N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation numérique

Thème

Stabilité au sens de Lyapunov

Présenté par: GAID Ouafa
HALILOU Zouleikha
SLIMANI Aouatef

Sous la supervision de :

Dr.Abdelfeteh FAREH

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciements

Nous remercient avant tout **"ALLAH"** tout puissant de nous avoir guider tout au long de notre vie dans toute les années d'étude et de nous avoir donner la croyance, la volonté, la patience et le courage pour terminer ce travail.

Nous remercions nos chers parents qui nous ont donné la volonté pour la réussite dans notre vie.

Au terme de ce travail, nous tenons particulièrement à exprimer notre profonde gratitude à **Dr. FAREH Abdelfetah** pour son orientation, sa patience, sa confiance et ses conseils, tout au long de ce parcour scientifique. Nous adressons également nos remerciements, à tous nos enseignants, pour leurs aides inestimables, qui nous ont donné les bases de la science.

Nous remercions très sincèrement, les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examination. A toute personne qui a participé de près ou de loin pour l'accomplissement de ce travail particulièrement:"**Messouda, Souhaïla, Hanane, Ahlem, Imane, Safa, Rawya, Salime**".

Table des matières

Introduction générale

Les solutions des équations et systèmes différentielles dépendent en général, des données initiales. La solution d'un système dynamique avec des données initiales différentes aboutit à des solutions différentes, et comme ces équations modélisent des phénomènes naturelles, les données initiales de telles équations sont prisent avec incertitudes, il faut alors, qu'une perturbation au données initiales ne change pas la solution radicalement, c'est une initiation à la théorie de stabilité sujet de notre mémoire.

Ce mémoire sera consacré à la théorie de stabilité de **Lyapunov**. Une notion qui a été introduite par le mathématicien Russe **S. Lyapunov** à la fin du $19^{ème}$ siècle (1892) pour l'étude pour systèmes mécaniques.

L'objet de la théorie de stabilité est d'établir une conclusion sur le comportement de la solution d'une équation différentielle lorsque le temps tend vers l'infini sans résoudre l'équation, ce concept été introduit premièrement par Lagrenge en 1788 en étudiant les systèmes mécaniques appelés systèmes de **Lagrenge.** Plusieurs travaux succèdent utilisant la méthode de **Lagrenge** mais ils se restreintes sur l'équation de mouvement de type **Lagrenge**. Le manifeste avance sur la théorie de stabilité a été réalisé par **Lyapunov** qui non seulement introduit la notion de stabilité moderne mais aussi démontrer plusieurs théorèmes fondamentaux qui sont applicable sur des équations arbitraires il a inventé une nouvelle théorie appelée théorie de stabilité de **Lyapunov**.

Notre mémoire est devisé en trois chapitres, une introduction sur les systèmes dynamiques et les équations différentielles ordinaires, le second chapitre sera consacré à la théorie de stabilité, nous avons définie les différentes notions de stabilité : uniforme, locale, asymptotique, ..., etc.

Le chapitre III sera consacré à deux exemples en théorie d'élasticité où nous illustrons la stabilité d'un système de **Timoshenko** non dissipative et un autre système avec deux dissipations donnés par des frottements

Notations générales

Certainses notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous lisons ci-dessous:

$\mathbb{R}$	: ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^n$	: espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
$\mathbb{R}_+$	: ensemble des nombres réels positif.
$\lvert . \rvert$	: valeur absolue ou module.
$\lVert . \rVert$	: norme sur $\mathbb{R}^n$.
$\dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt}$	: dérivée temporelle.
$\lVert x \rVert$	: norme euclidienne de x.
$\lVert A \rVert$	: norme euclidienne de A.
A^T	: transposer de la matrice A.
Id	: matrice identité $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
tr	: trace de la matrice A.
$e^{(A)}$	: exponentielle de la matrice A.
$L^p_{loc}(\omega, K)$	:ensemble des applications mesurables de ω dans K, de puissance p intégrable.
$B(a,b)$	$= \{x \in \mathbb{R}^n, \lVert x - a \rVert \leq b\}$ la boule de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et rayon $b > 0$.
$C^1(\mathbb{R}^n)$	: ensemble des fonctions continûment différentiables.
$C^k(\mathbb{R})$	: ensemble des fonctions dérivables k fois et la dérivée d'ordre k est cotinue.

Chapitre 1

Les systèmes dynamiques et les équations différentielles

Ce chapitre a essentiellement pour objectif de présenter quelques rappels sur les systèmes dynamiques. Nous fournissons au début de ce chapitre un rappel sur la résolution des systèmes différentiels en se rappelant de la version générale du théorème de Cauchy-Lipschitz, qui établit sous certaines conditions l'existance et l'unicité d'une équation différentielle.

1.1 Système dynamique

Un Système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction il est défini par un triplet (X, T, f) constitué de l'espace d'état X du domaine temporel T, et d'une application de transition d'état $f : T \times X \to X$ qui possède la propiété pour toute $x \in X$ et $t_1, t_2 \in T$

$$\begin{cases} f(0, x) = x, \\ f(t_2, f(t_1, x)) = f(t_1 + t_2, x). \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Il peut modèleser un phénomène phisique, mécanique, économique.

1.2 Préliminaires

·Soit $f : D \to \mathbb{R}^n$ une application continue, on lui associe le système:

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.2.1}$$

Ce système s'appelle système autonome (f ne dépend pas de t).

·Soit $f : I \times D \to \mathbb{R}^n$ une application continue, on lui associe le système:

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.2.2}$$

Ce système s'appelle système non autonome (f dépend de t).

Définition 1.2.1

1)Trajectoire: *On appelle trajectoire de (1.2.1) passant par $x_0 \in D$, l'ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par:*

$$\Gamma_{x_0} = \{x \in D \diagdown x = \phi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\} = \Gamma^+_{x_0} \cup \Gamma^-_{x_0.}$$

avec

$$\Gamma^+_{x_0} = \{x \in D \diagdown x = \phi(t, x_0), t \geq 0\} \text{ et } \Gamma^-_{x_0} = \{x \in D / x = \phi(t, x_0), t < 0\}.$$

où $\phi(t, x_0)$ solution de (1.2.1).

2)Orbite: *L'orbite d'une solution $\phi(t, x_0)$ de (1.2.1) est le lieu des point $\phi(t)$ correspondants, pour $t \in \mathbb{R}$, dans l'espace de phase.*

3)Fonction définie positive: *Une fonction $V : D \to \mathbb{R}$ est dite définie positive s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 tel que :*

1) $V(0) = 0$.

2)pour tout $x \in \mathcal{V} \diagdown \{0\}$, $V(x) > 0$.

4)Fonction définie négative : *Une fonction $V : D \to \mathbb{R}$ est dite définie négative s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 tel que :*

1) $V(0) = 0$.

2) pour tout $x \in \mathcal{V} \diagdown \{0\}$, $V(x) < 0$.

