الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur

et de la Recherche Scientfiique

جامعةالشهيد حمه لخضر-الوادي

كلية العلوم الدقيقة

مذكرة تخرج لنيل شهادة

ماستر أكادمي

في ميدان: رياضيات و إعلام آلي
فرع: رياضيات
تخصص: رياضيات أساسية و تطبيقية

تحت عنوان

سلاسل فوريه وبعض تطبيقاتها

من إعداد الطالبة : لمقدم أحلام

لجنة المناقشة:
تواتي براهيم محمد السعيد .... مشرفا ..... أستاذ بجامعة الشهيد حمه لخضر-الوادي
مومن بكوش محمد ..... رئيسا ..... أستاذ بجامعة الشهيد حمه لخضر-الوادي
بلهادي حفوظة ..... مناقشا ..... أستاذ بجامعة الشهيد حمه لخضر-الوادي

السنة الجامعية 2020/2019

❖ شكر وتقدير

الحمد لله نحمده وهو المستحق للحمد والثناء ونستعين به في السراء والضراء، ونتوكل عليه في جميع حالاتنا، ونصلي ونسلم على خير خلق الله سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وصحبه أجمعين ومن تبع هديه إلى يوم الدين.

وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم (من لم يشكر الناس لم يشكره الله) رواه الترميذي وأحمد

أتقدم بأسمى عبارات الشكر والتقدير إلى كل من أوقد لي مشعل الحياة وحملني على سفينة النجاة

إلى كل من صرت بفضله أكتب وأقرأ و....

إلى كل من علمني علما به ينتفع وأدب به يرتفع

بدءًا من معلمي الإبتدائي وصولا إلى أساتذتي الكرام في الجامعة.

شكر خاص للأستاذ المشرف " تواتي براهيم محمد السعيد" على قبوله الإشراف على هذه المذكرة.

كما أتقدم بعظيم التقدير والعرفان إلى الأستاذ "صالح بولعراس".

كذلك أشكر كل من ساعدني على إتمام هذه المذكرة و أخص بالذكر: الأستاذ خالد.

❖ إهداء

إذا كان الاهداء يعبر ولو بجزء من الوفاء فالاهداء إلـى
من كلله الله بالهيبة والوقار و من علمني العطاء بدون إنتظار،إلى من أحمل
إسمه بكل افتخار، أرجو من الله أن يمد في عمرك
والدي لمقدم مبروك
إلى التي على بساط الأوجاع ولدتني... وبعيون التعب رعتني
إلى ينبوع الصبر التي علمتني...إلى المرأة التي ربتني
إلى من أنجبت لي أخوات ... سعدت بهم كل الأوقات
إلى أمهاتي
إلى الذين لا تفيهم كلمات الشكر والعرفان،إلى من كانوا ملاذي وملجئي إلى
من تحلو بالإخاء وتميزوا بالعطاء،إلى من معهم عشت أجمل الأوقات
عمي عبد الله وزوجته بية
إلى من تسكن صورهن وأصواتهن أجمل اللحظات والأيام التي عشتها، إلى من
يسعد قلبي بلقياهن، إلى من بوجودهن أكتسب قوة ومحبة لا حدود لها، إلي
الغاليات اللاتي تطلعن لنجاحي بنظرات الأمل إلى أخواتي
سعيدة، سهيلة، راضية،حنان
إلى أخي الوحيد عبد الرحمان و زوجته عائشة
إلى الأخوات اللواتي لم تلدهن أمي إلى من كانوا معي في كل الأوقات إلى
من معهن سعدت وبرفقتهن في دروب الحياة سرت إلى بنات عمي
مبروكة و مليكة
إلى من أرى التفاؤل بعيونهم ...والسعادة في ضحكاتهم
إلى الوجوه المفعمة بالبراءة... إلى براعم عائلتنا الصغار
عبد الجبار، لزهر، تقوى، جهاد
أسماء، سيف الدين، حليمة، رياض
إلى من سرنا سويا نشق الطريق معا نحو النجاح إلى من آنسني في دراستي
إلى صديقاتي نجلاء و فاطمة الزهراء

المحتويات

مقدمة **v**

رموز عامة **vii**

1 مفاهيم أساسية **1**

1.1 الدوال الدورية 1

1.2 الدالة المستمرة قطعيا 3

1.3 الدالة القابلة للإشتقاق قطعيا 4

1.4 الدالة من الصنف C^k - الدالة من الصنف C^k قطعيا 6

1.5 بعض خصائص المجموعات: $PC_{2\pi}, D_{2\pi}, C_{2\pi}$ 7

1.6 الجداء السلمي في الفضاءات $D_{2\pi}, C_{2\pi}, PC_{2\pi}$ 9

1.7 التعامد في الفضاءات $PC_{2\pi}, D_{2\pi}, C_{2\pi}$ 11

1.8 النظيم $\|.\|_1$ و النظيم $\|.\|_\infty$ 13

1.9 كثير الحدود المثلثي 14

1.9.1 تعريف كثير الحدود المثلثي 14

1.9.2 بعض خصائص كثيرات الحدود المثلثية 14

1.9.3 نواة ديريكله (Dirichlet kernel) 16

1.9.4 نواة فيجر (Fejer kernel) 18

1.10 جداء اللف في الفضاء $PC_{2\pi}$ (Convolution) 19

2 سلاسل فوريه للدوال $f \in PC_{2\pi}$ **25**

2.1 السلاسل المثلثية 25

2.1.1 تعريف السلاسل المثلثية 25

2.1.2 تقارب السلاسل المثلثية 25

2.2 معاملات فوريه 27

2.2.1 معاملات فوريه الأسية 27

2.2.2 معاملات فوريه المثلثية 32

2.3 مجموع فوريه-سلسلة فوريه 34
2.4 تقارب سلسلة فوريه 34
2.4.1 تقارب سلسلة فوريه في الفضاء$(PC_{2\pi}, \|\cdot\|_2)$ 35
2.4.2 التقارب البسيط لسلسلة فوريه 39
2.4.3 التقارب الطبيعي لسلسلة فوريه 43
2.4.4 التقارب المنتظم لسلسلة فوريه 44
2.4.5 تقارب مجاميع فيجر بالنسبة للدوال $f \in C_{2\pi}$ 48

3 بعض التطبيقات لسلاسل فوريه 52
3.1 دالة ريمان 52
3.2 مسألة المحيط الثابت 58
3.3 متراجحة writinger 62
3.4 خاصية هامة للدوال التحليلية 63
3.5 حل معادلة الحرارة 66

الخـاتمـــــة 70

قائمة المراجـع 71

مقـدمـــــة

طوال القرن الثامن عشر ، أدرك علماء الرياضيات البارزون أن سلاسل القوى كانت غير كافية لتمثيل الدوال، وأن هناك حاجة إلى نوع مختلف من السلاسل. ولقد قادت مشاكل الفيزياء الرياضية كل من برنولي (Bernoulli)، دالمبير (D'Alembert)، أولر (Euler) و لاجرانج (Lagrange)، إلى التساؤل بشدة حول إمكانية تمثيل الدوال بواسطة سلاسل مثلثية(حدودها دوال مثلثية). أثار هذا النقاش أحد الأزمات التي شكلت عائق في تطوير التحليل.

في جلسة لا تنسى للأكاديمية الفرنسية يوم 21 من ديسمبر 1807، أعلن عالم الرياضيات والفيزياء جوزيف فورييه عن أطروحة بدأت فصلاً جديدًا في تاريخ الرياضيات. حيث إدعى فورييه أن كل دالة معرفة بأي رسم بياني "يحد منطقة محددة". يمكن تفكيكها إلى مجموع مكون من دوال الجيب، جيب التمام الدورية، عارضت لجنة التقييم والتحكيم أنذاك هذه النظرية.

أظهرت الدراسات لاحقا أن إدعاء فورييه كان له ما يبرره تمامًا، على الرغم من أنه هو نفسه لم يكن قادرًا على تقديم التفاصيل الدقيقة للبرهان عليه، لإنه لم يكن يمتلك الأدوات الدقيقة المطلوبة للتعامل مع سلسلة لانهائية.

في الحقيقة هدف فورييه من النظرية السابقة كان دراسة مسألة إنتشار الحرارة، إلا أنها أصبحت حجر الزاوية للعديد من الإكتشافات في عالم الرياضيات البحتة، حيث كان لهذا تأثير عميق على المائة عام التي تلتها من البحث الرياضي، فقد تم تحرير تعريف الدالة من أصفاده الجبرية، والتعريف الحديث للدالة ظهر من خلال عمل ديريكله (Dirichlet) و ريمان (Riemann) الذي حدد مفهوم دالة "قابلة للتكامل" والذي تم تعميمه لاحقا بعد كثير من العمل الجاد، والتحسينات طوال القرن التاسع عشر حيث توج القرن بنظرية لوبيغ (Lebesgue) للتكامل.

حاول العديد من علماء الرياضيات، بدءًا من فوريه نفسه، إيجاد الشروط الكافية على الدوال لتساوي سلسلة فوريه الخاصة بها عند كل نقطة. بعض الشروط الضرورية واضحة. بدءًا من دورية الدوال، وهذا راجع لإن حدود سلسة فوريه دورية. ولقد نجح ديريكله في إيجاد شروط كافية تضمن هذه المساواة، غطت هذه الشروط مجموعة كبيرة من الدوال.

الهدف من هذه المذكرة، هو دارسة سلاسل فوريه للدوال الدورية المستمرة قطعيا وبعض تطبيقاتها. تتكون المذكرة من ثلاثة فصول:

❖ الفصل الأول: يقدم مفهوم لكل من الدوال الدورية،الدوال المستمرة قطعيا،والدوال القابلة للإشتقاق قطعيا وغيرها من التعاريف الأساسية،بالإضافة إلى ذلك تم التطرق إلى كثيرات الحدود المثلثية وجداء اللف وخصائص كل منهما.

❖ الفصل الثاني: يقدم مفهوم للسلاسل المثلثية عموما، ثم يتطرق إلي تعريف لمعاملات فوريه وبعض خواصها، تعريف لسلاسل فوريه ودراسة مسألة تقارب هذه السلاسل، و علاقتها بالدالة الأصلية. ولقد تم التطرق في هذا الإطار إلى عدة نظريات (بيسال، برسفال، ديركليه، فيجر،...).

❖ الفصل الثالث: يوضح إستخدام سلاسل فوريه في بعض التطبيقات منها إيجاد بعض القيم لدالة ريمان، حل معادلة الحرارة، إضافة إلى بعض التطبيقات الأخرى.

رموز عامة

$\mathbb{N}$	مجموعة الأعداد الطبيعية.
$\mathbb{N}^*$	مجموعة الأعداد الطبيعية ماعدا الصفر.
$\mathbb{Z}$	مجموعة الأعداد الصحيحة.
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقة.
$\mathbb{C}$	مجموعة الأعداد المركبة.
$C(\mathbb{R},\mathbb{C})$	مجموعة الدوال المستمرةمن $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{C}$.
$C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ C_{2\pi}$	مجموعة الدوال المستمرةوالدورية من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{C}$.
$PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ PC_{2\pi}$	مجموعة الدوال المستمرة قطعيا والدورية من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{C}$.
$D_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ D_{2\pi}$	مجموعة الدوال $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ والتي تحقق شرط ديريكله.
C^k	صنف الدوال المستمرةومشتقاتها متصلة.
P_N	مجموعة كثيرات الحدود المثلثية ذات الدرجة أقل أو تساوي N.
$\prec ./. \succ$	الجداء السلمي.
f'	مشتق f من الرتبة الأولى.
$f^{(k)}$	مشتق f من الرتبة k
Df	شبه مشتقة الدالة f.
$f(x_i^+)$	نهاية الدالة f من اليمين عند النقطة x_i.
$f(x_i^-)$	نهاية الدالة f من اليسار عند النقطة x_i.
$\overline{f}$	مرافق الدالة f.
$\|f\|$	طويلة الدالة f.
$\tilde{f}$	تمديد الدالة f.
$f_{\|]a,b[}$	إقتصار f على المجال $]a,b[$.
$f \perp g$	f تعامد g.
$f * g$	جداء لف f و g.
$\hat{f}$	معامل فوريه الأسي للدالة f.

الفصل 1

مفاهيم أساسية

سنعرض في هذا الفصل مجموعة من التعاريف والمفاهيم التي لابد من الإلمام بها قبل المرور إلى سلاسل فورييه، كما سنقدم بعض النتائج التي ستفيدنا في إثبات العديد من النظريات في الفصل الثاني.

1.1 الدوال الدورية

في هذه المذكرة، سنهتم بالدوال من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ إلى مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

تعريف 1.1.1. لتكن f دالة من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ إلى مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$. ليكن T عددا حقيقيا موجبا. نقول بأن العدد الحقيقي T يمثل دور للدالة f إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad f(x+T) = f(x)$$

من الواضح بأنه، إذا كان T يمثل دور للدالة f ، فإنه لكل عدد صحيح $n \in \mathbb{Z}$ ، العدد الحقيقي nT يمثل كذلك دور للدالة f. من الواضح كذلك بأنه، إذا كان كل من T_1 و T_2 يمثل دور للدالة f، فإن $T_1 + T_2$ يمثل كذلك دور للدالة f.

نظرية 1.1.1. لتكن f دالة من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ إلى مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$. لتكن $P(f)$ مجموعة الأعداد الحقيقية التي تمثل دور للدالة f. لدينا الحقيقة التالية: $(P(f), +)$ تحقق شروط الزمرة الإبدالية.

تعريف 1.1.2. نقول بأن الدالة f دورية، إذا وجد عدد حقيقي موجب $T \succ 0$، بحيث:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad f(x+T) = f(x)$$

إذا كانت الدالة f دورية ، و T يمثل دور للدالة f، فإنه لدراسة الدالة f، يكفينا دراسة الدالة f على مجال طولها T.

أمثلة

1) الدوال المثلثية $\cos(x)$ و $\sin(x)$ دوال دورية، لإن العدد الحقيقي 2π يمثل دور لكل منهما.
2) الدالة $e^{i.x} = \cos(x) + i\sin(x)$ دورية، لإن العدد الحقيقي 2π يمثل دور لها.
3) لكل عدد حقيقي $n \neq 0$، الدوال المثلثية $\cos(nx)$ و $\sin(nx)$ دوال دورية، لإن العدد الحقيقي $\frac{2\pi}{n}$ يمثل دور لكل منهما.
4) لكل عدد حقيقي $n \neq 0$، الدالة $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ دورية، لإن العدد الحقيقي $\frac{2\pi}{n}$ يمثل دور لها.
5) لتكن الدالة التالية:

$$P_N(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} C_n e^{inx}$$

هذه الدالة دورية، لإن العدد الحقيقي 2π يمثل دور لها. الدالة $P_N(x)$ تسمى كثير حدود مثلثي.

نظرية 1.1.2. إذا كان العدد $T \succ 0$ يمثل دور للدالة $f(x)$، فإنه لكل عدد حقيقي ثابت $\alpha \neq 0$، الدالة التالية:

$$g(x) = f(\alpha x)$$

دالة دورية كذلك، و العدد $\frac{T}{\alpha}$ يمثل دور للدالة $g(x) = f(\alpha x)$.

نتيجة مباشرة للنظرية السابقة إذا كانت الدالة f دورية ، و T يمثل دور للدالة f، فإن الدالة التالية:

$$g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$$

ستكون حتما دالة دورية، و العدد الحقيقي 2π يمثل دور لها. لإثبات ذلك، يكفينا إختيار $\alpha = \frac{T}{2\pi}$ في النظرية السابقة.

ملاحظة 1.1.1. في النظرية السابقة، الدالة الجديدة $g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$، قريبة جدا من الدالة الأصلية f و دراستها كافية تماما لدراسة الدالة الأصلية f. لذلك، سنهتم في ما يلي، بالدوال الدورية و التي يمثل العدد الحقيقي 2π دور لها.

كيفية صناعة الدوال الدورية إذا كانت f دالة معرفة على مجال $[a,a+T]$، طولها $T \succ 0$، فإنه يمكننا تمديد مجال هذه الدالة إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، لتصبح دالة جديدة $\tilde{f}$، دورية، و العدد $T \succ 0$ يمثل دور لها، و ذلك كالآتي:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \tilde{f}(x) = f(x - nT)$$

حيث أن العدد n يمثل أكبر عدد صحيح أصغر من العدد الحقيقي $\frac{x-a}{T}$. و نكتب: $n = E(\frac{x-a}{T})$ العدد الحقيقي: $[(\frac{x-a}{T}) - E(\frac{x-a}{T})]$ يسمى بالجزء الكسري للعدد الحقيقي $\frac{x-a}{T}$، و نرمز له بـ: $\{\frac{x-a}{T}\}$ و بالتالي:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad , \qquad \tilde{f}(x) = f(x - nT) &= f(x - a - nT + a) \\ &= f((\frac{x-a}{T} - n).T + a) \\ &= f(\{\frac{x-a}{T}\}.T + a) \end{aligned}$$

1.2 الدالة المستمرة قطعيا

لتكن f دالة من المجال $[a,b]$ إلى مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$. نقول بأن الدالة f مستمرة قطعيا (Piecewise continuous fonction) إذا وجدت مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية:

$$a = x_0 \prec x_1 \prec ..... \prec x_n = b$$

بحيث:

- الدالة f تكون مستمرةعلى كل مجال: $]x_i, x_{i+1}[$ و ذلك لكل $i \in \{0,1,...,n-1\}$
- لكل $i \in \{0,1,...,n-1\}$، النهاية التالية:

$$\lim_{x \mapsto x_i^+} f(x)$$

تكون موجودة، و تكون عددا مركبا. هذا العدد المركب نرمز له بـ: $f(x_i^+)$.

