



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Etude théorique d'un problème
de contact en piézoélectricité**

Présenté par: Rezzag Mohcene Oum El Fadhel

Soutenu le 05/06/2018 devant le jury composé de

Meziane Saïd Aneur

Azeb Ahmed Abdelaziz

Mesai Aoun Mohammed Salah

MAA.

MCB.

MAB.

Président

Rapporteur

Examineur

Univ. El Oued

Univ. El Oued

Univ. El Oued

Année universitaire: 2017 – 2018

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions le Dieu, notre créateur de nous avoir données les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

Nous adressons le grand remerciement à notre encadreur **Dr. Abdelaziz Azeb Ahmed** qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses directives du début à la fin de ce travail.

Comme je tiens à remercier vivement **Dr. Meziane Saïd Amer** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à **Dr. Mesai Aoun Mohammed Salah** d'avoir accepté de juger mon travail.

Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également à nos camarades de la promotion 2018 de Mathématiques et nos amis surtout **Ikhlas, Hadda, Tefaha, Nacira, Marwa, Hafsia** et **Aouatef** pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.

Finalement, Nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendu.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Modélisation	3
1.1 Cadre physique	3
1.2 Lois de comportement	5
1.2.1 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire courte.	6
1.2.2 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire longue.	7
1.3 Lois de contact avec ou sans frottement	7
1.3.1 Contact sans frottement	7
1.3.2 Contact avec frottement	8
1.4 Conditions aux limites	9
1.5 Formulation du problème	11
2 OUTILS MATHÉMATIQUES	13
2.1 Espaces fonctionnels	13
2.2 Espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence	16
2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	20
2.4 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	20
2.4.1 Fonctions convexes et semi-continuité inférieure	20
2.4.2 Opérateurs fortement monotones	21
2.5 Compléments divers	24

2.5.1	Lemmes de Gronwall	25
2.6	Hypothèses fondamentaux pour le problème P	27
3	Existence et unicité de la solution	29
3.1	Formulation variationnelle	29
3.2	Résultat d'existence et d'unicité	35
	Conclusion générale	47
	Bibliographie	48

Notations Principales

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 1, 2, 3)$, on note par.

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω
Γ	la frontière de Ω , supposée souvent régulière.
$\Gamma_i (i = \overline{1, 3}, a, b)$	une partie de la frontière Γ .
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue (d-1) dimensionnelle de Γ_1 .
ν	la normale unitaire sortante à Γ .
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v définies sur $\overline{\Omega}$.
σ_ν, σ_τ	les composantes normale et tangentielle du champ tensoriel σ définies sur $\overline{\Omega}$.
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.
$D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω .
$D'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω .
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$.
Q	l'espace $L_s^2(\Omega)^{d \times d}$.
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$.
H_{Div}	l'espace $\{\sigma \in Q \text{ tel que } Div\sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
H'_Γ	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si X est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

X^d	l'espace $\{x = x_i/x_i \in X\}$.
$X_s^{d \times d}$	l'espace $\{x = x_{ij}/x_{ij} = x_{ji} \in X\}$.
$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de X .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$	le produit de dualité entre X' et X .
$\ \cdot\ _X$	La norme de X .
X'	l'espace dual de X .
$\mathcal{L}(X)$	l'espace des applications linéaires et continues de X dans X .

Si de plus $[0, T]$ est un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par :

$C(0, T; X)$	l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans X .
$C^1(0, T; X)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans X .
$L^p(0, T; X)$	l'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans X . telles que $\int_0^T u(t) _X^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; X)}$	la norme de $L^p(0, T; X)$.
$W^{k, p}(0, T; X)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p .
$\ \cdot\ _{W^{k, p}(0, T; X)}$	la norme de $W^{k, p}(0, T; X)$.

Pour une fonction u ; on note par

∇u	le gradient de u .
\dot{u}, \ddot{u}	les dérivées première et seconde de u par rapport au temps.
$\partial_i u, u_{,i}$	la dérivées partielle de u fonction .
$Divu$	la divergence de u .
$divu$	la divergence de u .
$\varepsilon(u)$	la partie symétrique du gradient de $u = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$.
\mathbb{S}^d	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d .
I_d	le tenseur identité du second ordre sur \mathbb{R}^d .
Λ^p	puissance p de l'opérateur Λ .
c	des constantes génériques strictement positives.
$p.p.$	presque partout.

Introduction générale

Le contact entre les matériaux est un phénomène très fréquent et important dans l'industrie et dans notre vie quotidienne et il a attiré l'attention de l'être humain depuis des anciennes années, c'est pourquoi les scientifiques ont essayés de l'étudier et le modéliser.

La connaissance et la maîtrise de ce phénomène confèrent aux scientifiques et aux industriels la possibilité d'élaborer des matériaux aux propriétés et aux performances voulues.

L'une des premières publications sur ce sujet est [14] en raison de Signorini où le problème de contact entre un corps élastique linéaire et une fondation rigide est formulé. La formulation variationnelle associée à ce contact modèle a été établie par Fečera [5] et le problème a été résolu en utilisant les arguments d'inégalités variationnelles. Il suit le travail de Duvaut et de Lions [4] qui a ajouté l'adhésion aux problèmes de contact. Rappelons que l'adhésion des problèmes de contact sont étudiés dans [9, 11, 12, 14, 17] et plusieurs d'autres.

Compte tenu de leur large éventail d'applications, des progrès considérables ont été réalisés achevé dans la modélisation et le traitement des matériaux déformables, en particulier, les matériaux sont appelés piézoélectriques qui reflètent l'acte de polariser sous l'action mécanique ou se déformer lorsqu'un champ électrique est appliqué sur ce type de matériel. Dans les modèles mathématiques, cette propriété est incluse dans la loi de comportement du matériau, pour une présentation détaillée de la piézoélectricité, voir [1, 2, 8]. Donc, en plus de l'équation du mouvement décrivant l'évolution du champ de déplacement et les conditions de déplacement-traction, les modèles incluent également une équation décrivant l'évolution du champ de déplacement électrique et les conditions sur le potentiel électrique et les charges électriques appliquées sur le matériau.

En plus de l'effet piézoélectrique, dans les modèles récents, l'adhésion est considérée ; ce dernier est inter-phénomènes qui accompagnant le mouvement quand une colle est ajouté

pour éviter que les surfaces d'un mouvement relatif. Après Fremond [5, 6], de nombreux modèles de contact adhésif dans des processus quasi-statiques ou dynamiques sont étudiés dans [3, 14, 16, 17] et certains modèles de matériaux viscoélastiques avec adhérence peut être trouvé dans [3, 7, 13, 15].

Ce mémoire est une contribution à l'étude du problème de contact en piézoélectricité. Dans ce travail, nous considérons un modèle mathématique pour le contact adhésif entre un corps supposé électro-viscoélastique avec mémoire longue et une fondation déformable. La nouveauté consiste en ce que le problème quasi-statique ici est frictionnel et est modélisé par une condition de compliance normale standard associée à la loi de Coulomb de frottement sec. Remarquons que le problème de contact sans frottement est résolu [1]. D'autres travaux sont effectués en viscoélasticité avec mémoire courte (voir [16]) et dans certains modèles où la condition de frottement est modélisée des sous-limites (voir [19]).

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des matériaux électro-viscoélastiques, les lois de contact avec ou sans frottement, les conditions aux limites et nous présentons le problème de contact avec adhésion en électro-viscoélasticité avec mémoire longue.

Dans le deuxième chapitre, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence, les espaces des fonctions à valeurs vectorielles les équations, les éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert. Nous rappelons sur quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations et le Lemme de Gronwall. Enfin, nous terminons par des hypothèses fondamentales pour le problème à étudier.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la formulation variationnelle et nous démontrons l'existence et d'unicité d'une solution faible en utilisant des techniques des inéquations variationnelles elliptiques et du point fixe.

Chapitre 1

Modélisation

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus où nous allons introduire le cadre physique plus utilisé dans ce mémoire, la loi de comportement et les conditions aux limites de contact. Par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact avec ou sans frottement, ainsi que la formulation mécanique du problèmes à étudier.

1.1 Cadre physique

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique dans ce mémoire et la formulation mathématique appropriée à l'étude de problème de contact avec frottement entre un corps piézoélectrique et une fondation.

Nous considérons un corps électro-viscoélastique à mémoire longue occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2,3)$. La frontière $\partial\Omega = \Gamma$ est supposée régulière et divisée en trois parties disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont ouverts telles que $mes(\Gamma_1) > 0$ d'une part et de deux parties mesurables Γ_a, Γ_b sont ouverts, disjoints telles que $mes(\Gamma_a) > 0$ et $\Gamma_3 \subset \Gamma_b$. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ . Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Nous supposons que le corps est fixé sur Γ_1 et soumis à des forces volumiques de densité φ_1 donné sur $\Omega \times [0; T]$ et aux tractions de surface φ_2 données sur $\Gamma_2 \times [0; T]$. D'autre part, le corps est soumis à des contraintes électriques. Nous supposons que le potentiel électrique est nul sur Γ_a et que le corps est soumis à un densité de charge q_0 agir sur Ω et une charge

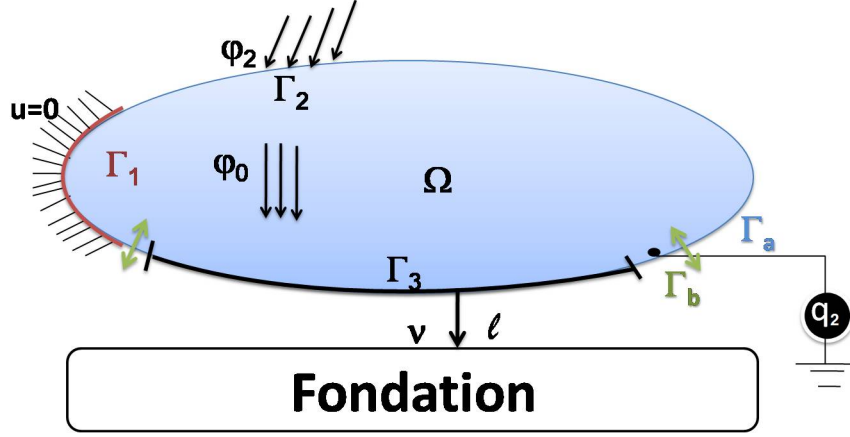


FIGURE 1.1 – Corps piézoélectrique en contact avec une fondation.

électrique de densité q_2 imposée sur Γ_b . Au long de Γ_3 , le corps est en contact adhésif avec une fondation déformable.

Nous notons par $\mathbb{S}^d (d = 2,3)$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$); " \cdot " et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d tels que :

$$u \cdot v = u_i v_i, \quad \|v\| = (v \cdot v)^{1/2} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leq i, j \leq d,$$

$$\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \tau_{ij} \quad \|\tau\| = (\tau \cdot \tau)^{1/2} \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d, \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Nous notons par $\sigma = \sigma(x, t)$ le champ des contraintes, par $D = D(x, t)$ le champ de déplacement électrique, par $u = u(x, t)$ le champ des déplacements, par $\varphi = \varphi(x, t)$ le potentiel électrique tels que $x \in \bar{\Omega}$ et $\beta = \beta(x, t)$ le champ d'adhésion telle que $x \in \Gamma_3$, pour tous $t \in [0; T]$.