Définition 1.2.2 [2]

On considère le système (1.2.1), et $V : D \to \mathbb{R}^n$ ayant des dérivées partielles sur D. On définit la dérivée totale $\dot{V}$ par :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^i V}{\partial x_i}(x)\frac{dx_i}{dt}$$

De plus si x est solution de (1.2.1), on a $\dfrac{dx_i}{dt} = f_i(x)$ donc

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^i V}{\partial x_i}(x) f_i(x).$$

Définition 1.2.3 [2]

On considère le système (1.2.2), et $V : I \times D \to \mathbb{R}^n$ ayant des dérivées partielles sur $I \times D$. On définit la dérivée totale $\dot{V}$ par :

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^i V}{\partial x_i}(t,x)\frac{dx_i}{dt}$$

De plus si x est solution de (1.2.2), on a $\dfrac{dx_i}{dt} = f_i(t,x)$ donc

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^i V}{\partial x_i}(t,x) f_i(t,x).$$

Définition 1.2.4 [2]

Soit $f : I \times D \to \mathbb{R}^n$, on dit que

***1)** f est localement lipschitzienne en la première variable, si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times D$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (t_0, x_0) dans $I \times D$ et une constante $c > 0$ telle que :*

$$\forall((t,x),(t',x)) \in \mathcal{V}^2, \ \ \|f(t,x) - f(t',x)\| \leq c\,\|t - t'\|\,.$$

On note $Lip_t(I \times D)$ l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes en la première variable.

***2)** f est localement lipschitzienne en la deuxième variable, si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times D$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (t_0, x_0) dans $I \times D$ et une constante $c > 0$ telle que :*

$$\forall((t,x),(t,x')) \in \mathcal{V}^2, \|f(t,x) - f(t,x')\| \leq c\,\|x - x'\|\,.$$

On note Lip_x $(I \times D)$ l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes en la deuxième variable.
On note $Lip_{(t,x)}$ $(I \times D)$ l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes en la première et la deuxième variable.

1.3 Équations différentielles ordinaires

[5] Soit

$$f : I \times D \to \mathbb{R}^n$$
$$(t, x) \to f(t, x)$$

une application de classe C^k, $k \geq 1$, d'un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Nous écrirons

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), f = (f_1, f_2, ..., f_n).$$

On appelle équation différentielle vectorielle du premier ordre une équation du type (1.2.2).

(1.2.2) est une écriture abrégée pour le système des équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, ...x_n) \\ \quad\quad\vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, ...x_n). \end{cases}$$

On appelle solution de l'équation (1.2.1) toute application dérivable $x : I \to \mathbb{R}^n$, définie sur un intervalle non vide $I \subseteq \mathbb{R}$ et telle que, pour tout $t \in I$

$$x(t) \in D \text{ et } \dot{x}(t) = f(x(t)).$$

1.3.1 Un énoncé général du problème de Cauchy

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et D un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle problème de Cauchy, le problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

où f est une fonction de $I \times D$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 1.3.1 ***(Cauchy Lipschitz locale)*** [6]

Si f est continue sur D et localement lipschitzienne en $x(t)$, alors (1.3.1) admet une unique solution maximale.

Preuve. *f est continue sur D donc (1.3.1) est équivalent à*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \tag{1.3.2}$$

Soit $V \in \mathcal{V}(x_0)$, $W \in \mathcal{V}(t_0)$ et $k > 0$ comme dans la définition du caractère localement lipschitzien de f, on peut supposer $W \times V$ borné. On note $M = \sup_{t \in W, x \in V} \|f(t,x)\|$.

Soit $r > 0$ tel que $\bar{B}(x_0, r) \subset V$ et soit $T > 0$ tel que $[t_0 - T, t_0 + T] \subset W$. On note $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions continues de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\bar{B}(x_0, r)$ muni de la norme de sup*, il s'agit alors d'un espace complet.*

Soit

$$\Phi(Y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, Y(s))ds.$$

Il faut montrer tout d'abord que $\mathcal{F}$ soit stable par Φ.

$$\|\Phi(Y)(t) - x_0\| \leq |t - t_0| M \leq TM.$$

donc en choisissant $T \leq \frac{r}{M}$, $\Phi(Y)$ est bien à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r)$ (ce choix garantit aussi que le cylindre considéré est bien un cylindre de sécurité).

Le but est maintenant de montrer que Φ admet un point fixe en utilisant le théorème de Picard (voir [9]*). En effet, l'équation (1.3.2) implique qu'une fonction x de classe C^1 est solution de (1.3.1) si et seulement si elle est point fixe de Φ.*

On va montrer que Φ admet une itérée contractante. Soit $Y, Z \in \mathcal{F}$, montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], \quad \|\Phi^p(Y)(t) - \Phi^p(Z)(t)\| \leq \frac{k^p |t - t_0|^p}{p!} \|Y - Z\|_\infty$$

Cette inégalité est vraie pour $p = 0$ et

$$\left\|\Phi^{P+1}(Y)(t) - \Phi^{p+1}(Z)(t)\right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(u, \Phi^p(Y)(u)) - f(u, \Phi^p(Z)(u))\| \, du \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} k \|\Phi^p(Y)(u) - \Phi^p(Z)(u)\| \, du \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} k \frac{k^p |u - t_0|^p}{p!} \|Y - Z\|_\infty du \right|$$
$$= \frac{k^{p+1} |t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \|Y - Z\|_\infty$$

d'où le résultat. On a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tous $Y, Z \in \mathcal{F}$,

$$\|\Phi(Y) - \Phi(Z)\|_\infty \leq \frac{k^p T^p}{p!} \|Y - Z\|_\infty .$$

Or $\frac{k^p T^p}{p!} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{k^p T^p}{p!} < 1$. D'après le théorème de point fixe de Picard, Φ admet un unique solution de (1.3.1) sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Cette solution se prolonge en une solution maximale. Supposons qu'il existe deux tels prolongements x_1 et x_2 sur deux intervalles I_1 et I_2. L'intervalle $I_1 \cap I_2$ est non vide car il contient $[t_0 - T, t_0 + T]$. Soit J le plus grand intervalle inclus dans $I_1 \cap I_2$ et contenant $[t_0 - T, +t_0 + T]$ tel que $x_1 = x_2$ sur J. Alors J est fermé dans $I_1 \cap I_2$ car $x_1 - x_2$ est continue. Si $J \neq I_1 \cap I_2$, alors on peut appliquer l'unicité locale précédemment démontrée en l'une des bornes de J et contredire la maximalité de J. Donc $J = I_1 \cap I_2$, d'où on déduit $x_1 = x_2$ sur $I_1 \cap I_2$ et, par définition de solution maximale, $I_1 = I_2$. Finalement, x se prolonge en une unique solution maximale. ■

Théorème 1.3.2 ***(Cauchy Lipschitz globale)*** [3]

Soit $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ globalement lipschitzienne par rapport au second variable, ie:

$$\forall K \subset I, \exists k > 0, \forall t \in K, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k \|x - y\|$$

Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$.