- لكل $i \in \{1,...,n\}$، النهاية التالية:

$$\lim_{x \mapsto x_i^-} f(x)$$

تكون موجودة، و تكون عددا مركبا. هذا العدد المركب نرمز له بـ: $f(x_i^-)$.

- لكل $i \in \{1, ..., n-1\}$

$$\lim_{x \mapsto x_i^+} f(x) \neq \lim_{x \mapsto x_i^-} f(x)$$

هذا يعني بإختصار بأنه لكل $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$، يمكننا تمديد الدالة $f_{/(x_i, x_{i+1})}$ إلى دالة مستمرةعلى المجال المغلق $[x_i \ , \ x_{i+1}]$.

1.3 الدالة القابلة للإشتقاق قطعيا

لتكن f دالة من المجال $[a, b]$ إلى مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$. نقول بأن الدالة f قابلة للإشتقاق قطعيا إذا وجدت مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية:

$$a = x_0 \prec x_1 \prec ..... \prec x_n = b$$

بحيث:

- الدالة f تكون قابلة للإشتقاق على كل مجال: $]x_i, x_{i+1}[$ و ذلك لكل $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$
- لكل $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$، النهاية التالية:

$$\lim_{x \mapsto x_i^+} f(x)$$

تكون موجودة، و تكون عددا مركبا. هذا العدد المركب نرمز له بـ: $f(x_i^+)$.

- لكل $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$، النهاية التالية:

$$\lim_{x \mapsto x_i^+} \frac{f(x) - f(x_i^+)}{x - x_i}$$

تكون موجودة، و تكون عددا مركبا. هذا العدد المركب نرمز له بـ: $f'(x_i^+)$.

- لكل $i \in \{1, ..., n\}$، النهاية التالية:

$$\lim_{x \mapsto x_i^-} f(x)$$

تكون موجودة، و تكون عددا مركبا. هذا العدد المركب نرمز له بـ: $f(x_i^-)$.

- لكل $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$، النهاية التالية:

$$\lim_{x \mapsto x_i^-} \frac{f(x) - f(x_i^-)}{x - x_i}$$

تكون موجودة، و تكون عددا مركبا. هذا العدد المركب نرمز له بـ: $f'(x_i^-)$.

- لكل $i \in \{1, ..., n-1\}$

$$\lim_{x \mapsto x_i^+} f(x) \neq \lim_{x \mapsto x_i^-} f(x)$$

$$\lim_{x \mapsto x_i^+} \frac{f(x) - f(x_i^+)}{x - x_i} \neq \lim_{x \mapsto x_i^-} \frac{f(x) - f(x_i^-)}{x - x_i}$$

هذا يعني بإختصار بأنه لكل $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$، يمكننا تمديد الدالة $f_{/(x_i, x_{i+1})}$ إلى دالة قابلة لإشتقاق على المجال المغلق $[x_i \ , \ x_{i+1}]$.

1.4 الدالة من الصنف C^k - الدالة من الصنف C^k قطعيا

لتكن f دالة من المجال $[a,b]$ إلى مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$و ليكن k عددا طبيعيا.

1) نقول بأن الدالة f من الصنف C^k على المجال $[a,b]$ إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق k مرة عند جميع نقاط المجال $[a,b]$، و الدالة المشتقة رقم k، $f^{(k)}$ مستمرةعند جميع نقاط المجال $[a,b]$.

2) نقول بأن الدالة f من الصنف C^k قطعيا، إذا وجدت مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية:

$$a = x_0 \prec x_1 \prec ..... \prec x_n = b$$

بحيث:

- الدالة f تكون قابلة للإشتقاق k مرة عند جميع نقاط المجال المفتوح $]x_i \ , \ x_{i+1}[$، و الدالة المشتقة رقم k، $f^{(k)}$ تكون مستمرةعند جميع نقاط المجال المفتوح $]x_i \ , \ x_{i+1}[$، و ذلك لكل $i \in \{0,1,...,n-1\}$.
- لكل $i \in \{0,1,...,n-1\}$، يمكننا تمديد الدالة $f_{/(x_i,x_{i+1})}$ إلى دالة قابلة للإشتقاق k مرة عند جميع نقاط المجال المغلق $[x_i \ , \ x_{i+1}]$، و دالتها المشتقة من الرتبة k، تكون مستمرةعند جميع نقاط المجال المغلق $[x_i \ , \ x_{i+1}]$.

يعني، لكل $i \in \{0,1,...,n-1\}$، توجد دالة g_i من الصنف C^k على المجال المغلق $[x_i \ , \ x_{i+1}]$ بحيث:

$$g_{i/(x_i,x_{i+1})} = f_{/(x_i,x_{i+1})}$$

ملاحظة 1.4.1. 1) مجموعة الدوال المستمرةو الدورية، و التي يمثل العدد الحقيقي 2π دور لها، نرمز لها بـ: $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ أو إختصارا بـ : $C_{2\pi}$

2) مجموعة الدوال مستمرة قطعيا و الدورية، و التي يمثل العدد الحقيقي 2π دور لها، نرمز لها بـ: $PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ أو إختصارا بـ : $PC_{2\pi}$.

3) مجموعة الدوال $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و التي تحقق الشرط التالي، و الذي يسمى بشرط ديريكله $(Dirichlet)$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

نرمز لها بـ : $D_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ أو إختصارا بـ: $D_{2\pi}$.

ملاحظة 1.4.2. لتكن f دالة معرفة على مجال $[a, a+T]$، طولها $T \succ 0$، بحيث:

$$f(a+T) = f(a)$$

كما أشرنا سابقا، يمكننا تمديد مجال هذه الدالة إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، لتصبح دالة جديدة $\tilde{f}$ دورية و العدد $T \succ 0$ يمثل دورة لها، و ذلك كالآتي:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \tilde{f}(x) = f(\{\frac{x-a}{T}\}T + a)$$

1) إذا كانت الدالة الأصلية f مستمرةعند جميع نقاط المجال $[a, a+T]$ فإن الدالة الجديدة $\tilde{f}$ ستكون كذلك مستمرةعند جميع نقاط $\mathbb{R}$.

2) إذا كانت الدالة الأصلية f مستمرة قطعيا على المجال $[a, a+T]$ فإن الدالة الجديدة $\tilde{f}$ ستكون كذلك مستمرة قطعيا على $\mathbb{R}$.

3) إذا كانت الدالة الأصلية f من الصنف C^k قطعيا على المجال $[a, a+T]$ فإن الدالة الجديدة $\tilde{f}$ ستكون من الصنف C^k قطعيا على $\mathbb{R}$.

4) إذا كانت الدالة الأصلية f من الصنف C^k على المجال $[a, a+T]$ فإن الدالة الجديدة $\tilde{f}$ ستكون من الصنف C^k قطعيا على $\mathbb{R}$ ، و ليست بالضرورة من الصنف C^k على $\mathbb{R}$.

1.5 بعض خصائص المجموعات: $PC_{2\pi}, D_{2\pi}, C_{2\pi}$

1) $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subseteq D_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subseteq PC_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

2) كل دالة $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ هي دالة محدودة بالضرورة. يعني يوجد عدد حقيقي موجب $M \succ 0$ بحيث:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , |f(x)| \prec M$$

3) لكل دالة $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$، فإن $|f| \in PC_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. كل من الدالتين f و $|f|$ قابلة للتكامل على المجال $[0, 2\pi]$ بالضرورة.

4) لتكن العمليات التالية: $+ \ , \ \times \ , \ \bullet$، و التي تعني على التوالي: جمع الدوال، ضرب الدوال، ضرب دالة بعدد مركب. لدينا الحقائق التالية:

- $(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), +, \times)$, $(D_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), +, \times)$, $(PC_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), +, \times)$ تحقق جميعها شروط الحلقة الإبدالية.
- $(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), +, \bullet)$, $(D_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), +, \bullet)$, $(PC_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), +, \bullet)$ تحقق جميعها شروط الفضاء الإتجاهي على حقل الأعداد المركبة.

5) لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $t_0 \in \mathbb{R}$. الدالة f_{t_0} المعرفة بالشكل التالي:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , f_{t_0}(t) = f(t+t_0)$$

هي دالة في الفضاء $PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

6) لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. الدالة $\breve{f}$ المعرفة بالشكل التالي:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \breve{f}(t) = f(-t)$$

هي دالة في الفضاء $PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

7) لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لتكن الدالتين u و v المعرفتان بالشكل التالي:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , u(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} \quad , v(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$$

لدينا الخصائص التالية:

- $f = u + v$
- u دالة زوجية و تسمى الجزء الزوجي للدالة f.
- v دالة فردية و تسمى الجزء الفردي للدالة f.
- $u \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ، $v \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

نظرية 1.5.1. كل دالة $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، هي حتما مستمرةإستمرارامنتظما.

إثبات النظرية ليكن $\varepsilon \succ 0$. نحن نعلم بأن كل دالة مستمرةعلى مجال مغلق و محدودة $[a,b]$ هي حتما مستمرةإستمرارامنتظما (Heine's Theorem) . و بالتالي، الدالة $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ستكون مستمرةإستمرارامنتظما على المجال $[-\pi, 3\pi]$ مثلا. يوجد إذا $\alpha \succ 0$ بحيث:

$$\forall (t,s) \in ([-\pi,3\pi])^2 \quad , |t-s| \le \alpha \Rightarrow |f(t)-f(s)| \le \varepsilon$$

لتكن:

$$\eta = \min\{\alpha, \pi\}$$

ليكن $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$|x-y| \le \eta$$

يوجد عدد حقيقي $t \in [0,2\pi]$ و عدد صحيح $k \in Z$ بحيث: $x = t + 2k\pi$

ليكن: $s = y - 2k\pi$

$$\Rightarrow |x-y| = |t-s| \le \eta$$

$$\Rightarrow s \in [-\pi,3\pi] \ \& \ |f(t)-f(s)| \le \varepsilon$$

بحكم أن: $f(x)=f(t)\ ,\ f(y)=f(s)$، فإن:

$$|f(x)-f(y)|\leq \varepsilon$$

و هو المطلوب.

نظرية 1.5.2. لتكن $f\in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لدينا الحقيقة التالية:

$$\forall a\in\mathbb{R}\quad ,\int_a^{a+2\pi} f(x)dx=\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

إثبات النظرية لدينا:

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)dx=\int_a^{0} f(x)dx+\int_0^{2\pi} f(x)dx+\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)dx$$

بالنسبة للتكامل الثالث، نختار المتغير الجديد: $t=x-2\pi$، يصبح لدينا:

$$\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)dx=\int_0^{a} f(t+2\pi)dt=\int_0^{a} f(t)dt$$

$$\Rightarrow \int_a^{a+2\pi} f(x)dx=\int_a^{0} f(x)dx+\int_0^{2\pi} f(x)dx+\int_0^{a} f(x)dx$$

$$=\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

و هو المطلوب.

1.6 الجداء السلمي في الفضاءات $D_{2\pi}, C_{2\pi}, PC_{2\pi}$

لكل دالتين $f\in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $g\in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، نعرف العدد المركب $\prec f/g\succ$ بالشكل التالي:

$$\prec f/g\succ=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

الدالة $\prec ./.\succ$ تحقق الخصائص التالية:

1) $\forall f\in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})\ ,\forall g\in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})\quad ,\prec f/g\succ=\overline{\prec g/f\succ}$

(2

$$\forall f_1 \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \ , \forall f_2 \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \ , \forall g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad , \forall \lambda \in C$$
$$\prec \lambda f_1 + f_2 / g \succ = \lambda \prec f_1 / g \succ + \prec f_2 / g \succ$$

نقول بأن الدالة $\prec ./. \succ$ خطية بالنسبة للمتغير الأول.

(3

$$\forall f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad , \prec f / f \succ \geq 0$$

نقول بأن الدالة $\prec ./. \succ$ موجبة.

(4

$$\forall f \in D_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad , \prec f / f \succ = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

الدالة $\prec ./. \succ$ تحقق شروط الجداء السلمي في الفضاءين $D_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، لكنها لا تحقق شروط الجداء السلمي في الفضاء $PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. نقول بأنها تمثل نصف جداء سلمي في الفضاء $PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

متراجحة كوشي - شفارتز

$$\forall f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \ , \forall g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad , |\prec f / g \succ|^2 \ \leq \prec f / f \succ . \prec g / g \succ$$

إثبات متراجحة كوشي - شفارتز ليكن: $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \ , \ g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لكل عدد مركب $\lambda \in \mathbb{C}$، لدينا:

$$(\prec \lambda f + g / \lambda f + g \succ) \geq 0$$
$$\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad , \prec f / f \succ |\lambda|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\prec f / g \succ \lambda) + \prec g / g \succ \geq 0$$

لنختر: $\lambda = \overline{\prec f / g \succ} t \quad , t \in \mathbb{R}$.
و بالتالي:

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad , \prec f / f \succ . |\prec f / g \succ|^2 t^2 + 2.(|\prec f / g \succ|^2) t + \prec g / g \succ \geq 0$$

إنها كثيرة حدود، في المتغير الحقيقي t، معاملاتها حقيقية، من الدرجة الثانية، و إشارتها دائما موجبة. هذا يعني حتما أن المميز عدد حقيقي سالب، يعني:

$$|\prec f / g \succ|^4 - \prec f / f \succ . \prec g / g \succ |\prec f / g \succ|^2 \leq 0$$
$$\Rightarrow |\prec f / g \succ|^2 - \prec f / f \succ \prec g / g \succ \leq 0$$

و هو المطلوب.

1.7 التعامد في الفضاءات $PC_{2\pi}, D_{2\pi}, C_{2\pi}$

لكل دالة $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، نعرف العدد الحقيقي $\|f\|_2$ بالشكل التالي:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\prec f/f \succ}$$

لدينا الخصائص التالية:

(1

$$\forall f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad , \ \|f\|_2 \geq 0$$

(2

$$\forall f \in D_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad , \ \|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

(3

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad , \forall f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad , \|\lambda f\|_2 = |\lambda| \, \|f\|_2$$

(4

$$\forall f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad , \forall g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad , \|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

تعريف التعامد لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ دالتين. نقول بأن الدالتين f و g متعامدتين و نكتب $f \perp g$ ، إذا كان:

$$\prec f/g \succ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx = 0$$

نظرية فيثاغورس لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لدينا الحقيقة التالية:

$$(f \perp g) \Rightarrow \|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$$

إثبات نظرية فيثاغورس لدينا:

$$\|f+g\|_2^2 = \prec f+g/f+g \succ = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2.\mathrm{Re}(\prec f/g \succ)$$

$$\Rightarrow (f \perp g) \Rightarrow \prec f/g \succ = 0 \Rightarrow \|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$$

و هو المطلوب.