Nous désignons par u_ν, u_τ les composantes normale et tangentielle d'un vecteur u à la frontière tels que

$$u_\nu = u \cdot \nu, \quad u_\tau = u - u_\nu \nu. \quad (1.1)$$

Pour le champ des contraintes σ nous notons par σ_ν et σ_τ les composantes normale et tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma \nu$

$$\sigma_\nu = (\sigma \nu)_\nu, \quad \sigma_\tau = (\sigma \nu)_\tau, \quad (1.2)$$

donc

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu. \quad (1.3)$$

Les relations (1.1) et (1.2) nous permettent d'écrire la relation suivante :

$$(\sigma\nu) \cdot v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau, \quad (1.4)$$

qu'on va l'utiliser tout au long de ce mémoire et surtout dans l'établissement des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

Les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps et la virgule représente la dérivée par rapport à la variable spatiale, c'est à dire

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

où \dot{u} désigne le champ des vitesses et \ddot{u} désigne le champ des accélérations.

La relation entre le champ des déplacements u et le champ des déformations ε dans l'hypothèse des petites transformations est donnée par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div}\sigma = (\sigma_{ij,j}), \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (1.5)$$

En outre, le champ électrique est défini par la relation suivante

$$E(\varphi) = -\nabla\varphi, \text{ ou } E(\varphi) = (E_i(\varphi)), \quad E_i(\varphi) = -\varphi_{,i}, \quad 1 \leq i \leq d. \quad (1.6)$$

1.2 Lois de comportement

Nous commençons avec le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps dans le cadre physique de la figure 1.1. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre des efforts extérieurs et le tenseur des accélérations pour un système quelconque conduit à l'équation de mouvement de Cauchy

$$\text{Div}\sigma + \varphi_0 = \rho\ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times [0; T], \quad (1.7)$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse. Le processus d'évolution définis par (1.7) s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, le ce cas, nous introduisons dans ce memoire où le champ des vitesses

\dot{u} varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho\ddot{u}$ peut être négligé et l'équation (1.7) devient

$$\operatorname{Div}\sigma + \varphi_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0; T]. \quad (1.8)$$

Dans le cas d'un matériau piézoélectrique, nous introduisons une autre équation d'équilibre pour gérer cette situation. C'est l'équation de Maxwell-Gauss ou l'équation de conservation de la charge

$$\operatorname{div}D + q_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0; T], \quad (1.9)$$

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui-même ; c'est l'objet des lois de comportement.

1.2.1 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire courte.

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes σ et le vecteur des déplacements électriques D sont reliés par la loi de comportement

$$\begin{cases} \sigma &= \mathcal{B}\varepsilon(u) + \mathcal{G}\varepsilon(\dot{u}) - \mathcal{E}^*E(\varphi), \\ D &= \mathcal{E}\varepsilon(u) + \mathcal{C}E(\varphi), \end{cases} \quad (1.10)$$

où $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ est l'opérateur d'élasticité, $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ est l'opérateur de viscosité, non linéaires.

$\mathcal{E} = (e_{ijk})$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul et $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{ij})$ est le tenseur diélectrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif. Par ailleurs $\mathcal{E}^* = (e_{ijk}^*)$ où $e_{ijk}^* = e_{kij}$, dénote le transposé du tenseur \mathcal{E} tel que

$$\mathcal{E}\sigma \cdot v = \sigma \cdot \mathcal{E}^*v, \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}^d, v \in \mathbb{R}^d. \quad (1.11)$$

En visco-élasticité linéaire de type Kelvin-Voigt (voir par exemple [7]) et en tenant compte de la dépendance du champ des contraintes avec le champ électrique, le tenseur des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})$ est donné par

$$\sigma_{ij} = b_{ijkh}\varepsilon_{kh} + g_{ijkh}\varepsilon_{kh}(\dot{u}) + e_{ijk}^*\varphi_{,k}, \quad (1.12)$$

où $\mathcal{B} = (b_{ijkh})$ est un tenseur d'ordre quatre, ses composantes b_{ijkh} s'appellent coefficients d'élasticité et $\mathcal{G} = (g_{ijkh})$ est un tenseur d'ordre quatre, ses composantes (g_{ijkh}) s'appellent coefficients de viscosité.

1.2.2 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire longue.

Dans ce cas la loi de comportement est donnée par

$$\begin{cases} \sigma &= \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{F}(t-s)\varepsilon(u(s))ds - \mathcal{E}^*E(\varphi(t)), \\ D &= \mathcal{E}(\varepsilon(t)) + \mathcal{C}E(\varphi(t)), \end{cases} \quad (1.13)$$

où $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{ij})$ est un tenseur de relaxation. Si $\mathcal{F} = 0$, on retrouve la loi électro-élastique.

En électro-élasticité linéaire, on suppose que le tenseur des contraintes σ est une fonction linéaire du tenseur des petites déformations ε et du gradient du potentiel électrique ou le champ électrique E , c'est-à-dire

$$\sigma_{ij} = b_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) + e_{ijk}^*\varphi_{,k}, \quad (1.14)$$

où $\mathcal{B} = (b_{ijkh})$ est un tenseur d'ordre quatre, ses composantes b_{ijkh} s'appellent coefficients d'élasticité et elles sont indépendantes du tenseur des déformations en élasticité pure et $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ est le tenseur des constantes piézoélectriques. Dans le cas non-homogène b_{ijkh} et e_{ijk} dépendent du point $x \in \Omega$ et dans le cas homogène b_{ijkh} et e_{ijk} sont des constantes.

1.3 Lois de contact avec ou sans frottement

1.3.1 Contact sans frottement

Dans un contact parfait, où sans frottement, l'action mécanique transmissible par obstacle entre deux solides ne peut être en tout point que normale au contact (perpendiculaire au plan tangent commun du contact). Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0,$$

qui signifie que la contrainte tangentielle est nulle. Si ce n'est pas le cas, on dit que le mouvement tangentielle se produit avec frottement ce qui nous oblige à introduire une loi de frottement qui prend en considération la composante tangentielle avec les autres variables du système.

1.3.2 Contact avec frottement

Loi de frottement de type Coulomb

C'est une des lois de frottement les plus répandues et elle est plus réaliste. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer sous la forme :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu|\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu|\sigma_\nu| \implies u_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu|\sigma_\nu| \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau, \end{cases} \quad (1.15)$$

où σ_τ est la contrainte tangentielle, $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement, u_ν , u_τ représente le déplacement normale et tangentielle.

Loi de frottement sec de type Coulomb avec adhésion.

Une version quasistatique de la loi de frottement sec de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau(t) + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))\| \leq \mu p_\nu(u_\nu(t) - l), \\ \|\sigma_\tau(t) + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))\| < \mu p_\nu(u_\nu(t) - l) \implies u_\tau(t) = 0 \\ \|\sigma_\tau(t) + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))\| = \mu p_\nu(u_\nu(t) - l) \implies \exists \lambda \geq 0 \\ \text{tel que : } \sigma_\tau(t) + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t)) = -\lambda u_\tau(t) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0; T], \quad (1.16)$$

où l est le saut initial entre le corps et la fondation mesuré dans la direction de la normale ν , γ_τ est un coefficient positif, $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction de contact tangentielle et $R_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est l'opérateur de troncature donné par

$$R_\tau(s) = \begin{cases} s & \text{si } \|s\| < L, \\ L \frac{s}{\|s\|} & \text{si } \|s\| > L. \end{cases} \quad (1.17)$$

Ici $L > 0$ est la longueur caractéristique des liens [13].

Nous passons maintenant aux conditions aux limites utilisées dans les chapitres 2 et 3.

1.4 Conditions aux limites

Nous nous plaçons dans le cadre physique de la fig 1.1. On définit maintenant les conditions aux limites mécaniques et électriques sur chaque partie de Γ , et nous présentons les conditions de contact sur la surface Γ_3 .

La condition aux limites de déplacement.

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie Γ_1 , le champ des déplacements u est par conséquent nul

$$u = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0; T]. \quad (1.18)$$

La condition aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité φ_2 agit sur Γ_2 et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ satisfait à :

$$\sigma\nu = \varphi_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times [0; T]. \quad (1.19)$$

Les conditions aux limites électriques.

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations

$$\varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \times [0; T]. \quad (1.20)$$

$$D\nu = q_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times [0; T]. \quad (1.21)$$

Les conditions de contact avec compliance normale et adhésion.

Au début, nous rappelons la condition dite de compliance normale sur la surface potentielle de contact :

$$\sigma_\nu = -p_\nu(u_\nu - l) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0; T], \quad (1.22)$$

où l est le saut initial entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, quand $u_\nu > l$, la différence $u_\nu - l$ représente l'interpénétration des asoérités du corps ceux de la fonction. La fonction de compliance normale p_ν satisfait $p_\nu(r) = 0$ pour $r \leq 0$. Comme exemple

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \quad (1.23)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$.

Maintenant, on va décrire les conditions de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times [0; T]$, on introduit une variable interne d'état β définie sur $\Gamma_3 \times [0; T]$ qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion ; quand $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle.

On suppose que la contrainte normale $\sigma_\nu(t)$ satisfait la condition de compliance normale avec adhésion

$$-\sigma_\nu(t) = p_\nu(u_\nu(t) - l) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0; T], \quad (1.24)$$

où $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction de compliance normale et $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > L. \end{cases} \quad (1.25)$$

Ici $L > 0$ est la longueur caractéristique des liens.

Remarque 1.4.1. *L'équation (1.22) représente la condition de compliance normale quand le champ d'adhésion β est nul.*

Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme

$$\dot{\beta}(t) = - [\beta(t) ((\gamma_\nu R_\nu u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau(t))\|^2) - \epsilon_a]_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0; T], \quad (1.26)$$

où γ_ν , γ_τ et ϵ_a sont les coefficients d'adhésion positifs et β_0 l'adhésion initiale tel que

$$0 \leq \beta_0 \leq 1, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3 \times [0; T]. \quad (1.27)$$

Remarque 1.4.2. *Nous remarquons que sous les trois conditions précédentes le champ d'adhésion vérifie la restriction $0 \leq \beta \leq 1$. En effet, puisque $\dot{\beta} \leq 0$ donc $\beta \leq \beta_0 \leq 1$. En outre, si $\beta = 0$ quand $t = t_0$ donc $\dot{\beta} = 0$ pour tout $t \geq t_0$, et d'où $\beta = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Alors, nous concluons que $0 \leq \beta \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. $x \in \Gamma_3$.*

1.5 Formulation du problème

On considère ici le problème mécanique qu'on va étudier dans le chapitre 2 et 3.

