N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ D'EL-OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation numérique

Présenté par: Chabane Messaouda
Hamati Mouna
Kina Mouna

Thème

Opérateurs linéaires bornés

Soutenu le …juin 2014

Devant le jury composé de:

Mr. Ahfouda Bel Hadi	MA (B) Univ. El Oued	Président
Mr. Hariz Bekkar Lourabi	MA (B) Univ. ElOued	examinateur
Mr. Meneceur Bekkar	MA (B) Univ. ElOued	Rapporteur

Année universitaire 2013 – 2014

Remerciements

Nous tenons à remercier vivement le professeur MENECEUR BEKKAR pour avoir accepter de diriger ce travail, ainsi que pour sa gentillesse, son dévouement et ses conseils précieux.

Nous remerçions aussi nos parents pour leur soutien moral et materiel durant la periode de préparation

et ă tous les amis et proches qui nous ont aidé ă l'élabortion de ce travail.

Table des matières

Introduction générale

L'analyse fonctionnelle est apparu au début du $20^{éme}$ siècle, mais malgré sa nouveauté il occupe actuellement un centre d'excellence entre les sciences mathématiques contemporain le concept de déplacement des concepts les plus importants de l'analyse fonctionnelle, et celui-ci était une généralisation de la notion de fonction dans l'analyse mathématique et la théorie des opérateurs est trés important de l'analyse fonctionnelle elle intéressés à étudier les propriétés des opérateurs et ces utiliser pour resolutions des problèmes mathématiques de sorte que certains noméent la théorie des opérateurs la colonne vertébrale de l'analyse fonctionnelle, dont à partire ce cette théorie il pénétre à la mécanique quantique et l' équations différentielles et le propabilite et plusieurs de displines pratiques, et parmis des opérateurs et plus importantes l'opérateur linéaire borné qui sont étudiées dans cette mémoire.

Dans le premier chapitre: nous avons étudié les plus importants Topologiques concepts initiales, et des définitions des espaces dans lesquels nous avons étudiés notre sujet.

Dans le deuxième chapitre: nous avons étudié l'opérateur linéaire borné sur un espace normé en général, et en particulier sur l'espace de Hilbert comme mentionné le spectre d'opérateur et la resolvante et ce caractéristiques prinsipales, puis nous avons bordé notre étudier pour les opérateurs compactes ainsi nous avons étudié un de les opérateurs linéaires bornés qui est l'opérateur linéaire compacte.

Dans le troisième chapitre: on définissons l'opérateur intégral, et nous avons justifié que chaque opérateur intégral est un opérateur compact, et chaque opérateur intégral a un seul adjoint, et quand il est auto-adjoint.

Notations et conventions

d	distence.
$\overline{A}$	adhérence.
$B_0\,(a,R)$	boule ouverte.
$B\,(a,R)$	boule fermée.
$\| \, . \, \|$	norme.
$< -, - >$	produit scalaire.
$\max$	maximum.
$\sup$	superieur.
A	opérateur linéaire.
A_n	suite des opérateurs linéaires.
A^{-1}	opérateur inverse.
$\dim$	dimension.
$sp\,(A)$	spectre d'un opérateur.
$\sigma\,(A)$	resolvant d'un opérateur.
A^*	adjoint.

Chapitre 1

préliminaires(*éléments de topologie*)

L'étude les espace et les acception topologique trésintéressant pour l'étude des opérateurs linéaires bornés par ce qu'ils appointent les caractéristiaques et les article ces opérateur linéaire.

1.1 Espace topologique

Soit E un ensemble et $P(E)$ l'ensemble des parties de E.

Définition 1.1.1 *(topologie)*

Une topologie $\tau \subset P(E)$ d'un ensemble E est la partie de E vérifant:

$i)$ $\varnothing \in \tau$ et $E \in \tau$.

$ii)$ $\theta_1 \in \tau$, $\theta_2 \in \tau \Longrightarrow \theta_1 \cap \theta_2 \in \tau$ (intersection finie).

$iii)$ $\theta_i \in \tau$, $\forall i \in I \Longrightarrow \underset{i \in I}{\cup} \theta_i \in \tau$ (union quelconque).

Les éléments $\theta \in \tau$ sont appelés ouverts, (E, τ) est appelé espace topologie.

Les complémentaires des ouverts d'une topologie s'appellent les fermés de cette topologie.

Définition 1.1.2 *(voisinage)*

Un sous-ensemble $V \subset E$ est appelé voisinage d'un point a, s'il existe un ouvert $\theta \subset \tau$ tel que $\theta \subset V$ et $a \in \theta$.

1.1.1 Ensembles compacts et ensembles relativement compacts

Ensembles compacts

Définition 1.1.3 *(espace topologique séparé)*

Un espace topologique E est séparé si pour tout x, $y \in E$ tel que $x \neq y$ il existe deux parties ouvertes θ, U telles que

$$x \in \theta,\ y \in U \text{ et } \theta \cap U = \varnothing.$$

Définition 1.1.4 (*recouvrement*)

Soit $A \subset E$ on appelle recouvrement de A tout famille $(U_i)_{i \in I}$ tel que $U_i \subset A$ verifie $A \subset \underset{i \in I}{\cup} U_i$

Définition 1.1.5

Une partie A d'un espace topologique $(E,\, \tau_E)$ est compacte si $(A,\, \tau_A)$ est un espace compact. Autrement dit pour tout x, $y \in A$, il existe deux ouvertes U_x, U_y de E tels que

$$x \in U_x,\ y \in U_y,\ U_x \cap U_y \cap A = \varnothing$$

est pour tout recouvrement de A par des ouverts de E.