أمثلة

1) لتكن الدوال التالية:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , e_n(x) = e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , \prec e_n / e_n \succ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-inx} dx = 1$$

$$\forall n \neq m \in \mathbb{Z} \quad , \prec e_n / e_m \succ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} [\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}]_0^{2\pi} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{Z} & , \|e_n\|_2 = 1 \\ \forall n \neq m \in \mathbb{Z} & , \prec e_n / e_m \succ = 0 \end{cases}$$

2) لتكن الدوال التالية:

$$\forall n \in W \quad , f_n(x) = \cos(nx) \quad , \forall n \in W \quad , g_n(x) = \sin(nx)$$

لدينا:

$$\forall n \in W \quad , f_n(x) = \cos(nx) = \frac{e_n + e_{-n}}{2} \quad , \forall n \in N \quad , g_n(x) = \sin(nx) = \frac{e_n - e_{-n}}{2i}$$

$$\Rightarrow \forall n \in N \quad , \forall m \in N - \{n\} \quad , \begin{cases} \prec f_n / f_n \succ = \|f_n\|_2^2 = \frac{\|e_n\|_2^2 + \|e_{-n}\|_2^2}{4} = \frac{1}{2} \\ \prec f_0 / f_0 \succ = 1 \quad , \prec f_0 / f_n \succ = \prec f_0 / g_n \succ = 0 \\ \prec g_n / g_n \succ = \|g_n\|_2^2 = \frac{\|e_n\|_2^2 + \|-e_{-n}\|_2^2}{4} = \frac{1}{2} \\ \prec f_n / g_n \succ = \frac{\|e_n\|_2^2 - \|e_{-n}\|_2^2}{-4i} = 0 \\ \prec f_n / f_m \succ = \prec g_n / g_m \succ = \prec f_n / g_m \succ = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \in N \quad ,\forall m \in N-\{n\} \quad ,\begin{cases} \|f_n\|_2 = \quad \|g_n\|_2 \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \|f_0\|_2 = 1 \quad ,f_0 \perp f_n \ , \ f_0 \perp g_n \\ f_n \perp g_n \ , \quad f_n \perp f_m \quad , \ g_n \perp g_m \ , f_n \perp g_m \end{cases}$$

1.8 النظيم $\|.\|_1$ و النظيم $\|.\|_\infty$

1) لقد ذكرنا سابقا بأنه لكل دالة $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، فإن $|f| \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، و أن الدالة $|f|$ قابلة للتكامل على المجال $[0,2\pi]$ بالضرورة. لكل دالة $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، نعرف العدد الحقيقي $\|f\|_1$ بالشكل التالي:

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

2) لقد ذكرنا سابقا بأن كل دالة $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، هي دالة محدودة بالضرورة. لكل دالة $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، نعرف العدد الحقيقي $\|f\|_\infty$ بالشكل التالي:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$$

بعض الخصائص العامة للنظمين $\|.\|_1$ و $\|.\|_\infty$

(1

$$\forall f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad ,\|f\|_1 \geq 0 \quad ,\|f\|_\infty \geq 0$$
$$\forall f \in D_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad ,\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$$
$$\forall f \in D_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad ,\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

(2

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad ,\forall f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad ,\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\,\|f\|_1 \quad ,\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_\infty$$

(3

$$\forall f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad ,\forall g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad ,\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$
$$\forall f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad ,\forall g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad ,\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

1.9 كثير الحدود المثلثي

1.9.1 تعريف كثير الحدود المثلثي

[8] كثير الحدود المثلثي هو دالة $P(x)$ يمكن صياغتها في الشكل التالي:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , P(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} C_n e^{inx}$$

حيث أن المعاملات $(C_n)_{-N \leq n \leq N}$ هي أعداد مركبة ثابتة. العدد الطبيعي N يسمى درجة كثير الحدود المثلثي $P(x)$.

كل كثير حدود مثلثي $P(x)$ هو دالة في الفضاء $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1.9.2 بعض خصائص كثيرات الحدود المثلثية

1) كل كثير حدود مثلثي $P(x)$ يمكن صياغته كذلك في الشكل التالي:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , P(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} C_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

و العكس صحيح ، لإن:

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx) \quad , e^{-inx} = \cos(nx) - i \sin(nx)$$

$$\Rightarrow \cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad , \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

2) لتكن:

$$P(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} C_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

كثير حدود مثلثي. لدينا:

$$C_{-n} e^{-inx} + C_n e^{inx} = (C_{-n} + C_n) \cos(nx) + i(C_n - C_{-n}) \sin(nx)$$

$$\Rightarrow a_0 = 2C_0 \quad , \forall n \geq 1 \quad , a_n = (C_{-n} + C_n) \quad , b_n = i(C_n - C_{-n})$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{a_0}{2} \quad , \forall n \geq 1 \quad , C_n = \frac{a_n - i b_n}{2} \quad , C_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2}$$

لقد حصلنا على العلاقة بين المعاملات C_n و المعاملات $a_n \, , b_n$ لكثير الحدود المثلثي $P(x)$ المعاملات C_n تسمى المعاملات الأسية لكثير الحدود المثلثي $P(x)$ المعاملات $a_n \, , b_n$ تسمى المعاملات المثلثية لكثير الحدود المثلثي $P(x)$.

3) لتكن:

$$P(x)=\sum_{n=-N}^{n=N} C_n e^{inx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n=N}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

كثير حدود مثلثي. لدينا:

$$\forall n\in\mathbb{Z} \quad ,\prec P/e^{inx}\succ = C_n \prec e^{inx}/e^{inx}\succ = C_n$$

$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{Z} \quad ,C_n =\prec P/e^{inx}\succ$$

$$\forall n\geq 0 \quad ,\prec P/\cos(nx)\succ = a_n \prec \cos(nx)/\cos(nx)\succ = \frac{a_n}{2} \Rightarrow a_n = 2\prec P/\cos(nx)\succ$$

$$\Rightarrow \forall n\geq 0 \quad ,a_n = 2\prec P/\cos(nx)\succ$$

$$\forall n\geq 1 \quad ,\prec P/\sin(nx)\succ = b_n \prec \sin(nx)/\sin(nx)\succ = \frac{b_n}{2} \Rightarrow b_n = 2\prec P/\sin(nx)\succ$$

$$\Rightarrow \forall n\geq 1 \quad ,b_n = 2\prec P/\sin(nx)\succ$$

4) لتكن:

$$P(x)=\sum_{n=-N}^{n=N} C_n e^{inx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n=N}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

كثير حدود مثلثي. لدينا:

$$\|P\|_2^2=\sum_{n=-N}^{n=N}\left\|C_n e^{inx}\right\|_2^2=\sum_{n=-N}^{n=N}|C_n|_2^2$$

لإننا أثبتنا سابقا أن المجموعة $\{e^{inx}\ ,n\in\mathbb{Z}\}$ متعامدة و واحدية. لدينا كذلك:

$$\|P\|_2^2 == \left\|\frac{a_0}{2}1\right\|_2^2+\sum_{n=1}^{n=N}(\|a_n\cos(nx)\|_2^2+\|b_n\sin(nx)\|_2^2)$$

$$\Rightarrow \|P\|_2^2=\frac{|a_0|^2}{4}+\sum_{n=1}^{n=N}\frac{|a_n|^2+|b_n|^2}{2}$$

لإننا أثبتنا سابقا أن المجموعة $\{1\ ,\cos(nx)\ ,\sin(nx)\ ,n\in N\}$ متعامدة و لدينا:

$$\|1\|_2^2=1 \quad ,\forall n\geq 1 \quad ,\|\cos(nx)\|_2^2=\frac{1}{2} \quad ,\|\sin(nx)\|_2^2=\frac{1}{2}$$

نظرية ويرشتراش المثلثية(Trigonometric weirstrass's theorem) [8, 18] ليكن $f\in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، لكل $\varepsilon\succ 0$ يوجد كثير حدود مثلثي P بحيث:

$$\|f-P\|_\infty\leq\varepsilon$$

نقول بأن مجموعة كثيرات الحدود المثلثية كثيفة في الفضاء $(C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\|.\|_\infty)$.

نظرية 1.9.1. [8] مجموعة كثيرات الحدود المثلثية كثيفة في الفضاء $(PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\|.\|_2)$. يعني، لكل $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، و لكل $0 \prec \varepsilon$، يوجد كثير حدود مثلثي P بحيث:

$$\|f - P\|_2 \leq \varepsilon$$

1.9.3 نواة ديريكله (Dirichlet kernel)

تعريف 1.9.1. ليكن كثير الحدود المثلثي التالي:

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikx}$$

هذه الدالة تسمى بنواة ديريكله رقم n.

بعض خصائص الدالة $D_n(x)$

1) الدالة $D_n(x)$ دالة زوجية.

2) لدينا:

$$D_n(0) = 2n+1 \ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \ , |D_n(x)| \leq \sum_{k=-n}^{k=n} |e^{ikx}| = 2n+1$$

$$\Rightarrow \|D_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |D_n(x)| = 2n+1$$

3) لدينا:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x)\,dx = 1$$

4) لكل دالة $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، لدينا:

$$\begin{aligned} S_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k)e^{ik0} = \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k) &= \sum_{k=-n}^{k=n} \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)e^{-iky}dy\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\left(\sum_{k=-n}^{k=n} e^{-iky}\right)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)D_n(y)\,dy \end{aligned}$$

بشكل عام لدينا:

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k)\, e^{ikx} &= \sum_{k=-n}^{k=n} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)\, e^{-iky}\, dy \right] e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-n}^{k=n} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)\, e^{ik(x-y)}\, dy \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) . \left(\sum_{k=-n}^{k=n} e^{ik(x-y)} \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)\, D_n(x-y)\, dy \\ &= (f \star D_n)(x) \end{aligned}$$

(5

$$\forall x \in]0, 2\pi[\,, \quad D_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikx} = \frac{sin\left(\left(n+\frac{1}{2}x\right)\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

وهذا لإنه مجموع متتالية هندسية، بالتالي:

$$\forall x \in]0, 2\pi[\,, \quad D_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{k=0}^{k=2n} e^{ikx} = e^{-inx} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

$$= e^{-inx} \frac{e^{i\frac{(2n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{-i\frac{(2n+1)x}{2}} - e^{i\frac{(2n+1)x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{-2i \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \forall x \in]0, 2\pi[\quad , \quad D_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikx} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

1.9.4 نواة فيجر (Fejer kernel)

تعريف 1.9.2. [11] ليكن كثير الحدود المثلثي التالي:

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}D_k(x)$$

هذه الدالة تسمى بنواة فيجر من الرتبة n.

بعض خصائص الدالة $F_n(x)$ [11]

1) الدالة $F_n(x)$ دالة زوجية.

2) لدينا:

$$F_n(0)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)=n \quad ,\ \forall x\in\mathbb{R}\ ,|F_n(x)|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|D_k(0)|=n$$

$$\Rightarrow \|F_n\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x)|=n$$

3) لدينا:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_n(x)\,dx=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}D_k(x)\,dx\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1)=1$$

4) لدينا:

$$\forall x\in\,]0,2\pi[\,,\qquad F_n(x)=\frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

لإن:

$$\forall x\in\,]0,2\pi[\,,\qquad F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}D_k(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n-1}Im\left(e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)x}\right)=\frac{1}{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)}Im\left(\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)x}\right)$$

$$=\frac{1}{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)}Im\left[\left(\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{1}{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)}Im\left[\frac{e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}}\left(\frac{e^{-i\frac{nx}{2}}-e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}\right)e^{i\frac{x}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{nx}{2}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

1.10 جداء اللف في الفضاء $PC_{2\pi}$ (Convolution)

لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، و $a \in$.

1) نعرف الدالة $\breve{f}$ بالشكل التالي:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ,\breve{f}(x) = f(-x)$$

من الواضح بأنه لكل دالة $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ فإن: $\breve{f} \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

2) نعرف الدالة f_a بالشكل التالي:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ,f_a(x) = f(x+a)$$

من الواضح كذلك بأنه لكل دالة $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $a \in \mathbb{R}$، فإن: $f_a \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

تعريف جداء اللف في الفضاء $PC_{2\pi}$

[18] لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. نعرف الدالة الجديدة $f*g$ بالشكل التالي:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ,f*g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)dy$$

الدالة الجديدة $f*g$ تسمى جداء لف الدالتين f و g.

بعض الخصائص العامة لجداء اللف

لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

1)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ,f*g(x+2\pi) = f*g(x)$$

2) لو إستعملنا المتغير الجديد $u = x-y$ بدلا من المتغير y في تعريف جداء لف، لحصلنا على:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ,f*g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x} f(u)g(x-u)du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)g(x-u)du = g*f(x)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad ,f*g(x) = g*f(x)$$

$$\Rightarrow f*g=g*f$$

نقول بأن جداء لف تبديلي.

3) لتكن $f\in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، $g\in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $h\in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لدينا:

$$\forall\alpha\in\mathbb{C}\quad ,(\alpha f+h)*g=\alpha.(f*g)+h*g$$

نقول بأن جداء لف خطي بالنسبة لكل من المتغيرين f و g.

4) إذا كانت إحدى الدالتين f أو g كثير حدود مثلثي، فإن الدالة $f*g$ ستكون كذلك كثير حدود مثلثي. [2]

نظرية 1.10.1. [2] لتكن $f\in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، $g\in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $h\in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لدينا:

$$(f*g)*h=f*(g*h)$$

نقول بأن جداء لف تجميعي.

إثبات النظرية

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad ,(f*g)*h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f*g(y)h(x-y)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z)g(y-z)dz)h(x-y)dy$$

نضع

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z)g(y-z)dz)h(x-y)dy$$

نبادل بين dy و dz فنجد

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z)(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(y-z)h(x-y)dy)dz$$

في التكامل الداخلي، لنستعمل المتغير $u=y-z$ بدلا من المتغير y

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z)(\frac{1}{2\pi}\int_{0-z}^{2\pi-z}g(u)h(x-z-u)du)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(u)h(x-z-u)du\right)dz$$

بمأن الدالة: $u \mapsto g(u)h(x-z-u)$ في الفضاء $PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ فإن

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)(g*h)(x-z)dz$$
$$= f*(g*h)(x)$$
$$\Rightarrow (f*g)*h = f*(g*h)$$

و هو المطلوب.

جداء اللف والإستمرار

نظرية 1.10.2. لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
لدينا: الدالة $f*g$ مستمرة إستمرارا منتظما.

إثبات النظرية ليكن $\varepsilon \succ 0$. يوجد عدد حقيقي $M \succ 0$ بحيث:

$$\|g\|_\infty \leq M$$

توجد دالة $h \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ بحيث:

$$\|f-h\|_1 \leq \|f-h\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{4M}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad , |f*g(x)-h*g(x)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(y)-h(y))g(x-y)dy\right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|(f(y)-h(y))g(x-y)|\,dy$$
$$\leq M\|f-h\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

من جهة أخرى، لدينا:

$$\forall\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad , |f*g(x_1)-f*g(x_2)|$$
$$= |f*g(x_1)-h*g(x_1)+h*g(x_1)-h*g(x_2)+h*g(x_2)-f*g(x_2)|$$
$$\leq |f*g(x_1)-h*g(x_1)|+|h*g(x_2)-f*g(x_2)|+|h*g(x_1)-h*g(x_2)|$$
$$\leq 2M\|f-h\|_1+|h*g(x_1)-h*g(x_2)|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2}+|h*g(x_1)-h*g(x_2)|$$

لكن، لدينا:

$$\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \quad ,|h*g(x_1)-h*g(x_2)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(h(x_1-y)-h(x_2-y))g(y)dy\right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h(x_1-y)-h(x_2-y)||g(y)|\,dy$$
$$\leq \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h(x_1-y)-h(x_2-y)|\,dy$$

بحكم أن الدالة h مستمرة إستمرارا منتظما، يوجد $\alpha \succ 0$، بحيث:

$$|x_1-x_2|\leq\alpha \Rightarrow |h(x_1-y)-h(x_2-y)|\leq\frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\Rightarrow \forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \quad ,|x_1-x_2|\leq\alpha \Rightarrow |h*g(x_1)-h*g(x_2)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow \forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \quad ,|x_1-x_2|\leq\alpha \Rightarrow |f*g(x_1)-f*g(x_2)|\leq\varepsilon$$

و هو المطلوب.

جداء اللف و الإشتقاق

نظرية 1.10.3. لتكن $f\in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $g\in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

1) إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند جميع نقاط $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة f' مستمرة(يعني الدالة f من الصنف C^1)، فإن الدالة $f*g$ ستكون من الصنف C^1 عند جميع نقاط $\mathbb{R}$، و لدينا:

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad ,(f*g)'(x)=(f'*g)(x)$$

2) إذا كانت الدالة f من الصنف C^k عند جميع نقاط $\mathbb{R}$، فإن الدالة $f*g$ ستكون من الصنف C^kعند جميع نقاط $\mathbb{R}$، و لدينا:

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad ,\forall i\in\{1,....,k\} \quad ,(f*g)^{(i)}(x)=(f^{(i)}*g)(x)$$

3) إذا كانت الدالة f من الصنف C^∞ عند جميع نقاط $\mathbb{R}$، فإن الدالة $f*g$ ستكون من الصنف C^∞عند جميع نقاط $\mathbb{R}$.