On considère le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Alors le problème (1.3.3) admet une unique solution globale.(voir le preuve dans [3])

1.3.2 Système différentielles linéaires

Considérons le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.3.4}$$

où les applications

$$t \to A(t) \in M_n(\mathbb{R})$$
$$t \to B(t) \in \mathbb{R}^n$$

sont localements intégrables sur l'intervalle I considéré.

Définition 1.3.1 [1]

On appelle résolvante du problème (1.3.4), la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial t} = A(t)R(t, t_0), \\ R(t_0, t_0) = Id, \end{cases}$$

où $R(t, t_0) \in M_n(\mathbb{R})$.

La résolvante possède les propriétés suivantes:

1) $R(t_2, t_0) = R(t_2, t_1)R(t_1, t_0)$.

2) Si $\Delta(t, t_0) = \det R(t, t_0)$, on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta}{\partial t} = trA(t)\Delta(t, t_0), \\ \Delta(t_0, t_0) = 1. \end{cases}$$

3) La solution du problème de Cauchy (1.3.4) est donnée par

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)B(s)ds.$$

obtenue via la méthode de la variation de la constante.

4) Lorsque $t_0 = 0$, on note plutôt $M(t) = R(t, 0)$. La solution du problème de Cauchy (1.3.4) se reformule de la façon suivante:

$$x(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_{0}^{t} M(s)^{-1}B(s)ds.$$

Remarque 1.3.1 [1]

Dans le cas des systèmes autonomes, le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ *est de la forme*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Alors, dans ce cas, la résolvante est l'application* $M : t \to e^{(tA)}$, *et la solution de ce problème est*

$$x(t) = e^{(tA)} x_0.$$

L'exponentielle $e^{(tA)}$ *est défini par la série*

$$e^{(tA)} = Id + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + ... + \frac{t^n}{n!} A^n + ...$$

Cette série est normalement convergente dans l'espace de Banach (espace vectorielle normée complet) $M_n(\mathbb{C})$, *vu que*

$$\left\| \sum_{n=p}^{n=q} \frac{t^n}{n!} A^n \right\| \leq \sum_{n=p}^{n=q} \frac{|t|^n}{n!} \|A\|^n \leq e^{\|tA\|}.$$

Exemple 1.3.1 [1]

Considérons l'équation autonome

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

comme les valeurs propres $\{-i, i\}$ *de la matrice* A *sont distinctes,* A *est diagonalisable, de plus*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} e^{(tA)} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(it)} & 0 \\ 0 & e^{(-it)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et la solution du système est donnée par

$$x(t) = e^{(tA)} x_0$$

Pour toute donnée initiale $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

Chapitre 2

Stabilité et théorie de Lyapunov

La notion de stabilité correspond à l'idée d'un comportement qui dure dans le temps et permet de formaliser la question suivante, on se donne le système dynamique

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.0.1}$$

en un point voisin x_0' d'un point d'équilibre $x_{0,}$ où $f : D \to \mathbb{R}^n$ continue, on pose la question suivante: que devient-il la trajectoire solution pour une condition initiale x_0' proche de x_0? Cette question est important car dans la pratique les conditions initiales présentent des incertitudes; il serait souhitable que deux conditions initiales voisines conduisent à des trajectoires solutions voisines pour tout temps et ceci même pour des temps infiniment longs. Une manière naturelle d'aborder cette question consisterait à résoudre l'équation différentielle et à examine le comportement des solutions. Cependant, en générale, on ne sait pas résoudre les équations différentielles sauf quelques équations simples.

La réponse à la question nécessite donc une déscription qualitative des trajectoires du système. C'est le mathématicien Russe Lyapunov qui a établi en 1892, dans son mémoire intitulé "Problème générale de la stabilité du mouvement" les fondements de la théorie moderne de la stabilité. Les démonstrations utilisent des fonctions auxiliaires appellées aujourd'hui fonction de Lyapunov.

2.1 Théorie de Lyapunov dans le cas autonome

Nous allons considérer la stabilité des systèmes autonomes décrits par (2.0.1). Nous présenterons les deux méthodes de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité des systèmes autonomes (méthodes directes et méthodes indirectes), mais on s'intersse par la méthode directe.

On suppose que pour toute condition initiale x_0, il existe une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Nous noterons indifférement $x(t, x_0)$ ou $x(t)$ cette solution.

2.1.1 Notions de stabilité

Une notion qui est primordiale dans l'étude de la stabilité est la notion du point d'équilibre.

Définition 2.1.1 ***(point d'équilibre)***

L'état x_e est appelé état d'équilibre ou point d'équilibre pour le système (2.1.1) si lorsque $x(t_0) = x_e$ alors $x(t) = x_e$ pour tout $t \geq t_0$. En d'autres termes, x_e vérifie l'équation (2.1.1) et par suite l'équation $f(x_e) = 0$ $(x_e = cte)$ [1] .

Remarque 2.1.1 [7]

On peut toujours se ramener au cas où le point d'équilibre est à l'origine 0 puisque si x_e vérifie $f(x_e) = 0$, il suffit de considérer le changement de coordonnées $z = x - x_e$, la dérivée de z est donnée par

$$\dot{z} = \dot{x} = f(x) = f(z + x_e) \overset{déf}{=} g(z), et\ g(0) = 0.$$

l'orogine est bien un point d'équilibre du système

$$\dot{z} = g(z).$$

Définition 2.1.2 *Le point d'équilibre x_e est dit stable si:* $\forall \rho > 0, \exists r(\rho) > 0$ *tel que,*

$$si \ \|x_0 - x_e\| \leq r \ alors \ \|x(t) - x_e\| \leq \rho, \forall t \geq 0$$

Sinon le point d'équilibre est dit instable [7].

Cette définition signifie que, quelle que soit la boule de rayon ρ, il est toujours possible de choisir une certaine sous-boule de rayon r telle que pour toute condition initiale comprise dans cette sous-boule, la trajectoire résultante sera, tout entier, comprise dans la boule de rayon ρ.

Dans un langage plus imagé, un petit déséquilibre initiale n'entraine qu'un petit déséquilibre au cours du temps, déséquilibre qui peut très bien être permanent.

On peut distinguer plusieurs notions de stabilité que l'on définisse

1) Stabilité asymptotique.

2) Stabilité exponentielle.

3) Stabilité locale ou globale.

Définition 2.1.3 ***(stabilité asymptotique)***

[8]*Le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable si*

1) *il est stable.*

2) *il existe $r > 0$ tel que $\forall x_0 \in B(x_e, r)$, $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.*

Définition 2.1.4 (Stabilité exponentielle)

[8]*Le point d'équilibre $x_e = 0$ est exponentiellement stable s'il existe deux scalaires strictement positifs K et α tels que*

$$\forall t \geq 0, \|x(t)\| < K \|x_0\| e^{-\alpha t}$$

pour tout $x_0 \in B(0, r)$.