Problème P

Trouver le champ de déplacements $u : \Omega \times [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes, $\sigma : \Omega \times [0; T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ de potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ tel que, pour tout $t \in [0; T]$

$$\sigma(t) = \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{F}(t-s)\varepsilon(u(s))ds - \mathcal{E}^*E(\varphi(t)) \quad \text{dans } \Omega \times [0; T], \quad (1.28)$$

$$D(t) = \mathcal{E}(\varepsilon(t)) + \mathcal{C}E(\varphi(t)) \quad \text{dans } \Omega \times [0; T], \quad (1.29)$$

$$\text{Div}\sigma(t) + \varphi_0(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0; T], \quad (1.30)$$

$$\text{div}D(t) + q_0(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0; T], \quad (1.31)$$

$$u(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0; T], \quad (1.32)$$

$$\sigma\nu(t) = \varphi_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0; T], \quad (1.33)$$

$$-\sigma_\nu(t) = p_\nu(u_\nu(t) - l) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0; T], \quad (1.34)$$

$$\dot{\beta}(t) = -[\beta(t) ((\gamma_\nu R_\nu u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau(t))\|^2) - \epsilon_a]_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0; T], \quad (1.35)$$

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times [0; T], \quad (1.36)$$

$$D\nu(t) = q_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_b \times [0; T], \quad (1.37)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0; T], \quad (1.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\sigma_\tau(t) + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))\| \leq \mu p_\nu(u_\nu(t) - l), \\ \|\sigma_\tau(t) + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))\| < \mu p_\nu(u_\nu(t) - l) \implies u_\tau(t) = 0 \\ \|\sigma_\tau(t) + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))\| = \mu p_\nu(u_\nu(t) - l) \implies \exists \lambda \geq 0 \\ \text{tel que : } \sigma_\tau(t) + \gamma_\tau \beta(t)^2 R_\tau(u_\tau(t)) = -\lambda u_\tau(t) \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0; T]. \quad (1.39)$$

Dans ce qui suit, nous fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites. Les équations (1.28) et (1.29) représentent la loi constitution électro-viscoélastique avec mémoire longue donné dans (1.13). (1.30) et (1.31) sont les équations d'équilibre associées aux champs de contrainte et de déplacement électrique qui figurent dans (1.8) et (1.9). Les équations (1.32) et (1.33) sont respectivement, les conditions aux limites de déplacement et de traction. (1.34) décrit le contact avec compliance normale et adhésion et l'équation différentielle ordinaire (1.35) décrit l'évolution du champ d'adhésion β . Les équations (1.36) et (1.37) sont les conditions aux limites électriques et (1.38) sont les conditions initiales. Enfin, les conditions (1.39) sont les conditions de frottement avec adhésion qui figurent dans (1.24) et (1.13).

Chapitre 2

OUTILS MATHÉMATIQUES

Ce chapitre est consacré à la description des espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire et nous rappelons quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, des théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations et quelques hypothèses qui facilitent notre problème.

Nous supposons dans ce chapitre que Ω est un domaine borné et de Lipschitz de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), c'est-à-dire que sa frontière Γ est représentable localement comme le graphe d'une fonction Lipschitzienne sur un ouvert de \mathbb{R}^{d-1} , étant situé localement d'un seul côté de Γ . Par ailleurs, nous considérons une partition de Γ en trois parties mesurables disjointes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 d'un côté et une partition de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ en deux parties ouvertes Γ_a et Γ_b d'un autre côté, telles que $\text{mes}\Gamma_1 > 0$ et $\text{mes}\Gamma_a > 0$.

2.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons définir les espaces de fonctions continues, continûment différentiables, les fonctions p-intégrables et les espaces de Sobolev.

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ d'entiers positifs ou nuls on désigne par

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad (2.1)$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$ est la longueur de α .

Fonctions continues et continûment différentiables

L'espace des fonctions uniformément continues sur Ω est noté par $C(\overline{\Omega})$ et il est un espace de Banach pour la norme donnée par

$$|v|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\{|v(x)|, x \in \overline{\Omega}\}.$$

Toute fonction uniformément continue est bornée et possède une unique extension continue sur $\overline{\Omega}$. Pour tout entier m , l'espace $C^m(\overline{\Omega})$ donné par

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) / D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leq m\},$$

est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ dont les dérivées d'ordre au plus m sont également continues sur $\overline{\Omega}$. Il est aussi un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$|v|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{C(\overline{\Omega})}.$$

L'espace $C^\infty(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables :

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\overline{\Omega}).$$

Nous pouvons maintenant parler de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur l'ensemble Ω à support compact inclus dans Ω , défini par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) / \text{supp } v \subset \Omega\},$$

où $\text{supp } v = \overline{\{v \in C^\infty(\Omega) / v(x) \neq 0\}}$ est le support de la fonction v . Si $\text{supp } v$ est un sous ensemble propre de Ω , on dit que v est une fonction à support compact dans Ω .

Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 2.1.1. (*Espace de Lebesgue*). Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / v \text{ Lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ et } |v|^p \text{ Lebesgue intégrable sur } \Omega\}.$$

C'est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

si $p = \infty$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, alors on définit $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ par

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)| = \inf\{c : |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Définition 2.1.2. Soit $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$, on dit qu'une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $u \circ I_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$, où I_K représente l'application identité de K .

Remarque 2.1.1. Soit $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, si on a

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

alors $u = 0$ p.p. dans Ω .

Espace de Hilbert

Définition 2.1.3. Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire.

Espace de Sobolev

Définition 2.1.4. Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On dit que la fonction $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ est la dérivée faible d'ordre α de u si

$$\int_{\Omega} u(x)D^\alpha \varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Définition 2.1.5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_\alpha \in L^p(\Omega); \text{ tel que } v_\alpha = D^\alpha u\}.$$

Remarque 2.1.2. Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α . La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p \leq \infty \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

2.2 Espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence

Dans cette section nous utilisons des notations standard pour les espaces L^P et espaces Sobolev associés à Ω et Γ . Nous introduisons les espaces associés aux inconnues mécaniques u et σ

$$\begin{cases} H = \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\} = [L^2(\Omega)]^d, \\ Q = \{\tau = (\tau_{ij}) \mid \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega)\}, \\ H_1 = \{u = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega), \overline{1, d}\} = H^1(\Omega)^d, \\ H_{Div} = \{\sigma \in Q \mid Div\sigma \in H\}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Les espaces H, Q, H_1 et H_{Div} sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires suivants

$$\begin{cases} (u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx, \\ (\sigma, \tau)_Q = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (u, v)_{H_1} = \langle u, v \rangle_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q, \\ (\sigma, \tau)_{H_{Div}} = \langle \sigma, \tau \rangle_Q + (Div\sigma, Div\tau)_H. \end{cases} \quad (2.3)$$

respectivement, où $\varepsilon : H_1 \rightarrow Q$ et $Div : H_{Div} \rightarrow H_1$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad Div\sigma = (\sigma_{ij,j}) \quad \forall i, j = \overline{1, d},$$

Les normes sur les espaces H, Q, H_1 et H_{Div} sont notées par $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_Q, \|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{H_{Div}}$, respectivement.

Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p sur Γ . Pour tout champ de vecteur $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ .

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par $H_\Gamma = [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^d$; ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_Γ le dual de H_Γ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$ le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ . Pour tout $\sigma \in H_1$, il existe un élément $\sigma\nu \in H'_\Gamma$ tel que :

$$\langle \sigma\nu, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_Q + (\text{Div}\sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1. \quad (2.4)$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$\langle \sigma\nu, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1 \quad (2.5)$$

Donc, pour σ assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_Q + (\text{Div}\sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1 \quad (2.6)$$

Soit $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ une partition de Γ , telle que Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont disjoints ouverts ensembles et soit V le sous-espace fermé de H_1 défini par :

$$V = \{v \in H_1 | \gamma v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}. \quad (2.7)$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit H un espace de Hilbert munit d'un produit scalaire (\cdot, \cdot) , alors

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in H. \quad (2.8)$$

Inégalité de Korn. Si $mes(\Gamma_1) > 0$. Alors il existe une constante $c_\Omega > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$\|\varepsilon(v)\|_Q \geq c_\Omega \|v\|_{H_1}, \quad \forall v \in V. \quad (2.9)$$

Sur V nous considérons le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q, \quad \forall u, v \in V, \quad (2.10)$$

Et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée ; c'est-à-dire

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_Q, \quad \forall v \in V. \quad (2.11)$$

Par l'inégalité de Korn et (2.3), il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert.

Preuve. On a d'après (2.3)

$$(u, v)_{H_1} = \langle u, v \rangle_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q.$$

Alors

$$\|v\|_{H_1} = (\|v\|_H^2 + \|\varepsilon(v)\|_Q^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_{H_1}^2 = \|v\|_H^2 + \|\varepsilon(v)\|_Q^2,$$

$$\|\varepsilon(v)\|_Q^2 \leq \|\varepsilon(v)\|_Q^2 + \|v\|_H^2, \quad (2.12)$$

d'après (2.9) et (2.12) on obtient

$$c_\Omega^2 \|v\|_{H_1}^2 \leq \|\varepsilon(v)\|_Q^2 \leq \|\varepsilon(v)\|_Q^2 + \|v\|_H^2,$$

$$c_\Omega \|v\|_{H_1} \leq \|\varepsilon(v)\|_Q \leq \|v\|_{H_1}. \quad (2.13)$$

Alors $\|\cdot\|_{H_1}$ équivalent $\|\cdot\|_Q$.

□

En outre, d'après (2.9), (2.11) et le théorème de trace de Sobolev, trouvons qu'il existe une constante $c_0 > 0$ dépendante uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que :

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|v\|_V, \quad \forall v \in V. \quad (2.14)$$

Pour une fonction scalaire β , qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble B par

$$B = \{\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3) \text{ tel que } : 0 \leq \beta(t) \leq 1 \forall t \in [0, T], \text{ p.p. } x \in \Gamma_3\}. \quad (2.15)$$

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev associés aux inconnus électriques (Le champ des déplacements électriques D et le potentiel électrique φ). Soit les espaces

$$\begin{cases} W = L^2(\Omega)^d = \{\psi \in H^1 \mid \gamma\psi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}, \\ W_1 = \{D = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega), \operatorname{div} D = D_{i,i} \in L^2(\Omega)\}, \end{cases}$$

Ces espaces W et W_1 sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par :

$$(\psi, \phi)_W = (\nabla\psi, \nabla\phi)_H, \quad (D, E)_{W_1} = (D, E)_H + (\operatorname{div} D, \operatorname{div} E)_{L^2(\Omega)}, \quad (2.16)$$

où ∇ est l'opérateur de gradient tel que :

$$\nabla\psi = (\partial_i\psi) = (\psi_{,i}) \quad \forall \psi \in W. \quad (2.17)$$

Soient $\|\cdot\|_W$ et $\|\cdot\|_{W_1}$ les normes associées; c'est-à-dire

$$\|\psi\|_W = \|\nabla\psi\|_H, \quad \|D\|_{W_1}^2 = \|D\|_H^2 + \|\operatorname{div} D\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.18)$$

Puisque $\operatorname{mes}(\Gamma_a) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante $C_F > 0$ dépendante uniquement de Ω et Γ telle que :

$$\|\nabla\psi\|_H \geq C_F \|\psi\|_{H_1(\Omega)}, \quad \forall \psi \in W. \quad (2.19)$$

Par l'inégalité de Friedrichs-Poincaré et (2.19), il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_W$ sont des normes équivalentes sur W . Aussi, rappelons que lorsque $D \in W_1$ est une fonction régulière, nous obtenons un résultat similaire à (2.6), c'est-à-dire que nous avons la formule de Green comme suit :

$$(D, \nabla\psi)_W + (\operatorname{div} D, \psi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma_b} D\nu\psi \, da \quad \forall \psi \in W. \quad (2.20)$$

Nous aurons aussi besoin de l'espace des tenseurs de l'ordre quatre Q_∞ défini par ;

$$Q_\infty = \{\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}); \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega)\},$$

où Q_∞ est un espace de Banach avec la norme définie par :

$$\|\mathcal{E}\|_{Q_\infty} = \max_{0 \leq i,j,k,h \leq d} \|\mathcal{E}_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega)},$$

et de plus,

$$\|\mathcal{E}\tau\| \leq d \|\mathcal{E}\|_{Q_\infty} \|\tau\|_Q \quad \forall \mathcal{E} \in Q_\infty, \quad \tau \in Q. \quad (2.21)$$

2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Soit $0 < T < 1$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment dérivables sur $[0, T]$ avec à valeurs dans X respectivement, avec les normes

$$\begin{aligned}\|u\|_{C(0,T;X)} &= \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X, \\ \|u\|_{C^1(0,T;X)} &= \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X + \max_{t \in [0,T]} \|\dot{u}(t)\|_X.\end{aligned}$$

2.4 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques.