جداء اللف و التقريب

نظرية 1.10.4. [8] [18] لتكن (T_n) متتالية من الدوال في الفضاء $PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ تحقق الشروط التالية:

(1

$$\exists n_0 \in N/\forall n \geq n_0 \quad ,\forall x \in \mathbb{R} \quad ,T_n(x) \geq 0$$

(2

$$\exists n_0 \in N/\forall n \geq n_0 \quad ,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_n(x)dx = 1$$

(3

$$\forall \delta \in (0,\pi] \quad ,J_\delta(n) = \int_\delta^\pi [T_n(x)+T_n(-x)]dx \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$$

لدينا الحقيقة التالية:

$$\forall f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad ,\|f * T_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$$

ملاحظة 1.10.1. إذا كانت الدالة T_n موجبة، زوجية على المجال $]-\pi,\pi[$ و تناقصية على المجال $]0,\pi[$ و تحقق الشرط التالي:

$$\forall x \in]0,\pi[\quad ,T_n(x) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$$

فإنها ستحقق حتما الشرط الثالث (3 للنظرية السابقة لإن:

$$\forall \delta \in]0,\pi] \quad ,J_\delta(n) = 2\int_\delta^\pi T_n(x)dx \leq 2(\pi-\delta)T_n(\delta) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$$

إثبات النظرية [18] لتكن $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. ليكن $M \succ 0$ بحيث:

$$\|f\|_\infty \leq M$$

الدالة $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. و بالتالي، ستكون مستمرةإستمرارا منتظما. يوجد إذا $\alpha \succ 0$، بحيث:

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ,|x_1-x_2| \leq \alpha \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

لدينا:

$$f(t)-(f*T_n)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)T_n(u)du-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t-u)T_n(u)du$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-f(t-u))T_n(u)du$$

$$\Rightarrow |f(t)-(f*T_n)(t)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)-f(t-u)T_n(u)du\right|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-f(t-u)|\,|T_n(u)|\,du$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\alpha}|f(t)-f(t-u)|\,|T_n(u)|\,du+\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(t)-f(t-u)|\,|T_n(u)|\,du$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\pi}|f(t)-f(t-u)|\,|T_n(u)|\,du$$
$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\alpha}2M\,|T_n(u)|\,du+\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\varepsilon}{2}\,|T_n(u)|\,du+\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\pi}2M\,|T_n(u)|\,du$$
$$=\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}|T_n(u)|\,du+2M\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\pi}|T_n(u)+T_n(-u)|\,du$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{2\pi}J_\alpha(n)$$

لكننا إفترضنا بأن:

$$J_\alpha(n)\xrightarrow[n\mapsto+\infty]{}0$$

$$\Rightarrow\exists n_0\in N/\forall n\geq n_0\ ,\ 0\leq J_\alpha(n)\leq\frac{\varepsilon\pi}{2M}$$
$$\Rightarrow\forall n\geq n_0\ ,\ \frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{\pi}J_\alpha(n)\leq\varepsilon$$
$$\Rightarrow\forall n\geq n_0\ ,\ \forall t\in R\ ,\ |f(t)-f*T_n(t)|\leq\varepsilon$$
$$\Rightarrow\forall n\geq n_0\ ,\ \|f-f*T_n\|_\infty\leq\varepsilon$$
$$\Rightarrow\|f*T_n-f\|_\infty\xrightarrow[n\mapsto+\infty]{}0$$

الفصل 2

سلاسل فوريه للدوال $f \in PC_{2\pi}$

في هذا الفصل سندرس سلاسل فوريه للدوال الدورية المستمرة قطعيا، حيث نبدأ بتعريف السلاسل المثلثية عموما ثم نعرف معاملات فوريه، و نتطرق إلى بعض خصائصها العامة. نعرف بعد ذلك، سلسلة فوريه. ثم ندرس مسألة تقارب هذه السلسلة، و علاقتها بالدالة الأصلية. نتطرق في هذا الإطار على عدة نظريات (برسفال، ديريكله، و فيجر...).

2.1 السلاسل المثلثية

2.1.1 تعريف السلاسل المثلثية

[5] لتكن:

$$\sum_{n\geq 0} g_n$$

سلسلة من الدوال. نقول بأن هذه السلسلة مثلثية إذا كان لكل عدد كلي n، الدالة g_n يمكن صياغتها في الشكل التالي:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , g_n(x) = C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}$$

حيث أن C_n , C_{-n} أعداد مركبة ثابتة.

2.1.2 تقارب السلاسل المثلثية

نظرية تمهيدية لتكن الدالة التالية:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , g_n(x) = C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}$$

لدينا:

$$\|g_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |g_n(x)| = |C_n| + |C_{-n}|$$

إثبات النظرية التمهيدية لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , |g_n(x)| \leq |C_n| + |C_{-n}|$$

من جهة أخرى، لتكن:

$$C_n = \rho_n e^{i\theta_n} \quad , \quad C_{-n} = \rho_{-n} e^{i\theta_{-n}}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad , g_n(x) = C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx} = \rho_n e^{i(\theta_n + nx)} + \rho_{-n} e^{i(\theta_{-n} - nx)}$$

هل يوجد عدد حقيقي x بحيث يكون:

$$\theta_n + nx = \theta_{-n} - nx$$

$$\Leftrightarrow 2nx = \theta_n + \theta_{-n}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\theta_n + \theta_{-n}}{2n}$$

الجواب: نعم، و في هذه الحالة، لدينا:

$$|g_n(x)| = \left|C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}\right| = (\rho_n + \rho_{-n}) \left|e^{i(\theta_n + nx)}\right|$$

$$= \rho_n + \rho_{-n} = |C_n| + |C_{-n}|$$

$$\Rightarrow \|g_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,2\pi]} |g_n(x)| = |C_n| + |C_{-n}|$$

نظرية [9] لتكن:

$$\sum_{n \geq 0} (C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx})$$

سلسلة مثلثية. نقول بأن السلسلة $\sum_{n \geq 0} (C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx})$ تتقارب تقاربا طبيعيا، إذا كانت السلسلة التالية:

$$\sum_{n \geq 0} \left\|C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}\right\|_\infty$$

تقاربية.

لدينا الحقيقة التالية: السلسلة $\sum_{n \geq 0} (C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx})$ تتقارب تقاربا طبيعيا إذا و فقط إذا كانت السلسلة التالية:

$$\sum_{n \geq 0} (|C_n| + |C_{-n}|)$$

تقاربية.

ملاحظة 2.1.1. 1) [9] لتكن

$$\sum_{n \geq 0} \left(C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}\right) = \sum_{n \geq 0} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx))$$

سلسلة مثلثية. هذه السلسلة تتقارب تقاربا طبيعيا إذا و فقط إذا كانت السلسلة التالية:

$$\sum_{n\geq 0}(|a_n|+|b_n|)$$

تقاربية، لإن

$$a_n = C_n + C_{-n} \quad , \quad b_n = i\,(C_n - C_{-n})$$
$$\Rightarrow C_n = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad , \quad C_{-n} = \frac{a_n - ib_n}{2}$$
$$\Rightarrow |C_n| + |C_{-n}| \leqslant |a_n| + |b_n| \leqslant 2\,(|C_n| + |C_{-n}|)$$

2) لتكن

$$\sum_{n\geq 0} g_n$$

سلسلة من الدوال المعرفة من المجال $[a,b]$ الي مجموعة الاعداد المركبة.

- إذا كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0}\|g_n\|_\infty$ تقاربية فإن سلسلة الدوال $\sum_{n\geq 0} g_n$ تتقارب تقاربا منتظما ،لكن العكس غير صحيح.
- إذا كانت الدوال g_n متصلةعلى المجال $[a,b]$ و سلسلة الدوال $\sum_{n\geq 0} g_n$ تتقارب تقاربا منتظمإلى الدالة G، فإن هذه الدالة الأخيرة G ستكون حتما مستمرةعلى المجال $[a,b]$.

نظرية 2.1.1. [5] لتكن:

$$\sum_{n\geq 0} a_n cos(nx) \quad , \quad \sum_{n\geq 0} b_n sin(nx)$$

متسلسلتين دائريتين. لتكن $\alpha \in [0,\pi]$

1) إذا كانت (a_n) متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة،تناقصية، و تتقارب إلى الصفر، فإن السلسلة المثلثية $\sum_{n\geq 0} a_n cos(nx)$ تتقارب تقاربا منتظما، على المجال المغلق $[\alpha, 2\pi-\alpha]$.

2 إذا كانت (b_n) متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة،تناقصية، و تتقارب إلى الصفر، فإن السلسلة المثلثية $\sum_{n\geq 0} b_n cos(nx)$ تتقارب تقاربا منتظما، على المجال المغلق $[\alpha, 2\pi-\alpha]$.

2.2 معاملات فوريه

2.2.1 معاملات فوريه الأسية

لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $n \in \mathbb{Z}$ عدد صحيح. العدد المركب التالي:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

يسمى معامل فوريه الأسي رقم n للدالة f، و نرمز له بالرمز $\hat{f}(n)$ أو أحيانا بالرمز $C_n(f)$.

ملاحظة إذا كانت الدالة f دورية، والعدد $T \succ 0$ يمثل دورة لها. لنفرض بأن الدالة مستمرة قطعيا على المجال $[0,T]$. في هذه الحالة، معامل فوريه الأسي رقم n للدالة f، هو معامل فوريه الأسي رقم n للدالة: $\tilde{f}(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$ ، و هو العدد المركب التالي:

$$C_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}dx$$

بعض الخصائص العامة لمعاملات فوريه الأسية

[8] لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

1) لكل عدد حقيقي $a \in \mathbb{R}$، لدينا:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

لإن الدالة $f(x)e^{-inx} \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

$$\Rightarrow \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

2) لدينا:

$$\overset{\wedge}{\overline{f}}(n) = C_n(\overline{f}) = \overline{\hat{f}(-n)}$$

لإن:

$$\overset{\wedge}{\overline{f}}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(x)}e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(x)e^{inx}}dx = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)e^{inx}dx}$$
$$= \overline{\hat{f}(-n)}$$

3) لكل $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ، لنعرف الدالة $\breve{f}$ بالشكل التالي:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ,\breve{f}(x) = f(-x)$$

لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad ,\overset{\wedge}{\breve{f}}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x).e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{inu}du = \hat{f}(-n)$$

لقد إستعملنا المتغير الجديد: $u = -x$.

4) لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $a \in \mathbb{R}$. لنعرف الدالة f_a بالشكل التالي:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , f_a(x) = f(x+a)$$

لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , \hat{f_a}(n) = e^{ina}\hat{f}(n)$$

لإن:

$$\hat{f}_a(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+a)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(u)e^{-in(u-a)}dx$$

$$= e^{ina}\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(u)e^{-inu}dx = e^{ina}\hat{f}(n)$$

لقد إستعملنا المتغير الجديد: $u = x + a$.

5) ليكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، $g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $\lambda \in \mathbb{C}$. لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , C_n(\lambda f + g) = \lambda C_n(f) + C_n(g)$$

6) لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , \left|\hat{f}(n)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x)e^{-inx}\right| dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx = \|f\|_1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} \quad , \left|\hat{f}(n)\right| \leq \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$$

نظرية 2.2.1. لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لنفترض بأن الدالة f مستمرةو من الصنف C^1 قطعيا. لتكن $Df \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ شبة مشتقة للدالة f. لدينا الحقيقة التالية:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , \widehat{Df}(n) = (in)\hat{f}(n)$$

إثبات النظرية لدينا:

$$\widehat{Df}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Df(x)e^{-inx}dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} Df(x)e^{-inx}dx$$

نستعمل قانون التكامل بالتجزئة

$$\begin{aligned}\hat{Df}(n) &= -(-in)\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)e^{-inx}dx + \sum_{i=0}^{n-1}[f(x)e^{-inx}]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &= (in)\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)e^{-inx}dx + \sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+1}^-)e^{-inx_{i+1}} - f(x_i^+)e^{-inx_i}] \\ &= (in)\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)e^{-inx}dx + \sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+1})e^{-inx_{i+1}} - f(x_i)e^{-inx_i}]\end{aligned}$$

لكن:

$$f(x_{i+1}^-) = f(x_{i+1}) \ , f(x_i^+) = f(x_i)$$

لإن الدالة $f(x)$ مستمرةعلى المجال $[0,2\pi]$. و بالتالي:

$$\begin{aligned}\hat{Df}(n) &= (in)\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)e^{-inx}dx + [f(x)e^{-inx}]_0^{2\pi} \\ &= (in)\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx + 0 \\ &= (in)\hat{f}(n)\end{aligned}$$

نظرية 2.2.2. لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لدينا:

1)

$$\hat{f}(n) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0 \quad , \quad \hat{f}(-n) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$$

2) إذا كانت f من الصنف C^k قطعيا، لدينا:

$$n^k\hat{f}(n) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0 \quad , \quad n^k\hat{f}(-n) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$$

إثبات النظرية ليكن $\varepsilon \succ 0$.

1) لقد أثبتنا سابقا بأنه يوجد كثير حدود مثلثي P بحيث:

$$\|f - P\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

لدينا:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x)-P(x))e^{-inx}dx + \hat{P}(n)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x)-P(x))e^{-inx}dx + \frac{\hat{P'}(n)}{in}$$

$$\Rightarrow \left|\hat{f}(n)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|(f(x)-P(x))e^{-inx}\right|dx + \left|\frac{\hat{P'}(n)}{in}\right| \le \|f-P\|_1 + \frac{\|P'\|_1}{|n|}$$
$$\le \|f-P\|_2 + \frac{\|P'\|_1}{|n|}$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|P'\|_1}{|n|}$$

لكننا نعلم جيدا بأن:

$$\frac{\|P'\|_1}{|n|} \xrightarrow[|n|\mapsto+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in N/\forall |n| \ge n_0 \ , \frac{\|P'\|_1}{|n|} \le \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow \exists n_0 \in N/\forall |n| \ge n_0 \ , \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|P'\|_1}{|n|} \le \varepsilon$$
$$\Rightarrow \exists n_0 \in N/\forall |n| \ge n_0 \ , \left|\hat{f}(n)\right| \le \varepsilon$$

$$\Rightarrow \hat{f}(n) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0 \quad , \quad \hat{f}(-n) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$$

و هو المطلوب.

2) ليكن $D^{(k)}f$ شبة مشتقة من الرتبة k للدالة f. لدينا:

$$D^{(k)}f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$$

$$C_n(D^{(k)}f) = (\hat{D^{(k)}f})(n) = (in)^k\hat{f}(n)$$
$$\Rightarrow C_n(D^{(k)}f) = (\hat{D^{(k)}f})(n) = (in)^k\hat{f}(n)$$
$$\Rightarrow \left|C_n(D^{(k)}f)\right| = \left|(\hat{D^{(k)}f})(n)\right| = \left|n^k\hat{f}(n)\right| \xrightarrow[|n|\mapsto+\infty]{} 0$$
$$\Rightarrow n^k\hat{f}(n) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0 \quad , \quad n^k\hat{f}(-n) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$$

نظرية 2.2.3. ليكن: $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , C_n(f*g) = C_n(f)\times C_n(g)$$

إثبات النظرية لدينا:

$$C_n(f*g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f*g)(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x-y)g(y)dy]e^{-inx}dx$$

نبادل dx و dy، نحصل على:

$$C_n(f*g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x-y)e^{-inx}dx]g(y)dy$$

في التكامل الداخلي، نستعمل المتغير الجديد: $u = x - y$ بدلا من المتغير القديم x، نحصل على:

$$C_n(f*g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\frac{1}{2\pi}\int_{0-y}^{2\pi-y}f(u)e^{-in(u+y)}du]g(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(u)e^{-in(u+y)}du]g(y)dy$$

لإن الدالة: $u \mapsto f(u)e^{-in(u+y)}$ تنتمي إلى الفضاء $PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} C_n(f*g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(u)e^{-inu}du]g(y)e^{-iny}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[C_n(f)]g(y)e^{-iny}dy = [C_n(f)]\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(y)e^{-iny}dy \\ &= C_n(f)\times C_n(g) \end{aligned}$$

2.2.2 معاملات فوريه المثلثية

لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $n \in N$ عدد طبيعي. الأعداد المركبة التالية:

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx \quad , a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)dx \quad , b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin(nx)dx$$

تسمى بـ: معاملات فوريه المثلثية للدالة f.

ملاحظة إذا كانت الدالة f دورية، والعدد $T \succ 0$ يمثل دورة لها. لنفرض بأن الدالة مستمرة قطعيا على المجال $[0,T]$. في هذه الحالة، معاملات فوريه المثلثية للدالة f، هي معاملات فوريه المثلثية للدالة: $\tilde{f}(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$ ، و هي الأعداد المركبة التالية:

$$a_0(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T}f(x)dx \quad , a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T}f(x)\cos(n\frac{2\pi}{T}x)dx \quad , b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T}f(x)\sin(n\frac{2\pi}{T}x)dx$$

بعض الخصائص العامة لمعاملات فوريه المثلثية

[9] لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

1) لكل عدد حقيقي $a \in \mathbb{R}$، لدينا:

$$a_0(f)=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)dx \quad ,a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad ,b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

$$\Rightarrow a_0(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad ,a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad ,b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

2) إذا كانت $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ دالة حقيقية، فإن معاملات فوريه المثلثية للدالة f تكون جميعها أعدادا حقيقية.

3) لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

- إذا كانت الدالة f زوجية، فإن الدالة $f(x)\sin(nx)$ ستكون فردية، و بالتالي:

$$\forall n \geq 1 \quad ,b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx=0$$

أما الدالة $f(x)\cos(nx)$ فستكون زوجية، و بالتالي:

$$\forall n \geq 0 \quad ,a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

- إذا كانت الدالة f فردية، فإن الدالة $f(x)\cos(nx)$ ستكون فردية، و بالتالي:

$$\forall n \geq 0 \quad ,a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx=0$$

أما الدالة $f(x)\sin(nx)$ فستكون زوجية، و بالتالي:

$$\forall n \geq 1 \quad ,b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

4) لدينا:

$$\cos(nx)=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} \quad ,\sin(nx)=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$$

$$\Rightarrow a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = 2C_0(f)$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = C_n(f) + C_{-n}(f)$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{C_{-n}(f) - C_n(f)}{i} = i(C_n(f) - C_{-n}(f))$$

5) لدينا:

$$a_n(f) = C_n(f) + C_{-n}(f) \Rightarrow a_n(f) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$$
$$b_n(f) = i(C_n(f) - C_{-n}(f)) \Rightarrow b_n(f) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$$

2.3 مجموع فوريه-سلسلة فوريه

لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

1 كثير الحدود المثلثي التالي

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} \hat{f}(n)e^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)sin(nx))$$

يسمى بمجموع فوريه من الرتبة N للدالة f.