Remarque 2.1.2 *Dans chacune des définitions précédentes, la stabilité est définie de manière locale puisque elle est reliée à la notion de voisinage. En utilisant les définitions précédentes, il n'est pas possible à priori de prédire le comportement du système pour une condition initiale prise loin du point d'équilibre.*

Définition 2.1.5 *Si un système est stable asymptotiquement (exponentiellement) pour n'importe quelle condition initiale dans* $\mathbb{R}^n$*, on dira que le point d'équilibre* $x_e = 0$ *est asymptotiquement (exponentiellement) stable au sens large. On dira aussi qu'il est globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable.*

Remarque 2.1.3 *Pour un système linéaire* $\dot{x}(t) = Ax(t)$*, où* $A \in M_n(\mathbb{R})$*, dans ce cas, la stabilité locale est équivallente à la stabilité globale. C'est une conséquence directe du proposition ci-dessous caractérisant la stabilité des systèmes linéaire autonomes.*

Proposition 2.1.1 [7]

1) *S'il existe une valeur propre* λ *de* A *telle que* $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$*, alors le point d'équilibre* $x_e = 0$ *est instable.*

2) *Si toutes les valeurs propres de* A *sont de partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre* $x_e = 0$ *est asymptotiquement stable.*

3) *Le point d'équilibre* $x_e = 0$ *est stable si et seulement si toute le valeur propre de* A *est de partie réelle négative ou nulle, et si toute le valeur propre de partie réelle nulle est simple (d'orde un).*

La définition de la stabilité présente certains désavantages importants:

1) Il est nécessaire de pouvoir calculer de manière explicite chaque solution correspondant à chacune des conditions initiales.

2) Le maniement de la définition est fastidieux.

Par conséquent, des résultats permettant de déterminer la stabilité sans devoir intégrer les équations différentielles seraient les bienvenues.

2.1.2 Méthode directe de Lyapunov

Pour l'étude de la stabilité non linéaire, la méthode la plus classique est basée sur la linéairisation et l'utilisation des valeurs propres du système linéarisé, Lyapunov a proposé une seconde méthode, en s'inspirant de l'idée de l'énergie mécanique de Lagrange qui a formulé le principe de stabilité des systèmes mécaniques "un système qui est dans un état où son énergie potentielle possède un minimun isolé est dans un état d'équilibre stable". Cette méthode, appelée aussi méthode directe de Lyapunov, est basée sur la recherche d'une fonction scalaire de signe défini à valeurs reélles.Quand sa dérivée par rapport au temps est définie de signe opposé, la vitesse du point $x(x \in \mathbb{R}^n)$ est toujours dirigée vers l'intérieur, ce point finira à arriver à l'origine; dans le cas contraire, le point x s'en écartera davantage. Dans quelques classes de systèmes physiques, la fonction V peut être choisie comme étant l'énergie du système [1] .

Théorème 2.1.1 ***stabilité de Lyapunov (1892)*** [4]

Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre de (2.0.1), s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_e et une fonction

$$V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^+$$

continue, ayant des dérivées partielles continues , telle que:

(**i**) *V soit définie positive.*

(**ii**) *la dérivée totale $\dot{V}$ pour (2.0.1) soit négative.*

alors x_e est stable. (V s'appelle une fonction de Lyapunov).

Si on remplace (ii) par:

(**iii**) *la dérivée totale $\dot{V}$ pour (2.0.1) est définie négative.*

alors $x_e = 0$ est asymptotiquement stable. (V s'appelle une fonction stricte de Lyapunov).

Preuve. 1^{ére}partie: Soit $\epsilon > 0$ tel que $\overline{B(0, \epsilon)} \subset D$, V est continue sur

$$C_\epsilon = \{x \in \mathcal{V}; ||x|| = \epsilon\}$$

qui est compact, ainsi V y atteint ses bornes. Donc d'après (i), il existe $\hat{x} \in C_\epsilon$ tel que:

$$V(\hat{x}) = \inf_{x \in C_\epsilon} V(x) = c > 0.$$

V étant continue sur $\mathcal{V}$ et comme $V(0) = 0$, on a:

$$\exists \delta > 0; \; (x \in \mathcal{V} \; , \; ||x|| < \delta) \Rightarrow V(x) < c.$$

De plus, $\delta < \epsilon$ d'après ce qui précède.

Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ tel que $||x_0|| < \delta$, alors$V(x_0) < c$. On s'intéresse à la solution $x(t, t_0, x_0)$.

Supposons qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $||x(t_1, t_0, x_0)|| > \epsilon$. On a

$$||x(t_0, t_0, x_0)|| = ||x_0|| < \delta < \epsilon.$$

Or $t \mapsto ||x(t, t_0, x_0)||$ est continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_\epsilon > 0$ tel que $||x(t_\epsilon, t_0, x_0)|| = \epsilon$ et ainsi $V(x(t_\epsilon, t_0, x_0)) \geq c$.

D'après (ii), on sait que pour tout t dans un voisinage de t_0 tel que $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V}$, on a

$$\dot{V}(x(t, t_0, x_0)) = (DV(x(t, t_0, x_0))(\dot{x}(t, t_0, x_0)) = (DV(x(t, t_0, x_0))(f(x(t, t_0, x_0))) \leq 0.$$

On en déduit que $t \mapsto V(x(t, t_0, x_0))$ est décroissante dans un voisinage de t_0 contenant t_ϵ. Ainsi, on a

$$V(x(t_\epsilon, t_0, x_0)) \leq V(x(t_0, t_0, x_0))$$

d'où

$$V(x(t_\epsilon, t_0, x_0)) \leq V(x_0).$$

Or, on a $V(x_0) < c$ et $V(x(t_\epsilon, t_0, x_0)) \geq c$, ce qui est une contradiction.

Ainsi :

$$\forall t \geq 0, ||x(t, t_0, x_0)|| \leq \epsilon.$$

Donc 0 est un point d'équilibre stable.

$2^{éme}$**partie**: Soit $x_0 \in B(0, \delta)$, on a

$$V(x(t, t_0, x_0)) - V(x(t_0, t_0, x_0)) = \int_{t_0}^{t} \dot{V}(x(s, t_0, x_0))ds$$

d'où

$$V(x(t, t_0, x_0)) - V(x_0) = \int_{t_0}^{t} DV(x(s, t_0, x_0))f(x(s, t_0, x_0))ds.$$

Or $t \mapsto V(x(t,t_0,x_0))$ est décroissante et minorée par 0 pour t dans un voisinage de t_0 tel que $x(t,t_0,x_0) \in \mathcal{V}$. D'après ce qui précède, $x(t,t_0,x_0)$ reste dans $\overline{B(0,\epsilon)} \subset \mathcal{V}$ pour tout $t \geq t_0$, donc $t \mapsto V(x(t,t_0,x_0))$ est décroissante et minorée par 0 pour tout $t \geq t_0$, ainsi :

$$\int_{t_0}^{+\infty} DV(x(s))f(x(s))ds < +\infty.$$

Or d'après (iii), $DV(x)f(x) < 0$ pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$. On en déduit que

$$\sum_{n\geq 0} DV(x(n))f(x(n)) < +\infty.$$

Ainsi,

$$\lim_{t\to\infty} DV(x(t,t_0,x_0))f(x(t,t_0,x_0)) = 0.$$

On sait d'après ce qui précède que $x(t,t_0,x_0)$ reste dans le compact $\overline{B(0,\epsilon)}$.

