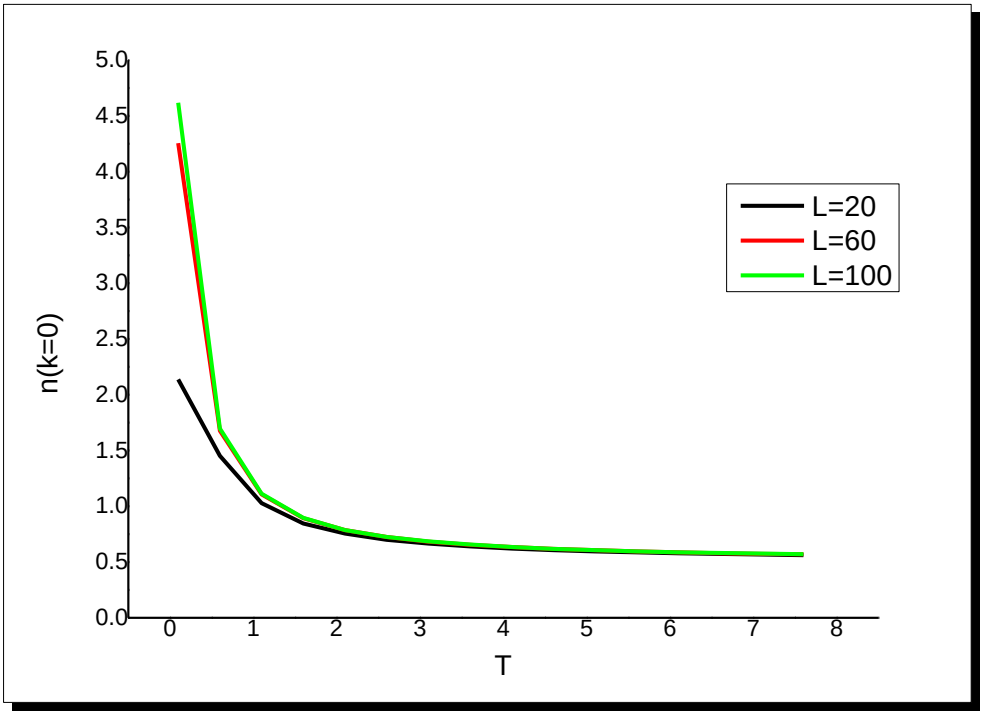


الشكل (4-6): دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة لأنظمة نصف ممتلئة. عند T=0.8t، وذلك مع مختلف عدد المواقع الشبكية.



الشكل (4-7): دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة لأنظمة نصف ممتلئة. عند T=0.1t، وذلك مع مختلف عدد المواقع الشبكية.

4-2-3 تغير القيمة العظمى لدالة توزيع الدفوع بدلالة درجة الحرارة:



الشكل (4-8): قمة دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة عند k=0 بدلالة درجة الحرارة لأنظمة نصف ممتلئة مع مختلف عدد الموقع الشبكية.

4-2-4 تحليل ومناقشة نتائج توزيع دفوع البوزونات الصلبة بدلالة درجة الحرارة والحجم :

1- بالنسبة للأشكال (4-4)، (4-5)، (4-6) و(4-7) كلما زاد عدد الجسيمات زادت دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة على مستوى المستويات المثارة وكذا المستوي الأساسي.

2- نلاحظ أيضا كلما انخفضت درجة الحرارة بالنسبة للأشكال (4-4)، (4-5)، (4-6) و(4-7) فإن دالة توزيع الدفوع تزداد عند k=0 وتبلغ أعلى قمة لها عند T=0.1t، كما أن طور شبه التكاثف يبدو واضحا كلما قل نسبيا عدد الجسيمات بالنظام وهذا ما يسمى بفعل الحجم المحدود (Finite size effect).

3- نلاحظ من الشكل (4-8) أن قمة دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة عند k=0 (حالة الميوعة الفائقة) تتناقص كلما زادت درجة الحرارة وذلك عند مختلف عدد الجسيمات أو المواقع الشبكية، وكلما كان عدد المواقع أكبر كان الانخفاض شديدا، ومرة أخرى نلاحظ فعل الحجم المحدود.

3-4 توزيع دفوع البوزونات الصلبة في كمون شبكة فائقة:

1-3-4 توزيع دفوع البوزونات الصلبة عند إضافة كمون توافقي:

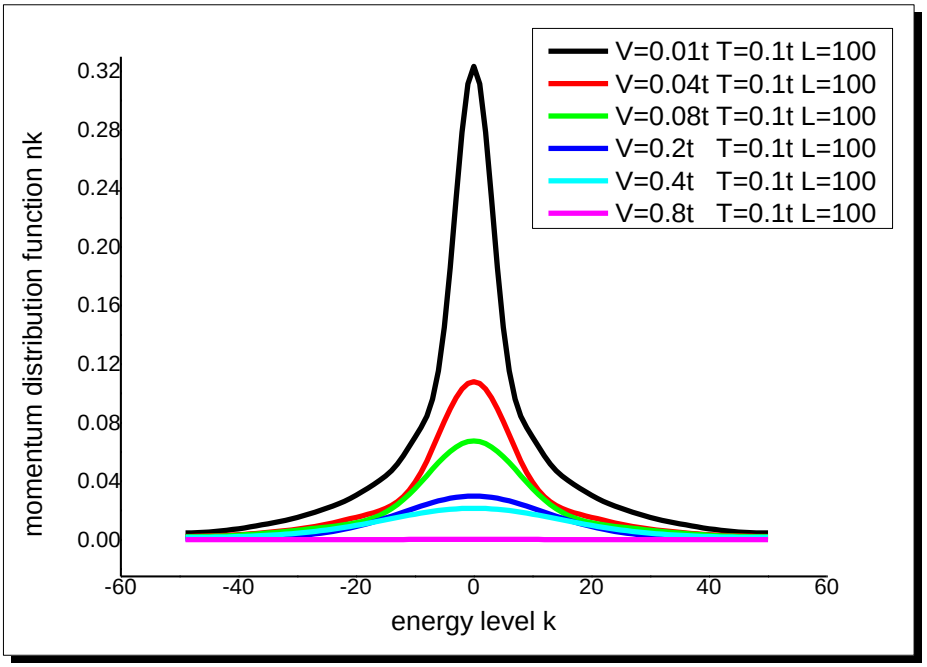
الكمون التوافقي المختار بالنسبة لهذه الدراسة يعطى بالعلاقة التالية:

$$V(x) = vx_i^2 \qquad (4\text{-}4)$$

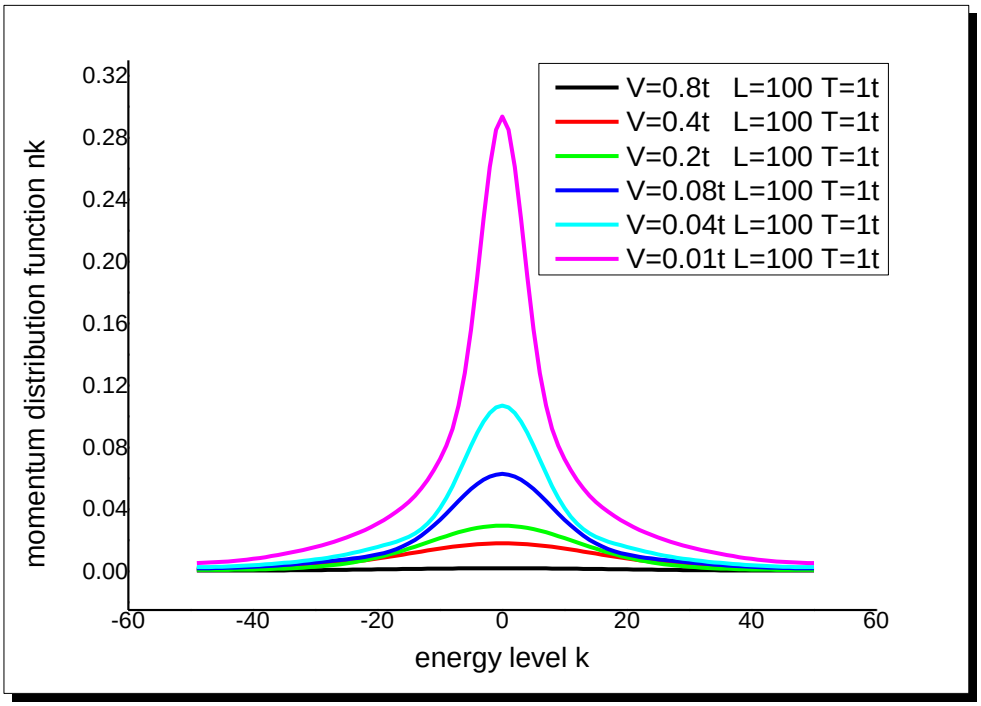
حيث:

- v عمق الكمون.
- x_i^2 شكل دالة الكمون.

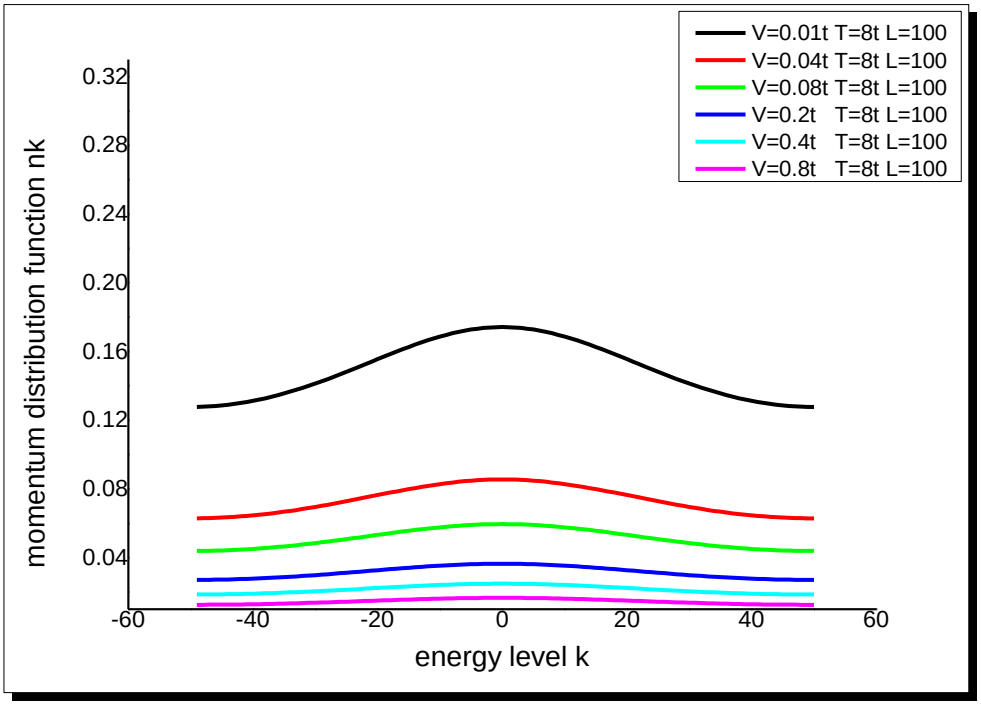
1-1-3-4- تغير دالة توزيع الدفوع بدلالة عمق الكمون لمختلف درجات الحرارة:



الشكل (4-9): دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة في كمون توافقي لأنظمة نصف ممتلئة عند درجة الحرارة T=0.1t مع 100 موقع شبكي.



الشكل (4-10): توزيع دفوع البوزونات الصلبة في كمون توافقي لنظام نصف ممتلئ عند درجات الحرارة T=1t مع 100 موقع شبكي.