2) سلسلة الدوال التالية

$$\hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1}\left(\hat{f}(n)e^{inx} + \hat{f}(-n)e^{-inx}\right) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)sin(nx))$$

تسمى بسلسلة فوريه للدالة f.

2.4 تقارب سلسلة فوريه

نظرية 2.4.1. لتكن

$$C_0 + \sum_{n\geq 1}\left(C_n e^{inx} + C_{-n}e^{-inx}\right)$$

سلسلة مثلثية.
إذا كانت هذه السلسلة المثلثية تتقارب تقاربا منتظما إلى الدالة f، فإن:

1) $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

2) لدينا:

$$\forall n \in N \quad ,\hat{f}(n) = C_n, \forall n \in N \quad ,\hat{f}(-n) = C_{-n}$$

إثبات النظرية

1- بحكم أنه لكل عدد طبيعي N ، كثيرة الحدود المثلثية:

$$P_N(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{n=N} \left(C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}\right)$$

مستمرةو دورية، و العدد 2π يمثل دورة لها، وتتقارب تقاربا منتظما إلى الدالة f فإن الدالة، f ستكون بدورها مستمرةو دورية، والعدد 2π يمثل دورة لها يعني، $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

2- لكل عدد صحيح n ، لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ,|P_N(x)e^{-inx} - f(x)e^{-inx}| = |P_N(x) - f(x)|$$

وبالتالي، متتالية الدوال $\left(P_n(x)e^{-inx}\right)_N$ تتقارب تقاربا منتظما للدالة $\left(f(x)e^{-inx}\right)$. ومن ثم، لدينا:

$$\int_0^{2\pi} P_N(x)e^{-inx}dx \xrightarrow[N\mapsto+\infty]{} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_N(x)e^{-inx}dx \xrightarrow[N\mapsto+\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = \hat{f}(n)$$

لكن لكل عدد طبيعي N يحقق الشرط

$$|n| \leq N$$

لدينا:

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_N(x)e^{-inx}dx = C_n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} \quad ,\hat{f}(n) = C_n$$

2.4.1 تقارب سلسلة فورييه في الفضاء$(PC_{2\pi}, \|\,.\,\|_2)$

متراجحة بيسال (Bessel's Inequality)

نظرية التمهيدية لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. ليكن P_N :الفضاء الإتجاهي الجزئي المولد بالمجموعة التالية

$$\{e_k = e^{ikx}/k \in \{-N,\ldots,N\}\}$$

يعني، P_N هو مجموعة كثيرات الحدود المثلثية التي درجتها تكون أصغر أو تساوي العدد الطبيعي N لدينا:

1) $S_N(f)$ هي كثير الحدود المثلثيالوحيدة في P_N التي تحقق الشرط التالي:

$$\forall P \in P_N \quad ,[f - S_N(f)] \perp P$$

2) لكل عدد طبيعي N، لدينا:

$$\sum_{n=-N}^{n=N} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2$$

إثبات النظرية التمهيدية

1) لدينا:

$$\begin{aligned} &\forall\, n \in \{-N, ..., N\} \quad ,\langle [f - S_N(f)/e_n] \rangle = 0 \\ \Rightarrow &\forall\, P \in P_N \quad ,\langle [f - S_N(f)/P] \rangle = 0 \\ \Rightarrow &\forall\, P \in P_N \quad ,[f - S_N(f)] \perp P = 0 \end{aligned}$$

لنفرض بأن Q كثير حدود مثلثي في P_N، وتحقق الشرط التالي:

$$\begin{aligned} &\forall P \in P_N \quad ,[f - Q] \perp P \\ \Rightarrow &\forall P \in P_N \quad ,\langle [Q - S_N(f) = (f - S_N(f)) - (f - Q)]/P \rangle = 0 \\ \Rightarrow &\langle [Q - S_N(f)]/[Q - S_N(f)] \rangle = 0 \end{aligned}$$

بحكم أن $[Q - S_N(f)] \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$، فإن:

$$[Q - S_N(f)] = 0 \Rightarrow Q = S_N(f)$$

2) لكل عدد طبيعي N، لدينا:

$$[f - S_N(f)] \perp S_N(f)$$

حسب نظرية فيثاغورس، لدينا:

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \|f - S_N(f)\|_2^2 + \|S_N(f)\|_2^2 \\ \|S_N(f)\|_2^2 &= \sum_{n=-N}^{n=N} \|\hat{f}(n)\|^2 \leq \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

نظرية 2.4.2. المتتالية التالية:

$$\left(\sum_{n=-N}^{n=N} |\hat{f}(n)|^2\right)_N$$

متتالية تزايدية ومحدودة، وبالتالي ستكون حتما تقاربية. لنرمز للعدد الذي تتقارب إليه بالرمز التالي

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{n=N} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

لدينا الحقيقة التالية:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2$$

هذه المتراجحة تسمى بمتراجحة بيسال $(Bessel's\ Ineguality)$

نظرية برسفال (Parseval's theorem)

لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لدينا

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2$$

إثبات نظرية برسفال حسب متراجحة بيسال، لدينا:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2$$

من جهة أخرى، مجموعة كثيرات الحدود المثلثية كثيفة في الفضاء $(PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|.\|_2)$ يعني لكل $\varepsilon > 0$ يوجد كثير حدود مثلثي، P بحيث:

$$\|f - P\|_2 \leq \sqrt{\varepsilon}$$

لتكن N درجة كثير الحدود المثلثي P. لدينا:

$$\forall Q \in P_N \quad , \langle [f - S_N(f)]/Q \rangle = 0$$

$$P - S_N(f) \in P_N \Rightarrow [f - S_N(f)] \perp [P - S_N(f)]$$

$$\Rightarrow \|f - P\|_2^2 = \|f - S_N(f)\|_2^2 + \|S_N(f) - P\|_2^2 \leq \varepsilon$$
$$\Rightarrow \|f - S_N(f)\|_2^2 \leq \|f - P\|_2^2 \leq \varepsilon$$
$$\Rightarrow \|f\|_2^2 = \|S_N(f)\|_2^2 + \|f - S_N(f)\|_2^2 \leq \|S_N(f)\|_2^2 + \varepsilon$$
$$\Rightarrow \|f\|_2^2 \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}|^2 + \varepsilon$$

لقد أثبتنا بأنه لكل عدد حقيقي، $\varepsilon > 0$ لدينا:

$$\|f\|_2^2 \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 + \varepsilon$$

$$\|f\|_2^2 \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

و بالتالي:

$$\|f\|_2^2 \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

ملاحظة 2.4.1. 1) لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ نظرية برسفال بالنسبة للمعاملات المثلثية كتالي:

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2} \right) = \|f\|_2^2$$

حيث a_n و b_n المعاملات المثلثية للدالة f.

2) لقد ذكرنا سابقا أنه إذا كانت الدالة f دورية، والعدد $T > 0$ يمثل دورة لها،وإذا كانت هذه الدالة مستمرة قطعيا على المجال $[0,T]$. في هذه الحالة، معامل فوريه الأسي رقم n للدالة f، هو معامل فوريه الأسي رقم n للدالة: $\tilde{f}(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$، و هو العدد المركب التالي:

$$C_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx$$

بالتالي،نظرية برسفال تصبح في الشكل التالي:

$$\|\tilde{f}\|_2^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} |C_n(f)|^2$$

نظرية 2.4.3. لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لدينا:

$$\|f - S_N(f)\|_2 \xrightarrow[N \mapsto +\infty]{} 0$$

نكتب كذلك:

$$S_N(f) \xrightarrow[N \mapsto +\infty]{(PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\|.\|_2)} f$$

إثبات النظرية معاملات فوريه للدالة $f - S_N(f)$ هي:

$$\begin{cases} C_n(f - S_N(f)) = 0 & \forall |n| \leq N \\ C_n(f - S_N(f)) = \hat{f}(n) & \forall |n| \leq N+1 \end{cases}$$

حسب نظرية برسفال، لدينا:

$$\|f - S_N(f)\|_2^2 = \sum_{|n|=N+1}^{|n|=+\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\hat{f}(n)|^2 - \sum_{n=-N}^{n=+N} |\hat{f}(n)|^2 \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$$

نظرية 2.4.4. 1) لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , \hat{f}(n) = 0 \Leftrightarrow \exists A = \{x_0, x_1, ..., x_s\} \subseteq [0, 2\pi] / \forall x \in [0, 2\pi] - A, f(x) = 0$$

2) إذا كانت $f \in D_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , \hat{f}(n) = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

3) إذا كانت $f \in D_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $g \in D_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , \hat{f}(n) = \hat{g}(n) \Leftrightarrow f = g$$

2.4.2 التقارب البسيط لسلسلة فوريه

نظرية ديريكله (Dirichlet)

لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $x_0 \in \mathbb{R}$:ليكن

$$l_0 = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

إذا كانت النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2l_0}{x}$$

موجودة وتكون عددا مركبا، فإن :

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x_0) = l_0$$

إثبات نظرية ديريكله

الخطوة1:

لتكن الدالة g، المعرفة بالشكل التالي:

$$g(x) = f(x + x_0)$$

لدينا:

$$g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \forall n \in \mathbb{Z}, \hat{g}(n) = e^{inx_0}\hat{f}(n)$$

$$\Rightarrow S_N(g)(0) = \sum_{n=-N}^{n=+N} \hat{g}(n) = S_N(f)(x_0)$$

الخطوة2: لتكن الدالة u، المعرفة بالشكل التالي:

$$u(x) = \frac{g(x) + g(-x)}{2}$$

من الواضح بأن الدالة u زوجية، ولدينا:

$$u \in PC_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \hat{u}(n) = \frac{\hat{g}(n) + \hat{g}(-n)}{2}$$

$$\Rightarrow S_N(u)(0) = \sum_{n=-N}^{n=+N} \hat{g}(n) = S_N(g)(0)$$

لدينا كذلك:

$$\lim_{x \to 0^+} u(x) \frac{f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)}{2} = l_0 \qquad , \lim_{x \to 0^-} u(x) \frac{f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)}{2} = l_0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} u(x) = \lim_{x \to 0^-} u(x) = l_0$$

الخطوة3: لتكن الدالة h، المعرفة بالشكل التالي:

$$\forall x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z} \quad , \quad h(x) = \frac{u(x) - l_0}{e^{ix} - 1}$$

هذه الدالة دورية والعدد 2π يمثل دورة لها. لكن السؤال، هل يمكن تمديد الدالة h علي المجموعة $\mathbb{R}$ ،لنحصل على دالة جديدة $\widetilde{h} \in PC_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ، بحيث $h = \widetilde{h}_{\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}}$؟؟ هذا الأمر ممكن إذا وفقط إذا كانت النهايات التالية:

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{u(x) - l_0}{e^{ix} - 1} \quad , \quad \lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{u(x) - l_0}{e^{ix} - 1}$$

تكون موجودة، وتكون أعدادا مركبة. لكننا نلاحظ بأن:

$$\forall x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z} \qquad h(x) = \frac{u(x) - l_0}{e^{ix} - 1} = \frac{u(x) - l_0}{x} \frac{x}{e^{ix} - 1}$$

وأن

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{e^{ix} - 1} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{e^{ix} - 1} = -i$$

و بالتالي، فإن هذا الأمر ممكن إذا وفقط إذا كانت النهايات التالية:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{u(x) - l_0}{x} \quad , \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{u(x) - l_0}{x}$$

موجودة، وتكون أعدادا مركبة. لكن بحكم أن الدالة u زوجية، فإن:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{u(x)-l_0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{u(-x)-l_0}{-x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{u(x)-l_0}{x}$$

وبالتالي، فإن الأمر السابق ممكن إذا وفقط إذا كانت النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{u(x)-l_0}{x}$$

موجودة وتكون عددا مركبا. لكن هذه النهاية تساوي

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{u(x)-l_0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)+g(-x)-2l_0}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x+x_0)+f(-x+x_0)-2l_0}{2x}$$

و بالتالي، فهي موجودة، وهي عددا مركبا، وذالك حسب افتراضنا في نص النظرية. وبالتالي، لدينا:

$$\forall x\in\mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z}\ ,\quad \widetilde{h}(x)=\frac{u(x)-l_0}{e^{ix}-1}$$
$$\Rightarrow x\in\mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z}\ ,\quad u(x)-l_0=\widetilde{h}(x)\left(e^{ix}-1\right)$$
$$\Rightarrow x\in\mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z}\ ,\quad u(x)=l_0+\widetilde{h}(x)\left(e^{ix}-1\right)$$
$$\Rightarrow \hat{u}(0)=l_0+C_{-1}\left(\widetilde{h}\right)-C_0\left(\widetilde{h}\right)\ ,\quad \forall x\in\mathbb{Z}-\{0\}\ ,\hat{u}(n)=C_{n-1}\left(\widetilde{h}\right)-C_n\left(\widetilde{h}\right)$$
$$\Rightarrow S_N(u)(0)=\sum_{n=-N}^{n=+N}\widetilde{u}(n)=l_0+C_{-N-1}\left(\widetilde{h}\right)-C_N\left(\widetilde{h}\right)$$

لكننا أثبتنا سابقا بأن:

$$C_N\left(\widetilde{h}\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0\ ,\quad C_{-N-1}\left(\widetilde{h}\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

و بالتالي:

$$S_N(u)(0)=l_0+C_{-N-1}\left(\widetilde{h}\right)-C_N\left(\widetilde{h}\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}l_0$$

ملاحظة 2.4.2. 1) في ظل شروط نظرية ديريكله، نكتب:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}C_n(f)\,e^{inx}=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

2) إذا أردنا إستعمال المعاملات المثلثية $a_n(f)\ ,b_n(f)$ للدالة f. نحصل على:

$$\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)sin(nx)\right)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

3) إذا كانت الدالة f دورية، العدد $T > 0$ يمثل دورة لها . و إذا كانت الدالة مستمرة قطعيا على المجال $[0, T]$. في هذه الحالة في ظل شروط نظرية ديريكله، نكتب:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(f)\, e^{inx} = \frac{\widetilde{f}(x^+) + \widetilde{f}(x^-)}{2} = \frac{f\left(\frac{T}{2\pi}x^+\right) + f\left(\frac{T}{2\pi}x^-\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(f)\, e^{in\frac{2\pi}{T}x} = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

حيث:

$$\widetilde{f}(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$$

4) لقد كتب جوزييف فوريه في كتابه "النظرية التحليلية للحرارة" الذي صدر سنة 1822م مايلي "... كل دالة يمكن تفكيكها الى سلاسل مثلثية وأنه من السهل إثبات أن هذه السلاسل تتقارب..."، لكنه لم يثبت هذا الإدعاء .
أثبت هذه النظرية عالم الرياضيات الألماني، ديريكله، سنة 1830م، مباشرة بعد وفاة جوزييف فوريه.

نظرية 2.4.5. [15] لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ و $x_0 \in \mathbb{R}$.
إذا كانت النهايتين التاليتين:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x_0 + x) - f\left(x_0^+\right)}{x} \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x_0 + x) - f\left(x_0^-\right)}{x}$$

موجودتين، وكانتا عددين مركبين، فإن:

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)}{2}$$

إثبات النظرية ليكن:

$$l_0 = \frac{f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)}{2}$$

لو جمعنا النهايتين السابقتين، لحصلنا على:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - f\left(x_0^+\right) - f\left(x_0^-\right)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2l_0}{x}$$

موجودة، وتكون عددا مركبا. وبالتالي، حسب النظرية السابقة، فإن:

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x_0) = l_0 = \frac{f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)}{2}$$

نتيجة [16] لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

1) إذا كانت f الدالة قابلة للإشتقاق قطعيا، فإن:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

2) إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق قطعيا، وتحقق شرط ديريكله، يعني $f \in D_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، فإن

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = f(x)$$

3) إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق قطعيا، ومستمرةيعني، $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، فإن

$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = f(x)$$

ملاحظة 2.4.3. في نص نظرية ديريكله، الشرط

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)-2l_0}{x}$$

ضروري لصحة النظرية، إذا نجح عالم الرياضيات الألماني دوبوا ريمون *Du Bois- Reymond* سنة 1876 م في إيجاد دالة متصلة $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ، لكن سلسلة فوريه لهذه الدالة لا تتقارب عند النقطة 0.

2.4.3 التقارب الطبيعي لسلسلة فوريه

نظرية 2.4.6. [9] لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لنفرض بأن الدالة f متصلةومن الصنف C^1 المتقطعة.لدينا سلسلة فوريه للدالة f تتقارب تقاربا طبيعيا للدالة f.