2.4.1 Fonctions convexes et semi-continuité inférieure

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et à valeur dans $] -\infty, +\infty]$. Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est à dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u, v \in X, t \in [0, 1].$$

La fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tel que $u \neq v$.

Pour toute fonction $\varphi : X \rightarrow] -\infty, +\infty]$, on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par :

$$\begin{aligned}dom \varphi &= \{u \in X \mid \varphi(u) < +\infty\}, \\ epi \varphi &= \{(u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(u) < \alpha\}.\end{aligned}$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants :

1. φ est propre si et seulement si $\text{dom } \varphi \neq \emptyset$.
2. Le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe.
3. φ est convexe si et seulement si $\text{epi}\varphi$ est un ensemble convexe de $X \times \mathbb{R}$.

Nous supposons maintenant l'espace vectoriel X muni d'une topologie (en général X sera un espace vectoriel normé ou encore plus particulièrement un espace de Hilbert). Une fonction $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) si

$$\liminf_n \varphi(u_n) \geq \varphi(u),$$

pour tout $u \in X$ et $u_n \rightarrow u$ dans X . La propriété de semi-continuité inférieurement peut être caractérisée par :

Lemme 2.4.1. *Soit $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$, alors Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. φ est semi-continue inférieurement.
2. L'épigraphe de φ est fermée dans $X \times \mathbb{R}$.

Puisque dans un espace vectoriel normé tout ensemble convexe est simultanément fermé pour la topologie forte et la topologie faible, le Lemme précédent conduit au résultat suivant :

Théorème 2.4.1. *Soit X un espace de Hilbert et $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et propre. Alors φ est semi-continue inférieurement si et seulement si φ est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie faible de X .*

2.4.2 Opérateurs fortement monotones

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert X munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$. Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire.

Définition 2.4.1. *L'opérateur A est dit :*

1. monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0, \quad \forall u, v \in X.$$

2. fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2, \quad \forall u, v \in X.$$

3. de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M\|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Inéquations quasi-variationnelles elliptiques d'évolution

Nous allons rappeler maintenant de résultat sur l'existence et l'unicité de la solution pour l'inéquations variationnelle.

Pour cela, on considère un espace de Hilbert X munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$.

Pour résoudre cette inéquation, nous supposons que $A : X \rightarrow X$ est fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ \quad (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m\|u_1 - u_2\|_X^2, \quad \forall u_1, u_2 \in X. \\ \text{(b) il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|Au_1 - Au_2\|_X \leq M\|u_1 - u_2\|_X, \quad \forall u_1, u_2 \in X. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

et soit $K \subset X$ et $f \in X$ est une fonction propre et la fonctionnelle $j : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) pour tout } j(u, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i. sur } X \\ \text{(b) il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ \quad j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) + j(u_2, v_2) \\ \quad \leq m\|u_1 - u_2\|_X\|v_1 - v_2\|_X, \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in X. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Plusieurs problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles en mécanique des milieux continus conduisent à des problèmes mathématiques ayant les formes suivantes :

Problème I. Trouver u tel que :

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

Ce problème est appelé inéquation variationnelle elliptique de première espèce sur X .

Problème II. Trouver u tel que :

$$u \in X, \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

Ce problème est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur X . En ce qui concerne les Problèmes I et II on a les résultats d'existence et d'unicité suivants.

Théorème 2.4.2. *Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, K un convexe fermé non-vide de X et $f \in X$.*

Alors l'inéquation variationnelle elliptique de première espèce admet une solution unique.

Théorème 2.4.3. *Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur monotone et de Lipschitz et j une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement et $f \in X$.*

Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce admet une solution unique.

Les démonstrations de Théorème 2.4.2, 2.4.3 peuvent être trouvées par exemple dans [3, 10].

Théorème 2.4.4. (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$, qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X \text{ p.p. } t \in [0, T]; \end{array} \right.$$

il existe $1 \leq p \leq \infty$ tel que $F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \forall x \in X$.

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ telle que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

Théorème 2.4.5. (Théorème de point fixe de Banach)

Soit K un sous ensemble fermé et non-vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in [0, 1)$ telle que

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_X \leq c\|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda u = u$. Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}), \quad m \geq 2.$$

Théorème 2.4.6. Soit K un sous-ensemble fermé et non-vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ et soit $\Lambda : K \rightarrow K$. Supposons que $\Lambda^m : K \rightarrow K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors, Λ a un point fixe unique dans K .

2.5 Compléments divers

Opérateurs linéaires bornés

Définition 2.5.1. Soit X un espace de Hilbert et un corps \mathbb{K} , qui sera ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Une application $T : X \rightarrow X$ est dite opérateur linéaire si

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y, \quad \forall x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Définition 2.5.2. On dit qu'un opérateur T défini sur X est borné s'il existe une constante C telle que

$$\|T x\| \leq C \|x\|.$$

Théorème 2.5.1. Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ la norme de T est donné par

$$\|T\| = \sup\{\|T x\|, x \in X, \|x\| = 1\}.$$

Définition 2.5.3. Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq M |u|_X |v|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 2.5.4. Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que

$$a(u, v) \geq m |u|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Théorème 2.5.2. (Lax- Milgram)

Soit X un espace de Hilbert, $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur X et $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe $u \in X$ solution unique du problème

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in X,$$

de plus si a est symétrique u est définie par

$$\frac{1}{2}a(u, u) - L(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}(v, v) - L(v) \right\}.$$

Théorème 2.5.3. (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)

Étant donné $\eta \in X'$, il existe $f \in X$ unique telle que

$$(\eta, v)_{X' \times X} = (f, v)_X \quad \forall v \in X,$$

on a de plus

$$\|\eta\|_{X'} = \|f\|_X.$$

Ce Théorème montre que toute forme linéaire continue sur X peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire.

2.5.1 Lemmes de Gronwall

Lemme 2.5.1. Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante, et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$.

1. Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

2. Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s)ds.$$

Dans le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce Lemme devient :

Corollaire 2.5.1. *Soit $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ tel que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$. Si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Lemme 2.5.2. *Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$, $n(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$, $a \geq 0$. Soit également $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t)dt + \int_0^s n(t)\phi(t)dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors,

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t)dt\right) e^{\int_0^s n(t)dt} \quad \forall s \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $n = 0$, le Lemme précédent devient :

Corollaire 2.5.2. *Soit $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ tel que $m(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Soit également $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t)dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors,

$$|\phi(s)| \leq a + \int_0^s m(t)dt \quad \forall s \in [0, T].$$

2.6 Hypothèses fondamentaux pour le problème P

Pour l'étude du problème mécanique (1.28)-(1.39) on considère les hypothèses suivantes qui facilitent notre problème.

Supposons que l'opérateur d'élasticité \mathcal{B} , satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}_d \rightarrow \mathbb{S}_d \\ \text{(b)} \mathcal{B} \in Q_\infty \text{ et il existe une constante } M_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que :} \\ \quad \|\mathcal{B}(x, \xi_1) - \mathcal{B}(x, \xi_2)\| \leq M_{\mathcal{B}} \|\xi_1 - \xi_2\| \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}_d, \text{ p.p. dans } \Omega. \\ \text{(c)} \text{ Il existe une constante } m_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que : } \mathcal{B}\xi \cdot \xi \geq m_{\mathcal{B}} |\xi|^2 \\ \quad \forall \xi \in \mathbb{S}_d \text{ p.p. dans } \Omega. \\ \text{(d)} \text{ La fonction } x \rightarrow \mathcal{B}(x, \xi) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ p.p. } \xi \in \mathbb{S}_d. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Le tenseur piézoélectrique \mathcal{E} , satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}_d \rightarrow \mathbb{R}^d \\ \text{(b)} \mathcal{E}(x, \xi) = (e_{ijk}(x)\xi_{ij}) \quad \forall \xi = (\xi_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. dans } \Omega. \\ \text{(c)} e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Le tenseur du permittivité électrique \mathcal{C} , satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \mathcal{C} : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \\ \text{(b)} \mathcal{C}(x, E) = (c_{ij}(x)E_j) \quad \forall E = (E_{ij}) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. dans } \Omega. \\ \quad c_{ij} = c_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(c)} \text{ Il existe une constante } m_{\mathcal{C}} > 0 \text{ telle que :} \\ \quad c_{ij}(x)E_i E_j \geq m_{\mathcal{C}} \|E\|^2 \quad \forall E = (E_{ij}) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Le tenseur de relaxation \mathcal{F} , satisfait :

$$\mathcal{F} \in C([0, T]; Q_\infty). \quad (2.27)$$

La fonction de compliance normale p_ν , satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b)} \quad \exists L_\nu > 0 \text{ telle que :} \\ \quad |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \\ \text{(c)} \quad (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \\ \text{(d)} \quad x \longrightarrow p_\nu(x, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \quad \forall r \in \mathbb{R}; \\ \text{(e)} \quad x \longrightarrow p_\nu(x, r) = 0 \text{ pour } r \leq 0, \text{ p.p. dans } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Nous supposons aussi que les forces volumiques φ_0 et les tractions surfaciques φ_2 satisfont les régularités

$$\varphi_0 \in C([0, T]; H), \quad \varphi_2 \in C([0, T]; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (2.29)$$

et les charges électriques volumiques q_0 et surfaciques q_2 satisfont :

$$q_0 \in C([0, T]; H), \quad q_2 \in C([0, T]; L^2(\Gamma_b)^d). \quad (2.30)$$

Pour montrer le fait que la fondation est isolée, nous supposons que :

$$q_0(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.31)$$

Les coefficients d'adhésion γ_τ, γ_ν et ϵ_a satisfont :

$$\gamma_\tau, \gamma_\nu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\tau, \gamma_\nu, \epsilon_a \geq 0 \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \quad (2.32)$$

et le coefficient de frottement μ satisfait :

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (2.33)$$

Le champ d'adhésion initial β_0 satisfait :

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (2.34)$$

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution

Le troisième chapitre du mémoire est consacré à l'étude de la formulation variationnelle et le résultat d'existence et d'unicité du problème.

3.1 Formulation variationnelle

Dans cette section, on va donner la formulation variationnelle du problème P.

Le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet's nous permet de définir les fonctions $f : [0, T] \rightarrow V$ et $q : [0, T] \rightarrow W$ comme suit :

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} \varphi_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(t) \cdot v da \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \quad (3.1)$$

$$(q(t), \psi)_V = \int_{\Omega} q_0(t) \cdot \psi dx + \int_{\Gamma_2} q_2(t) \cdot \psi da \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T], \quad (3.2)$$

Les conditions (2.29) et (2.30) impliquent

$$f \in C([0, T]; H), \quad \text{et} \quad q \in C([0, T]; W). \quad (3.3)$$

Soient $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $j_{cn} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et $j_{fr} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctionnelles d'adhésion, de compliance normale et de frottement respectivement, définies par

$$j_{ad}(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)) \cdot v_\tau da, \quad (3.4)$$

$$j_{cn}(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - l) v_\nu da, \quad (3.5)$$

$$j_{fr}(u, v) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(u_\nu(t) - l) \|v_\tau\| da. \quad (3.6)$$

Les conditions (2.24)-(2.30) et (2.32)-(2.33) entraînent que les intégrales dans (3.1)-(3.2) et (3.4)-(3.6) sont bien définies.