$A \subset \underset{i\, \in\, I}{\cup} U_i$, il existe un recouvrement fini

$$A \subset U_{i_1} U U_{i_2} .... U U_{i_n} \text{ avec } (i_1....i_n) \subset I$$

Définition 1.1.6 *(compact)*

Soit E un espace topologique séparé une partie $K \subset E$ est dite compacte si pour tout recouvrement ouvert de K posséde un sous recouvrement fini.

Si E est compact on dit que E est un espace compact.

Lemme 1.1.1

Une partie compacte d'un espace séparé est fermée, en particulier pour un espace compact, une partie est fermée si et seulement si elle est compact.

Lemme 1.1.2

Toute partie fermée d'un espace compact est compacte.

Ensembles Relativement compacts

Définition 1.1.7

On dit $A \subset E$ est relativement compact s'il existe B compacte telle que $A \subset B$.

1.2 Espace métrique

Définition 1.2.1 *(distance)*

Soit E un ensemble, une distance sur E est une application $d : E \times E \longrightarrow [0, \ +\infty[$ telle que pour touts x, y, z dans E

$i)$ $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

$i)$ $d(x, y) = d(y, x)$

$iii)$ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Tout ensemble E muni d'une distance d, (E, d) est un espace métrique.

Définition 1.2.2 *(suite de Cauchy)*

Soit (E, d) un espace métrique, une suite de Cauchy dans E est une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ N \in \mathbb{N}, \forall \ m, n \geq N, \ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Définition 1.2.3 *(suite converge)*

Soit (E, d) un espace métrique et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$une suite de points de E, soit $x \in E$ on dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x si l'on a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ N \in \mathbb{N}, \forall \ n \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

Définition 1.2.4 *(boule ouverte et boule fermée)*

– On appelle boule ouverte de centre a et rayon $R > 0$: $B_0(a, R) = \{x \in E, d(a, x) < R\}$

– On appelle boule fermée de centre a et rayon $R > 0$: $B(a, R) = \{x \in E, d(a, x) \leq R\}$

Définition 1.2.5 *(adhérence)*

Soit E un espace métrique, et $A \neq \varnothing$ une partie de E on dit

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \{\forall R > 0 : B(x, R) \cap A \neq \varnothing\}$$

1.3 Espace normé

On appelle norme sur un espace vectoriel une application $\| \,.\, \|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions

$i)$ $\| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

$ii)$ $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{k}$.

$iii)$ $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ pour tout x et tout y de E.

Exemple 1.3.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et pour tout p dans $[1, +\infty[$, la formule $\| (x_1,\ldots,x_n) \| = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.3.1

Soit $\| \,.\, \|$ une norme sur un espace vectoriel E alors $d(x, y) = \| x - y \|$ est une distance.

Définition 1.3.1 (*espace normé*)

Un espace vectoriel normé est une espace vectoriel muni de norme.

Exemple 1.3.2

Soit $E = \mathbb{R}^n$ un espace vectoriel muni par la valeure absolue est un espace voctoriel normé.

1.4 Espace de Banach

Définition 1.4.1 (*espace métrique complet*)

Un espace métrique (E, d) est complet si tout suite de Cauchy de points de E est convergente dans E.

Définition 1.4.2 (*espace de Banach*)

Un espace de Banach est un espace voctoriel normé $(E, \| \,.\, \|)$ (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) qui est complet pour la métrique définie par la norme.

- $C([0, 1])$ muni de la norme infinie $\| f \|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} | f(t) | / \{C$ est l'ensemble d'applications continues

1.5 Espace de Hilbert

Définition 1.5.1 (*produit scalaire*)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$, un produit scalaire sur E est application de $E \times E$ dans $\mathbb{k}$, noteé $< -, - >$ possédant noteé les propriétés suivantes pour tout x, y, z dans E et $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$

i) $\forall x_1, x_2, y \in E \quad \alpha \in \mathbb{k} < \alpha x_1 + \beta x_2, y > = \alpha < x_1, y > + \beta < x_2, y >$.

ii) $< y, x > = \overline{< x, y >}$.

iii) $< x, x > \geqslant 0$

iiii) $< x, x > = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Définition 1.5.2 (*espace préhilbertien*)

On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel normé muni d'une produit scalaire tel que

$$\| x \|^2 = < x, x >$$

Définition 1.5.3 (*espace hilbertien*)

On appelle espace hilbertien ou espace de Hilbert un espace préhilbertien complet.

Exemple 1.5.1

1) $(\mathbb{R}^n, \| \, . \, \|) = (\mathbb{R}^n, \ < -, - >)$ avec $< x, y > = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \, y_i$ est un espace de Hilbert.

2) $(\mathbb{C}^n, < -, - >)$ avec $< x, y > = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{x}_i \, y_i$ est un espace de Hilbert.