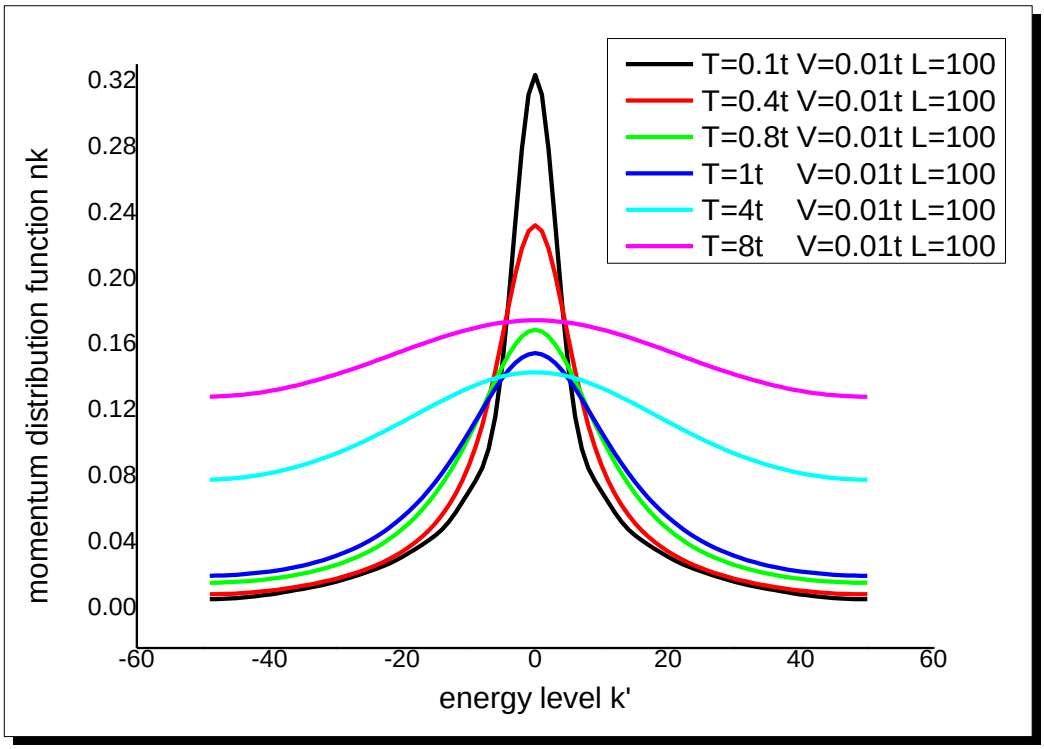
الشكل (4-11): يمثل منحنيات توزيع دفوع البوزونات الصلبة في كمون توافقي لنظام نصف ممتلئ عند درجة الحرارة T=8tمع 100 موقع شبكي.

الملاحظات :

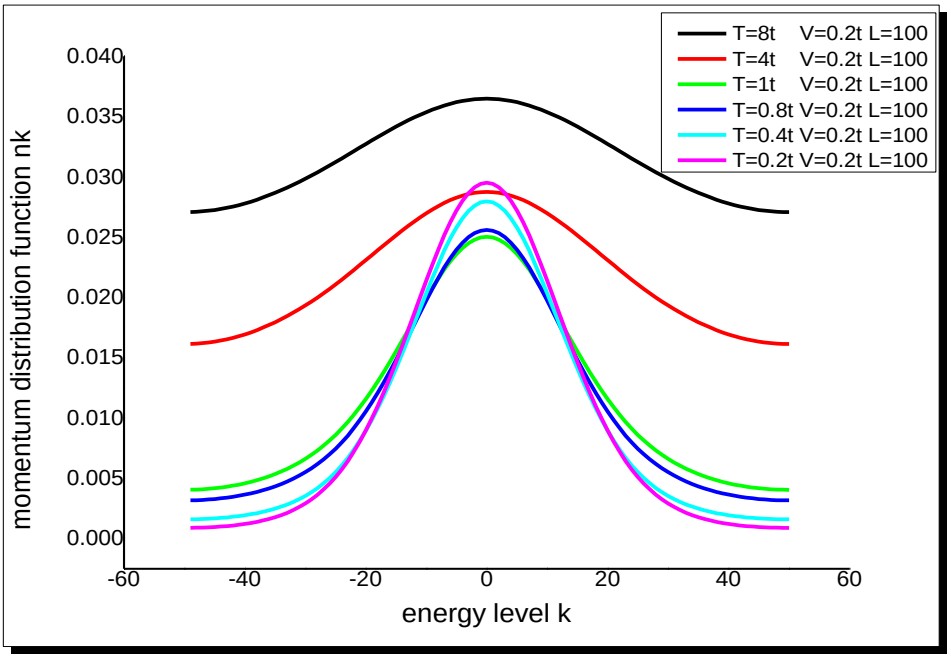
1- كلما انخفضت درجة الحرارة فإن عدد معتبر من الجسيمات ينتقل إلى السوية الأساسية.

2- كلما زاد عمق الكمون التوافقي المطبق زاد عدد الجسيمات في السويات المثارة، هذا يعني أن طاقة الجسيمات قد زادت.

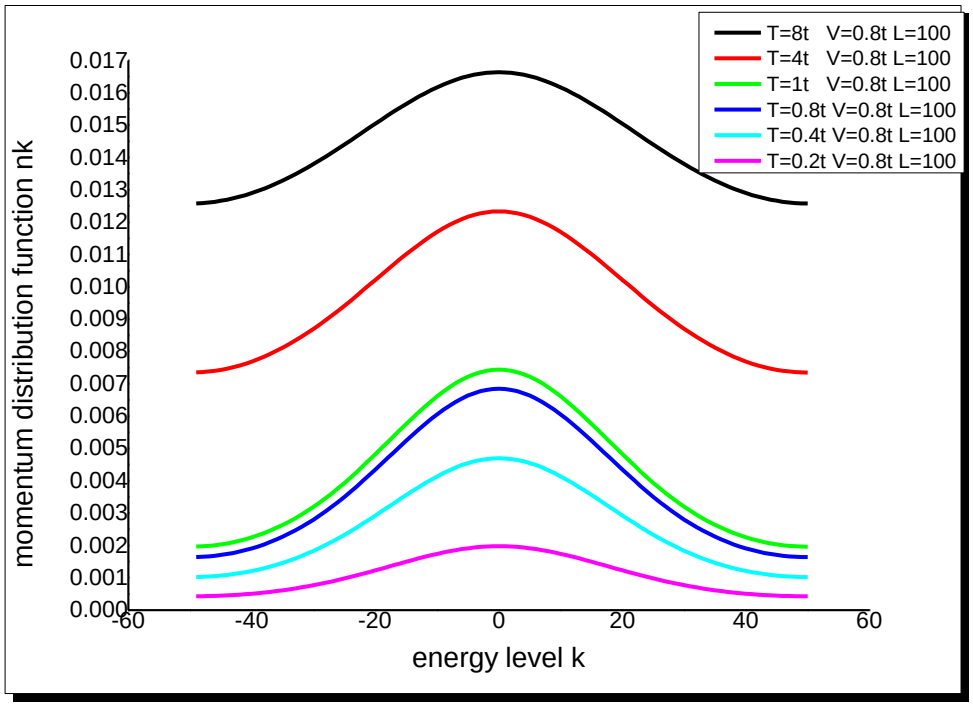
2-1-3-4 تغير دالة توزيع الدفوع بدلالة درجة الحرارة لنفس عمق الكمون:



الشكل (4-12): توزيع دفوع البوزونات الصلبة في كمون توافقي $v=0.01t$ لنظام نصف ممتلئ عند مختلف درجات الحرارة مع 100 موقع شبكي.



الشكل (4-13): توزيع دفوع البوزونات الصلبة في كمون توافقي $v=0.2t$ لنظام نصف ممتلئ عند مختلف درجات الحرارة مع 100 موقع شبكي.



الشكل (4-14): توزيع دفوع البوزونات الصلبة في كمون توافقي $v=0.8t$ لنظام نصف ممتلئ عند مختلف درجات الحرارة مع 100 موقع شبكي.

3-1-3-4 تحليل ومناقشة نتائج توزيع دفوع البوزونات الصلبة عند إضافة كمون توافقي:

1- كلما انخفضت درجة الحرارة فإن توزيع دفوع البوزونات الصلبة يزداد عند k=0 أي يزداد ميول النظام للتواجد بطور شبه تكاثف بوز أينشتين المرتبط بالميوعة الفائقة.
2- كلما زاد عمق الكمون التوافقي المطبق انخفض توزيع دفوع البوزونات الصلبة من المستوي k=0 وازداد في المستويات المثارة، مما يسرع من عملية انتقال الطور من الميوعة الفائقة إلى طور عازل موت.

2-3-4 توزيع دفوع البوزونات الصلبة عند إضافة كمون جيبي:

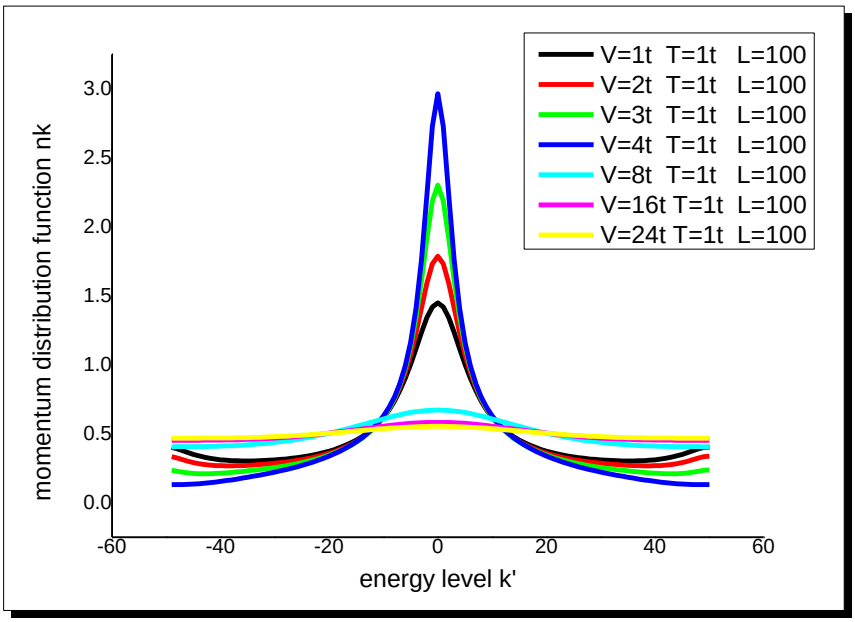
الكمون الجيبي يعطى بالعلاقة التالية:

$$V(x) = v\cos\left(\frac{2\pi x_i}{p}\right) \qquad (5\text{-}4)$$

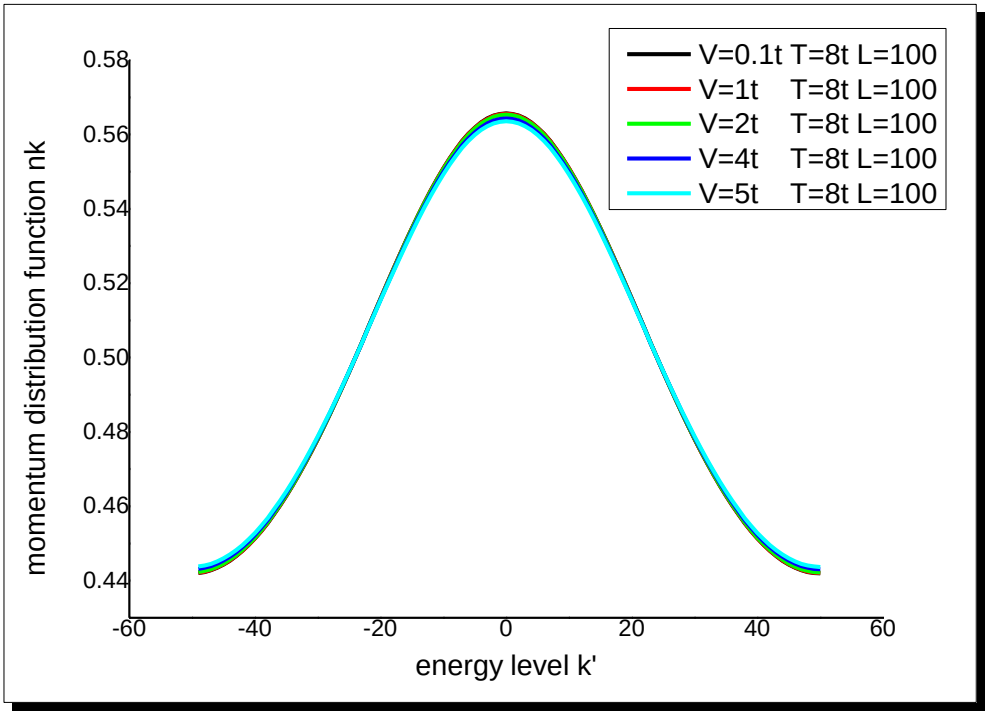
حيث:

- v عمق الكمون.
- $\cos\left(\frac{2\pi x_i}{p}\right)$ شكل دالة الكمون.
- P الدور.