En utilisant la formule de Green (2.6)

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v - u(t)) \rangle_Q + (Div \sigma(t), v - u(t))_H = \int_{\Gamma} \sigma(t) \nu \cdot (v - u(t)) da, \quad \forall v \in H_1, t \in [0; T],$$

on trouve

$$\begin{aligned} \langle \sigma(t), \varepsilon(v - u(t)) \rangle_Q + (Div \sigma(t), v - u(t))_H &= \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot (v - u(t)) da + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot (v - u(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u(t)) da, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

En utilisant la définition (2.7) de l'espace V combinée avec les condition (1.30), (1.32) et (1.33), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \sigma(t), \varepsilon(v - u(t)) \rangle_Q - \int_{\Omega} \varphi_0 \cdot (v - u(t)) dx &= \int_{\Gamma_2} \varphi_2 \cdot (v - u(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u(t)) da, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.7)$$

En utilisant la décomposition du tenseur de Cauchy (1.4) avec (1.34), on obtient

$$\begin{aligned} \sigma \nu(v - u) &= \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) + \sigma_\tau(v_\tau - u_\tau) \\ &= (-p_\nu(u_\nu(t) - l) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu(t)))(v_\nu - u_\nu) + \sigma_\tau(v_\tau - u_\tau). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Gardant à l'esprit (3.1), on remplace (3.8) dans (3.7), on peut écrire l'égalité précédente comme suit :

$$\begin{aligned} \langle \sigma(t), \varepsilon(v - u(t)) \rangle_Q &= (f, v - u(t))_V - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu(t) - l) \cdot (v_\nu - u_\nu) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu(t)) \cdot (v_\nu - u_\nu) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))) \cdot (v_\tau - u_\tau) da \\ &- \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t)) \cdot (v_\tau - u_\tau) da. \end{aligned}$$

Alors, de (3.4), (3.5), (3.6), on obtient

$$\begin{aligned} & \langle \sigma(t), \varepsilon(v - u(t)) \rangle_Q + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - u(t)) + j_{cn}(u(t), v - u(t)) \\ & - \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))).(v_\tau - u_\tau) da = (f(t), v - u(t))_V. \end{aligned} \quad (3.9)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (2.8) on a

$$|(\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))).(v_\tau - u_\tau)| \leq \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))\| \|v_\tau - u_\tau\|$$

d'où on obtient

$$(\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))).(v_\tau - u_\tau) \geq -\|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))\| \|v_\tau - u_\tau\|,$$

Maintenant, en utilisant (1.39), on trouve :

$$\begin{aligned} (\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))).(v_\tau - u_\tau) & \geq -\|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))\| \|v_\tau - u_\tau\| \\ & \geq -\mu p_\nu(u_\nu(t) - l) \|v_\tau - u_\tau\| \\ & \geq -\mu p_\nu(u_\nu(t) - l) (\|v_\tau\| - \|u_\tau\|). \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))).(v_\tau - u_\tau) da \geq -j_{fr}(u(t), v) + j_{fr}(u(t), u(t)). \quad (3.10)$$

Combinant maintenant (3.9) et (3.10), on trouve

$$\begin{aligned} & \langle \sigma(t), \varepsilon(v - u(t)) \rangle_Q + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - u(t)) \\ & + j_{cn}(u(t), v - u(t)) + j_{fr}(u(t), v) - j_{fr}(u(t), u(t)) \\ & \geq (f(t), v - u(t))_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.11)$$

et de (1.28), on obtient

$$\begin{aligned} & (\mathcal{B}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v - u(t)))_Q + \left(\int_0^t \mathcal{F}(t-s)\varepsilon(u(s)) ds, \varepsilon(v - u(t)) \right)_Q \\ & + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v - u(t)))_Q + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - u(t)) + j_{cn}(u(t), v - u(t)) \\ & + j_{fr}(u(t), v) - j_{fr}(u(t), u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green (2.20)

$$(D, \nabla \psi)_W + (div D, \psi)_{L^2(\Omega)} = \int_\Gamma D \cdot \nu \psi da, \quad \forall \psi \in W,$$

on a

$$\int_{\Omega} D.\nabla\psi dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} D.\psi dx = \int_{\Gamma_a} D.\nu\psi da + \int_{\Gamma_b} D.\nu\psi da,$$

et en utilisant la définition de l'espace W avec (1.31) et (1.37), on obtient

$$\int_{\Omega} D.\nabla\psi dx - \int_{\Omega} q_0.\psi dx = \int_{\Gamma_b} q_2.\psi dx,$$

d'après (3.2) alors

$$(D(t), \nabla\psi)_H = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, \quad (3.13)$$

et de (1.29), on obtient

$$(\mathcal{C}\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\psi)_H = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T]. \quad (3.14)$$

pour tout $\forall v \in V$, $\psi \in W$ et $t \in [0; T]$.

De (3.12) et (3.14) et gardant à l'esprit (1.6) ainsi que les conditions initiales (1.35) et (1.38), nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème P .

Problème P_V

Trouver un champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, un potentiel électrique $\varphi : [0; T] \rightarrow W$ et un champ d'adhésion $\beta : [0; T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$, tels que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{B}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v - u(t)))_Q + \left(\int_0^t \mathcal{F}(t-s)\varepsilon(u(s))ds, \varepsilon(v - u(t)) \right)_Q \\ & + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(v - u(t)))_Q + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - u(t)) \\ & + j_{cn}(u(t), v - u(t)) + j_{fr}(u(t), v) - j_{fr}(u(t), u(t)) \\ & \geq (f(t), v - u(t))_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$(\mathcal{C}\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\psi)_H = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T], \quad (3.16)$$

$$\dot{\beta}(t) = - [\beta(t) ((\gamma_\nu R_\nu u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau(t))\|^2) - \epsilon_a]_+ \quad (3.17)$$

$$\text{p.p. } t \in [0, T] \text{ p.p. } x \in \Gamma_3,$$

$$\beta(0) = \beta_0. \quad (3.18)$$

Dans le reste de ce chapitre, nous présentons quelques inégalités comprenant les fonctionnelles j_{ad} , j_{cn} et j_{fr} , qui seront utilisées dans les sections suivantes.

Ci-dessous dans cette section, β_1 et β_2 dénotent les éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tel que $0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1$ p .p. sur (Γ_3) , u_1, u_2, v_1, v_2, u et v représentent des éléments de V et c est une constante positive générique qui peut dépendre de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, p_\nu, \gamma_\nu, \gamma_\tau$ et L , dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur $x \in \Omega \cup \Gamma_3$.

D'abord, nous remarquons que j_{ad}, j_{cn} et j_{fr} sont linéaires par rapport au dernier argument, donc

$$j_{ad}(\beta, u, -v) = -j_{ad}(\beta, u, v), \quad (3.19)$$

$$j_{cn}(u, -v) = -j_{cn}(u, v), \quad (3.20)$$

$$j_{fr}(u, -v) = -j_{fr}(u, v). \quad (3.21)$$

En utilisant (2.15), (3.4) et les inégalités $|R_\nu(u_\nu)| \leq L, \|R_\tau(u_\tau)\| \leq L, |\beta_1| \leq 1, |\beta_2| \leq 1$, nous déduisons que

$$\begin{aligned} j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) &= \int_{\Gamma_3} [-\gamma_\nu \beta_1^2 R_\nu(u_{1\nu}) \cdot (u_{2\nu} - u_{1\nu}) \\ &\quad + \gamma_\tau \beta_1^2 R_\tau(u_{1\tau}) \cdot (u_{2\tau} - u_{1\tau}) \\ &\quad - \gamma_\nu \beta_2^2 R_\nu(u_{2\nu}) \cdot (u_{1\nu} - u_{2\nu}) \\ &\quad + \gamma_\tau \beta_2^2 R_\tau(u_{2\tau}) \cdot (u_{1\tau} - u_{2\tau})] da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} (c_\nu L |\beta_1^2 - \beta_2^2| |u_{1\nu} - u_{2\nu}| \\ &\quad + c_\tau L (\beta_1^2 - \beta_2^2) |u_{1\tau} - u_{2\tau}|) da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} (c' L |\beta_1^2 - \beta_2^2| (|u_{1\nu} - u_{2\nu}| + |u_{1\tau} - u_{2\tau}|)) da \\ &= \int_{\Gamma_3} (c' L |\beta_1 - \beta_2| |\beta_1 + \beta_2| \\ &\quad (|u_{1\nu} - u_{2\nu}| + |u_{1\tau} - u_{2\tau}|)) da \\ &\leq 2c' L \int_{\Gamma_3} (|\beta_1 - \beta_2| (|u_{1\nu} - u_{2\nu}| + |u_{1\tau} - u_{2\tau}|)) da \\ &\leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| |u_1 - u_2| da, \end{aligned}$$

où $c_\nu = \sup\{\gamma_\nu\}$, $c_\tau = \sup\{\gamma_\tau\}$ et $c' = \max\{c_\nu, c_\tau\}$.

Donc

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| |u_1 - u_2| da,$$

en combinant cette inégalité avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz et (2.14), on obtient (voir [16])

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u_1 - u_2\|_V. \quad (3.22)$$

Puis, nous choisissons $\beta = \beta_1 = \beta_2$ dans (3.22) pour trouver

$$j_{ad}(\beta, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta, u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \quad (3.23)$$

Par des manipulations semblables basées sur les propriétés des opérateurs R_ν , R_τ , on montre que

$$|j_{ad}(\beta, u_1, v) - j_{ad}(\beta, u_2, v)| \leq c \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V. \quad (3.24)$$

En prenant $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (3.23) et nous employons les égalités $R_\nu(0) = 0$ et $R_\tau(0) = 0$ pour obtenir

$$j_{ad}(\beta, v, v) \geq 0. \quad (3.25)$$

En outre, nous utilisons (3.5), on obtient

$$|j_{cn}(u_1, v) - j_{cn}(u_2, v)| \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu(u_{1\nu} - l) - p_\nu(u_{2\nu} - l)| |v_\nu|, \quad (3.26)$$

et d'après (2.28), (2.14) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$|j_{cn}(u_1, v) - j_{cn}(u_2, v)| \leq c \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V. \quad (3.27)$$

En utilisant (3.5), on obtient

$$j_{cn}(u_1, u_2 - u_1) + j_{cn}(u_2, u_1 - u_2) \leq \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{1\nu} - l) - p_\nu(u_{2\nu} - l))(u_{2\nu} - u_{1\nu}) da, \quad (3.28)$$

et d'après (2.28), on a

$$j_{cn}(u_1, u_2 - u_1) + j_{cn}(u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \quad (3.29)$$

En choisissant $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (3.29) et en utilisant (2.28), nous obtenons

$$j_{cn}(v, v) \geq 0. \quad (3.30)$$

Finalement, de la même manière et en utilisant (3.6), (2.28) et (2.14) pour trouver

$$|j_{fr}(u, v - u) - j_{fr}(v, v - u)| \leq c_0^2 \|u - v\|_V^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \quad \forall u, v \in V. \quad (3.31)$$

$$|j_{fr}(u_1, v_1 - v_2) + j_{fr}(u_2, v_2 - v_1)| \leq c_0^2 \|u_1 - u_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}. \quad (3.32)$$

3.2 Résultat d'existence et d'unicité

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 3.2.1. *Supposons que les hypothèses (2.24) (2.34) et (3.15)-(3.18) sont vérifiées. Alors, il existe une constante $L_0 > 0$ telle que si $L_\nu(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) < L_0$, le problème P_V admet une solution unique (u, φ, β) ayant la régularité suivante :*

$$u \in C([0, T]; V), \quad (3.33)$$

$$\varphi \in C([0, T]; W), \quad (3.34)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Gamma_2)) \cap B. \quad (3.35)$$

Le quintuple de fonctions (u, σ, φ) qui satisfont (1.28)-(1.29) et (3.15)-(3.18) s'appelle solution faible du problème de contact électro-viscoélastique avec mémoire longue. Nous concluons que sous les hypothèses (2.24)-(2.34), le problème mécanique (1.28)-(1.39) a une unique solution faible. La régularité de la solution faible est donnée par (3.33)-(3.34) et en termes de contraintes par

$$\sigma \in C([0, T]; H_{Div}), \quad (3.36)$$

$$D \in C([0, T]; W_1). \quad (3.37)$$

En effet, de (3.15)-(3.16), il vient que : $Div\sigma(t) + \varphi_0(t) = 0$, $divD = q_0(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. La régularité (3.33) et (3.34) de u et φ combinée avec (1.28)-(1.29) et (2.24)-(2.30) donne (3.36) et (3.37).