3) $\left(L^2(a, b), \ < -, - >_{L^2(a, b)}\right)$ avec $< f, g >_{L^2(a, b)} = \int\limits_a^b f\overline{g}$ tel que

$$L^2(a, b) = \left\{ g, f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ meserable et } \int\limits_a^b |f|^2 < +\infty \right\}$$

1.6 Applications linéaires et continues

Soient $(E, \| \,.\, \|_E)$ et $(F, \| \,.\, \|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Définition 1.6.1 *(Application linéaire)*

Soit f une application de E dans F on rappelle qu'une application f de E dans F est linéaire si

pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{k}$

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Définition 1.6.2 *(application linéaire continue)*

Soit f une application linéaire de E dans F alors f est continue si et seulement s'il existe une constante C telle que

$$\| f(x) \|_F \leq C \| x \|_E \; \forall x \in E. \tag{1,1}$$

on définit $L(E, F) = \{f : E \longrightarrow F, \text{ linéaire et continue}\}$

1.7 Norme d'application linéaire continue

La norme d'une application linéaire continue f est égale á

$$\| f \|_{L(E,\, F)} = \sup_{x \in E,\, x \neq 0} \frac{\| f(x) \|_F}{\| x \|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \| f(x) \|_F \tag{1,2}$$

Chapitre 2

Opérateurs linéaires bornés

La notion de l'opérateur borné est considerée comme un élément important de l'analyse fonctionnel, car il y a plusieur des problemes qu'ils n'avaient pas des solutions en particulier dans le domaine des mathématiques, mais avec l'utilisation de l'opérateur linéaire on peut les solutionnes.

Soit E et F deux espaces vectoriels normés:

Définition 2.0.1 (*opérateur linéaire et opérateur linéaire borné*)

- On appelle opérateur linéaire toute application linéaire de E dans F.
- On appelle opérateur linéaire borné toute application linéaire continue de E dans F.

Remarque 2.0.1

Si $\| AX \|_F > C \| X \|_E \quad \forall\, C \in E,\ A$ est non borné

Exemple 2.0.1 (*opérateur linéaire*)

1-soit $E = L^2\left([0,\ 1]\right)\ A:\ E \to E$

$$f \to Af\left(x\right) = \int_0^1 (x-t) f\left(t\right) dt$$

2- $A : C\left([0,\ 1]\right) \to C\left([0, 1]\right)$

$$f \mapsto Af(x) = \int_0^x K(x, t) f(t) \, dt$$

Exemple 2.0.2 (*Opérateures linéaires bornés*)

$I : C([0, 1]) \to C([0, 1])$ ($Ix = x$: *opérateure linéaire*) est borné car

$$\| I \| = \| x \| \leq C \ \| x \| \qquad \forall C \ \geq 1$$

2.1 Opérateurs linéaires bornés dans espace normé

Soit $L(E, F)$ un espace normé d'opérateurs linéaires bornés de E dans F.

Soit $L(E)$ un espace normé d'opérateurs linéaires bornés de E dans E.

Définition 2.1.1

Si $(E, \| . \|_E)$ et $(F, \| . \|_F)$ sont des espaces normés et si A est un opérateur linéaire borné de E dans F,

on a bien sur

$$\| A \|_{L(E, F)} = \sup_{x \in E, \, x \neq 0} \frac{\| AX \|_F}{\| X \|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \| AX \|_F \tag{2,1}$$

et ce nombre, note $\| A \|$ est la borne inferieure de l'ensemble des nombres $C > 0$ tel que

$$\| AX \|_F \leq C \| X \|_E \quad \forall X \in E. \tag{2,2}$$

ce nombre $\| A \|$ est appellé la norme de A; il est tel que

$$\| AX \|_F \leq \| A \| \| X \|_E \quad \forall X \in E.$$

et cette majoration ne peut être améliorée.

Théorème 2.1.1

Si $(E, \| \,.\, \|_E)$ et $(F, \| \,.\, \|_F)$ sont des espaces linéaires normés et si A est un opérateur linéaire de E dans F, les assertions suivantes sont équivalentes:

$i)$ A est continu.

$ii)$ A est continu en 0.

$iii)$ il existe $C > 0$ tel que $\| AX \|_F \leq C \| X \|_E \;\; \forall X \in E$.

Démonstation

$i) \Longrightarrow (ii)$ est trivial.

$ii) \Longrightarrow (iii)$ pour tout voisinage V de $A0 = 0$, il existe un voisinage U de 0 tel que $AU \subset V$.

pour $V = B(1)$; il existe donc $r > 0$ tel que

$$AB(r) \subset B(1).$$

On a alors

$$\| X \|_E \leq r \Longrightarrow \| AX \|_F \leq 1$$

danc

$$\| AX \|_F \leq \frac{1}{r} \| X \|_E \quad \forall\, X \in E$$

ce qui suffit

$iii) \Longrightarrow (i)$ de fait, pour tout $X_0 \in E$ et tout $r > 0$, l'image par A de $B\left(X_0, \frac{r}{c}\right)$ est incluse dans $B(AX_0, r)$ vu que

$$\| X - X_0 \|_E \leq \frac{r}{c} \Longrightarrow \| AX - AX_0 \|_F = \|A(X - X_0)\| \leq C \| X - X_0 \| \leq r.$$

Théorème 2.1.2 [10]

Soient A et B deux opérateurs linéaires bornés et λ un scalaire; λA, $A + B$ sont des opérateurs linéaires bornés et on a:

1) $\| \lambda A \| = | \lambda | \| A \|$

2) $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$

3) $\| A \| = 0 \Longrightarrow A = 0$

Théorème 2.1.3

1- Si E, F sont deux espaces normés, alors $(L(E, F), \| \,.\, \|)$ est un espace normé.

2- Si en outre, F est un espace de Banach, alors $L(E, F)$ est aussi un espace de Banach.

Démonstation

1-Si $A, B \in L(E, F)$ et $\lambda \in \Bbbk$, on vérifie de suite que

$i)$ λA est opérateur linéaire de E dans F tel que $\|\lambda A\|$ existe et égale à $| \lambda | \| A \|$.

$ii)$ $A + B$ est opérateur linéaire de E dans F tel que $\| A + B \|$ existe et est majoré par $\| A \| + \| B \|$.