1-2-3-4 تغير دالة توزيع الدفوع بدلالة عمق الكمون لمختلف درجات الحرارة

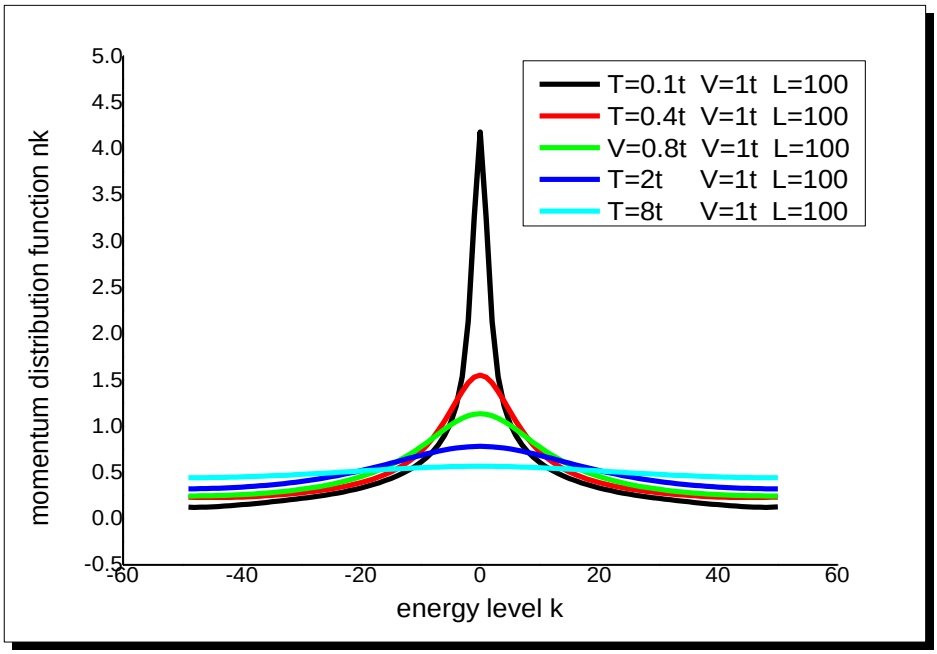


الشكل (4-15): يمثل دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة بتطبيق كمون جيبي عند درجة الحرارة T=1t مع 100 موقع شبكي لنظام نصف ممتلئ.



الشكل (4-16): يمثل دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة بتطبيق كمون جيبي عند درجة الحرارة T=8t مع 100 موقع شبكي لأنظمة نصف ممتلئة.

4-2-3-2 تغير دالة توزيع الدفوع بدلالة درجة الحرارة لنفس عمق الكمون:



الشكل (4-17): دالة توزيع دفوع البوزونات الصلبة بتطبيق كمون جيبي v=1t مع 100 موقع شبكي عند مختلف درجات الحرارة لأنظمة نصف ممتلئة.

4-3-2-3 تحليل ومناقشة نتائج توزيع دفوع البوزونات الصلبة عند إضافة كمون جيبي:

نلاحظ من الأشكال السابقة أنه كلما زاد عمق الكمون انخفضت شدة دالة توزيع الدفوع بالمستوي الأساسي وزادت في المستويات المثارة الشكل (4-15)، مما يعني انخفاض عدد الجسيمات في المستوي الأساسي وزيادته في المستويات المثارة، نفس الأمر في حالة زيادة درجة حرارة النظام الشكل (4-17). ولكن ما يميز الكمون الجيبي عن غيره أنه وعند درجات حرارة المرتفعة نسبيا لا يؤثر تغير عمق الكمون على دالة توزيع الدفوع للنظام الشكل (4-16)، مما يعني أن النظام قد اكتسب توزيعا شبه كلاسيكي شبيه بالتوزيع الماكسويلي.

4-4- التفسير:

1- إن انتقال عدد معتبر من الجسيمات إلى السوية $k=0$ عند انخفاض درجة الحرارة أو عند انخفاض عمق الكمون الخارجي المضاف، يفسر بوجود عدد من البوزونات فقدت جزءا من طاقتها وبالتالي حدوث شبه تكثف للبوزونات الصلبة مما يعني أن التوابع الموجية لجسيمات النظام ستتداخل وبالتالي فإن النظام سيفضل التواجد في الطور الكمومي المسمى بشبه تكاثف بوز أينشتين وهو طور الميوعة الفائقة.

2- كذلك انتقال الجسيمات إلى الحالة المثارة عند زيادة عمق الكمون المطبق يفسر بأنه كلما زاد عمق الكمون الخارجي كلما زاد عمق مواقع الشبكة الفائقة، وبالتالي فإن تداخل التوابع الموجية لجسيمات النظام سينخفض بشكل كبير مما يؤدي بالنظام إلى تفضيل طور عازل موت عن طور الميوعة الفائقة.

الخاتمة العامة

في هذا العمل قمنا بدراسة توزيع دفوع البوزونات الصلبة في الشبكات الفائقة وذلك في بعد واحد، حيث يحدد هاملتون البوزونات الصلبة باستخدام نموذج بوز-هوبارد الذي يستخدم لدراسة الأنظمة الكمية الكثيفة، وحيث أن البوزونات الصلبة تسلك فضائيا نفس سلوك الفرميونات الكمومي، يستعمل تحويل جوردن-فيغنر الذي يحول مؤثرات الإنشاء والإفناء البوزونية إلى مؤثرات الإنشاء والإفناء الفرميونية مما يسهل حساب خصائص النظام، بهذا التحويل وجد أن هاملتون البوزونات الصلبة هو نفسه هاملتون فرميونات عديمة اللف غير المتفاعلة.

