République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Problèmes aux limites associés aux équations différentielles non linéaires du second ordre

Présenté par: **Berrehal Chaima**
Meissa Tasnim

Soutenu le 07-06- 2023 devant le jury composé de

M. **Hamrouni Ahmed**	MCA	Président	Univ. d'El Oued
M. **Ghendir Aoun Abdellatif**	MCA	Rapporteur	Univ. d'El Oued
M. **Gabsi Hocine**	MCA	Examinateur	Univ. d'El Oued

Année universitaire 2022 – 2023

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail:

A le père cher.

A la mère chère.

A les frères et soeurs.

A tous la famille.

A tous les amis.

Chaima Berrehal et **Tasnim Meissa**

Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier "Allah" le tout puisant, pour nous savoir donné assez de courage pour accompli ce travail.
Comme nous tenons à remercier vivement l'encadreur de nos mémoire Dr.Abdellatif GHENDIR AOUN, a son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.
Nous tient également à remercier tous les membres du jury de nos soutenances:Dr Ahmed HAMROUNI et Dr. Hocine GABSI.
Nous remercions notre collège qu'ont nous accompagnés en notre voyage d'études. Nous remercions nos parents qui étaient toujours derrière nous et qui ont nos poussé à aller de l'avant, à nos frères, à nos soeurs.
Enfin, nous remercions tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Abstract

In this memoir, we have studied the existence and the uniqueness of the solutions of some second-order boundary value problems associated with differential equations posed on bounded intervals and where the boundary conditions at two points. We used a few methods. On the one hand, to study these problems, we transformed the boundary value problem into an operational equation and applied the fixed point theory to prove the provided results. On the other hand we treated the method of lower and up-solutions to demonstrate our results. In all the phases of our work we provided sufficient conditions to obtain the existence and uniqueness of the solutions and we submitted some examples which give applications to our results.

Key words: Boundary problem, existence, uniqueness, fixed point theorem, lower-solution, up-solution.

.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et l'unicité des solutions de quelques problèmes aux limites du second ordre associés à des équations différentielles posées sur des intervalles bornés et où les conditions aux bords à deux points. Nous avons utilisé quelques méthodes. D'un côté, pour étudier ces problèmes, nous avons transformés le problème aux limites donner en une équation opérationnelle et appliquer la théorie de point fixe pour prouver les résultats fournis. D'autre part nous avons traité la méthode de sous et sur-solutions pour démontrer nos résultats. Dans toutes les phases de notre travail nous avons fournis des conditions suffisantes pour obtenir l'existence et l'unicité des solutions et nous avons soumis quelques exemples qui donnent des applications à nos résultats.

Mots clés : Problème aux limites, existence, unicité, théorème de point fixe, sous-solution, sur-solution.

ملخص

درسنا في هذا البحث وجود و وحدانية حلول بعض الحمل الحدية من الرتبة الثانية المرتبطة بالمعادلات التفاضلية المطروحة على مجالات محدودة وحيث تكون الشروط الحدية عند نقطتين.

استخدمنا عدة طرق. من ناحية، لدراسة هذه الجمل، قمنا بتحويل الجملة الحدية إلى معادلة تكاملية وطبقنا نظرية النقطة الصامدة لإثبات النتائج المقدمة. من ناحية أخرى، تعاملنا مع طريقة الحلول السفلية والعلوية في إظهار نتائجنا.

في جميع مراحل عملنا وفرنا الشروط الكافية للحصول على وجود ووحدانيةالحلول وقدمنا بعض الأمثلة التي تعطي تطبيقات لنتائجنا.

الكلمات المفتاحية: الجملة الحدية، الوجود، الوحدانية، نظرية النقطة الصامدة، الحل السفلي، الحل العلوي.

Table des matières

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce mémoire :

Notations générales.

T	l'opérateur linéaire continu de E dans F
$(.)' = \frac{d(.)}{dt}$	la dérivée ordinaire par rapport à t
i.e.	c'est-à-dire.
$\mathbb{N}$	l'ensemble des nombres naturels
$\mathbb{Z}$	l'ensemble des nombres entiers
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres complexes
$[a,\, b]$	l'intervalle fermé $a \leqslant x \leqslant b$
$(a,\, b)$	l'intervalle ouvert $a < x < b$.