Ainsi il existe une suite $(t_k)_{k\geq 0}$ strictement croissante telle que $(x(t_k,t_0,x_0))_{k\geq 0}$ converge dans $\overline{B(0,\epsilon)}$ vers a. Or on a

$$DV(x(t_k,t_0,x_0))f(x(t_k,t_0,x_0)) \underset{k\to\infty}{\rightarrow} 0.$$

Par passage à la limite, il vient que $DV(a)f(a) = 0$. De (i) et (iii), on déduit que $a = 0$. 0 est ainsi la seule valeur d'adhérence de $x(t,t_0,x_0)$, ce qui montre que :

$$\lim_{t\to\infty} x(t,t_0,x_0) = 0.$$

Donc 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable. ■

Exemple 2.1.1 [8]

On considère l'équation du pendule :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(\frac{g}{l})\sin(x_1) \end{cases}$$

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre 0*, posons*

$$V(x_1,x_2) = (\frac{g}{l})(1-\cos(x_1)) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

On a clairement, $V(0,0) = 0$ *et* $V(x_1,x_2) > 0$ *quelque soit* $(x_1,x_2) \neq (0.0)$*, donc* V *est définie positive. De plus, la dérivée de* V *pour le système vaut*

$$\dot{V}(x_1,x_2) = (\frac{g}{l})(x_2\sin(x_1)) - (\frac{g}{l})(x_2\sin(x_1)) = 0.$$

D'après le théorème de stabilité de Lyapunov, on en déduit que 0 *est stable.*

Exemple 2.1.2 [1]

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_2^2 \end{cases}$$

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre 0*, posons*

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

On a $V(0) = 0$ *et* V *est définie positive. La dérivée de* V *pour le système vaut*

$$\dot{V}(x_1, x_1) = x_1(-x_1^3 - x_2^2) + x_2(x_1 x_2 - x_2^3) = -(x_1^4 + x_2^4).$$

$\dot{V}$ *est clairement définie négative. D'après le théorème de stabilité de Lyapunov, on en déduit que* 0 *est asymptotiquement stable.*

2.2 Théorie de Lyapunov dans le cas non autonome

Considérons le système dynamique suivant

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.2.1}$$

où $f : [0, \infty[\times D \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue par rapport à t et localement *lipschitzienne* par rapport à x sur $[0, \infty[\times D$, et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant l'origine $x = 0$.

La principale difficulté dans l'étude de tels systèmes est que la solution dépend de l'instant initial $t_{0.}$ Nous allons introduire dans ce qui suit la notion d'uniformité qui permet alors de caractériser le comportement d'une classe importance de système dynamique.

L'origine est un point d'équilibre pour système (2.2.1) à l'instant $t = 0$ si

$$f(t, 0) = 0, \ \ \forall t \geq 0.$$

Comme dans le cas autonome, sans perte de généralité, on peut toujours supposer que l'origine est un point d'équilibre. En effet, supposons que $\bar{y}(\tau)$ est une solution du système

$$\frac{dy}{d\tau} = g(\tau, y)$$

définie pour tout $\tau \geq a$. Le changement de variable

$$x = y - \bar{y}(\tau)$$

$$t = \tau - a$$

transforme le système (2.2.1) en un système équivalent ayant l'origine comme point d'équilibre en $t = 0$:

$$\dot{x} = g(\tau, y) - \bar{y}(\tau) = g(t + a, x + \bar{y}(t + a)) - \bar{y}(t + a)$$

$$= g(t + a, x + \bar{y}(t + a)) - g(t + a, \bar{y}(t + a)) \overset{déf}{=} f(t, x), \ \forall t \geq 0.$$

Dans ce qui suit, on notera $x(t, t_0, x_0)$ la solution du système (2.2.1) à l'instant $0 \leq t_0 < t$ initialisé en x_0 à l'instant t_0.

2.2.1 Notions de stabilité

Définition 2.2.1 [10]

On dit que le point d'équilibre $x = 0$ *du système (2.2.1) est stable si,*$\forall \epsilon > 0$, $\forall t_0 \geq 0$, *il existe un scalaire positif* $\delta(\epsilon, t_0)$ *tel que*

$$\|x_0\| \leq \delta(\epsilon, t_0) \Longrightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0.$$

on dit que l'origine est instable dans le cas contraire.

Définition 2.2.2 ***(uniformément stable)*** [8]

On dit que le point d'équilibre est uniformément stable si $\forall \epsilon > 0$, *il existe un scalaire positif* $\delta(\epsilon)$ *tel que*

$$\forall t_0 \geq 0, \ \ \|x_0\| \leq \delta(\epsilon) \Longrightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0.$$

Définition 2.2.3 ***(asymptotiquement stable)*** [10]

On dit que le point d'équilibre est asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe une constante $c = c(t_0)$ *telle que*

$$\|x_0\| < c \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} x(t, t_0, x_0) = 0.$$

Définition 2.2.4 ***(uniformément asymptotiquement stable)*** [10]

On dit que le point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable quelque soit $x_0 \in D$ *et il existe une constante* c *(indépendante de* t_0*) telle que*

$$\|x_0\| < c \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} x(t, t_0, x) = 0$$

uniformément par rapport à t_0 *c'est à dire:* $\forall \eta > 0, \exists T = T(\eta) > 0$ *tel que*

$$\|x_0\| < c \Longrightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < \eta, \ \forall t \geq t_0 + T(\eta).$$

Définition 2.2.5 ***(globalement uniformément stable)*** [8]

On dit que le point d'équilibre est globalement uniformément stable s'il est uniformément stable, $\delta(\epsilon)$ *peut être choisi de manière à avoir* $\lim_{\epsilon \to \infty} \delta(\epsilon) = \infty$, *et pour tout* $\eta > 0$, $c > 0$, *il existe* $T = T(\eta, c)$ *tel que*

$$\|x_0\| < c \Longrightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < \eta, \ \forall t \geq t_0 + T(\eta, c).$$

Définition 2.2.6 ***(exponentiellement stable)*** [10]

On dit que le point d'équilibre est exponentiellement stable s'il existe des constantes c, k *et* λ *positives telles que*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq k \|x_0\| e^{-\lambda(t-t_0)}, \ \forall \|x_0\| < c, \forall t > t_0. \tag{2.2.2}$$

et globalement exponentiellement stable si l'inégalité (2.2.2) est vérifiée pour n'importe quel état initiale x_0.