لمعرفة كيفية توزع البوزونات الصلبة في فضاء الطاقات عند درجات الحرارة المنتهية، يتم حساب دالة توزيع الدفوع، التي يتم استخراجها بواسطة تحويل فوري لمصفوفة كثافة جسيم واحد، لذلك يتم حساب عناصرها القطرية، المتطابقة بين النظامين البوزوني والفرميوني، وكذا العناصر غير القطرية وهي العناصر التي تميز النظام البوزوني عن الفرميوني.

لحساب دالة توزيع الدفوع إستعملنا برنامج عددي بلغة الماتلاب (MATLAB)، وقمنا بإدخال كل معطيات الحساب.

عند القيام بتخفيض درجة حرارة النظام نلاحظ زيادة شدة دالة التوزيع في المستوي الأرضي، هذا يعني أنه وعند درجة الحرارة المنخفضة نجد أن عدد معتبر من الجسيمات قد شغلت المستوي الأرضي مع وجود عدد غير معدوم من الجسيمات في المستويات المثارة، مما يعني أنه قد حدث شبه تكثف للبوزونات الصلبة حيث تحققنا من أن عدد الجسيمات بالمستوي الأرضي يتناسب تقريبا مع الجذر التربيعي للعدد الكلي للبوزونات الصلبة، وهو طور الميوعة الفائقة في الأنظمة أحادية البعد.وعند زيادة درجة الحرارة نلاحظ انخفاض معدل تواجد الذرات في المستوي الأساسي ويزداد في باقي المستويات المثارة.

وعند إضافة كمونات خارجية للشبكة الضوئية التي تتواجد على مستواها البوزونات الصلبة نحصل على ما يسمى بالشبكات الفائقة، فإنه عند درجات الحرارة المنخفضة يحدث شبه تكثف للبوزونات الصلبة وعندها يظهر لنا ما يسمى بطور الميوعة الفائقة، وعند درجات الحرارة المرتفعة تتوزع الجسيمات على كافة المستويات الطاقية للنظام بنفس القدر وهو ما يسمى بطور عازل موت، وبسبب الكمون الخارجي المطبق على البوزونات والمضاف إلى كمون الشبكة تتغير سرعة الانتقال ما بين الطورين وفقا لعمق الكمون وكذا حجم النظام ودرجة حرارته.

قائمة المراجع

[1] Christoph Maschler et al, "Ultracold Atoms in Resonator-Generated Optical Lattices", (2007).

[2] Kagan, Yu, A. E. Muryshev, and G. V. Shlyapnikov. "Collapse and Bose-Einstein condensation in a trapped Bose gas with negative scattering length." *Physical Review Letters* 81.5, P: 933 (1998).

[3] Wineland, David J., and Wayne M. Itano. "Laser cooling of atoms." *Physical Review A* 20.4, P: 1521 (1979).

[4] De, S., et al. "Magneto-optical trapping of barium." *Physical Review A* 79.4, P: 041402 (2009).

[5] Anwar, Muhammad. "Laser Cooling and Trapping of Cesium Atoms." (2015).

[6] Franke-Arnold, Sonja. "Lévy statistics and laser cooling—how rare events bring atoms to rest: F. Bardou, J. Bouchaud, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji; Cambridge University Press, Cambridge, 2001, 214pp, price£ 19.95 (paperback);£ 60.00 (hardback), ISBN 0-521-00422-5 (paperback), 0-521-80821-9 (hardback).", P: 226-227 (2003).

[7] Zhang, Jun, et al. "Laser cooling of a semiconductor by 40 kelvin." *Nature* 493.7433, P: 504 (2013).

[8] Jaksch, Dieter, and Peter Zoller. "The cold atom Hubbard toolbox." *Annals of physics* 315.1, P: 52-79 (2005).

[9] Curtis, E. Anne, Christopher W. Oates, and Leo Hollberg. "Quenched narrow-line second-and third-stage laser cooling of 40 Ca." *JOSA B* 20.5, P: 977-984 (2003).

[10] Hutchinson, D. A. W., E. Zaremba, and A. Griffin. "Finite temperature excitations of a trapped Bose gas." *Physical review letters* 78.10, P: 1842 (1997).

[11] Giorgini, S., L. P. Pitaevskii, and S. Stringari. "Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting Bose gas." *Physical Review A* 54.6, P: R4633 (1996).

[12] Eisenberg, Eli, and Elliott H. Lieb. "Polarization of interacting bosons with spin." *Physical review letters* 89.22, P: 220403 (2002).

[13] Rigol, Marcos. "Finite-temperature properties of hard-core bosons confined on one-dimensional optical lattices." *Physical Review A* 72.6, P: 063607 (2005).

[14] J. Ruseckas, G. Juzeliunas, P. Oehberg, M. Fleischhauer "Non-Abelain gaug potentials for ultra-cold atoms with degenerate darck states", (2005).

[15] Müller, Torben, et al. "State preparation and dynamics of ultracold atoms in higher lattice orbitals." *Physical review letters*99.20, P: 200405 (2007).

[16] Rigol, Marcos, and Alejandro Muramatsu. "Fermionization in an expanding 1D gas of hard-core bosons." *Physical review letters* 94.24, P: 240403 (2005).

[17] Schenke, Christoph. *Bosons de Tonks et Girardeau dans un anneau à une dimension*. Diss. Université de Grenoble, (2012).

[18] Pollet, Lode, et al. "Phase diagram of Bose-Fermi mixtures in one-dimensional optical lattices." *Physical review letters* 96.19, P: 190402 (2006).

[19] Cazalilla, M. A., et al. "One dimensional bosons: From condensed matter systems to ultracold gases." *Reviews of Modern Physics* 83.4, P: 1405 (2011).