Espaces fonctionnels.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	ouvert dans $\mathbb{R}^n$
$\overline{\Omega}$	L'adhérence ou la fermeture de Ω
$\partial\Omega$	frontiére de Ω
$L^p(\Omega)$	$= \{$u mesurable sur Ω et $\int_\Omega \lvert u\rvert^p dx < \infty\}$, $1 \leqslant p < \infty$
$C(\overline{\Omega})$	fonctions continues sur Ω
$C^n(\overline{\Omega})$	fonctions n fois continûment différentiables sur Ω

Dans ce memoire, nous utiliserons spécifiquement les espaces suivants

$\cdot\, C([a,\, b], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues $y : [a,\, b] \to \mathbb{R}$, muni de la norme :

$$\|y\|_\infty = \sup\{|y(x)|,\, x \in [a,\, b]\}.$$

Notations

$\cdot\, C^n([a,\, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions $y : [a,\, b] \to \mathbb{R}$, de classe C^n ou n fois continûment dérivables sur $[a,\, b]$,
muni de la norme

$$\|y\| = \max\{\|y\|_\infty, \|y'\|_\infty, \|y''\|_\infty, ..., \|y^{(n)}\|_\infty\}.$$

$\cdot$ On désigne par $L^1([a,\, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions $y : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgues intégrables muni de la norme

$$\|y\|_1 := \|y\|_{L^1} = \int_0^1 |y(t)|dt,$$

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier quelques problèmes aux limites associés à des équations différentielles posées sur des intervalles bornés.

Les équations différentielles, ordinaires et partielles, son considérées comme l'une des branches les plus importantes des mathématiques appliquées, et elles sont indispensables à toutes les sciences appliquées-physique, astronomie, chimie, biologie,... -les concernant. L'équation différentielle exprime un système cinétique tel que le mouvement planétaire, la balistique, le transfert d'ondes, la diffusion de la chaleur et la croissance démographique. Là où l'équation différentielle régit le comportement des systèmes cinétiques, et grace à notre solution à l'équation différentielle, nous pouvons sentir le comportement de ce système et prédire son comportement dans le passé ou dans le futur. L'équation différentielle ordinaire-liée à une fonction dans une variable.

Notamment comme dans notre mémoire, problèmes aux limites pour des équations différentielles ordinaires, se posent dans les sciences physiques et les mathématiques appliquées.

Ce travail est subdivisée en quatre chapitres.

- Préliminaires
- Problème non linéaire - Résultats généraux-
- Méthode des sous et sur-solutions et théorèmes de comparaison
- Quelques applications - Résultats complémentaires -

Plus précisément, nous allons résumer les résultats concernant ces chapitres comme suit. Dans le premier chapitre on sera consacrée aux préliminaires sur des notions générales utilisées dans les différents chapitres de ce mémoire, on présente la notion de quelques outils de base dans l'analyse fonctionnelle et on présente quelques théorèmes de point fixes (théorème de contraction de Banach, théorème de Schauder), selon les références

[6, 8].
Au deuxième chapitre, sur la base des références [2, 4, 5, 11, 13] et des références qui y sont contenues. Au départ, nous avons introduit le concept de fonction de Green avec la théorie de son existence et de son unicité. Après, nous avons présenté quelques résultats généraux d'existence pour le problème aux limites suivant posé sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)); \quad a < x < b \\ (CB) \end{cases}$$

où $f\colon [a, b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et où (CB) désigne des conditions aux bords linéaires et séparées du type Dirichlet ou Neumann essentiellement données comme suit :

$$(CB) \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta. \end{cases}$$

Premièrement, nous avons proposé le problème non linéaire suivant

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'); \quad a < x < b \\ y(a) = \gamma, \quad y(b) = \delta \end{cases}$$

nous avons présenté quelques résultats d'existence classiques lorsque :
- (a) f est lipschitzienne bornée,
- (b) f est continue bornée,
- (a) f est lipschitzienne.

Dans le troisième chapitre, nous avons exposé quelques théorèmes de comparaison comme introduction à utiliser les méthode des sous et sur-solutions pour étudier l'existence et l'unicité par fois des solutions de problème proposée.
L'une des méthodes de l'analyse non linéaire employée dans l'étude de l'existence des solutions pour les équations différentielles est la méthode des sur et sous-solutions. C'est un outil qui permet de s'assurer de l'existence d'une solution du problème considéré située entre une sous-solution et une sur-solution, c'est-à-dire qu'il nous informe sur l'existence et la localisation des solutions.
Ainsi, la question de trouver une solution du problème considéré est remplacé par celle de trouver deux fonctions bien ordonnées que satisfont à des inégalités convenables.