$iii)$ $\| A \| = 0$ implique $A = 0$.

Il en résulte que $L(E, F)$, est un espace linéaire sur le quel $\| \,.\, \|$ est un norme.

2-Si F est un espace de Banach, établissons que $L(E, F)$ est un espace de Banach.

Soit A_n une suite de Cauchy dans $L(E, F)$.

Pour tout $X \in E$, la suite $A_n X$ est alors de Cauchy dans F car on a

$$\| A_n X - A_m X \| = \| (A_n - A_m) X \| \leq \| A_n - A_m \| \| X \| .$$

désignons par AX sa limite, de la sorte, nous avons introduit une application $A : E \longrightarrow F$ dont on a tôt fait de vérifier qu'elle est linéaire. Elle est aussi continue: il existe $C > 0$ tel que $\| A_n \| \leq C$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ donc tel que

$$\| AX \| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \| A_n X \| \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \| A_n \| \| X \| \leq C \| X \| , \forall x \in E$$

ce qui suffit.

Théorème 2.1.4

Soient E, F, G des espaces normés.

Si $A \in L(E, F)$ et $B \in L(F, G)$, alors BA appartient à $L(E, G)$ et on a:

$$\| BA \| \leq \| B \| \| A \|$$

De plus, si la suite A_n converge vers A dans $L(E, F)$ et si la suite B_n converge vers B dans $L(F, G)$, alors la suite $B_n A_n$ converge vers BA dans $L(F, G)$

Démonstation

Bien sûr, BA est un opérateur linéaire borné comme composition de deux tel opérateurs. De plus, pour tout $X \in E$, on a successivement

$$\| BAX \| \leq \| B \| \| AX \| \leq \| B \| \| A \| \| X \|$$

donc

$$\| BA \| \leq \| B \| \| A \| .$$

Cela étant, la deuxiéme assertion résulte aussi de ce que

$$\| B_n A_n - BA \| = \| (B_n - B) A_n - B (A - A_n) \| \leq \|(B_n - B)\| \| A_n \| + \| B \| \| (A - A_n) \| .$$

Définition 2.1.2 *(opérateur inversible)*

Soit $A \in L(E, F)$ est inversible dans $L(E, F)$ ssi
existe $S \in L(F, E)$ telle que $SA = Id_F$ et $AS = Id_E$.
Si A est inversible, on note A^{-1} á son inverse.

Théorème 2.1.5

Soit E un espace de Banach si $A \in L(E)$ vérifie $\| A \| < 1$, alors $(Id - A) \in L(E)$ admet un inverse linéaire borné tel que

$$\| (Id_E - A)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| A \|}$$

On plus

$$\sum_{m=0}^{\infty} A^m = (Id_E - A)^{-1}$$

Démonstation

Comme $\left\|A^k\right\| \leqslant \|A\|^k$ pour tout entier $k \geqslant 0$ et que $\|a\| < 1$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ est normalement convergente, donc convergente dans l'espace complet E.
Notons S sa somme. On vérifie facilement que

$$SA = AS = \sum_{k=0}^{+\infty} A^{k+1} = S - Id_E$$

ce qui implique que $S(Id_E - A) = (Id_E - A)S = Id_E$. En majorant la norme de la série par la série des normes, on obtient

$$\left\|(Id_E - A)^{-1}\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \|A\|^k = \|(Id_E - A)\|^{-1}.$$

2.2 Opérateurs linéaires bornés dans espace de Hilbert

Soit $B(H, K)$ un espace de Hilbert d'opérateurs linéaires de H dans K.

Proposition 2.2.1

Soit $A \in B(H)$ les propriétés suivant sont equivalentes

$i)$ il existe une costante C telle que $\| AX \|_H \leq C \| X \|_H \ \ \forall X \in H$.

$ii)$ les images des ensembles bornés sont bornées.

$iii)$ si $X_n \longrightarrow X$ alors $AX_n \longrightarrow AX$.

Remarque 2.2.1

– $L(H, K)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de H dans K.

– $L(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de H dans H.

Théorème 2.2.1 [8]

Soit H un Hilbert, $L(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés, définis partout $A : H \longrightarrow H$. Muni de la norme $\| \, . \, \|$ d'opérateur, $L(H)$ est un espace de Banach.

Démonstation

1) $L(H)$ est un espace vectoriel et $\| \, . \, \|$ est norme. On vérifie en effet

- $A, B \in L(H) \Longrightarrow \alpha A + \beta B \in L(H), \forall \alpha, B \in \mathbb{C}$ où $(\alpha A + \beta B) X = \alpha AX + \beta BX$
- $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$
- $\| \alpha A \| = | \alpha | \| A \|$.

2) $L(H)$ est complet pour cette norme.

Soit $\{A_n\} \in L(H)$ une suite de Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ N \ \text{ tel que } \ \forall n, m > N \quad \| A_m - A_n \| < \varepsilon$$

Dés lors, $\forall X \neq 0$, on a par la définition (2, 1), (2, 2) de la norme:

$$\| A_m X - A_n X \| \leq \varepsilon \| X \| \qquad (n,\, m > N)\,. \tag{2,3}$$

La suite $\{A_n X\}$ est donc une suite de Cauchy dans H.