La démonstration du Théorème 3.2.1 sera faite en plusieurs étapes. Elle est basée sur les résultats des équations dépendant du temps, les opérateurs monotones et les arguments du point fixe. En outre, partout dans cette section, c représentera une constante strictement positive qui peut dépendre des données du problème mais elle est indépendante du temps, et sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Dans la première étape nous considérons le problème auxiliaire pour le champ de déplacement et un potentiel électrique dans lequel $\beta \in B$ est donné.

Problème P_V^β

Trouver un champ des déplacements $u_\beta : [0, T] \rightarrow V$ et un potentiel électrique $\varphi_\beta : [0, T] \rightarrow W$ tel que :

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{B}\varepsilon(u_\beta(t)), \varepsilon(v - u_\beta(t)))_Q + \left(\int_0^t \mathcal{F}(t-s)\varepsilon(u(s))ds, \varepsilon(v - u(t)) \right)_Q \\
 & + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\beta(t), \varepsilon(v - u_\beta(t)))_Q + j_{ad}(\beta(t), u_\beta(t), v - u_\beta(t)) \\
 & + j_{cn}(u_\beta(t), v - u_\beta(t)) + j_{fr}(u_\beta(t), v) - j_{fr}(u_\beta(t), u_\beta(t)) \\
 & \geq (f(t), v - u_\beta(t))_V \\
 & \forall v \in V, t \in [0, T], \\
 & (\mathcal{C}\nabla\varphi_\beta(t), \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\beta(t), \nabla\psi))_H = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T], \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

Nous avons le Lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *Le problème P_V^β admet une solution unique (u_β, φ_β) ayant la régularité*

$$u_\beta \in C([0, T]; V), \quad \varphi_\beta \in C([0, T]; W).$$

La démonstration s'obtient en plusieurs étapes que nous décrivons ci-dessous :
Soit $\eta \in C([0, T]; Q)$ et $t \in [0, T]$. On considère l'espace de Hilbert produit $X = V \times W$, muni du produit scalaire suivant

$$(x, y)_X = (u, v)_V + (\varphi, \psi)_W, \quad \forall x = (u, \varphi), y = (v, \psi) \in X, \tag{3.39}$$

et la norme associée $\|\cdot\|_X$.

Nous introduisons l'opérateur $\Lambda_\beta : X \rightarrow X$ défini par :

$$\begin{aligned}
 \langle \Lambda_\beta(t)x, y \rangle &= (\mathcal{B}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(v))_Q + (\mathcal{C}\nabla\varphi, \nabla\psi)_H \\
 &- (\mathcal{E}\varepsilon(u), \nabla\psi)_H + j_{ad}(\beta(t), u, v), \quad \forall x = (u, \varphi), y = (v, \psi) \in X. \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

On considère aussi l'élément $f_\eta(t) \in X$ défini par

$$\langle f_\eta(t), y \rangle = (f(t), v)_V + (q(t), \psi)_W - (\eta(t), \varepsilon(v))_Q \tag{3.41}$$

et soit

$$j(x, y) = j_{cn}(u, v) + j_{fr}(u, v). \tag{3.42}$$

Nous introduisons les deux problèmes suivants :

Problème P_η^1

Trouver un champ de déplacement $u_{\beta\eta} : [0, T] \rightarrow V$ et un potentiel électrique $\varphi_{\beta\eta} : [0, T] \rightarrow W$ tel que :

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{B}\varepsilon(u_{\beta\eta}(t)), \varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)))_Q + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)))_Q + (\mathcal{C}\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \nabla\psi)_H \\
 & - (\mathcal{E}\varepsilon(u_{\beta\eta}(t)), \nabla\psi)_H + (\eta(t), \varepsilon(v - u_{\beta\eta}(t)))_Q + j_{ad}(\beta(t), u_{\beta\eta}(t), v) \\
 & + j_{cn}(u_{\beta\eta}(t), v - u_{\beta\eta}(t)) + j_{fr}(u_{\beta\eta}(t), v) - j_{fr}(u_{\beta\eta}(t), u_{\beta\eta}(t)) \\
 & \geq (f(t), v - u_{\beta\eta}(t))_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T],
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$(\mathcal{C}\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_{\beta\eta}(t)), \nabla\psi)_H = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T]. \tag{3.44}$$

Problème P_η^2

Trouver $x_{\beta\eta} : [0, T] \rightarrow X$ tel que

$$\begin{aligned}
 & \langle \Lambda_\beta(t)x_{\beta\eta}(t), y - x_{\beta\eta}(t) \rangle + j(y, x_{\beta\eta}(t)) - j(x_{\beta\eta}(t), x_{\beta\eta}(t)) \\
 & \geq \langle f_\eta(t), y - x_{\beta\eta}(t) \rangle \quad \forall y \in X, t \in [0, T].
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Remarque 3.2.1. *Les deux problèmes précédents sont équivalents de la même manière que si $x_{\beta\eta} = (u_{\beta\eta}, \varphi_{\beta\eta}) \in C([0, T]; X)$ est une solution de l'un des problèmes qu'il est aussi une solution de l'autre problème.*

Nous avons maintenant le Lemme suivant :

Lemme 3.2.2. *Il existe une constante $L_0 > 0$ telle que si $L_\nu(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) < L_0$, le problème P_η^2 a une solution unique $x_{\beta\eta} \in C([0, T]; X)$.*

Pour prouver le Lemme 3.2.2, nous procédons comme suit :

Dans ce premier pas nous démontrons que le couple $x_{\beta\eta} = (u_{\beta\eta}, \varphi_{\beta\eta})$ est une solution du problème P_η^2 si et seulement si le couple $(u_{\beta\eta}, \varphi_{\beta\eta}) \in C([0, T]; V) \times C([0, T]; W)$ et

$$\begin{aligned}
 & \langle \Lambda_\beta(t)x_{\beta\eta}(t), y - x_{\beta\eta}(t) \rangle + j(y, x_{\beta\eta}(t)) - j(x_{\beta\eta}(t), x_{\beta\eta}(t)) \\
 & \geq \langle f_\eta(t), y - x_{\beta\eta}(t) \rangle \quad \forall y \in X, t \in [0, T],
 \end{aligned}$$

En effet, soient $x_{\beta\eta} : [0, T] \rightarrow X$ une solution du problème P_η^2 , $y = (v, \psi) \in V$ et $t \in [0, T]$. On utilise la fonction de test $(\psi - \varphi_{\beta\eta}(t))$ dans (3.44), et en ajoutant l'inégalité (3.43) et (3.39)–(3.42) on obtient (3.45).

Dans la deuxième étape, on va montrer que l'opérateur Λ_β est fortement monotone et de Lipschitz sur X . Soit $x_1 = (u_1, \varphi_1)$, $x_2 = (u_2, \varphi_2) \in X$, d'après (3.39) et (3.40) on obtient

$$\begin{aligned} & (\Lambda_\beta(t)x_1 - \Lambda_\beta(t)x_2, x_1 - x_2)_X \\ &= (\mathcal{B}\varepsilon(u_1) - \mathcal{B}\varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_Q + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_1 - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_2, \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_Q \\ &+ (\mathcal{C}\nabla\varphi_1 - \mathcal{C}\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_1) - \mathcal{E}\varepsilon(u_2), \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_H \\ &+ j_{ad}(\beta, u_1, u_1 - u_2) - j_{ad}(\beta, u_2, u_1 - u_2). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (1.11), on a $(\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(v))_Q = (\mathcal{E}\varepsilon(u), \nabla\psi)_H$ pour tout $x = (u, \varphi) \in X$, il sen suit que

$$\begin{aligned} & (\Lambda_\beta(t)x_1 - \Lambda_\beta(t)x_2, x_1 - x_2)_X \\ &= (\mathcal{B}\varepsilon(u_1) - \mathcal{B}\varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_Q + (\mathcal{C}\nabla\varphi_1 - \mathcal{C}\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_H \\ &+ j_{ad}(\beta, u_1, u_1 - u_2) - j_{ad}(\beta, u_2, u_1 - u_2). \end{aligned}$$

Compte tenu du (2.24)–(2.26) et (3.19), (3.22)–(3.25) et l'inégalité de Friedrichs-Poinaré, il existe $c_1 > 0$ ne dépendant que de \mathcal{B} , \mathcal{C} , Ω et Γ_a telle que

$$\begin{aligned} (\Lambda_\beta x_1 - \Lambda_\beta x_2, x_1 - x_2)_X &= ((\mathcal{B}\varepsilon(u_1) - \mathcal{B}\varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_Q \\ &+ (\mathcal{C}\nabla(\varphi_1 - \varphi_2), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H \\ &+ j_{ad}(\beta, u_1, u_1 - u_2) - j_{ad}(\beta, u_2, u_1 - u_2)) \quad (3.46) \\ &\geq c_1(\|\varepsilon(u_1 - u_2)\|_Q^2 + \|\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)\|_H^2) \\ &\geq c_1(\|u_1 - u_2\|_V^2 + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2), \end{aligned}$$

et, gardant à l'esprit (3.39), nous trouvons

$$(\Lambda_\beta x_1 - \Lambda_\beta x_2, x_1 - x_2)_X \geq c_1 \|x_1 - x_2\|_X^2,$$

qui prouve que Λ_β est fortement monotone.

Pour prouver que Λ_β est de Lipschitz, en utilisant (2.24)-(2.26), d'après quelques calculs, il résulte l'existence d'une constante $c_2 > 0$ ne dépendant que de \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{E} telle que

$$\begin{aligned} (\Lambda_\beta(t)x_1 - \Lambda_\beta(t)x_2, y)_X &= (\mathcal{B}\varepsilon(u_1) - \mathcal{B}\varepsilon(u_2), y)_Q + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_1 - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_2, \varepsilon(u_1) \\ &\quad - \varepsilon(u_2))_Q + (\mathcal{C}\nabla\varphi_1 - \mathcal{C}\nabla\varphi_2, \nabla\psi)_H \\ &\quad - (\mathcal{E}\varepsilon(u_1) - \mathcal{E}\varepsilon(u_2), \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_H \\ &\quad + j_{ad}(\beta, u_1, v) - j_{ad}(\beta, u_2, v). \\ &\leq c_2(\|u_1 - u_2\|_V\|v\|_V + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W\|\psi\|_W + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W\|v\|_V \\ &\quad + \|u_1 - u_2\|_V\|\psi\|_W), \end{aligned}$$

pour tout $y = (v, \psi) \in V$. En utilisant (3.39) l'inégalité dernière devient

$$(\Lambda_\beta x_1 - \Lambda_\beta x_2, y)_X \leq c_2\|x_1 - x_2\|_X\|y\|_V \quad \forall y \in X,$$

et en prenant $y = \Lambda_\beta x_1 - \Lambda_\beta x_2$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\|\Lambda_\beta x_1 - \Lambda_\beta x_2\| \leq c_2\|x_1 - x_2\|_X.$$

Ce qui termine la preuve du Λ_β est fortement monotone et de Lipschitz sur X .