إثبات النظرية لتكن $Df \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. شبه مشتقة للدالة f . لدينا الحقيقة التالية:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , \quad \widehat{Df}(n) = (in)\hat{f}(n)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}-\{0\} \quad , \quad \hat{f}(n) = \frac{\widehat{Df}(n)}{in}$$

لكن، لدينا الحقيقة البسيطة التالية:

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy - \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(2xy - x^2 + y^2)$$
$$= -\frac{1}{2}(x-y)^2 \leq 0$$
$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

وبالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{Z}-\{0\}, \quad |\hat{f}(n)| = |\frac{\widehat{Df}(n)}{in}| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |\widehat{Df}(n)|^2\right)$$

لكن السلسلة: $\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{n^2}$ تقاربية، لإنها سلسلة ريمان.
كذلك، المتسلسة $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{Df}(n)|^2$ تقاربية ، وذلك حسب متراجحة بيسال.
وبالتالي، فإن السلسلة $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$ تقاربية. هذا يعني أن السلسلة المثلثية $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$ تتقارب، تقاربا طبيعيا،ومن ثم فهي تتقارب تقاربا منتظما بالضرورة. لتكن الدالة $g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ التي تتقارب إليها هذه السلسلة المثلثية الأخيرة تقاربا منتظما. بحكم أن التقارب المنتظم يؤدي الى التقارب البسيط، فإن:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=-N}^{n=N} \hat{f}(n)e^{inx} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$$

من جهة أخرى، حسب نظرية ديريكله للتقارب البسيط، فإن:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=-N}^{n=N} \hat{f}(n)e^{inx} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$
$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$$
$$\Rightarrow f = g$$

2.4.4 التقارب المنتظم لسلسلة فوريه

إذا كانت سلسلة فوريه للدالة $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ تتقارب تقاربا منتظما للدالة f عند نقطة x_0 فحتما، ستكون الدالة f مستمرةعند هذه النقطة x_0، لإن الدوال $(S_N(f))_N$ هي دوال مستمرةعند جميع نقاط $\mathbb{R}$، وعلى وجه الخصوص، عند النقطة x_0. لكن هل العكس صحيح؟ يعني، إذا كانت $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ،وكانت x_0 ضمن نقاط استمرارالدالة f ،فهل يوجد مجال مغلق $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ بحيث سلسلة فوريه للدالة f تتقارب تقاربا منتظما للدالة f على هذه المجال؟ لنبدأ بالمثال التالي:

مثال لتكن الدالة $h \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، الفردية، المعرفة بالشكل التالي:

$$\forall x \in]0,\pi], \quad h(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

إنها دالة من الصنف C^1، مستمرةعند جميع النقاط $\mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z}$.

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \; h(2k\pi) = h(0) = 0$$
$$\forall x \in \mathbb{Z}, \; h\left[(2k\pi)^+\right] = h\left(0^+\right) = \frac{\pi}{2}, \quad h\left[(2k\pi)^-\right] = h\left(0^-\right) = -\frac{\pi}{2}$$

معاملات فورييه المثلثية a_n, b_n **للدالة** $h \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ **.بحكم أن الدالة** h **فردية، فإن:**

$$\forall n \in N, \quad a_n = 0$$

$$\forall n \in N \ , \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(x)sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)sin(nx)\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{(\pi-x)cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)\frac{\cos(nx)}{n}dx$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{\pi n^2}[sin(nx)]_0^{\pi} = \frac{1}{n}$$

الخلاصة

$$\forall n \in N \ , \quad a_n = 0 \ , \quad \forall n \in N \ , \quad b_n = \frac{1}{n}$$

سلسلة فورييه للدالة $h \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ **. هي السلسلة التالية:**

$$\sum_{n\geq 1}\frac{sin(nx)}{n}$$

لقد أثبتنا سابقا، بأن هذه السلسلة المثلثية تتقارب تقاربا منتظما على كل مجال مغلق $[\alpha + 2k\pi, 2(k+1)\pi - \alpha]$، حيث أن $\alpha \in [0,\pi]$، من جهة أخرى، حسب نظرية ديريكله، لدينا:

$$\forall x \in [\alpha + 2k\pi, 2(k+1)\pi - \alpha] \ , \quad S_n(h)(x) = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{sin(kx)}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{h(x^+)+h(x^-)}{2} = h(x)$$

و بالتالي، سلسلة فورييه للدالة h تتقارب تقاربا منتظما للدالة h على كل مجال مغلق $[\alpha + 2k\pi, 2(k+1)\pi - \alpha]$، حيث أن $\alpha \in [0,\pi]$.
هذا المثال سيساعدنا على إثبات النظرية التالية:

نظرية 2.4.7. [9] لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لنفرض بأن الدالة f من الصنف C^1 قطعيا . سلسلة فورييه للدالة f تتقارب تقاربا منتظما للدالة f على كل مجال مغلق و محدودة لا تحتوي نقاط عدم إستمرار للدالة f.

إثبات النظرية توجد مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية:

$$0 = x_0 < x_1 < .... < x_n = 2\pi$$

بحيث لكل $i \in \{0,1,...,n-1\}$، يمكننا تمديد الدالة $f_{/(x_i,x_{i+1})}$ إلى دالة من الصنف C^1على مجال المغلق $[x_i, x_{i+1}]$.

يعني ، لكل $i \in \{0,1,....,n-1\}$ ، توجد دالة g_i من الصنف C^1 على المجال المغلق $[x_i, x_{i+1}]$ ، بحيث:

$$g_{i/(x_i,x_{i+1})} = f_{/(x_i,x_{i+1})}$$

لنفرض بأن الدالة f تحقق شرط ديريكله عند النقاط $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$، يعني:

$$\forall x_i \in \{x_0, x_1, ..., x_n\}, \quad f(x_i) = \frac{f(x_1^+) + f(x_i^-)}{2}$$

وهذا الإفتراض لا يغير من سلسلة فوريه للدالة f، ولا يغير من قيم الدالة f عند نقاط إستمرارها.
الخطوة1: لكل $i \in \{0,1,....,n-1\}$، لتكن الدالة h_i المعرفة بالشكل التالي:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , h_i(x) = h(x - x_i)$$

حيث أن الدالة h هي الدالة التي تم تداولها في المثال السابق.
إنها دالة من الصنف C^1 قطعيا . وهي من الصنف C^1 ومستمرةعند جميع نقاط $\mathbb{R} - \{x_i + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad , \quad h_i(x_i + 2k\pi) = h(2k\pi) = 0$$
$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad , \quad h_i\left[(x_i + 2k\pi)^+\right] = h\left(0^+\right) = \frac{\pi}{2}$$
$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad , \quad h_i\left[(x_i + 2k\pi)^-\right] = h\left(0^-\right) = -\frac{\pi}{2}$$

الخطوة2: مقارنة بين الدالة f والدالة h_i عند النقطة x_i. كل من الدالتين f , h_i ليست مستمرةعند النقطة x_i. لكن الفجوة $\delta_i = \left(f(x_i^+) - f(x_i^-)\right)$ تختلف عن الفجوة $\pi = \left(h_i(x_i^+) - h_i(x_i^-)\right)$ لنعرف الدالة $\bar{h_i}$ بالشكل التالي:

$$\bar{h_i} = \frac{\delta_i}{\pi} h_i$$

أصبح لدينا التساوي بين الفجوتين: $\delta_i = \left(f(x_i^+) - f(x_i^-)\right)$ و $\left(\bar{h_i}(x_i^+) - \bar{h_i}(x_i^-)\right) = \delta_i$
الخطوة3: لنعرف الدالة g_i بالشكل التالي:

$$g_i = \bar{h_i} + \frac{f(x_i^+) + f(x_i^-)}{2} = \frac{\delta_i}{\pi} h_i + \frac{f(x_i^+) + f(x_i^-)}{2}$$

لدينا:

- الدالة من الصنف C^1 قطعيا. وهي من الصنف C^1 ومستمرةعند جميع نقاط $\mathbb{R} - \{x_i + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\lim_{x \to x_i^+} g_i(x) = f\left(x_i^+\right) \quad , \quad \lim_{x \to x_i^-} g_i(x) = f\left(x_i^-\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_i^+} (f(x) - g_i(x)) = 0 = f(0) - g_i(0) \quad , \quad \lim_{x \to x_i^-} (f(x) - g_i(x)) = 0 = f(0) - g_i(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_i} (f(x) - g_i(x)) = 0 = f(0) - g_i(0)$$

هذا يعني أن الدالة $f - g_i$ مستمرةعند النقطة x_i.

الخطوة4 والأخيرة: لنعرف الدالة F بالشكل التالي:

$$F = f - \sum_{i=0}^{i=n-1} g_i$$

لدينا لكل $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$، الدالة F متصلة:

- على المجال المفتوح $[x_i, x_{i+1}]$.

- مستمرةعند النقطة x_i لأن كل من الدالتين $-\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n-1} g_k$, $f - g_i$، مستمرةعند النقطة x_i .

وبالتالي الدالة F مستمرةعند جميع نقاط $\mathbb{R}$

1- [-] من الصنف C^1 قطعيا لأنه مجموع دوال من الصنف C^1 قطعيا.

حسب النظرية السابقة، سلسلة فوريه للدالة F تتقارب تقاربا طبيعيا، ومن ثم تتقارب تقاربا منتظما للدالة F.

من جهة أخرى، وحسب المثال السابق، لكل $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$، سلسلة فوريه للدالة g_i تتقارب تقاربا منتظما للدالة g_i على كل مجال مغلق لا تحتوي على أحد النقاط $\{x_i + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ وبالتالي، متسلسله فوريه للدالة f:

$$S_k(f) = S_k(F) + \sum_{i=0}^{i=n-1} S_k(g_i)$$

تتقارب تقاربا منتظما على كل مجال مغلق و محدودة لا تحتوي على أحد النقاط: $\{(x_i + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}), (i \in \{0, ..., n-1)\}\}$ للدالة المجموع:

$$f = F + \sum_{i=0}^{i=n-1} g_i$$

2.4.5 تقارب مجاميع فيجر بالنسبة للدوال $f \in C_{2\pi}$

مجموع فيجر لدالة

تعريف 2.4.1. لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ كثير الحدود المثلثي التالي:

$$T_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x)$$

يسمى بمجموع فيجر للدالة f من الرتبة n.الرمز $S_K(f)(x)$ يعني مجموع فورييه للدالة f من الرتبة k.

نظرية 2.4.8. لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لدينا:

$$T_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x) = (F_n * f)(x)$$

حيث أن الرمز F_n يعني نواة فيجر من الرتبة n.

إثبات النظرية لدينا:

$$T_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (D_k * f)(x) = \left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k\right) * f\right](x) = (F_n * f)(x)$$

التقارب المنتظم لمجاميع فيجر بالنسبة

نظرية فيجر (Fejer's theorem) [3][12] لتكن $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. لدينا: متتالية كثيرات الحدود المثلثية $T_n(f) = (F_n * f)$ تتقارب تقاربا منتظما للدالة f.

إثبات النظرية [12] (F_n) متتالية من الدوال في الفضاء $PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ تحقق الشروط التالية:

1)

$$\forall n \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) \geq 0$$

2)

$$\forall n \geq 0, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_n(x)\,dx = 1$$

3) لنثبت أن:

$$\forall \delta \in]0,\pi], \quad J_\delta(n) = \int_\delta^\pi [F_n(x) + F_n(-x)]\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

لدينا:

$$\forall \delta \in]0,\pi], J_\delta(n) = \int_\delta^\pi [F_n(x) + F_n(-x)]\,dx = 2\int_\delta^\pi F_n(x)\,dx$$
$$= \frac{2}{n}\int_\delta^\pi \left(\frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 dx$$

لنستعمل المتغير الجديد: $t = \frac{x}{2}$ بدلا من المتغير xفنجد:

$$J_\delta(n) = \frac{4}{n}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(t)}{\sin(t)}\right)^2 dt$$

لكن:

$$\forall t \in \left[\frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < \frac{1}{\sin t} \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$$
$$\Rightarrow J_\delta(n) \leq \frac{4}{n\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1)\,dt = \frac{2(\pi-\delta)}{n\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ومنه:

$$\forall f \in\in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \quad \|F_n * f - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

التقارب البسيط لمجاميع فيجر بالنسبة

بالنسبة للدوال الغير المستمرة، لدينا النظرية التالية:

نظرية 2.4.9. [12] لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $x_0 \in \mathbb{R}$. لدينا:

$$T_n(f)(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)}{2}$$

إثبات النظرية [12] لتكن الدالة g، المعرفة بالشكل التالي:

$$g(x) = f(x + x_0)$$

لدينا:

$$g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \hat{g}(n) = e^{inx_0}\hat{f}(n)$$
$$\Rightarrow \forall n \in N\ , \quad S_n(g)(0) = S_n(f)(x_0)$$
$$\Rightarrow \forall n \in N\ , \quad T_n(g)(0) = T_n(f)(x_0)$$

لتكن الدالة u، المعرفة بالشكل التالي:

$$u(x) = \frac{g(x) + g(-x)}{2}$$

من الواضح تماما بأن الدالة u زوجية، ولدينا :

$$u \in PC_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \hat{u}(n) = \frac{\hat{g}(n) + \hat{g}(-n)}{2}$$
$$\Rightarrow S_n(u)(0) = \sum_{k=-n}^{k=+n} \hat{g}(k) = S_n(g)(0)$$
$$\Rightarrow T_n u(0) = T_n(g)(0)$$

لدينا كذلك:

$$\lim_{x \to 0^+} u(x) = \frac{f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)}{2}, \quad \lim_{x \to 0^-} u(x) = \frac{f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)}{2}$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} u(x) = \frac{f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)}{2}$$

لنعرف الدالة w بالشكل التالي:

$$w(0) = \frac{f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)}{2}, \quad \forall x \neq x_0 + 2k\pi, \quad w(x) = u(x)$$

الدالة $w \in PC_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ، مستمرةعند النقطة 0، ولدينا:

$$T_n(w)(0) = T_n(u)(0)$$

يوجد اذا عدد حقيقي $\alpha \in]0, \pi[$ ، بحيث تكون الدالة w مستمرةعلى المجال $]-\alpha, \alpha[$.
لتكن الدالة $h \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$، الزوجية، المعرفة بالشكل التالي:

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right], & h(x) = 1; \\ \forall x \in \left[\frac{\alpha}{2}, \alpha\right], & h(x) = \frac{2}{\alpha}(\alpha - x); \\ \forall x \in [\alpha, \pi], & h(x) = 0 \end{cases}$$

هذه الدالة h مستمرةعند جميع نقاط $\mathbb{R}$

كذلك، الدالة h, w مستمرةعند نقاط المجموعة: $[-\pi, \pi] - \{-\alpha, \alpha\}$ من جهة أخرى، لدينا:

$$|h(x)w(x)| \leq \|w\|_\infty |h(x)| \xrightarrow[x \to \alpha]{} h(\alpha) = 0$$
$$|h(x)w(x)| \leq \|w\|_\infty |h(x)| \xrightarrow[x \to \alpha]{} h(-\alpha) = 0$$

بالتالي، الدالة hw ستكون مستمرةعند النقاط: $\{-\alpha, \alpha\}$ كذالك .و بالتالي hw متصلةعند جميع النقاط.حسب نظرية فيجر السابقة، لدينا:

$$\|T_n(hw) - hw\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ومن ثم، لدينا:

$$T_n(hw)(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} hw(0) = w(0) = \frac{f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)}{2}$$

أما الدالة $w - hw$ ، فهي تنتمي الى الفضاء $PC_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. وتساوي صفر على المجال $]-\alpha, \alpha[$ يعني:

$$(w - hw)_{/(-\alpha,\alpha)} = 0$$

وبالتالي، هذه الدالة $w - hw$، تحقق جميع شروط نظرية ديريكله عند النقطة 0. ومن تم، لدينا:

$$S_n(w - hw)(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

حسب نظرية سيزارو Cesaro's theorem [12] للمتتاليات، لدينا:

$$T_n(w - hw)(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(w - hw)(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

نعود للدالة w، لدينا:

$$\begin{aligned} & w = hw + (w - hw) \\ & \Rightarrow T_n(w)(0) = T_n(hw)(0) + T_n(w - hw)(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)}{2} \\ & \Rightarrow T_n(f)(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)}{2} \end{aligned}$$

الفصل 3

بعض التطبيقات لسلاسل فورييه

في هذا الفصل، نقدم البعض من تطبيقات سلاسل فورييه، نبدأ ببعض القيم لدالة ريمان، نتحدث بعد ذلك عن مسألة المحيط الثابت المعروفة، و نستثمر سلاسل فورييه لاثبات حل هذه المسألة.
نستعمل كذلك سلاسل فورييه في إثبات بعض النظريات، و نتطرق في الأخير لحل معادلة الحرارة.

3.1 دالة ريمان

سنحل في البداية المسألتين التاليتين: المسألة الأولى
لتكن الدالة $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ فردية، المعرفة بالشكل التالي:

$$\forall x \in]0,\pi[\ , \quad f(x) = 1$$

1) ابحث عن معاملات فورييه المثلثية للدالة f.