Celui-ci étant complet, cette suite converge vers un élément $X_0 \in H$

$$A_n X \longrightarrow X_0.$$

Définissons un opérateur est linéaire A par la relation

$$AX = X_0 \quad \text{c-à-d} \quad AX = \lim_{n \longrightarrow +\infty} A_n X_0$$

Cet opérateur est linéaire défini partout et borné. On a en effet, en prenant la limite $m \longrightarrow \infty$ dans (2, 3)

$$\| AX - A_n X \| \leq \varepsilon \| X \| \quad (n > N) \tag{2,4}$$

et dès lors

$$\begin{aligned} \|AX\| &\leq \|AX - A_n X\| + \|A_n X\| \\ &\leq (\varepsilon + \|A_n\|)\, \|X\|\,. \end{aligned}$$

Donc $A_n \in L(H)$ et en outre $A_n \longrightarrow A$ dans $L(H)$ car on a, par (2, 3)

$$\| A - A_n \| \leq \varepsilon \;\forall\; n > N.$$

Corollaire 2.2.1 [8]

Si H est préhilbertien et K un espace Hilbert (complet), l'espace $L(H,\, K)$ des opérateurs linéaires bornés, définis partout, de H dans K est un espace de Banach pour la norme des opérateurs (2, 1).

2.2.1 Opérateur adjoint dans un espace de Hilbert

Définition 2.2.1 $(adjoint)$

Soit H un espace de Hilbert et $A \in L(H)$, l'adjoint de A est l'opérateur linéaire borné, note A^* verifie

$$< AX, Y > \;=\; < X, A^*Y > , \forall X, Y \in H.$$

Proposition 2.2.2

Soit A, $B \in L(H)$ et $\alpha \in \Bbbk$, alors

1- $(\alpha A + B)^* = \overline{\alpha} A^* + B^*$

2- $(AB)^* = B^* A^*$

3- $(A^*)^* = A$

4- si A est inversible d'inverse A^{-1}, alors A^* est inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Démonstation [4]

Définition 2.2.2 $(auto - adjoint)$

On dit qu'un opérateur $A \in L(H)$ est auto-adjoint si

$$A^* = A$$

c'est -à- dire

$$\begin{aligned} < \;\; AX, Y > \;&=\; < X, AY > , \forall X, Y \in H. \\ = \;\; < X, A^*Y > \;&=\; < X, AY > , \forall X, Y \in H. \end{aligned}$$

Proposition 2.2.3

Si $A^* \in L(H)$ est un opérateur adjoint, alors

$$\| A^* \| = \| A \| .$$

Si $A \in L(H)$ est un opérateur auto-adjoint, alors

$$\| A \| = \sup \{ |< AX, X >| : \;\; \| X \| \;\; \leq 1 \} .$$

Démonstation [4]

Définition 2.2.3

Un opérateur $A \in L(H)$ est dit

-**Positif** si

$$< AX, X > \quad \geq 0, \forall X \in H.$$

-**Unitaire** si A est inversible et

$$A^* = A^{-1}.$$

-**Normal** si

$$AA^* = A^* A.$$

-**Rang fin** si $\operatorname{Im} A$ est de dimension fin; son rang est la dimension de $\operatorname{Im} A$.

2.2.2 Spectre d'un opérateur

Définition 2.2.4 *(valeur propre)*

Un nombre complexe λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $X \in H$, $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, tel vecteur X est appelé un vecteur propre de A.

Définition 2.2.5 $(Spectre)$

Un spectre d'un opérateur $A \in L(H)$ est la sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par

$$sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \ (\lambda Id_H - A) \qquad \text{n'est pas inversible}\}$$

l'ensemble complementaire est appelé l'ensemble résolvant

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash sp(A).$$

Remarque 2.2.2

Si $\lambda \in \sigma(A)$ alors

$$(A - \lambda Id_H)^{-1} \in L(H).$$

2.3 Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 2.3.1

Si E, F sont deux espaces normés et si D est une partie de $L(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes

i) D est borné.

ii) D est uniformément équicontinu sur E .

iii) D est équicontinu en 0.

Démonstation

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Comme il existe $C > 0$ tel que $\| A \| \leq C$ pour tout $A \in D$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon / C > 0$ tel que

$$\| X_1 - X_2 \| \leq \varepsilon / C \Longrightarrow \sup_{A \in D} \| AX_1 - AX_2 \| \leq \varepsilon.$$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ est trivial.

$(iii) \Longrightarrow$ Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $X \in E$ tel que $\| X \| \leq \eta$, on a $\sup\limits_{X \in E} \| AX \| \leq 1$. On en tire de suite que $\| A \| \leq 1 / \eta$ pour tout $A \in D$.

Définition 2.3.1

Si E, F sont des espaces normés, une partie D de $L(E, F)$ est ponctuellement bornée si

$$\forall X \in E, \ \{AX : A \in D\} \quad \text{est un borné de } F.$$

Théorème 2.3.2 (*bornation uniforme, Banach-Steinhaus*)

Si l'espace E est de Banach et l'espace F normé, alors toute partie ponctuellement bornée de $L(E, F)$ est borné.

Théorème 2.3.3

Si E est un espace de Banach, si F est un espace normé et si A_m est une suite de $L(E, F)$ ponctuellement convergente c'est -à- dire telle que la suite $A_m X$ converge dans F pour tout $X \in E$, alors il existe $A \in L(E, F)$ tel que

$$AX = \lim_{m \longrightarrow +\infty} A_m X \quad \forall X \in E.$$

Démonstation

$\forall x \in E$, désignons par AX la limite de la suite $A_m X$ dans F, A apparaît alors comme étant une application de E dans F. On vérifie directement que A est enfait un opérateur linéaire de E dans F. Enfin, vu le théorème de Banach-Steinhaus, $\{A_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ est un borné de $L(E, F)$; il existe donc $C > 0$

$$\| AX \| = \lim_{m \longrightarrow +\infty} \| A_m X \| \leq C \| X \| , \forall X \in E.$$

Théorème 2.3.4

Soient E, F deux espaces de Banach et A_m une suite bornée de $L(E, F)$.