Définition 2.2.7 ***(Fonctions de classe*** $\mathcal{K}$***)*** [2]

Soit $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ *et* $\varphi : [0, a] \to \mathbb{R}^+$ *une application continue, on dit que* φ *appartient à la classe* $\mathcal{K}$ *si :*

1) φ *est strictement croissante.*

2) $\varphi(0) = 0$.

Définition 2.2.8 ***(Fonctions radialement non bornées)*** [2]

Une fonction $V : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est radialement non bornée si*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} V(t, x) = +\infty$$

uniformément en t*, c'est à dire*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in \mathbb{R}^n, (\|x\| > \delta) \Longrightarrow (\forall t \in I, V(t, x) < \epsilon).$$

Définition 2.2.9 ***(fonction décrescente)*** [2]

Une fonction $V : I \times D \to \mathbb{R}$ *est décrescente si*

$$\lim_{\|x\| \to 0} V(t, x) = 0$$

uniformément en t*, c'est à dire,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in D, (\|x\| < \delta) \Longrightarrow (\forall t \in I, V(t, x) < \epsilon).$$

2.2.2 Méthode directe de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov (aussi appellée seconde méthode de Lyapunov) est une méthode qui nous permet de déterminer la stabilité d'une équation differentielle sans la resoudre l'idée principal est de définir une fonction appellée l'énergie du système puis on étudie le taux de changement de l'energie pour s'assurer de la stabilité du système [10].

Théorème 2.2.1 ***(stabilité de Lyapunov)*** [4]

soit $x_e = 0$ *un point d'équilibre de (2.2.1), s'il existe un voisinage* $\mathcal{V}_{t_0}$ *et une fonction*

$$V : \mathcal{V}_{t_0} \to \mathbb{R}^+$$

continue, ayant des dérivées partielles continues, (V *s'appelle une fonction de Lyapunov) telle que:*

(**i**) V *soit définie positive.*

(**ii**) *la dérivée totale* $\dot{V}$ *pour (2.2.1) soit négative (respectivement définie négative).*

alors x_e *est stable.(respectivement asymptotiquement stable).*

De plus si on a:

(**iii**) V *est décrescente*

alors x_e *est uniformément stable (respectivement uniformément asymptotiquement stable).*

De plus si on a:

(**iv**) $D = \mathbb{R}^n$ *et si* V *est radialement non borné*

alors x_e *est globalement uniformément stable (respectivement globalement uniformément asymptotiquement stable).*

Preuve. $1^{ére}$**partie**: Supposons les points (i) et (ii) vérifiés. On sait qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}'_{t_0} \subset \mathcal{V}_{t_0}$ et une fonction φ de classe $\mathcal{K}$ telle que :

$$V(t,x) \geq \varphi(||x||) > 0, \quad \forall (t,x) \in \mathcal{V}'_{t_0}.$$

Soit $x_0 \in D$ et $x(t,t_0,x_0)$ une solution de(2.2.1), pour tout t dans un voisinage de t_0 tel que $x(t,t_0,x_0) \in \mathcal{V}'$, on a d'après (i) et (ii) :

$$\varphi(||x(t,t_0,x_0)||) \leq V(t, x(t,t_0,x_0)) \leq V(t_0,x_0).$$

Soit $\epsilon > 0$, tel que $\overline{B(0,\epsilon)} \subset \mathcal{V}'$, V étant continue en x, et $V(t_0, 0) = 0$, on peut trouver $\delta(\epsilon, t_0) < \epsilon$ tel que

$$||x_0|| \leq \delta(\epsilon, t_0, x_0) \Rightarrow V(t_0, x_0) < \varphi(\epsilon).$$

Soit $x_0 \in D$ tel que $||x_0|| < \delta(\epsilon, t_0)$, supposons qu'il existe $t_1 > 0$ tel que

$$\|x(t_1, t_0, x_0)\| > \epsilon.$$

On sait que $t \rightarrow ||x(t, t_0, x_0)||$ est continue, ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_\epsilon > 0$ tel que $||x(t_\epsilon, t_0, x_0)|| = \epsilon$. Pour tout t dans un voisinage de t_0 tel que $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V}'$, on a :

$$\varphi(||x(t, t_0, x_0)||) \leq V(t, x(t, t_0, x_0)).$$

Or $\overline{B(0,\epsilon)}$ est inclus dans $\mathcal{V}'$. On en déduit que

$$\varphi(\epsilon) = \varphi(||x(t_\epsilon, t_0, x_0)||) \leq V(t_\epsilon, x(t_\epsilon, t_0, x_0)).$$

Ceci contredit le fait que

$$V(t_\epsilon, x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) < \varphi(\epsilon),$$

ce qui montre que 0 est stable.

2^{éme} partie: Supposons que le point (iii) soit vérifié. On sait qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}'_{t_0} \subset \mathcal{V}_{t_0}$ et une fonction ψ de classe $\mathcal{K}$ telle que :

$$\varphi(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \psi(\|x\|) \quad \forall (t, x) \in \mathcal{V}'_{t_0}.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$, tel que $\psi(\delta) < \varphi(\epsilon)$.

Soit $x_0 \in D$ et $x(t, t_0, x_0)$ une solution de (2.2.1) telle que $||x_0|| < \delta(\epsilon)$, alors d'aprés la première partie on a pour tout $t \geq t_0$:

$$\varphi(\epsilon) > \psi(\delta) \geq V(t_0, x_0) \geq V(t, x(t, t_0, x_0)) \geq \varphi(||x(t, t_0, x_0||).$$

φ étant de classe $\mathcal{K}$, ceci implique que pour tout $t \geq t_0$,

$$||x(t, t_0, x_0)|| \leq \epsilon.$$

La stabilité uniforme est assurée par le fait que $\delta(\epsilon)$ est indépendant de la solution $x(t, t_0, x_0)$.

3^{éme} partie: On suppose maintenant que $\dot{V}$ est définie négative, alors il existe un voisinage $\mathcal{V}'_{t_0} \subset \mathcal{V}_{t_0}$ et une fonction χ de classe $\mathcal{K}$ telle que

$$\dot{V}(t,x) \leq -\chi(\|x\|) < 0 \quad \forall (t,x) \in \mathcal{V}'_{t_0}.$$

Soit $x_0 \in D$ et $x(t, t_0, x_0)$ une solution du système (2.2.1) telle que $||x_0|| < \delta$ où δ est obtenu comme dans la $2^{ème}$partie. Soit ϵ une constante positive telle que

$$0 < \epsilon < ||x_0||.$$

On peut encore trouver une constante positive $\lambda = \lambda(\epsilon)$ telle que

$$\psi(\lambda) < \varphi(\epsilon).$$

On définit alors $\mu = \chi(\lambda)$, et on pose :

$$T = T(\delta, \epsilon) = \frac{\psi(\delta)}{\mu}.$$

Supposons que $||x(t, t_0, x_0)|| > \lambda$, alors pour tout t dans $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \;\; < \;\; & \varphi(\epsilon) \leq V(t_1, x(t_1, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t_1} \chi(\|x(s, t_0, x_0)\|) ds \\ \leq \;\; & V(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t_1} \chi(\lambda) ds \leq V(t_0, x_0) - (t_1 - t_0)\mu \leq \psi(\delta) - T(\mu) = 0. \end{aligned}$$

On obtient une contradiction, et donc il existe $t_2 \in [t_0, t_1]$ tel que $||x(t_2, t_0, x_0)|| \leq \lambda$. Ainsi pour tout $t \geq t_2$

$$\varphi(||x(t, t_0, x_0)||) \leq V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_2, x(t_2, t_0, x_0)) \leq \psi(\lambda) \leq \varphi(\epsilon).$$

On en déduit que

$$||x(t, t_0, x_0)|| < \epsilon \;\forall t \geq t_0 + T \geq t_2$$

ce qui montre la stabilité uniforme asymptotique.