On remarque que

$$j(y, x_{\beta\eta}(t)) - j(x_{\beta\eta}(t), x_{\beta\eta}(t)) = j(y, u_{\beta\eta}(t)) - j(u_{\beta\eta}(t), u_{\beta\eta}(t))$$

Ensuite, on considère l'ensemble $L_+^2(\Gamma_3)$ défini par

$$L_+^2(\Gamma_3) = \{\varphi \in L^2(\Gamma_3); \varphi \geq 0, \text{ p.p. sur } \Gamma_3\}.$$

Pour chaque $g = (g_1, g_2) \in L_+^2(\Gamma_3)^2$, on définit la fonctionnelle $h(g, \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$h(g, y) = \int_{\Gamma_3} g_1 w_\nu da + \int_{\Gamma_3} g_2 \|\psi_\tau\| da \quad \forall y = (w, \psi) \in V,$$

et introduisez un problème intermédiaire comme suit

Problème P_1^g

Trouver $x_{\beta\eta} : [0, T] \rightarrow X$ tel que

$$\langle \Lambda_\beta(t)x_{\beta\eta}(t), y - x_{\beta\eta}(t) \rangle + h(g, y) - h(g, x_{\beta\eta}(t)) \geq (f, y - x_{\beta\eta}(t))_V \quad \forall y \in X. \quad (3.47)$$

Lemme 3.2.3. *Le problème P_1^g admet une solution unique*

Preuve. Nous avons déjà démontré que Λ_β est de Lipschitz et fortement monotone et $h(g, \cdot)$ est convexe et semi-continue inférieurement. En utilisant un résultat standard sur l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce voir (Théorème 2.4.3), il existe un élément unique $x_{\beta\eta}(t) = (u_{\beta\eta}(t), \varphi_{\beta\eta}(t)) \in X$ qui satisfait (3.47).

Maintenant, nous montrons que

$$x_{\beta\eta} = (u_{\beta\eta}, \varphi_{\beta\eta}) \in C([0, T]; X)$$

Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ et on considère les notations $u_{\beta\eta}(t_i) = u_i$, $\varphi_{\beta\eta}(t_i) = \varphi_i$, $\beta\eta(t_i) = \beta\eta_i$, $q(t_i) = q_i$, $f(t_i) = f_i$ et $x_{\beta\eta}(t_i) = (u_{\beta\eta}(t_i), \varphi_{\beta\eta}(t_i)) = x_i$ pour $i = 1, 2$.

De (3.38) et (3.38), on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}\varepsilon(u_1) - \mathcal{B}\varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_Q &\geq - (\mathcal{E}^*\nabla(\varphi_1 - \varphi_2), \varepsilon(u_1 - u_2))_Q \\ &\quad - \left(\int_0^t \mathcal{F}(t-s)(\varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))(s) ds, \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) \right)_Q \\ &\quad + (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_V \\ &\quad + j_{ad}(\beta_1, u_1, u_1 - u_2) - j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \\ &\quad + j_{cn}(u_1, u_1 - u_2) - j_{cn}(u_2, u_1 - u_2) \\ &\quad + j_{fr}(u_1, u_1 - u_2) - j_{fr}(u_2, u_1 - u_2). \end{aligned}$$

$$(\mathcal{C}\nabla(\varphi_1 - \varphi_2), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_1 - u_2), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H = (q_1 - q_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W.$$

En utilisant (2.11), (2.14), (2.24)-(2.27), (3.22), (3.29), (3.32) et l'inégalité de Friedrichs-Poincaré avec (3.48), on a

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq c(\|u_1 - u_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W). \quad (3.48)$$

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq c(\|f_1 - f_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W + \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)}). \quad (3.49)$$

Finalement, d'après (3.48), (3.49) et la régularité de $(f, q, \beta, u_{\beta\eta})$, on obtient

$$u_{\beta\eta} \in C([0, T]; V), \quad \varphi_{\beta\eta} \in C([0, T]; W).$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 3.2.3. □

Maintenant, pour prouver le Lemme 3.2.2, nous définissons l'application suivant :

$$\begin{aligned}\Psi : L_+^2(\Gamma_3)^2 &\rightarrow L_+^2(\Gamma_3)^2 \\ g &\mapsto \Psi(g) = (p_\nu(u_{\beta\eta g\nu} - l), \mu p_\nu(u_{\beta\eta g\nu} - l)),\end{aligned}$$

alors nous montrons le Lemme suivant.

Lemme 3.2.4. Ψ a un point fixe unique g^* et $x_{\beta\eta g^*}$ est une solution unique du problème P_η^2 .

Preuve. Pour $i = 1, 2$, on définit le problème suivant.

Problème $P_{\eta g_i}^2$

Trouver $u_{g_i} \in V$ tel que :

$$\langle \Lambda_\beta(t)x_{\beta\eta g_i}, y \rangle + h(g_i, y) - h(g_i, x_{\beta\eta g_i}) \geq (f, y - x_{\beta\eta g_i})_V \quad \forall y \in V.$$

Nous utilisons la notation x_{g_i} pour $x_{\beta\eta g_i}$ en prenant la substitution $y = x_{g_2}$, $g = g_1$ et $y = x_{g_1}$, $g = g_2$ dans l'inégalité précédente et additionnons l'inégalités résultantes et par (2.23), nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_\beta(t)(x_{g_1} - x_{g_2}), x_{g_1} - x_{g_2} \rangle &\leq h(g_1, x_{g_1}) - h(g_1, x_{g_2}) + h(g_2, x_{g_2}) - h(g_2, x_{g_1}) \\ &\leq c \|g_1 - g_2\|_{L^2(\Gamma_3)^2} \|x_{g_1} - x_{g_2}\|_{L^2(\Gamma_3)^2}.\end{aligned}\tag{3.50}$$

Ensuite, en utilisant (2.14) et (3.50) il s'ensuit qu'il existe c tel que

$$\|u_{g_1} - u_{g_2}\|_V \leq c \|g_1 - g_2\|_{L^2(\Gamma_3)^2}.\tag{3.51}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\Psi(g_1) - \Psi(g_2) &= (p_\nu(u_{g_1} - l), \mu p_\nu(u_{g_1} - l)) - (p_\nu(u_{g_2} - l), \mu p_\nu(u_{g_2} - l)) \\ &= p_\nu(u_{g_1} - l)(1, \mu) - p_\nu(u_{g_2} - l)(1, \mu) \\ &= (p_\nu(u_{g_1} - l) - p_\nu(u_{g_2} - l))(1, \mu),\end{aligned}$$

par l'hypothèse sur la fonction p_ν et l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous avons

$$\begin{aligned}
 |\Psi(g_1) - \Psi(g_2)| &\leq |p_\nu(u_{g_1} - l) - p_\nu(u_{g_2} - l)| |(1, \mu)| \\
 &\leq \|p_\nu(u_{g_1} - l) - p_\nu(u_{g_2} - l)\| \|(1, \mu)\| \\
 &\leq \|p_\nu(u_{g_1} - l) - p_\nu(u_{g_2} - l)\| (1 + \|\mu\|) \\
 &\leq L_\nu \|u_{g_1} - u_{g_2}\| (1 + \|\mu\|) \\
 &\leq cL_\nu \|x_{g_1} - x_{g_2}\| (1 + \|\mu\|)
 \end{aligned}$$

alors, par (2.14), on trouve

$$\|\Psi(g_1) - \Psi(g_2)\|_{L^2(\Gamma_3)^2} \leq cL_\nu (1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|x_{g_1} - x_{g_2}\|_X. \quad (3.52)$$

Par conséquent, en utilisant (3.51), nous déduisons l'estimation

$$\|\Psi(g_1) - \Psi(g_2)\|_{L^2(\Gamma_3)^2} \leq c'cL_\nu (1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|g_1 - g_2\|_{L^2(\Gamma_3)^2}. \quad (3.53)$$

On choisit $L_0 = 1/c'c$, nous en déduisons $L_\nu(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) < L_0$, Ψ est une contraction, admet un point fixe unique g^* .

En gardant à l'esprit qu'il existe un élément unique x_{g^*} satisfaisant l'égalité :

$$\langle \Lambda_\beta(t)x_{g^*}, y - x_{g^*} \rangle + h(\Psi(g^*), y) - h(\Psi(g^*), x_{g^*}) \geq (f, y - x_{g^*})_V \quad \forall y \in X.$$

Soit $\forall y = (v, \psi), x = (u, \varphi) \in X$

$$\begin{aligned}
 h \circ \Psi &= h(\Psi(g), v) = h((p_\nu(u_g - l), \mu p_\nu(u_g - l)), v) \\
 &= \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{g\nu} - l) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(u_{g\nu} - l) \|v_\tau\| da \\
 &= j_{cn}(u, v) + j_{fr}(u, v) \\
 &= j(x, y).
 \end{aligned}$$

Comme $h \circ \Psi = j$ nous avons cela $x_{\beta\eta}(t) = x_{g^*}$ est une solution unique de problème P_η^2 . \square

Maintenant, soit l'opérateur $F_\beta : C([0, T]; Q) \rightarrow C([0, T]; Q)$ défini par

$$F_{\beta\eta}(t) = \int_0^t \mathcal{F}(t-s) \varepsilon(u_{\beta\eta}(s)) ds \quad \forall \eta \in C([0, T]; Q) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.54)$$

Lemme 3.2.5. *L'opérateur F_β admet un point fixe unique u_β .*

Preuve. Soit $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; Q)$. Par un calcul standard basé sur (2.27) et (3.54), nous obtenons

$$\begin{aligned} F_{\beta\eta_1}(t) - F_{\beta\eta_2}(t) &= \int_0^t \mathcal{F}(t-s)\varepsilon(u_{\beta\eta_1}(s))ds - \int_0^t \mathcal{F}(t-s)\varepsilon(u_{\beta\eta_2}(s))ds \\ &= \int_0^t \mathcal{F}(t-s)(\varepsilon(u_{\beta\eta_1}(s)) - \varepsilon(u_{\beta\eta_2}(s)))ds, \end{aligned}$$

en utilisant (3.43) et (2.21) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous avons

$$\begin{aligned} |F_{\beta\eta_1}(t) - F_{\beta\eta_2}(t)| &\leq \int_0^t \|\mathcal{F}(t-s)\| \|(\varepsilon(u_{\beta\eta_1}(s)) - \varepsilon(u_{\beta\eta_2}(s)))\| ds \\ &\leq d \left(\int_0^t \|\mathcal{F}(t-s)\|_{Q_\infty} \|(\varepsilon(u_{\beta\eta_1}(s)) - \varepsilon(u_{\beta\eta_2}(s)))\|_V ds \right) \\ &\leq d \max_{t \in [0, T]} \|\mathcal{F}(t)\|_{Q_\infty} \left(\int_0^t \|u_{\beta\eta_1}(s) - u_{\beta\eta_2}(s)\|_Q ds \right) \\ &\leq L_{\mathcal{F}} \left(\int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_Q ds \right). \end{aligned}$$

Alors

$$\|F_{\beta\eta_1}(t) - F_{\beta\eta_2}(t)\|_Q \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_Q ds \quad \forall t \in [0, T]$$

et

$$\begin{aligned} \|F_{\beta\eta_1}^2(t) - F_{\beta\eta_2}^2(t)\|_{C([0, T]; Q)}^2 &\leq c \int_0^t \|F_{\beta\eta_1}(s) - F_{\beta\eta_2}(s)\|_{C([0, T]; Q)}^2 ds \\ &\leq c^2 \int_0^t \int_0^s \|\eta_1(r) - \eta_2(r)\|_{C([0, T]; Q)}^2 dr ds \\ &\leq \frac{c^2 t^2}{2} \|\eta_1 - \eta_2\|_{C([0, T]; Q)}^2, \end{aligned}$$

en réitérant cette inégalité n fois on obtient :

$$\|F_{\beta\eta_1}^n - F_{\beta\eta_2}^n\|_{C([0, T]; Q)} \leq \frac{c^n T^n}{n!} \|\eta_1 - \eta_2\|_{C([0, T]; Q)},$$

ce qui implique que F_{β}^n est une contraction sur l'espace $C([0, T]; Q)$.