[20] Jaksch, Dieter, et al. "Cold bosonic atoms in optical lattices." *Physical Review Letters* 81.15, P: 3108 (1998).

[21] Schreck Floriqn."Loser cooling to quantum degeneracy". APS Division of atomic molecular and Optical Physics Meeting Abstracts. (2013).

[22] Stellmer Simon, et al. Laser cooling to quantum degeneracy.Physical review letter 110.26, P: 263003 (2013).

[23] Metcalf, Harold J., and Peter Van der Straten. *Laser cooling and trapping of neutral atoms*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, (2007).

[24] Baym, Gordon, and C. J. Pethick. "Ground-state properties of magnetically trapped Bose-condensed rubidium gas." *Physical review letters* 76.1, P;6 (1996).

[25] A. ASPECT, C. FQBRE et G. GRYNBERG Optique quantique 1 :Lasers, Tome II. P.

[26] Petsas, Konstantinos I. *Atomes ultrafroids dans des réseaux de lumière: étude théorique du magnétisme, de la température et des structures multidimensionnelles* . Diss. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, (1996).

[27] COHEN-TANNOUDJI, CLAUDE N. "Manipulating atoms with photons." *Physics, 1996-2000* 1996, P: 166 (2002).

[28] Mandonnet, Emmanuel. *Etude théorique d'un gaz de Bose atomique ultra-froid: 1. Diffusion et localisation de la lumière 2. Condensation de Bose-Einstein en dimensionalité réduite*. Diss. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, (2000).

[29] Ma, Ping N. *Numerical simulations of bosons and fermions in three dimensional optical lattices*. Diss. ETH Zurich, (2013).

[30] Petrov, D. S., G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven. "Regimes of quantum degeneracy in trapped 1D gases." *Physical Review Letters* 85.18, P: 3745 (2000).

[31] Busch, Thomas, et al. "Two cold atoms in a harmonic trap." *Foundations of Physics* 28.4, P: 549-559. (1998).

[32] García-Ripoll, Juan José, and Juan Ignacio Cirac. "Spin dynamics for bosons in an optical lattice." *New Journal of Physics* 5.1, P:76 (2003).

[33] Freericks, J. K., and H. Monien. "Phase diagram of the Bose-Hubbard model." *EPL (Europhysics Letters)* 26.7, P:545 (1994).

[34] Kühner, Till D., and H. Monien. "Phases of the one-dimensional Bose-Hubbard model." *Physical Review B* 58.22, P: R14741 (1998).

[35] Girardeau, M. D., E. M. Wright, and J. M. Triscari. "Ground-state properties of a one-dimensional system of hard-core bosons in a harmonic trap." *Physical Review A* 63.3, P: 033601 (2001).

[36] Santachiara, Raoul, Franck Stauffer, and Daniel C. Cabra. "Entanglement properties and momentum distributions of hard-core anyons on a ring." *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2007.05, P: L05003 (2007).

[37] Gudyma, Andrii. *Non-equilibrium dynamics of a trapped one-dimensional Bose gas*. Diss. Paris Saclay, (2015).

[38] Köhl, Michael, et al. "Fermionic atoms in a three dimensional optical lattice: Observing Fermi surfaces, dynamics, and interactions." *Physical review letters* 94.8, P: 080403 (2005).

[39] Schachenmayer, J., et al. "Dynamical crystal creation with polar molecules or Rydberg atoms in optical lattices." *New Journal of Physics* 12.10, P: 103044 (2010).

[40] Scarola, V. W., and S. Das Sarma. "Quantum phases of the extended Bose-Hubbard Hamiltonian: Possibility of a supersolid state of cold atoms in optical lattices." *Physical review letters*95.3, P: 033003 (2005).

[41] Recati, A., et al. "Fermi one-dimensional quantum gas: Luttinger liquid approach and spin–charge separation." *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* 5.2, P: S55 (2003).

[42] Freericks, J. K., and H. Monien. "Strong-coupling expansions for the pure and disordered bose-hubbard model." *Physical Review B* 53.5, P: 2691 (1996).

[43] Kondov, Stanimir. "Bose-Hubbard Model." (2008).

[44] Elstner, N., and H. Monien. "Dynamics and thermodynamics of the Bose-Hubbard model." *Physical Review B* 59.19, P: 12184 (1999).

[45] Kühner, Till D., Steven R. White, and Hartmut Monien. "One-dimensional Bose-Hubbard model with nearest-neighbor interaction." *Physical Review B* 61.18, P: 12474 (2000).

[46] Läuchli, Andreas M., and Corinna Kollath. "Spreading of correlations and entanglement after a quench in the one-dimensional Bose–Hubbard model." *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2008.05, P: P05018 (2008).

[47] Kollath, Corinna, Andreas M. Läuchli, and Ehud Altman. "Quench dynamics and nonequilibrium phase diagram of the Bose-Hubbard model." *Physical review letters* 98.18, P: 180601 (2007).

[48] Wessel, Stefan, and Matthias Troyer. "Supersolid hard-core bosons on the triangular lattice." *Physical review letters* 95.12, P: 127205 (2005).

[49] Trotzky, Stefan, et al. "Time-resolved observation and control of superexchange interactions with ultracold atoms in optical lattices ." *Science* 319.5861, P: 295-299 (2008).

[50] Hofstetter, Walter, et al. "High-temperature superfluidity of fermionic atoms in optical lattices." *Physical review letters* 89.22, P: 220407 (2002).

[51] Zwerger, Wilhelm. "Mott–Hubbard transition of cold atoms in optical lattices." *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* 5.2, P: S9 (2003).

[52] De Nardis, Jacopo, and Jean-Sébastien Caux. "Analytical expression for a post-quench time evolution of the one-body density matrix of one-dimensional hard-core bosons." *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2014.12, P: P12012 (2014).

[53] Rigol, Marcos, et al. "Relaxation in a completely integrable many-body quantum system: An ab initio study of the dynamics of the highly excited states of 1d lattice hard-core bosons." *Physical review letters* 98.5, P: 050405 (2007).