Si, pour tout élément d d'une partie partout dense M de E, la suite $A_m d$ converge dans F, alors il existe $A \in L(E, F)$ tel que $A_m X \longrightarrow AX$ puor tout $X \in E$.

2.4 Théorème d'opérateur ouverte et Théorème du graphe fermé

Théorème 2.4.1 (*Théorème de l'application ouverte*)

Soient E et F deux espaces de Banach et soit A un opérateur linéaire bornée et surjectif de E sur F. Alors il existe une constante $C > 0$ tel que

$$T(B_E(0, 1)) \supset B_F(0, C).$$

Théorème 2.4.2 (*Théorème du graphe fermé*)

Soient E et F deux espaces de Banach soit A un opérateur linéaire de E dans F. On suppose que le graphe de A, $G(A)$, est fermé dans $E \times F$, alors A bornée.

2.5 Opérateurs compacts

Définition 2.5.1

B étant la boule unité ouverte de E, on dit que l'opérateur $A \in L(E,\, F)$ est compact ssi $A(B)$ (image de$B$ par A) est relativement compact dans F.

$$A \text{ compact de } L(E,\, F) \Leftrightarrow \overline{A(B)} \text{ compact dans } F.$$

$$A \text{ compact de } L(E,\, F) \Leftrightarrow A(B) \text{ relativement compact dans } F.$$

– on note $K(E,\, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de $L(E,\, F)$ et $K(E)$ l'ensemble des opérateurs compacts de $L(E)$.

Exemple 2.5.1

Soit H un espace de Hilbert si
dim $(H) < \infty$, alors tout $A \in L(H)$ est compact.

Théorème 2.5.1

Si E ou F sont de dimension finie, on a $K(E,\, F) = L(E,\, F)$.

Théorème 2.5.2

Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

Démonstation

En effet, si on désigne

$$B(0,\, 1) = \{X \in H,\; \|X\| \leq 1\}$$

Alors, $A(B(0,\, 1))$ est relativement compact d'où

$$\|AX\| \leq C \quad \forall X \in B(0,\, 1).$$

Alors A est borné.

Réciproquement, l'opérateur indentique I de E dans E est borné, mais il n'est pas compact car $Id_E(B(0,\, 1)) = B(0,\, 1)$, n'est pas relativement compacte sauf si E est de dimension finie.

Proposition 2.5.1

Tout opérateur borné et de rang finie est compact.

Corollaire 2.5.1

Si A_n est une suite d'opérateurs de rang finie convargeant vers $A \in L(E, F)$ alors $A \subset K(E, F)$.

Proposition 2.5.2

Soient E, F, G des espaces normés.

- L'ensemble $K(E, F)$ est un sous-espace linéaire de $L(E, F)$.
- Pour tout $A \in L(E, F)$ et tout $B \in K(F, G)$, $BA \in K(E, G)$.
- Pour tout $B \in K(E, F)$ et tout $A \in L(F, G)$, $AB \in K(E, G)$.
- L'opérateur $Id : E \longrightarrow E$ est compact si et seulement si E est de dimension finie.
- si $A \in K(E, F)$ admet un inverse linéaire continu, alors E est de dimension finie.

Théorème 2.5.3

Soit E un espace normé et F un espace de Banach et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F.

Si

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \| A_n - A \| = 0.$$

Alors, A est compact.

Théorème 2.5.4

Soit A un opérateur borné de E dans F, et image AX de dimension finie, alors A est compact.

Théorème 2.5.5

$K(E, F)$ est un sous-espace fermé de Banach $L(E, F)$.

Théorème 2.5.6

L'adjoint d'un opérateur compact est compact.

2.6 Spectre d'un opérateur compact

Proposition 2.6.1

Le spectre $sp(A)$ est un ensemble compact et

$$sp(A) \subset [- \parallel A \parallel , + \parallel A \parallel] .$$

Proposition 2.6.2

Soit E un espace de Banach et A un opérateur compact de E dans E, de spectre $sp(A)$

1 $-$ si E est de dimension infinie, $0 \in sp(A)$.

2 $-$ $\lambda \neq 0 \in sp(A) \Longleftrightarrow \lambda$ est valeur propre de A.

Proposition 2.6.3

Soit $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose

$$m = \inf_{X \in E \quad |X|=1} < AX, X >$$

et

$$M = \sup_{X \in E \quad |X|=1} < AX, X >$$

alors

$$sp(A) \subset [m, M] , m \in sp(A) \quad \text{et } M \in sp(A) .$$

Corollaire 2.6.1

Soit $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que

$$sp(A) = \{0\}$$

alors

$$A = 0$$

Théorème 2.6.1

Si E est un espace de Banach et si $A \in K(E)$ alors pour toute valeur propre λ de A, on a

$$\mid \lambda \mid \leq \parallel A \parallel .$$

Chapitre 3

Application sur L'opérateur intégral

3.1 Opérateur intégral

Comme nous l'avons dèjà vu, un opérateur intégral est un opérateur de la forme

$$(Af)(x) = \int_a^b k(x, y)\ f(y)\, dy \tag{3,1}$$

oú la fonction k est appelée noyau de A.

On appelée (3, 1) opérateur de Fredholm.

Remarque 3.1.1

Si k est une fonction continue de $[a, b] \times [a, b]$ l'opératuer A est appelé opérateur intégral à noyau continu k.