$\mathbf{4}^{\acute{e}me}$ **partie:** V est radialement non borné, donc φ est radialement non borné c'est à dire,

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(\|x\|) = +\infty.$$

Ainsi, ϵ peut être choisi tel que

$$\forall 0 < \delta < \delta_1, \psi(\delta) < \varphi(\epsilon).$$

Finalement, δ_1 peut être choisi aussi grand que l'on veut. Donc, 0 est globalement uniformément asymptotiquement stable. ■

Exemple 2.2.1 *On considère le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - e^{-2t} x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre 0*, posons*

$$V(t,x) = x_1^2 + (1 + e^{-2t}) x_2^2$$

Cette fonction est définie positive, car elle domine la fonction définie positive

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

indépendante de t*. Elle est aussi décrescente car elle est dominée par une fonction définie positive*

$$V(x) = x_1^2 + 2x_2^2$$

indépendante de t*. De plus, la dérivée de* V *pour le système vaut*

$$\dot{V}(t,x) = -2(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2(1 + 2e^{-2t}))$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t,x) &\leq -2(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) \\ &\leq -(x_1 - x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2. \end{aligned}$$

On en déduit alors que $\dot{V}$ *est définie négative, et que* 0 *est uniformément asymptotiquement stable.*

2.3 Fonction de Lyapunov

La notion de fonction de Lyapunov constitue d'une certaine manière une généralisation de l'énergie. Etant donnée une fonction définie positive, l'idée directrice des théorèmes de Lyapunov consiste à évaluer l'évolution de cette fonction sur les trajectoires du système afin de conclure à la décroissance de l'énergie.

Définition (Fonction de Lyapunov) [1]

Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de Lyapunov de classe C^1, telle que

1) V fonction définie positive.

2) $\dot{V}$ fonction négative

Le résultat fondamental de la stabilité de Lyapunov affirme que si une fonction de Lyapunov existe pour un système donné alors ce système est stable. Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante, c'est à dire $\dot{V}(x) < 0$, $\forall x \neq 0$ ($\dot{V}$ fonction définie négative), alors la stabilité est en plus asymptotique.

2.3.1 Fonction de Lyapunov pour les systèmes linéaires

Considérons le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{2.3.1}$$

Lorsque toutes les valeurs propres de $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifient $Re(\lambda_i) < 0$, alors A est dite matrice de Hurwitz ou matrice de stabilité. Supposons que la matice A est inversible, celà, nous garantirait l'unicité du point d'équilibre $x = 0$. Rappelons que l'origine du système (2.3.1) est asymptotiquement stable si et seulement si A est de Hurwitz.

On peut également caractériser la stabilité asymptotique en utilisant la méthode de Lyapunov. Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V(x) = x^T P x$$

Où P est une matrice réelle symétrique définie positive. La dérivée de V au long des trajectoires du système (2.3.1) est donnée par

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (PA + A^T P) x = -x^T Q x$$

Où Q est la matrice symétrique donnée par

$$Q = -(PA + A^T P). \tag{2.3.2}$$

L'équation (2.3.2) est dite équation de Lyapunov [1].

Remarque 2.3.1 [1]

L'équation (2.3.2) est une équation linéaire algébrique qui peut se résoudre en la réécrivant sous la forme $Mx = y$, où x et y sont deux vecteurs constitués des éléments de P et Q. Elle peut également être résolue en la considérant comme cas particulier de l'équation de Sylvester $PA + BP + C = 0$. Il existe de nombreuses méthode numériques efficaces pour la résolution de telles équations .

Exemple 2.3.1 [1]

soient

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, et\ P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

L'équation de Lyapunov a la forme suivante

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

L'unique solution de cette équation est

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \Longrightarrow P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Chapitre 3

Application du théorème de Lyapunov en théorie d'élasticité

Dans ce chapitre on va appliquer la notion de stabilité sur deux systèmes en théorie d'élasticité. Le premier est le système de Timoshenko sans dissipation et le second est un système de Timoshenko avec deux dissipations, une frotement et une amortissement.

I-) Soit le système

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} = k\left(u_x + \varphi\right)_x, \text{ sur } (0,1)\times(0,+\infty) \\ \rho_2 \varphi_{tt} = \alpha\varphi_{xx} - k\left(u_x + \varphi\right), \text{ sur } (0,1)\times(0,+\infty) \end{cases} \tag{3.0.1}$$

où u est le déplacement transversale d'un point matérièle sur une poutre de longeur 1 et φ est l'angle de rotation de l'axe vertical à une section transversale de la poutre.

Pour maitre le problème dans le cadre de la théorie des EDP on suppose que les fonctions inconnues vérifient les conditions initiales et aux limites suivantes

$$\begin{aligned} u\left(x,0\right) &= u_0(t), u_t\left(x,0\right) = u_1\left(t\right), \varphi\left(x,0\right) = \varphi_0\left(t\right), \varphi_t\left(x,0\right) = \varphi_1\left(t\right), \\ u\left(0,t\right) &= u\left(1,t\right) = \varphi\left(0,t\right) = \varphi\left(1,t\right) = 0. \end{aligned}$$

On définit la fonction énergie de ce système par

$$E\left(t,u,\varphi\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho_1 u_t^2 + \rho_2\varphi_t^2 + \alpha\varphi_x^2 + k\left(u_x+\varphi\right)^2\right] dx.$$

Il est claire que $E(t,u,\varphi)$ est définie positive.

On va calculer la dérivée totale $\dot{E}$ de l'énergie et on montre qu'elle négative.