Nous avons présenté dans ce chapitre, ceci est une explication détaillée de ce qui a été mentionné dans les références [1, 3, 7, 12], des résultats d'existence et unicité des solutions de problème de Dirichlet suivant où f ne dépend pas de la dérivée

$$\begin{cases} y'' &= f(x,y); \quad a < x < b \\ y(a) &= \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases}$$

Dans ce cas supposons l'existence de v, w respectivement sous et sur-solutions telles que $v \leq w$. En plus, supposons que f est continue, croissante sur l'ensemble

$$K = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R};\ v(x) \leq y \leq w(x)\}.$$

Ensuite, nous avons donné des résultats d'existence des solutions de problème aux limites

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'), \quad a \leq x \leq b, \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = \alpha, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = \beta \end{cases}$$

avec a_1, a_2, b_1, $b_2 \geq 0$; $a_1 + a_2 > 0$, $b_1 + b_2 > 0$ et supposons que f est continue et $k-$lipschtzienne par rapport à la 3^{ime} variable sur l'ensemble

$$K = \{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2;\ v(x) \leq y \leq w(x)\}.$$

Au quatrième chapitre, selon les références [9, 10], nous avons étudié quelques résultats d'existence pour le problème aux limites

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}([a,b] \times \mathbb{R}^2)$, comme des résultats complémentaires des chapitres précédents de plusieurs types selon des conditions sur la fonction imposée f : Croissance monomiale- Croissance sous linéaire- Croissance quadratique.

Ensuite, nous avons ajouté un résultat d'existence pour le problème non linéaire :

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'), \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}([0,1] \times \mathbb{R}^2)$ est continûment dérivable par rapport au couple (y,z). En ajoutant d'autres conditions pour obtenir le résultat souhaité et qu'en utilisant méthode de sous-solution, sur-solution et méthode de point fixe.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1 *(Espace métrique) Un espace métrique (E,d) et la donnée d'un ensemble E et d'une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée distance qui vérifie :*

1. $x, y \in E$ *et* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2. $\forall x, y \in E : d(x, y) = d(y, x)$.

3. $\forall x, y, z \in E : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2 *(Espace vectoriel normé) Soit E un espace vectoriel sur K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), une norme sur E est une application*

$$\|.\| : E \longrightarrow [0, +\infty[$$

$$x \longmapsto \|x\|.$$

ayant les prpriètées suivantes :

• $x \in E$ *et* $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

• $\forall x \in E, \forall \lambda \in K,$ *on a* $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

• $\forall x \in E, \forall y \in E, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Le couple $(E, \|.\|)$ *est dit espace vectoriel normé.*

Définition 1.3 *(Espace complet) On dit que (E,d) est cmplet si toutes les suites de Cauchy sont convergentes.*

Définition 1.4 *(Espace de Banach) On appelle un espace de Banach, un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance de sa norme.*

1.2 Quelques outils de base

Définition 1.5 *Une fonction f est croissante sur un intervalle I lorsqu'elle même l'ordre des nombres sur cet intervalle.*
Autrement dit, quelque soient les réels a et b appartenant à I, si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.

Définition 1.6 *Une fonction f est décroissante sur un intervalle I lorsqu'elle inverse l'ordre des nombres sur cet intervalle.*
Autrement dit, quelque soient les réels a et b appartenant à I, si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$.

Définition 1.7 *Soit A un sous-ensemble de$E$, on dit que A et convexe si, pour chaque $x, y \in A$ et $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.*

Définition 1.8 *Soit (X, d) un espace métrique, une application $f : X \longrightarrow X$ si ;*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

pour tout $x, y \in X$ l'application f est dite lipschitzienne si $k \geq 0$ (k constante de Lipschitz.)

Définition 1.9 *Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et $\mathrm{T} : E \longrightarrow E$ une application. On dit que T est une* ***contraction*** *(ou contractante) sur E s'il existe un réel $k \in]0,1[$ tel que, pour tous éléments x, $y \in E$ on ait*

$$\|\mathrm{T}x - \mathrm{T}y\| \leqslant k\|x - y\|.$$

Théorème 1.1 *(des accroissements finis)*

Soit f une application de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux condition suivantes :

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$.*

Alors, il existe $c \in]a, b[$ vérifiant :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

1.3 Application compacte

(Référence principale :[6])

Soit X et Y deux espaces de Banach et $\Omega \subset X$ un ouvert.

Définition 1.10 *Une application continue $f : \Omega \longrightarrow Y$ est dite compacte si $f(\overline{\Omega})$ est compact. Elle est dite complètement continue si l'image de tout borné est relativement compacte.*

Définition 1.11 *(opérateur compact) Un opérateur linéaire T est dit compact s'il transforme toute partie bornée de X en une partie relativement compact de Y . Autrement dit, T est compact si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ bornée dans X la suite $(Tx_n)_n$ admet une sous-suite convergente.*

Définition 1.12 *Un opérateur est appelé complètement continue si elle est continue et l'ensemble des applications bornées dans ensemble précompact.*

Définition 1.13 *Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F. On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en un ensemble relativement compact dans F. f est dite compacte si $f(E)$ est relativement compacte dans F.*

Remarque 1.1 **(a)** *Toute application compacte est complètement continue ; la réciproque est vraie si Ω est borné.*