Théorème 3.1.1 *(Hilbert-Schmidt)*

Soit A un opérateur borné dans $L^2(a, b)$. Alors A un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si c'est un opérateur intégral à noyau k de Hilbert-Schmidt, c'est -à- dire

$$\int\int |k(x, y)|^2\, dxdy < \infty$$

Proposition 3.1.1

Soit A un opérateur intégral défini à partir d'un noyau k continu sur $[a,\, b] \times [a,\, b]$ par la formule suivante:

$$(A\varphi)\, x = \int_a^b k\,(x,\, t)\, \varphi\,(t)\, dt, \quad \forall x \in [a,\, b]$$

Alors, l'opérateur A admet un unique opérateur adjoint A^* pour le produit scalaire usuel de L^2. Pour tout $x \in [a,\, b]$

$$(A^*\Psi)\, x = \int_a^b k\,(t,\, x)\, \Psi\,(t)\, dt$$

Démonstation

Pour φ et Ψ deux fonctions de $C\,([a,\, b])$. On a

$$< A\varphi,\, \Psi > \;\; = \;\; < \varphi,\, A^*\Psi >$$

donc

$$\int_a^b \varphi\,(t)\, A^*\,(\Psi\,(t))\, dt = \int_a^b A\varphi\,(x)\, \Psi\,(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_a^b k\,(x,\, t)\, \varphi\,(t)\, dt \right\} \Psi\,(x)\, dx.$$

En vertu du théorème de Fubini relatifaux intégrales doubles, on établit que

$$< A\varphi\,(x)\,,\, \Psi > \;\; = \int_a^b \int_a^b [k\,(x,\, t)\, \Psi\,(x)\, dx]\, \varphi\,(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \varphi\,(t) \left[\int_a^b k\,(x,\, t)\, \Psi\,(x)\, dx \right] dt$$

$$= \int_a^b \varphi\,(t)\, A^*\,(\Psi)\,(t)\, dt.$$

Il en réslte que l'adjoint A^* est défini pour tout x dans $[a,\, b]$ par

$$A^*\Psi\,(x) = \int_a^b k\,(t,\, x)\, \Psi\,(t)\, dt$$

Exemple 3.1.1

On pose

$$k(x,\, t) = (x+t) \quad \text{et } \varphi(x) = 2x \text{ et } \Psi(x) = x,\, \forall x,\, t \in [0,\, 1]$$

$$A\varphi(x) = \int_0^1 (x+t)(2t)\, dt, \quad \forall x \in [a,\, b]$$

$$\begin{aligned} < A\varphi(x)\,,\, \Psi > &= \int_0^1 \int_0^1 [(x+t)\, x dx]\,(2t)\, dt \\ &= \int_0^1 (2t) \left[\int_0^1 (x+t)\, x dx \right] dt \\ &= \int_0^1 (2t)\, A^*\Psi(t)\, dt \\ &= < \varphi,\, A^*\Psi(x) > \end{aligned}$$

alors

$$A^*\Psi(x) = \int_0^1 (t+x)\, t dt.$$

Corollaire 3.1.1

Soit A l'opérateur intégral de noyau k , et A^* est l'opérateur intégral de noyau k^*, avec

$$k^*(t,\, x) = k(t,\, x)$$

L'opérateur intégral A de noyau k est auto-adjoint si, et seulement si, le noyau k est symétrique:

$$k(x,\, t) = k(t,\, x)\,,\, \forall x,\, t \in [a,\, b]$$

Exemple 3.1.2

On pose

$$k(x,\, t) = x + t, \;\; \forall x,\, t \in [0,\, 1]$$

on a

$$\forall x,\, t \in [0,\, 1] \;\; k(t,\, x) = k(x,\, t) = t + x$$

alors

$$A\varphi(x) = \int_0^1 (t + x)\,\varphi(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,\, b]$$

donc l'opérateur intégral A de noyau k est auto-adjoint.

Théorème 3.1.2 (*Arzela- Ascoli*)

Une condition néssaire et suffsante q'une famille des fonctions continues définies sur l'intarvalle compact $[a,\, b]$, est compacte dans $C([a,\, b])$ est que cette famille est uniformément bornée et èquicontinue.

Démonstation [3]

Théorème 3.1.3

L'opérateur intégral A de $C([a,\, b])$ dans $C([a,\, b])$ à noyau continu est un opérateur compact.

Démonstation

Soit E un ensemble borne de $C([a,\, b])$ alors. On a

$$\parallel \varphi \parallel \leq M,\ pour\ tout\ \varphi \in E$$

de plus

$$\mid A\varphi(x) \mid \leq M \leq \mid b - a \mid \max_{x,t \in [a,\, b]} \mid k(x,\, t)\,, \;\; \forall x \in [a,\, b] \text{ et } \forall \varphi \in E$$

D'on l'ensemble $A(E)$ uniformément borné.

D'autre part, le noyau k est uniformément continu sur le compact $[a,\, b] \times [a,\, b]$, d'on pour tout $x,\, t,\, z$ de $[a,\, b]$, on a $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, tel que

$$|\ x - t\ | < \delta \Longrightarrow |k\,(x,\,z) - k\,(t,\,z)| < \frac{\varepsilon}{M\ |\ b - a\ |}\ .$$

D'ou,

$$|\ A\varphi\,(x) - A\varphi\,(t)\ | < \varepsilon,\ pour\ tout\ \ \varphi \in E\ et\ x,\,t \in [a,\,b]\ \ avec\ |\ x - t\ | < \delta.$$

Ceci exprime que l'ensemble $A\,(E)$ est équicontinu, d'ou $A\,(E)$ est relativement compact par le théorème d'Arzela - Ascoli, alors A est compact.