2) إستنتج أن:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

3) إستنتج أن:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

حل المسألة الأولى

1) بحكم أن الدالة f فردية ، لدينا:

$$a_n(f)=0, \quad b_n(f)=\int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}sin(nx)\,dx=\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)$$
$$\Rightarrow a_n(f)=0, \quad b_{2n}(f)=0, \quad b_{2n+1}(f)=\frac{4}{\pi(2n+1)}$$

2) بحكم أن الدالة $f\in D_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، وتحقق شروط نظرية ديريكله، لأنها من الصنف C^1 قطعيا، فان الدالة f تساوي حتما سلسلة فوريه الخاصة بها، يعني:

$$\forall x\in\mathbb{R}, \quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)}sin((2n+1)x)$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)}sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\Rightarrow 1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)}(-1)^n$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

3) نستعمل نظرية برسفال للدالة f.

$$\|f\|_2^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|b_n|^2}{2}$$
$$\Rightarrow 1=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{\pi(2n+1)}(-1)^n\right)^2$$
$$\Rightarrow 1=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{8}{\pi^2(2n+1)^2}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

لكن ، المجموع:

$$\begin{aligned} S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{\pi^2}{8} \\ &= \frac{1}{4}S+\frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow S=\frac{1}{4}S+\frac{\pi^2}{8} \\ &\Rightarrow \frac{3}{4}S=\frac{\pi^2}{8} \\ &\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

المسألة الثانية لتكن الدالة $f\in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، المعرفة بالشكل التالي:

$$\forall x\in[-\pi,\pi],\quad f(x)=x^2$$

1) ابحث عن معاملات فوريه المثلثية للدالة f.

2) استنتج أن :

$$\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

3) استنتج أن:

$$\frac{\pi^4}{90}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

حل المسألة الثانية

1) بحكم أن الدالة f زوجية، لدينا:

$$a_0(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{3}\pi^2,\quad a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos(nx)\,dx=\frac{4}{n^2}(-1)^n,\quad b_n(f)=0$$

2) بحكم أن الدالة $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$، وتحقق شروط نظرية ديريكله، لأنها من الصنف C^1 قطعيا، فان الدالة f تساوي حتما سلسلة فوريه الخاصة بها، يعني:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx)$$

$$\Rightarrow f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

3) نستعمل نظرية برسفال للدالة f.

$$\|f\|_2^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{n^2}(-1)^n\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} = \frac{4\pi^4}{45} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{n^4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

الدالة التالية:

$$\forall \mathbb{Z} \in \mathbb{C}/Re(\mathbb{Z}) > 1, \quad \eta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

تسمى بدالةريمان. هذه الدالة لها علاقة وطيدة بالبحث في مجال الأعداد الأولية. في المسألة الأولى و الثانية، أثبتنا أن :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

يمكن تعميم النتائج السابقة والحصول على صيغة للمجموع

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}}, \ \forall n \in \mathbb{R}^*$$

وهذا يعني إيجاد قيم الدالة $\zeta(2k)$ عند الأعداد الطبيعية الزوجية، وسنوضح هذا في الفقرة التالية.

[19][1] نعرف كثيرات حدود برنولي بمتتالية كثيرات حدود $(B_n)_{n\in\mathbb{R}}$ التي تحقق الشروط الثلاثة التالية :

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ B_0(x) = 1$$

$$(2) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$$

$$(3) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \int_0^{2\pi} B_n(x)dx = 0$$

في الحقيقة، إذا افترضنا معرفة B_{n-1} فإن الشرط (2) يبين وجود ثابت λ_n بحيث

$$B_n(x) = \lambda_n + n\int_0^x B_{n-1}(t)dt$$

والشرط (3) يسمح لن بتعين λ_n كما يلي:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\pi\lambda_n + n\int_0^{2\pi}\int_0^x B_{n-1}(t)dtdx \\ &= 2\pi\lambda_n + \left[n(x-2\pi)\int_0^x B_{n-1}(t)dt\right]_0^{2\pi} - n\int_0^{2\pi}(x-2\pi)B_{n-1}(x)dx \end{aligned}$$

ومنه نجد

$$\lambda_n = n\int_0^{2\pi}\left(\frac{x}{2\pi}-1\right)B_{n-1}(x)dx$$

إذن

$$(4) \qquad B_n(x) = n\int_0^{2\pi}\left(\frac{t}{2\pi}-1\right)B_{n-1}(t)dt + n\int_0^x B_{n-1}(t)dt$$

فعلى سبيل المثال نجد

$$(5) \qquad \begin{aligned} B_1(x) &= x - \pi \\ B_2(x) &= x^2 - 2\pi x + \frac{2\pi^2}{3} \\ B_3(x) &= x^3 - 2\pi x^2 + 2\pi^2 x \end{aligned}$$

ونلاحظ أنه في حالة n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$B_{n+1}(2\pi) - B_{n+1}(0) = \int_0^{2\pi} B_{n+1}'(t)dt = (n+1)\int_0^{2\pi} B_n(t)dt = 0$$

وبهذا يكون لدينا

$$\forall n \geq 2,\ B_n(2\pi) = B_n(0) \tag{6}$$

لنعرف في حالة n من $\mathbb{N}^*$ التابع الدوري الوحيد $\tilde{B}_n$ الذي دورته 2π الذي يتفق مع B_n علي المجال $[0,2\pi[$. نلاحظ أن $\tilde{B}_n$ ينتمي الى الصنف C^1 قطعيا.

لنعين سلسلة فوريه للتابع $\tilde{B}_1$. في الحقيقة، إن $C_0(\tilde{B}) = 0$، أما في حالة $k \neq 0$ فنجد

$$\begin{aligned} C_k(\tilde{B}_1) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)e^{-ikx}dx \\ &= \left[\frac{(\pi-x)e^{-ikx}}{2\pi ik}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi ik}\int_0^{2\pi} e^{-ikx}dx = \frac{i}{k} \end{aligned}$$

وحسب نظرية ديريكله نجد

$$\forall x \in]0,2\pi[,\ x-\pi = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{ie^{ikx}}{k} = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k} \tag{7}$$

لنعين بوجه عام متسلسة فوريه للتابع $\tilde{B}_n$ مع $n \geq 2$ في الحقيقة يبين الشرط (3) أن $C_0(\tilde{B}_n) = 0$ أما حين يكون $k \neq 0$ فلدينا

$$C_k(\tilde{B}_n) = \frac{1}{ik}C_k(\tilde{B'}_n) = \frac{n}{ik}C_k(\tilde{B}_{n-1})$$

وهذا يفيدنا لنستنتج بالتدريج

$$\forall n \geq 1,\ \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\ C_k(\tilde{B}_n) = -\frac{n!}{(ik)^n} \tag{8}$$

إن استمرار التابع $\tilde{B}_n$ والتقارب المنتظم لسلسلة فوريه للتابع $\tilde{B}_n$ حين يكون $n \geq 2$ يسمحان لنا أن نستنتج

$$\forall n \geq 2,\ \forall x \in [0,2\pi], B_n(x) = -n!\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{e^{ikx}}{(ik)^n}$$

ومنه نستنتج مهما تكن n من N^* ومهما تكن x من $[0,2\pi]$ مايلي

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n+1}}{2(2n)!}B_{2n}(x) \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^{2n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{2(2n+1)!}B_{2n+1}(x) \tag{10}$$

لنعرف في حالة n من N^*، $b_n = \frac{B_n(0)}{(2\pi)^n}$ فيكون $b_1 = -\frac{1}{2}$. ، $b_0 = 1$ واستنادا إلى العلاقة (2) نجد

$$\forall k \in \{0,1,...,n\},\quad B_n^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}(2\pi)^{n-k}b_{n-k} \tag{11}$$

وإذا لاحظنا أن درجة كثير الحدود B_{n+1} هي $n+1$، استنتجنا من منشور تايلور أن

$$B_{n+1}(t)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{B_{n+1}^{(k)}(0)}{k!}t^k$$

فإذا استفدنا من العلاقتين (6) و (11) استنتجنا أنه في حالة $n\le 1$:

$$(2\pi)^{n+1}b_{n+1}=B_{n+1}(2\pi)=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^{k}b_{n+1-k}(2\pi)^{n+1}$$

أو

$$\forall n\ge 1\ ,\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k}b_k=0 \qquad (12)$$

ومنه

$$\forall n\ge 1\ ,b_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+1}^{k}b_k \qquad (13)$$

وتفيد هذه العلاقة الأخيرة إضافة إلي الشرط b_0 في تعيين جميع حدود المتتالية $(b_n)_{n\in N}$ التي تسمى متتالية أعداد برنولي.وتفيد هذه المتتالية بتعيين كثيرات الحدود $(B_n(x))_{n\in N}$

$$\forall n\in N, B_n(x)=\sum_{k=1}^{n}C_n^k b_{n-k}(2\pi)^{n-k}x^k \qquad (14)$$

نلاحظ أن العلاقة (10) تبين أن $b_{2n+1}=0$ في حالة $n\ge 1$ في حين تعطي العلاقة (9) عند $x=0$ النتيجة الاتية:

$$\forall n\in N^*,\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}=(-1)^{n+1}\frac{b_{2n}}{2(2n)!}(2\pi)^{2n} \qquad (15)$$

3.2 مسألة المحيط الثابت

إذا كان لدينا حبل له طول ثابت L ، ونريد أن نرسم بهذا الحبل مسارا مغلقا و يحتوي على أكبر مساحة ممكنة بداخله. هذه المسألة تسمى بمسألة المحيط الثابت.

الصياغة الرياضية لمسألة المحيط الثابت المسار مغلق هو دالة:

$$f:[a,b]\to\mathbb{C}$$

$$t\to x(t)+iy(t)$$

بحيث تكون الدالة وحيدة القيمة على المجال $[a,b[$ ، تحقق الشرط : $f(a)=f(b)$ ، و تكون مستمرةو من الصنف C^1 قطعيا. يمكننا كذلك للتبسيط اعتبار المجال $[a,b]=[0,1]$.
طول هذا المسار المغلق هو العدد الحقيقي الموجب التالي:

$$L=\int_a^b |f'(t)|dt=\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

المساحة الداخلية هي:

$$S=\frac{1}{2}\left|\int_a^b \left[x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right]dt\right|$$

نظرية تمهيدية توجد دالة:

$$\varphi:[0,L]\to[a,b]$$

تحقق الشروط التالية:

1) φ تقابل ، ولدينا: $\varphi(0)=a,\varphi(L)=b$.

2) $\forall t\in[0,L],\quad |(f\circ\varphi)'(t)|=1$

إثبات النظرية تمهيدية لتكن الدالة التالية:

$$\Psi:[a,b]\to[0,L],\quad \Psi(x)=\int_a^x |f'(t)|dt$$

لدينا:

1) $\Psi(a)=0,\Psi(b)=L$.

2) الدالة Ψ تقابل من المجال $[a,b]$ الى المجال $[0,L]$.

3) $\forall x\in[a,b],\Psi'(x)=|f'(x)|$

نضع الدالة : $\varphi=\Psi^{-1}$
الدالة $\varphi=\Psi^{-1}$ تحقق شروط النظرية السابقة.

نتيجة لتكن الدالة التالية:

$$g:[0,2\pi]\to\mathbb{C}\ ,\forall t\in[0,2\pi]\ ,\quad g(t)=(f\circ\varphi)\left(\frac{L}{2\pi}t\right)$$

لدينا:

1) $g([0,2\pi])=f([a,b])$

2) $\forall t\in[0,2\pi],\quad |g'(t)|=\frac{L}{2\pi}$

نظرية (مسألة المحيط الثابت) لدينا:

1) $4\pi S \le L$

2 $4\pi S = L$ اذا و اذا فقط المسار له شكل دائرة.

اثبات النظرية(مسألة المحيط الثابت) لتكن الدالة $\tilde{g} \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ بحيث:

$$\tilde{g}_{/[0,2\pi]} = g$$

لتكن:

$$g(t) = x(t) + iy(t)$$

لدينا: الدالة $\tilde{g} \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ متصلة، ومن الصنف C^1 قطعيا. لتكن : $\tilde{g}'$ شبه مشتقة للدالة $\tilde{g} \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

1) من الواضح أن $\tilde{g}' \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ولدينا:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{g}'/\tilde{g} \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[x'(t)+iy'(t)\right].\overline{[x(t)+iy(t)]}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[x'(t)+iy'(t)\right]\int_0^{2\pi} [x(t)-iy(t)]\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[x'(t)x(t)+y'(t)y(t)\right]dt + i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right]dt\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Im\left(\langle \tilde{g}'/\tilde{g} \rangle\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right]dt$$

$$\Rightarrow \left|Im\left(\langle \tilde{g}'/\tilde{g} \rangle\right)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \left[x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right]dt\right| = \frac{S}{\pi}$$

من جهة أخرى، لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \tilde{g}'(n) = i.n.\hat{\tilde{g}}(n)$$

$$\Rightarrow \langle \tilde{g}'/\tilde{g} \rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} in|\hat{\tilde{g}}(n)|^2$$

$$\Rightarrow Im\left(\langle \tilde{g}'/\tilde{g} \rangle\right) = n|\hat{\tilde{g}}(n)|^2$$

$$\Rightarrow -\sum_{-\infty}^{+\infty} n^2.|\hat{\tilde{g}}(n)|^2 \leq Im\left(\langle \tilde{g}'/\tilde{g}\rangle\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n.|\hat{\tilde{g}}(n)|^2 \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} n^2.|\hat{\tilde{g}}(n)|^2$$

$$\Rightarrow |Im\left(\langle \tilde{g}'/\tilde{g}\rangle\right)| \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} n^2.|\hat{\tilde{g}}(n)|^2 = \langle \tilde{g}'/\tilde{g}'\rangle$$

لكن ، لدينا:

$$\langle \tilde{g}'/\tilde{g}\rangle = \frac{1}{2.\pi}\int_0^{2\pi} |g'(t)|^2.dt = \frac{1}{2.\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 dt = \frac{L^2}{4.\pi^2}$$

وبالتالي:

$$\frac{S}{\pi} \leq \frac{L^2}{4.\pi^2}$$

$$\Rightarrow 4.\pi.S \leq L^2$$

وهو المطلوب.

2) اذا كان لدينا المساواة ، يعني:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} n^2.|\hat{\tilde{g}}(n)|^2 = \pm\sum_{-\infty}^{+\infty} n.|\hat{\tilde{g}}(n)|^2$$

الحالة الأولى اذا كان:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} n^2.|\hat{\tilde{g}}(n)|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} n.|\hat{\tilde{g}}(n)|^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(n^2 - n\right).|\hat{\tilde{g}}(n)|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z} - \{0,1\}, \quad \hat{\tilde{g}}(n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [0,2\pi], g(x) = C_0 + C_1.e^{ix}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [0,2\pi], |g(x) - C_0| = |C_1|$$

هذا يعني أن المسار هو الدائرة التي مركزها النقطة $I(C_0)$ ونصف قطرها $|C_1|$.

الحالة الثانية إذا كان:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} n^2.|\hat{\tilde{g}}(n)|^2 = -\sum_{-\infty}^{+\infty} n.|\hat{\tilde{g}}(n)|^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(n^2+n\right).|\hat{\tilde{g}}(n)|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}-\{0,-1\}, \quad \hat{\tilde{g}}(n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [0,2\pi], g(x) = C_0 + C_{-1}.e^{-ix}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [0,2\pi], |g(x) - C_0| = |C_{-1}|$$

هذا يعني أن المسار هو الدائرة التي مركزها النقطة $I(C_0)$ ونصف قطرها $|C_{-1}|$. في كل من الحالتين، المسار له شكل دائرة.

3.3 متراجحة writinger

نظرية 3.3.1. [1] ليكن $[a.b]$ مجالا غير تافه من $\mathbb{R}$ وليكن $E = C_0^1([a.b])$ ، فضاء التوابع التي تنتمي الى الصنف C^1 على $[a.b]$ وتنعدم عند كل من b وa. عندئذ:

$$\forall f \in E \ , \int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt$$

أماالثابت $(b-a)^2\pi^{-2}$ فهو أفضل ثابت ممكن في هذه المتراجحة.

الإثبات [1] لنفرض أولا أن $a = 0$ و $b = \pi$. وليكن التابع f عنصر من E عندئذ يوجد تابع وحيد
$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ فردي ويقبل 2π دور له ويحقق $\tilde{f}_{|[0.\pi]} = f$. نتأكد بسهولة أن $\tilde{f}$ ينتمي إلى الصنف C^1.