[54] Wiese, U-J. "Ultracold quantum gases and lattice systems: quantum simulation of lattice gauge theories." *Annalen der Physik* 525.10-11, P: 777-796 (2013).

[55] Bernardet, Karim, George G. Batrouni, and Matthias Troyer. "Destruction of diagonal and off-diagonal long-range order by disorder in two-dimensional hard-core boson systems." *Physical Review B* 66.5, P: 054520 (2002).

[56] Derzhko, Oleg. "Jordan-wigner fermionization for spin-1/2 systems in two dimensions: A brief review." *arXiv preprint cond-mat/0101188* (2001).

[57] Leclair, A., and Giuseppe Mussardo. "Finite temperature correlation functions in integrable QFT." *Nuclear Physics B* 552.3, P: 624-642 (1999).

[58] Varney, C. N., et al. "Quantum Monte Carlo study of the two-dimensional fermion Hubbard model." *Physical Review B* 80.7, P: 075116 (2009).

[59] Philippe Mendels, "cours de matirere condensee", Université Paris-Sud, (2014).

[60] Zaremba, Eugene, Tetsuro Nikuni, and Allan Griffin. "Dynamics of trapped Bose gases at finite temperatures." *Journal of Low Temperature Physics* 116.3-4, P: 277-345 (1999).

[61] Rigol, Marcos, and Alejandro Muramatsu. "Quantum Monte Carlo study of confined fermions in one-dimensional optical lattices." *Physical Review A* 69.5, P: 053612 (2004).

الملخص

البوزونات الصلبة هي بوزونات تتواجد على شبكات ضوئية لا يمكن لها أن تشغل نفس الموقع الشبكي وكأنها فرميونات بالنسبة للحالات الكمومية، إذ تتميز بوجود طاقة تفاعل لانهائية فيما بينها. يتم الحصول على البوزونات الصلبة بتبريد غاز من البوزونات إلى درجات حرارة قريبة من الصفر المطلق، وللوصول إلى هذه الدرجات المنخفضة يتم استخدام تقنية التبريد بالليزر. هذه التقنية تقوم بتعريض الذرات إلى ستة حزم ليزر متعامدة ومتعاكسة في الاتجاه وذلك عبر عدة آليات، ابتداء من تبريد دوبلر، تبريد سيزيف وصولا إلى التبريد التبخيري والتي بفضلها تم تحقيق تكثف بوز أينشتاين تجريبيا. إن الانتشار المتعاكس لأشعة الليزر يولد شبكات ضوئية تساهم في حجز الذرات في آبار كمونية، وللحصول على الشبكات الفائقة يتم تطبيق كمون خارجي إضافة إلى كمون الشبكة. لمعرفة كيفية توزع دفوع البوزونات الصلبة في الشبكات الفائقة يتم حساب دالة توزيع الدفوع والتي هي عبارة عن تحويل فوري لمصفوفة كثافة جسيم واحد للنظام. من أجل ذلك قمنا بإعداد برنامج حاسوبي بلغة الماتلاب (MATLAB) لمعالجة مختلف وضعيات نظام البوزونات الصلبة في بعد واحد تحت تأثير شبكة ضوئية فائقة وعند درجات حرارة منتهية. لقد وجدنا أنه عند درجات الحرارة المنخفضة يحدث شبه تكاثف بوز-أينشتاين للبوزونات الصلبة، وهي خاصية تميز الأنظمة البوزونية ذات N جسيم وذات البعد الواحد حيث عدد البوزونات في المستوي الأرضي متناسب مع الجذر التربيعي للعدد الكلي لبوزونات النظام، ويعتبر النظام في هذا الطور مائعا فائقا أي مائعا لزوجته صفر. عند إضافة كمون خارجي وجدنا أنه وبزيادة عمق الكمون يفقد النظام طور الميوعة الفائقة وعند درجات حرارة مرتفعة نسبيا ينتقل النظام إلى طور عازل موت أين كل طاقات النظام المسموحة مشغولة بنفس الكثافة.

الكلمات المفتاحية: بوزونات صلبة، شبكات ضوئية، التبريد بالليزر، شبه تكاثف بوز-أينشتاين، مائع فائق، عازل موت.

Résumé :

Les Bosons à cœur dur (BCD) (Hard Core Bosons (HCB)) sont des particules bosoniques ultrafroides à température proche du zéro Kelvin, ils sont toujours à l'état gazeux et piégés dans des sites des réseaux optiques. Les BCD ne peuvent pas occuper le même site du réseau à cause des interactions infiniment répulsives entre eux, donc spatialement ils se comportent comme des fermions. Ces Bosons sont obtenus par les techniques de refroidissement laser : Doppler, Sisyphe et évaporatif qui permet d'atteindre la température critique pour la condensation de Bose-Einstein. Les faisceaux laser contrepropageants génèrent des réseaux optiques en permettant de piéger les particules ultrafroides entre les vallées et les collines du potentiel créé lors des phénomènes d'interférence, et pour obtenir un super-réseau optique on ajoute un potentiel extérieur supplémentaire. Pour explorer le comportement d'un système de Bosons à cœur dur concernant ses réponses quant à la variation des températures ainsi que la variation des profondeurs du potentiel supplémentaire, on a développé un code Matlab pour calculer la fonction de distribution d'impulsion du système. Notre travail a été consacré sur la mise en évidence des phénomènes fondamentaux, tel que la présence ou l'absence du passage entre phases différentes à N corps des BCD. Pour des températures très basses la plupart des particules du système s'accumulent dans l'état fondamental, on parle ici de la transition de phase quasi-condensat de Bose Einstein, c'est le phénomène qui distingue les systèmes bosoniques unidimensionnels, où le nombre de particules condensées est proportionnel à la racine carrée du nombre de particules total, et le système est ainsi un Superfluide dont la viscosité est égale à zéro. En ajoutant au système des potentiels un peu profonds et à des températures assez élevées la transition de phase d'Isolant de Mott a eu lieu, où toutes les énergies permises au système sont équi-occupées.

Mots clés :Bosons à cœur dur, réseaux optiques, refroidissement laser, quasi-condensat de Bose Einstein, Superfluide, Isolant de Mott.