Définition 3.1.1 *(équation intégrale de Fredholm)*

On appele équation intégrale de Fredholm de sconde espéce un équation de la forme

$$f\,(x) = \varphi\,(x) - \lambda\int_a^b k\,(x,\,t)\,\varphi\,(t)\,dt \qquad\qquad x \in [a,\,b]$$

c-à-d

$$(I - \lambda A)\,\varphi = f$$

Remarque 3.1.2

Si $f = 0$ l'équation est une équation homogéne.

Si non cette équation est dite équation non-homogéne.

Exemple 3.1.3

Soit équation intégral de Fredholm de secend espéce suivant

$$\varphi\,(x) - \lambda\int_0^1 e^{x-t}\varphi\,(t)\,dt = f\,(x) \tag{3,2}$$

pour $x \in [0,\,1]$ et $\lambda \neq 0$ constant la solution φ est de la forme

$$\varphi\,(x) = f\,(x) + \left(\lambda\int_0^1 e^{-\lambda}\varphi\,(t)\,dt\right)e^x = f\,(x) + ce^x \tag{3,3}$$

où c est un constant inconnu quand on le remplace en (3, 2), on obtien

$$c\,(1-\lambda)=\lambda\int_0^1 e^{-t}f\,(t)\,dt \tag{3,4}$$

on suppose que $\lambda \neq 1$ alors

$$\varphi\,(x)=f\,(x)+\frac{\lambda\int_0^1 e^{-t}f\,(t)\,dt}{1-\lambda}e^{x} \tag{3,5}$$

si $\lambda=1$, alors l'équation $(3,\,4)$ n'admet pas un solution

$$\int_0^1 e^{-t}f\,(t)\,dt=0 \tag{3,6}$$

sauf si

$$g\,(t)-\int_0^1 e^{x-t}g\,(x)\,dx=0$$

alors

$$g\,(t)=e^{-t}.$$

Bibliographie

[1] **Alexandre Popier,** Espaces de Banach,de Hilbert, de Sobolev, universite du Maine le Mans.

[2] **Brezis H,** Analyse fonctionnelle, théorie et application, collection mathématiques applicaquées pour la maîtrise Masson paris 1983.

[3] **Brezis Haim,** Functional Analysis, sobolev spaces and partial differntail Equatios, springer science+Business Mesia, LLc 2011.

[4] **Bryan P.Rynne** and **Martin A.Youngson,** Linear functional Analysis springer-verlag London Limited 2000.

[5] **C.G.Simader**, Essential self-adjointne of schrädinger operators bounded form below.math.Z.159,p.27-50 (1978).

[6] **Clemens Berger**, Topologie pour la Licence, université de Nice – Sophia Antipolis, Laboratoire J. A. Dieudonné 061085 Nice codex, 24 Janvier 2004.

[7] **Dunford N. schwartz J.T**, Linear operators, Interscience, New york, part I 1952, part II 1963, part III 1971.

[8] **Jean- Pierre Antoine**, Méthodes Mathématiques de la physique, université catholique de louvoin, faculté des sciences département de physique, notes du cours P H Y 2171 Année académique 2008 -2009.

[9] **Kern M,** Pormlémes inverses, Ecole supérieure d'ingénieurs Léonard Devinci, 2003.

[10] **N. Boccara**, Analyse fonctionnelle, une introduction pour physiciens 1984.

[11] **P.Levy-Bruh**, Introduction á la théorie spectrale Dunod, Paris 2003 I. S. B. N 210007072X.

[12] **V. Komornik**, Analyse fonctionnelle 1. Espace de Hilbert 3. Opérateurs compacts et théorie spectrale, université de Strasbourg, Automne 2013.

[13] **Walter Hengartner**, **Marcel lamber**t, **Corina Rescher,** Introduction à L'Analyse fonctionnelle, les presses de l'université du Québec C.P.250, sillery, Québec G1T2R1 1981.

Résumé

Dans cette mémoire on étudie une introduction de théorie spectrale, dont on a vu l'opérateur borné sur les espaces abstraites, et en particulier l'espace de Hilbert, ainsi on étudie ses propriétés et quelques applications pour les résolutions des problèmes mathématiques.

Cette mémoire ne contient pas tous les applications de les opérateurs bornés, nous avons mis notre attention à ce que notre travail soit plus rigoureux et s'ouvre plus vers d'amples application.

Mots clés: opérateur borné, adjoint, auto-adjoint, spectre, opérateur compact.

Abstract

In this project we talked about an introduction to the theory of spectrum, since we studied the bounded operators to the abstracts spaces and privately Hilbert space, as we studied their properties and their applications for solving the mathematical problems.

What we have studied in these project of applications do not include all the applications of the bounded operators, and this is what draws attention to the need to give greater importance for the purpose more and more accurate application .

Key words: bounded operator, adjoint, self-adjoint, spectrum, compact operator.

الملخص

في هذه المذكرة تطرقنا إلى دراسة مدخل الى نظرية المؤثرات، إذ درسنا فيها المؤثرات المحدودة على الفضاءات المجردة وخاصة فضاء هلبرت، كما درسنا خواصها وتطبيقاتها في حل المسائل الرياضية.

إن ما درسناه في هذه المذكرة من تطبيقات لا يشمل كل تطبيقات المؤثرات المحدودة، وهذا ما يلفت الانتباه إلى ضرورة إعطائها أهمية أكبر لغرض تطبيقات أكثر وأدق.

الكلمات المفتاحية: مؤثر المحدود، قرين، قرين لنفسه، طيف، مؤثر متراص.