لتكن إذن $S(\tilde{f}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e_n$ متسلسة فوريه للتابع $\tilde{f}$. أما سلسلة فوريه للتابع $\tilde{f}'$ فهي $S(\tilde{f}') = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} inC_n e_n$، لإن $C_0(\tilde{f}') = 0$، إذا إستخدمنا الفرض $f(0) = f(\pi)$. وبملاحظة أن

$c_0 = 0$، لإن $\tilde{f}$ تابع فردي، نستنتج أن:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(t)|^2\, dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |C_n|^2$$
$$\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} n^2|C_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}'(t)|^2\, dt$$

وبالاستفادة من كون التابعين $t \longmapsto |\tilde{f}(t)|^2$ و $t \longmapsto |\tilde{f}'(t)|^2$ زوجيين إستنتجنا:

$$\int_0^{\pi} |f(t)|^2\, dt \leq \int_0^{\pi} |f'(t)|^2\, dt$$

حيث تحدث المساواة إذا كان $c_n = 0$ مهما كانت n من $\mathbb{Z}\setminus\{-1,+1\}$، أي إذا وجد λ في $\mathbb{C}$ يحقق $\forall t \in [0,\pi]\ ,\ f(t) = \lambda \sin t$. لإثبات الحالة العامة نعرف

$$g : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad g(x) = f(a + \frac{b-a}{\pi}x)$$

حيث f من E. نلاحظ أن g ينتمي إلى الصنف C^1 على $[0,\pi]$ وينعدم عند 0 وعند π إذن بمقتضى الحالة السابقة نجد

$$\int_0^{\pi} |g(t)|^2\, dt \leq \int_0^{\pi} |g'(t)|^2\, dt$$

وهذا يكافئ

$$\int_0^{\pi} |f(t)|^2\, dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_0^{\pi} |f'(t)|^2\, dt$$

إذ تحدث المساواة إذا وفقط إذا كان g متناسبا مع التابع sin على $[0,\pi]$، أي إذا وفقط إذا وجد λ في $\mathbb{C}$ يحقق

$$\forall t \in [a,b]\ \ ,\ f(t) = \lambda \sin(\frac{t-a}{b-a}\pi)$$

3.4 خاصية هامة للدوال التحليلية

نظرية 3.4.1. [17] لتكن:

$$f : B(\mathbb{Z}_0, \mathbb{R}) = \{\mathbb{Z} \in \mathbb{C} / |z - z_0| < \mathbb{R}\} \to \mathbb{C}$$

دالة قابلة للاشتقاق و دالتها المشتقة $f'(z)$محدودة $(bounded)$ على كل مجموعة محدودة .لدينا الحقيقة التالية: توجد سلسلة قوى $\sum_{n\geq 0} a_n Z^n$، نصف قطر تقاربها R_1 يكون: $R_1 \geq R$، بحيث:

$$\forall z \in B(z_0, \mathbb{R})\ \ ,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

إثبات النظرية لكل عدد حقيقي $r \in [0,\mathbb{R}[$، لتكن الدالة g_r المعرفة بالشكل التالي:

$$\forall \theta \in [0,2\pi] \ , \quad g_r(\theta) = f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)$$

لدينا الخصائص التالية:

1) $g_r \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

2) الدالة $g_r \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ، قابلة للاشتقاق عند جميع نقاط $\mathbb{R}$.

حسب نظرية ديريكله ، لدينا:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad g_r(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(g_r)e^{in\theta}$$

حيث أن المعاملات $C_n(g_r)$ هي معاملات فوريه للدالة g_r ، وتساوي:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad C_n(g_r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta$$

بعض خصائص المعاملات$C_n(g_r)$

1) إشتقاق $C_n(g_r)$بالنسبة للمتغير $r \in [0,\mathbb{R}[$ يساوي:

$$\frac{d\left(C_n(g_r)\right)}{dr} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'\left(z_0 + re^{i\theta}\right)e^{i\theta}e^{-in\theta}d\theta$$

لأن كل شروط ادخال الاشتقاق داخل التكامل متوفرة، بحكم أن الدالة المشتقة $f'(z)$محدودة (Bounded) على كل مجموعة محدودة.

$$\Rightarrow ir\frac{d\left(C_n(g_r)\right)}{dr} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'\left(z_0 + re^{i\theta}\right)ire^{i\theta}e^{-in\theta}d\theta$$

باستعمال قانون التكامل بالتجزئة(بالنسبة للمتغير θ داخل التكامل)، نحصل على:

$$\Rightarrow ir\frac{d\left(C_n(g_r)\right)}{dr} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)ine^{-in.\theta}d\theta = in\left(C_n(g_r)\right)$$

$$\Rightarrow r\frac{d\left(C_n(g_r)\right)}{dr} = n\left(C_n(g_r)\right)$$

نضرب الطرفين ب:r^{-n-1}، نحصل على:

$$\Rightarrow r^{-n}\frac{d\left(C_n(g_r)\right)}{dr} - nr^{-n-1}\left(C_n(g_r)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\left(r^{-n}C_n(g_r)\right)}{dr} = 0$$

وبالتالي، الدالة $r \to r^{-n}C_n(g_r)$، ثابتة. لتكن:

$$r^{-n}C_n(g_r) = a_n$$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, C_n(g_r) = a_n r^n$$

2) الدالة f محدودة على المجموعة المحدودة $\overline{B(z_0,r)} = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| \leq r\}$ ، لأنها مستمرةعند جميع نقاط $B(z_0,\mathbb{R})$. وبالتالي ، يوجد عدد حقيقي موجب، $M > 0$ ، بحيث:

$$\forall \mathbb{Z} \in \overline{B(z_0,r)}, \quad |f(z)| < M$$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \quad |C_n(g_r)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}| d\theta < M$$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}\ , \quad |C_n(g_r)| = |a_n| r^n < M$$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in]0,r], \quad |a_n| x^n < M$$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in]0,r], \quad |a_{-n}| x^{-n} < M$$

حين $x \to 0^+$ ، نحصل حتما على:

$$\Rightarrow \forall n \in N, \quad a_{-n} = 0$$
$$\Rightarrow \forall n \in N, \quad C_{-n}(g_r) = 0$$

و بالتالي:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad g_r(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(g_r) e^{in\theta}$$
$$\Rightarrow \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall r \in [0,\mathbb{R}[, \quad g_r(\theta) = f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(re^{i\theta}\right)^n$$
$$\Rightarrow \forall z = z_0 + re^{i\theta} \in B(z_0,\mathbb{R}), \quad f(z) = f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

من الواضح بأنه لكل $z \in B(0,\mathbb{R})$ سلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ تتقارب، وبالتالي، نصف قطر تقاربها R_1 يكون أكبر أو يساوي R.

3.5 حل معادلة الحرارة

[12] هي معادلة تفاضلية جزئية يمكن اختصارها في المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$(E)\begin{cases} u_t = u_{xx} & ,0 \le x \le \pi \ , \ t \ge 0 \\ u(0,t) = 0 & , \ \forall t \ge 0 \\ u(\pi,t) = 0 & , \ \forall t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x) & , \ 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

حيث أن الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين ودالتها المشتقة f' دالة مستمرةعلى المجال $[0,\pi]$.
الخطوة الأولى نلاحظ أولا بأن:

$$f(0) = u(0,0) = 0 \ , \quad u(\pi,0) = f(\pi) = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = f(\pi) = 0$$

لتكن الدالة الفردية $\widetilde{f} \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ بحيث:

$$\widetilde{f}_{/[0,\pi]} = f$$

حسب نظرية ديريكله، لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \quad \widetilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

حيث أن المعاملاتb_n هي معاملات فوريه المثلثية للدالة $\widetilde{f} \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

$$\forall x \in [0,\pi] \ , \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n . \sin(nx)$$

لذلك ، من الطبيعي التفكير في تقسيم المعادلة التفاضلية الجزئية السابقة E الى المعادلات التفاضلية الجزئية التالية:

$$\forall n \in N \ , (E_n)\begin{cases} u_t = u_{xx} & , \ 0 \le x \le \pi, \ t \ge 0 \\ u(0,t) = 0 & , \ \forall t \ge 0 \\ u(\pi,t) = 0 & , \ \forall t \ge 0 \\ u(x,0) = b_n \sin(nx) & , \ 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

ومن ثم، اذا كانت الدالة u_n حلا للمعادلة (E_n)، فإن الدالة المجموع (اذا كان ممكنا الجمع):

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

ستكون حلا للمعادلة الأصلية (E).

الخطوة الثانية: البحث عن حلول للمعادلة (E_n).

لنبحث عن حل $u(x,t)$ يمكن كتابته في الشكل التالي:

$$u(x,t) = h(x)\,g(t)$$

لدينا الشرط الابتدائي التالي:

$$u(x,0) = b_n \sin(nx)$$

من جهة أخرى، لدينا : $u(x,0) = h(x)\,g(0)$. وبالتالي:

$$u(x,0) = h(x)\,g(0) = b_n \sin(nx)$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{g(0)} b_n \sin(nx)$$

نعود الى المعادلة: $u_t = u_{xx}$.هذه المعادلة تصبح:

$$h(x)\,g'(t) = h''(x)\,g(t)$$

نقسم الطرفين ب: $h(x)\,g(t)$

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{h''(x)}{h(x)}$$

لكن، حسب ما سبق:

$$\frac{h''(x)}{h(x)} = -n^2$$

$$\Rightarrow \frac{g'(t)}{g(t)} = -n^2$$

$$\Rightarrow g'(t) = -n^2 g(t)$$

إنها معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، ومعاملاتها ثابتة حلها هو:

$$\Rightarrow g(t) = g(0)\,e^{-n^2 t}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = h(x)\,g(t) = b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

وبالتالي، الدالة التالية:

$$u_n(x,t) = b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

هذه الدالة تمثل حلا للمعادلة (E_n) السابقة.
الخطوة الثالثة:البحث عن حلول للمعادلة الأصلية(E) .دالة المجموع:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n e^{-n^2t}\sin(nx)$$

لها معنى رياضي دقيق، لأن السلسلة:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|$$

تقاربية، بحكم أن الدالة $\tilde{f}$ من الصنف C^1 قطعيا. وبالتالي،السلسلة:

$$\forall t\geq 0\ ,\forall k\in N\ ,\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n n^k e^{-n^2t}|$$

تقاربية، ومن ثم، الدالة $u(x,t)$ من الصنف C^∞ بالنسبة للمتغير x، وكذلك من الصنف C^∞ بالنسبة للمتغير t، وتمثل حلا للمعادلة الأصلية(E).
الخطوة الرابعة و الأخيرة.
إثبات أن $u(x,t)$ هو الحل الوحيد للمعادلة الاصلية (E)، من الصنفC^2 بالنسبة للمتغير x، ومن الصنفC^1 بالنسبة للمتغير t.
لنفرض العكس. يوجد بالتالي، على الأقل حلين مختلفين$u_1(x,t)$ و $u_2(x,t)$ للمعادلة الأصلية (E) ليكن:

$$w=u_1-u_2$$

لدينا الخصائص التالية:

$$\begin{cases} w_t=w_{xx} & ,\ \forall 0\leq x\leq\pi\ ,\ \forall t\geq 0\\ w(0,t)=0 & ,\ \forall t\geq 0\\ w(\pi,t)=0 & ,\ \forall t\geq 0\\ w(x,0)=0 & ,\ \forall 0\leq x\leq\pi \end{cases}$$

لتكن الدالة التالية:

$$\forall t\geq 0\ ,\quad e(t)=\int_0^\pi w^2(x,t)\,dx$$

لدينا:

(1

$$\forall t\geq 0\ ,\quad e(t)\geq 0$$
$$e(0)=\int_0^\pi w^2(x,0)\,dx=0$$

(2

$$\forall t \geq 0 \ , e'(t) = \int_0^{\pi} 2w(x,t)w_t(x,t)\,dt = \int_0^{\pi} 2w(x,t)w_{xx}(x,t)\,dx$$
$$= [2w(x,t)w_x(x,t)]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} 2w_x(x,t)w_x(x,t)\,dx$$
$$= 0 - 2\int_0^{\pi} [w_x(x,t)]^2\,dx = -2\int_0^{\pi} [w_x(x,t)]^2\,dx$$

$$\Rightarrow \forall t \geq 0 \ , \quad e'(t) \leq 0$$
$$\Rightarrow \forall t \geq 0 \ , \quad e(t) \leq e(0) = 0$$
$$\Rightarrow \forall t \geq 0 \ , \quad e(t) = 0$$

$$\forall t \geq 0, \quad e(t) = \int_0^{\pi} w^2(x,t)\,dx = 0$$

بحكم أنه لكل $t \geq 0$ ،الدالة $x \to w^2(x,t)$ مستمرةوموجبة، فإن :

$$\forall x \in [0,\pi], \quad w^2(x,t) = 0$$
$$\Rightarrow w = 0$$
$$\Rightarrow u_1 = u_2$$

وهو يتناقص مع إفتراضنا بأن $u_1(x,t)$و $u_2(x,t)$ حلين مختلفين للمعادلة الأصلية.

الخاتمـــــة

في هذه المذكرة، تطرقنا إلي دراسة سلاسل فوريه سلاسل فورييه للدوال الدورية المستمرة قطعيا وبعض تطبيقاتها. في هذا الإطار عرفنا أولا معاملات فورييه الأسية و المثلثية وخصائصهما العامة، إضافة إلى تعريف سلسلة فورييه.

ثانيا إستعملنا متراجحة بيسال و نظرية برسفال في صياغة عدة نتائج حول تقارب سلاسل فورييه للدوال المدروسة. زيادة على ذلك قدمنا الشروط الكافية لتقارب هذه السلاسل عند كل نقطة حيث تطرقنا في هذا السياق إلى نظرية ديريكله. إطلعنا كذلك على نظرية فيجر ومفهوم مختلف من التقارب.

وفي الأخير قمنا باستثمار النتائج السابقة في إيجاد بعض قيم دالة ريمان، حل معادلة الحرارة، إضافة إلى بعض التطبيقات الأخرى.

المراجع العلمية

[1] عمران قوبا،التحليل،الجزء الخامس، المعهد العالي للعلوم التطبيقية و التكنولوجيا، الجمهورية العربية السورية،2018.

[2] Amos Lapidoth,A Foundation in Digital Communication, Cambridge University Press, Cambridge,2009.

[3] Anders Vretblad,Fourier Analysis and Its Applications, Springer-Verlag, New York,2003.

[4] Andrea Prosperetti, Advanced Mathematics for Applications,Cambridge University Press,New York,2011.

[5] Antoni Zygmund,Trigonometric Series, Cambridge University Press,London,1959.

[6] Cornelius Lanczos, Discourse on Fourier Series, the Society for Industrial and Applied Mathematics,Philadelphia,USA,2016.

[7] Dean G.Duffy, Advanced Engineering Mathematics,CRC Press LLC,Florida,1998.

[8] R.E. Edwards, Fourier Series A Modern Introduction, Springer-Verlag, New York, 1979.

[9] Georgi P. Tolstov,Fourier Series,Translated from the Russian by Richard A. Silverman, INC, New York,1962.

[10] Gerald B. Folland,Fourier analysis and its applications, Wadsworth,Inc, Belmont, California, 1992.

[11] Jean-Marie,Séries Entières Séries de Puiseux Séries de Fourier ,Ellipses,Paris,1999.

[12] John Srdjan Petrovic,Advanced Calculus Theory and Practice, Taylor, Francis Group, LLC,New York, 2014.

[13] Juan Arias de Reyna,Pointwise Convergence of Fourier Series, Springer-Verlag,Berlin,2002.

[14] Murray R. Spiegel, Ph.D,Schaum's Outline of Theory and Problems of Fourier Analysis,McGraw-Hill, Inc, New York,1974.

[15] Philip P.G. Dyke,An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series ,Springer-Verlag, London,2001.

[16] Robert T.Seeley,An Introduction to Fourier Series and Intgrals,Dover,Inc,Mineola,New York, 1966.

[17] Roger Godement ,Analyse Mathématique II Calcul Différentiel et Intégral, Séries de Fourier, Fonctions Holomorphes ,Springer-Verlag,New York, 1998.

[18] Richard Beals,Analysis An Introduction,Cambridge University Press, New York,2004.

[19] Sergei K. Suslov, An Introduction to Basic Fourier Series,Springer Science, Arizona, U.S.A, 2003.

[20] Stevenb.Damelin,Willard Miller,J R,The Mathematics of Signal Processing, Cambridge University Press,Cambridge,2012.

[21] Valery Serov,Fourier Series Fourier Transform and their Applications to Mathematical Physics,Springer International ,Finland,2017.

ملخص

إن الهدف من هذه المذكرة هو دراسة سلاسل فوريه للدوال الدورية المتقطعة الإتصال وبعض تطبيقاتها.تتكون المذكرة من ثلاث فصول الفصل الأول يقدم بعض المفاهيم الأساسية الضرورية في هذه المذكرة. الفصل الثاني مخصص لدراسة سلاسل فوريه وخواصها ومختلف أنماط تقاربها.أما الفصل الثالث فيعرض بعض التطبيقات.

الكلمات المفتاحية : دورية، متقطعة الإتصال، معاملات فوريه، متسلسلة فوريه، كثيرة حدود مثلثية، تقارب.

Abstract

The purpose of this work is the study of fourier series of a piecewises continuous periodic fonctions and same of their applications.The memory is structured into three chapters. The first chapter provides same nesessary basic concepts. The second chapter is dedicated to the study of fourier series and their properties and their different modes of convergences. The thrid chapter introduces same applications.

Key-words: periodic, piecewise continuous, fourier coeffcients, fourier serie,trigonometric polynomial, convergence.

Résumé

L'objectife de ce mémoire est l'étude des séries de fourier d'un fonctions préiodiques et continues par morceaux et de certaines de leurs applications. La mémoire est composé de trois chapitres. La première chapitre présente quelques concepts de base nécessaires dans la mémoire. La deuxième chapitre est consacrée à l'étude des séries de fourier et de leurs propriétés et de leurs différent modèles des convergences . Le troisième chapitre présent quelques applications.

Mots-Clés: préiodique, continues par morceaux, coefficients de fourier, série de fourier, polynôme trigonométrique, convergence.

Activer Windows
Accédez aux paramètres pour