L'étude asymptotique de l'intégrales matricielles aléatoires

Bekkicha Abdelaziz

Universite Kasdi Merbeh Ouargla Algeria.
bekkicha.abdelaziz@univ-ouargla.dz

Résumé

La théorie de la distribution asymptotique des valeurs propres, des matrices aléatoires symétriques réelles ou hermitiennes de grande taille, a connu récemment beaucoup d'évolutions. Ces évolutions sont motivées par diverses branches des mathématiques et de la physique. L'étude de quelques régimes asymptotiques mène à des résultats et à des techniques intéressants

Mots-clés: Matrice aléatoire, valeur propre, ensemble orthogonal gaussien, loi du demi-cercle, densité d'état integrée, fonctions génératrices.

1 Introduction

La théorie des matrices aléatoires couvre, aujourd'hui une partie importante de la théorie des probabilités. Cette théorie a connue, deux motivations :

- Les statistiques (les travaux de **Wishart** sur les matrices de covariance)
- La physique (les modèles Hamiltoniens aléatoires de **Wigner**).

Le succès des modèles de matrices aléatoires est du, en partie, aux propriétés d'universalité des valeurs propres : quand la taille d'une matrice aléatoire devient grande, les propriétés statistiques du spectre (comme la densité des valeurs propres, les espacements entre les valeurs propres consécutives au centre et au bord du spectre, etc...) convergent vers des limites universelles, qui ne dépend pas des particularités du modèle (comme la distribution des entrées, etc...). Le developpement d'une telle théorie est due aux nombreuses interactions entre la théorie des matrices aléatoires et d'autre branches de mathématiques ont été observées, comme les algèbres d'opérateurs, la théorie des nombres, l'analyse combinatoire, etc....

Les matrices aléatoires sont liées aux nombreuses branches des mathématiques et de la physique mathématique. En particulier,

• Probabilités et statistiques,physique nucléaire,théorie spectrale,théorie quantique des champs,algèbres d'opérateurs,chaosquantique,combinatoire,théorie des solides,théorie denombres,systèmes intégrables,analyse,analyse semi-classique

2 Problèmes

Du point de vue analytique, on s'intéresse généralement au comportement d'une intégrale du type

$$\int_{\zeta_n} F_n(M)\mathbf{P}_n(dM)$$

Ou ζ_n est un ensembles des matrices $n \times n$

- Réelles symétriques $\mathcal{S}_n$
- Hermitiennes $\mathcal{H}_n$
- Unitaires $\mathcal{U}_n$

Ou F_n est une application de ζ_n dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui est prise orthogonalement unitairement ou invariante.

- $\mathbf{P}_n$ est une mesure de probabilité sur ζ_n

3 Principaux ensembles de matrices aléatoires

Une matrice aléatoire est une matrice $n \times m$ dont les éléments sont des variables aléatoires.(réels ou complexes) indépendantes. Pour une matrice aléatoire $n \times n$, L'un des objectifs de la théorie des matrices aléatoires est l'étude asymptotique de probabilités relatives aux valeurs propres lorsque la dimension n tend vers l'infini. On distingue plusieurs types de matrices aléatoires mais les modèles les plus importants dans la pratique sont les modèles gaussiens.

Notons $H_n = Herm(n, \mathbf{F})$ l'ensemble des matrices hermitiennes de taille $n \times n$ à coeffcients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou H (le corps des quaternions réels) que l'on munit du produit scalaire $\langle X, Y \rangle$

On définit une loi de probabilité sur H_n par :

$$P_M(d_\beta M) = P_{n,\beta}(M)d_\beta M = \frac{1}{c_{n,\beta}} \exp(-\gamma Tr(M^2))d_\beta M$$

où γ est un paramètre positif, $d_\beta M$ est la mesure de Lebesgue sur H_n associée au produit scalaire $\langle X, Y \rangle$, et $c_{n,\beta}$ est un paramètre de normalisation pour avoir une loi de probabilité :

$$c_{n,\beta} = \int_{H_n} \exp(-\gamma Tr(M^2))d_\beta M = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\right)^N$$

où $N = dim_{\mathbb{R}} H_n = n + \dfrac{\beta}{2} n(n-1), \beta = dim_{\mathbb{R}}\mathbf{F} = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathbf{F} = \mathbb{R} \\ 2 \text{ si } \mathbf{F} = \mathbb{C} \\ 4 \text{ si } \mathbf{F} = H \end{cases}$

Cette loi de probabilité nous permet de définir l'éspace probabilisé $(H_n; \mathbf{P})$ tel que pour :

$\beta = 1$,$(H_n; \mathbf{P})$ est appelé l'ensemble Gaussien orthogonal,notée **G.O.E**.

$\beta = 2$,$(H_n; \mathbf{P})$ est appelé l'ensemble Gaussien unitaire,notée **G.U.E.**

$\beta = 4$,$(H_n; \mathbf{P})$ est appelé l'ensemble Gaussien symplectique,notée **G.S.E.**

Ce sont les ensembles introduits par Wigner pour la théorie des spectres nucléaires.

4 Objectifs principaux

L'étude du comportement de ces intégrales s'articule sur la théorie de la distribution asymptotique des valeurs propres des matrices aléatoires de grande tailles. Donc on s'intéresse aux problèmes asymptotiques concernant les variables aléatoires $F_n(M)$ définies sur l'espace de probabilités filtres $(\zeta_n, \mathcal{A}, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$ avec $\mathbf{P}_n$ est une mesure de probabilités ou $\mathcal{F}_n$ possède des propriétés d'invariance.

5 Conclusion

La théorie des matrices aléatoires, initialement introduite par Wigner dans le contexte de la physique nucléaire, a trouvé depuis un très grand nombre d'applications. Elle est devenue et reste aujourd'hui encore un domaine de recherche très actif aussi bien en physique, en informatique, elle en a aussi également en Mathématiques même, où la fonction zêta de Riemann présente un lien très fort avec la théorie des matrices aléatoires

References

[1] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides et X. Zhou. Uniform asympto- tics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory. Comm. Pure Appl. Math., vol. 52, pp.1335–1425, 1999.

[2] P. J. Forrester. The spectrum edges of random matrices. Nuclear Phys., vol. B402, pp. 709–723, 1993.

[3] K. Johansson. On ‡uctuations of eigenvalues of random Hermitian matrices. Duke Math. J., vol. 91, pp.151–204, 1998.

[4] Asymptotics of random density matrices - Ann. Henri PoincarIUb4e 8 (2007), no. 8, 1521-1538. G. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni An Introduction to Random Matrices. Cambridge studies in advanced mathematics, (2009).

[5] Z.D. Bai, J.W. Silverstein Spectral analysis of large dimensional random matrices. Second Edition, Springer, New York, 2009.

[6] J. Baik, G. Ben Arous, S. Peche Phase transition of the largest eigenvalue for nonnull complex sample covariance matrices. Ann. Prob. (2005)

[7] M. Capitaine, C. Donati-Martin, D. Feral Central limit theorems for eigenvalues of deformations of Wigner matrices. A paraitre aux Annales de L.Institut Henri Poincare (2011).

[8] B. Collins, P. ´Sniady Integration with respect to the Haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group. Comm. Math. Phys. (2006), no. 3, 773–795.

[9] G. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni An Introduction to Random Matrices. Cambridge studies in advanced mathematics, (2009).