Ainsi, il admet un unique élément fixe $\beta_\eta \in C([0, T]; Q)$ qui implique que F_{β} est aussi a un unique point fixe. \square

Maintenant, notons $u_\beta = u_{\beta\eta}$ et $\varphi_\beta = \varphi_{\beta\eta}$, le couple (u_β, φ_β) est l'unique solution du problème P_V^β . En effet, l'existence et l'unicité suit des Lemmes 3.2.2 et 3.2.5.

Aussi, afin de prouver le Théorème 3.2.1, nous avons besoin d'autres résultats intermédiaires.

On considère u_β la solution obtenue ci-dessus et on définit le problème de Cauchy suivant énoncé comme suit :

Problème P_{ad} .

Trouver un champ de d'adhésion $\beta^* : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tel que :

$$\dot{\beta}^*(t) = - \left[(\beta^*(t)) ((\gamma_\nu R_\nu u_{\beta^* \nu}(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_{\beta^* \tau}(t))\|^2) - \epsilon_a \right]_+ \quad \text{p.p. } t \in [0; T], \quad (3.55)$$

$$\beta^*(0) = \beta_0. \quad (3.56)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.2.6. *Le problème P_{ad} admet une solution unique β^* qui satisfait*

$$\beta^* \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3)) \cap B.$$

Preuve. La solution β^* appartient au sous-ensemble Θ de l'espace $C([0, T]; L^2(\Gamma_2))$ défini par

$$\Theta = \{\beta \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)) \cap B; \beta(0) = \beta_0\}. \quad (3.57)$$

En effet, on considère l'application : $\Phi : \Theta \rightarrow \Theta$ défini par

$$\Phi(t) = \beta_0 - \int_0^t \left[\beta(s) ((\gamma_\nu R_\nu u_{\beta \nu}(s))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_{\beta \tau}(s))\|^2) - \epsilon_a \right]_+ ds, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.58)$$

où u_β est le premier composant de la solution du Lemme 3.2.1. Pour montrer le résultat dans le Lemme 3.2.6, nous démontrons que pour un entier positif n , l'opérateur Φ^n est une contraction dans Θ pour un entier n assez grand.

En effet, soit $\beta_i, i = 1, 2$ deux éléments de Θ , dénote $u_{\beta_i} = u_i$ et $x_i = (u_i, \varphi_i)$. Soit $t \in [0, T]$, d'après (3.22), nous montrons qu'il existe $c > 0$ telle que

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u_1 - u_2\|_V,$$

En utilisant les hypothèses (2.24) et (2.28), nous montrons aussi qu'il existe une constante c telle que

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|_X \leq c \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u_1 - u_2\|_V,$$

et par conséquent,

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W \leq c\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}, \quad (3.59)$$

d'où

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq c\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}. \quad (3.60)$$

On a

$$\begin{aligned} \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c \int_0^t \|\beta_1(s)R_\nu(u_{1\nu})^2 - \beta_2(s)R_\nu(u_{2\nu})^2\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\ &\quad + c \int_0^t \|\beta_1(s)\|R_\tau(u_{1\tau})\|^2 - \beta_2(s)\|R_\tau(u_{2\tau})\|^2\|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned} \quad (3.61)$$

En utilisant les propriétés des opérateurs R_ν et R_τ (voir [24]) avec l'écriture $\beta_1 = \beta_1 + \beta_2 - \beta_2$ pour trouver

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \left(\int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds \right). \quad (3.62)$$

En combinant (3.62) avec le Lemme de Gronwall, on obtient

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds, \quad (3.63)$$

et d'après l'inégalité (2.14), on a

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds. \quad (3.64)$$

Et gardant à l'esprit (3.59), on obtient

$$\|\Phi\beta_1(t) - \Phi\beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds, \quad (3.65)$$

et

$$\begin{aligned} \|\Phi\beta_1^2(t) - \Phi\beta_2^2(t)\|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))}^2 &\leq c \int_0^t \|\Phi\beta_1(s) - \Phi\beta_2(s)\|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))}^2 ds \\ &\leq c^2 \int_0^t \int_0^s \|\beta_1(r) - \beta_2(r)\|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))}^2 dr ds \\ &\leq \frac{c^2 t^2}{2} \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))}^2, \end{aligned}$$

en réitérant cette inégalité n fois on obtient :

$$\|\Phi^n \beta_1 - \Phi^n \beta_2\|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))} \leq \frac{c^n T^n}{n!} \|\beta_1 - \beta_2\|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))}. \quad (3.66)$$

Alors, pour n assez grand, l'opérateur Φ^n est une contraction sur $C([0,T];L^2(\Gamma_3))$, alors il admet un point fixe unique $\beta^* \in \Theta$ qui est aussi un point fixe unique de Θ . \square

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour prouver le Théorème 3.2.1

Existence. Soit β^* le point fixe de l'opérateur Φ et $x^* = (u^*, \varphi^*)$ la solution du problème $P_V^{\beta^*}$, toujours en utilisant l'hypothèse (2.24) et un p_ν , on a

$$\begin{aligned} \|u^*(t_1) - u^*(t_2)\|_V &\leq c(\|\beta^*(t_1) - \beta^*(t_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W \\ &\quad + \|f(t_1) - f(t_2)\|_V), \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

et

$$\begin{aligned} \|\varphi^*(t_1) - \varphi^*(t_2)\|_V &\leq c(\|q^*(t_1) - q^*(t_2)\|_W + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W \\ &\quad + \|u^*(t_1) - u^*(t_2)\|_V), \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Unicité. Il s'ensuit par les Lemmes 3.2.2, 3.2.4, 3.2.5 et 3.2.6 que le triple $(u^*, \varphi^*, \beta^*)$ est une solution unique du problème P_V et avec la régularité expresse (3.33), (3.34) et (3.35). Enfin, l'unicité découle de l'unicité du point fixe de l'opérateur Φ , qui complète la preuve du Théorème 3.2.1.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites de contact en piézoélectricité, le problème proposé est un problème électro-mécanique de contact avec adhésion entre un corps électro-viscoélastique et une base déformable avec mémoire longue.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème. Comme la frontière de corps et le donnée de problème est de bonnes régularité ; donc, la solution du problème mécanique et du problème variationnelle est la même.

On a montré l'existence et l'unicité de la solution des problèmes précédents par l'utilisation des arguments suivants : inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce, équation variationnelle d'évolution, inéquation variationnelle d'évolution du type elliptique et point fixe de Banach.

Bibliographie

- [1] R. Arhab, *Contribution à l'étude du contact piézoélectriques avec adhésion. Thèse de doctorat de l'université de Perpignan en mathématiques appliquées, 2008.*
- [2] F. Auricchio, P. Bisegna and C. Lovadina,b, *Finite element approximation of piezoelectric plates. Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **50** (2001), 1469-1499.
- [3] H. Brezis, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **18** (1968), 115-175.
- [4] G. Duvaut and J-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris, (1972).*
- [5] G. Fichera, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno. Mem. Accad. Naz. Lincei, S. VIII, Vol VII, Sez. I, 5, (1964), 91-140.*
- [6] M. Frémond, *Adhérence des solides. J. Méc. Théor. Appl.* **6** (1980), 383-407.
- [7] W. Han and M. Sofonea, *Analysis and numerical approximation of an elastic frictional contact problem with normal compliance. Appl. Math. (Warsaw)* **26** (1999), 4, 415-435.
- [8] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 30, American Mathematical Society, Rhode Island; International Press, Massachusetts, 2002.*
- [9] W. Heywang, K. Lubitz, W. Wersing , *Piezoelectricity. Evolution and Future of a Technology. Springer, Berlin, 2008.*
- [10] I.Ekeland and R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems.North-Holland, Amsterdam, 1976.*

-
- [11] A. Klarbring, A. Miklic and M. Shillor, *A global existence result for the quasistatic problem with normal compliance. Internat. Ser. Numer. Math.* **101** (1991), 85-111.
- [12] S. Migórski, A. Ochal and M. Sofonea, *Analysis of a quasistatic contact problem for piezoelectric materials. J. Math. Anal. Appl.* **382** (2011), 701-713.
- [13] M. Raous, L. Cangémi and M. Cocou, *A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **177** (1999), 383-399.
- [14] R. Rocca, *Existence of a solution for a quasistatic problem of unilateral contact with local friction. Cr. Acad. Sci. Paris. Ser1, t.328* (1999), 1253-1258.
- [15] A. Signorini, *Sopra alcune questioni di elastostatica. Atti Societa Italiana il Progresso Scienze*, 1933.
- [16] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact. Lecture Notes in Phys.* **655** (2004).
- [17] M. Sofonea and R. Arhab, *An Electro-viscoelastic contact problem with adhesion. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A : Math. Anal.* **14** (2007), 577-591.
- [18] M. Sofonea, R. Arhab and R. Tarraf, *Analysis of electrostatic frictionless contact problems with adhesion. J. Appl. Math.* (2006), 1-25.
- [19] M. Sofonea, W. Han and M. Shillor, *Analysis and approximations of contact problems with adhesion or damage. Pure Appl. Math. (Boca Raton)* **276** (2006).

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié un modèle mathématique dans un processus quasi-statique d'un problème de contact entre un corps électro-viscoélastique avec mémoire longue et une fondation déformable. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale avec adhésion. Le frottement est formulé par une version de la loi de Coulomb. Nous dérivons une formulation variationnelle sous forme de système couplé en terme des champs de déplacement , du potentiel électrique et d'adhésion. Aussi, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible pour le modèle.

Mots-clés: Viscoélasticité, électro-viscoélasticité, opérateur monotone, compliance normale, adhésion, frottement de Coulomb, inéquation quasi-variationnelle, inéquation d'évolution, point fixe, solution faible.

Abstract

In this thesis, we studied a mathematical model in a quasi-static process of a problem of contact between an electro-viscoelastic body with long memory and a deformable foundation. The contact is modeled by a condition of normal compliance with adhesion. The friction is formulated by a version of Coulomb's law. We derive a variational formulation as a coupled system in terms of displacement fields , electrical potential and adhesion. Also, we establish a result of existence and uniqueness of a weak solution for the model.

Keywords: Viscoelasticity, electro-viscoelasticity, monotonic operator, normal compliance, adhesion, Coulomb's friction, quasi-variational inequation, evolution inequality, fixed point, weak solution..

ملخص

في هذه الذاكرة، درسنا نموذجاً رياضياً في عملية شبه ثابتة لمشكلة التلامس بين جسم لزج كهربي ذو ذاكرة طويلة وقاعدة قابلة للتشوه. تم الاتصال وفقاً لشرط الاستجابة العادية بالتصاق. وقد تم صياغة الاحتكاك بواسطة نسخة من قانون كولوم ب. لقد توصلنا إلى صيغة متنوعة كنظام مقرون من حيث مجالات الإزاحة، الكمون الكهربائي والاتصاق. أيضاً، نؤسس نتيجة لوجود وحدانية حل ضعيف للنموذج.

الكلمات المفتاحية: اللزوجة ، اللزوجة الكهربائية، عامل الرتبة، الاستجابة العادية، التصاق، احتكاك كولومب، متباينة شبه تغيرية، متباينة تطويرية، نقطة ثابتة، حل ضعيف.