En multipliant l'équation (1) du système (3.0.1) par u_t et l'équation (2) par φ_t et integrée les deux équations sur $[0,1]$on obtient

$$\rho_1 \int_0^1 u_{tt} u_t dx = k \int_0^1 (u_x + \varphi)_x \, u_t dx$$

$$\rho_2 \int_0^1 \varphi_{tt} \varphi_t dx = \alpha \int_0^1 \varphi_{xx} \varphi_t dx - k \int_0^1 (u_x + \varphi) \, \varphi_t dx$$

Une intégration par partie donne

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t^2 dx = -\frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_x^2 dx - k \int_0^1 \varphi u_{xt} dx$$

$$\frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx = -\frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_x^2 dx - k \int_0^1 u_x \varphi_t dx - \frac{k}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx$$

l'addition des deux équations entraîne

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\rho_1 u_t^2 + \rho_2 \varphi_t^2 + \alpha \varphi_x^2 + k \left(u_x + \varphi \right)^2 \right] dx = 0$$

ce qui signefie que $\dot{E}$ est négative, et en appliquant le théorème de stabilité de Lyapunov on constate que le système est localement stable.

II-) On considère le second système

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} = k(u_x + \varphi)_x - u_t, \text{ sur } (0,1) \times (0, +\infty) \\ \rho_2 \varphi_{tt} = \alpha \varphi_{xx} - k(u_x + \varphi) - \varphi_t, \text{ sur } (0,1) \times (0, +\infty) \end{cases} \tag{3.0.2}$$

avec les mêmes conditions initiales et aux limites du système (3.0.1).

On définit la fonction énergie de ce système par

$$E(t, u, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\rho_1 u_t^2 + \rho_2 \varphi_t^2 + \alpha \varphi_x^2 + k(u_x + \varphi)^2 \right] dx$$

Il est claire que $E(t, u, \varphi)$ est définie positive.

On va calculer la dérivée totale $\dot{E}$ de l'énergie et on montre qu'elle définie négative.

En multipliant l'équation (1) du système (3.0.2) par u_t et l'équation (2) par $\varphi_t$et integrée les deux équations sur $[0,1]$on obtient

$$\rho_1 \int_0^1 u_{tt} u_t dx = k \int_0^1 (u_x + \varphi)_x \, u_t dx - \int_0^1 u_t^2 dx$$

$$\rho_2 \int_0^1 \varphi_{tt}\varphi_t dx = \alpha \int_0^1 \varphi_{xx}\varphi_t dx - k \int_0^1 (u_x + \varphi)\, \varphi_t dx - \int_0^1 \varphi_t^2 dx$$

Une intégration par partie donne

$$\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u_t^2 dx = -\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u_x^2 dx - k\int_0^1 \varphi u_{xt} dx - \int_0^1 u_t^2 dx$$

$$\frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi_t^2 dx = -\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi_x^2 dx - k\int_0^1 u_x\varphi_t dx - \frac{k}{2}\int_0^1 \varphi^2 dx - \int_0^1 \varphi_t^2 dx$$

l'addition des deux équations entraîne

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho_1 u_t^2 + \rho_2\varphi_t^2 + \alpha\varphi_x^2 + k\,(u_x+\varphi)^2\right] dx = -\int_0^1 u_t^2 dx - \int_0^1 \varphi_t^2 dx$$

$\dot{E}$ est définie négative, et en appliquant le théorème de stabilité de Lyapunov on constate que le système est localement asymtotiquement stable.

Bibliographie

[1] C. Bennani, Stabilisation et estimation de l'état des systèmes dynamiques non linéaire et applications, thése du magister de, Universite Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou 2011.

[2] E. Moulay, Stabilité des équations différentielles ordinaires,cours DEA. 2007.

[3] F. Rouvière, Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (troisième édition). Cassini, 2009.

[4] J. J. Slotine, L.Weiping, Applied Nonlinear Control. Prentice Hall, 1991.

[5] J. Mawhin, N. Rouche, Equations différentielles ordinaires, Tome 1, Théorie générale, Masson et Cie (1973).

[6] J. P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, EDP Sciences, 2006.

[7] K. H. Khalil, Non Linear System. (Third Edition), Prentice Hall, 2002.

[8] M. Vidyasagar, Nonlinear systems analysis, CRC Press, 1993.

[9] M. Clémence, R. Kelsey, Théorèmes du Point Fixe et Applications aux équations Différentielles, Mémoire de Master 1 de Mathématiques, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2006-2007.

[10] R. M. Murray: A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation. California Institute of Technology, 1994.

ملخص

تناولنا في هذه المذكرة استقرار الجمل الديناميكية و جمل المعادلات التفاضلية حسب طريقة ليابونوف.

في الفصل الاول تم التعريف بالأنظمة الديناميكية والجمل التفاضلية كحالة خاصة منها ، و ذكرنا ببعض النظريات العامة حول وجود ووحدانية حل أعظمي لجملة تفاضلية كنظرية كوشي- ليبشيتز وكوشي-بيكارد.

في الفصل الثاني قمنا بتعريف الاستقرار حسب مفهوم ليابونوف أنواعه: محلى، شامل تقاربي، وبرهنا نظرية ليابونوف لشروط الاستقرار والذي يعتمد على تعريف دالة بدلالة حلول المعادلة تسمى دالة ليابونوف والتي تكون موجبة أو معرفة موجبة و يكون مشتقها الكلي سالب أو معرف سالب و الذي ينتج عنه إستقرار أو إستقرار تقاربي.

الفصل الثالث درسنا فيه أمثلة لجمل من نظرية المرونة من نوع تيموشنكو و برهنا أنها مستقرة أو مستقرة تقاربيا.

الكلمات المفتاحية: الاستقرار، الاستقرار المقارب، دالة ليابونوف، نظرية ليابونوف.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de stabilité des systèmes dynamiques et des systèmes différentielles au sens de Lyapunov .

Dans le premier chapitre on fait rappelle sur les systèmes dynamiques et les systèmes différentielles. L'énoncé et la démonstration des théorèmes généraux sur l'existence et l'unicité d'une solution maximale d'une équation différentielle ont cité en particulier les théorèmes de Cauchy-Lipschitz et de Picard.

Le second chapitre a été consacré a la définition des différents types de stabilité : locale, globale et asymptotique et on a montré le théorème de stabilité de Lyapunov qui exige à définir une fonction dite de Lyapunov qui soit positive ou définie positive de dérivée totale négative ou définie négative.

Dans le troisième chapitre on a appliqué le théorème de Lyapunov sur quelques systèmes en théorie d'élasticité.

Mots clés : Stabilité, stabilité asymptotique, fonction de Lyapunov théorème de Lyapunov.

Abstract

This memo is devoted to the study of the Lyapunov stability of dynamical and differential systems.

In chapter one, we recall the definitions of dynamical and differential systems and stat Cauchy-Lipschitz and Picard's theorems.

The second chapter is devoted to the definitions of several kind of stability: local, global and asymptotic. We also, stat and prove the Lyapunov theorem which requires the construction of a positive function called Lyapunov function with negative total derivative, the positivity of such function and the negativity of its derivative lead to the stability of the solution.

The third chapter is devoted to the study of some examples in elasticity. First we prove the stability of a Timoshenko system without dissipation then we study a dissipative system and prove the asymptotic stability.

Key words: stability, stability asymptotic, Lyapunov function, Lyapunov theorem.