(b) *Toute application linéaire compacte est continue ; la réciproque est vraie si cette application est de rang fini. (le rang est la dimension de l'espace image).*

Proposition 1.3.1 *([6]) Une application $f : X \longrightarrow Y$ est compacte si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans Y.*

Théorème 1.2 *(d'Ascoli-Arzéla)([6]) Soit E un espace métrique compact, F un espace métrique complet. Un sous ensemble $\mathfrak{F} \subset C(E, F)$ est relativement compact, si et seulement s'elle vérifie les deux conditions suivantes :*
1.Pour tout $t \in E$, l'ensemble

$$\mathfrak{F}(t) = \{x(t);\, x(.) \in \mathfrak{F}\}$$

est relativement compact dans F.
2. $\mathfrak{F}$ est équicontinue i.e. :
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $x(.) \in \mathfrak{F}$ et pour tout $t, s \in E$, avec $d_E(t, s) \leqslant \delta$ on ait $d_F(x(t), x(s)) \leqslant \epsilon$.

Théorème 1.3 *(Un cas particulier de théorème Ascoli-Arzéla) Soit $\mathfrak{F} \subset C(J, \mathbb{R}^n)$ et J un intervalle borné de $\mathbb{R}$. $\mathfrak{F}$ est relativement compact si :*
1. $\mathfrak{F}$ est uniformemnt borné i.e. :

$$\exists M > 0 \text{ tel que } |x(t)| \leqslant M, \text{ pour tout } x(.) \in \mathfrak{F} \text{ et pour tout } t \in J.$$

2. $\mathfrak{F}$ est équicontinue i.e. :
$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$, tel que pour tout $x(.) \in \mathfrak{F}$ et pour tout $t, s \in J$, avec $|t - s| \leqslant \delta$ on ait $\|x(t) - x(s)\| \leqslant \epsilon$.

1.4 Quelques théorèmes de point fixe

(Référence principale : [8])

Nous citerons en particulier les théorèmes de point fixe(de contraction de Banach, Schauder) utilises dans la résolution des équations différentielles par l'approche du point fixe.

Définition 1.14 *Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et $\mathrm{T} : E \longrightarrow E$ une application. Un élément x de E est dit point fixe de T si $\mathrm{T}x = x$.*

Théorème 1.4 *(de contraction de Banach)([8]). Soit (E, d) un espace metrique complet et $\mathrm{T} : E \longrightarrow E$ une application. Si T est une contractante sur E, alors T admet un point fixe unique dans E.*

Théorème 1.5 *(de Schauder)([8]). Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach X et $f : C \to C$ une application compacte. Alors f admet au moins un point fixe dans C.*

Chapitre 2

Problème non linéaire du second ordre - Résultats généraux-

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats généraux d'existence et unicité pour le problème aux limites posé sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$, en utilisant la fonction de Green associée à cette problème avec appel aux théorèmes de base sur la théorie du point fixe : théorème de Schauder pour l'existence et théorème de contraction de Banach pour l'existence et l'unicité.

Au départ, nous avons introduit le concept de fonction de Green avec la théorie de son existence et de son unicité. Après, nous avons proposés le problème non linéaire suivant

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'); \quad a < x < b \\ y(a) = \gamma, \quad y(b) = \delta \end{cases}$$

nous avons présentés quelques résultats d'existence classiques lorsque :

• (a) f est lipschitzienne bornée,

• (b) f est continue bornée,

• (c) f est lipschitzienne.

2.2 Fonction de Green

Soit $p,\ q,\ f \in \mathcal{C}([a,b])$ où $p \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $(a<b)$ et $(\alpha_i,\beta_i) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall\, i=1,2$, $|\alpha_1|+|\alpha_2|$, $|\beta_1|+|\beta_2| \neq 0$. On considère les équations différentielles ordinaires :

$$\begin{aligned} (H) &\quad (py')' + qy = 0 \\ (NH) &\quad (py')' + qy = f \end{aligned}$$

ainsi que les conditions aux bords associées :

$$(CB)_h \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta. \end{cases}$$

Définition 2.1 *On appelle fonction de Green associée au problème homogène* $(H)-(CB)_h$ *une fonction* $G\colon\ [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

- **(a)** G *est continue sur* $[a,b]\times[a,b]$ *;*
- **(b)** G *est symétrique :* $G(x,y) = G(y,x)$, $\forall\,(x,y) \in [a,b]^2$ *;*
- **(c)** $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)$ *est continue pour tout* $x \neq y$ *;*
- **(d)** $\frac{\partial G}{\partial x}(y^+,y) - \frac{\partial G}{\partial x}(y^-,y) = \frac{1}{p(y)}$ *pour tout* $y \in [a,b]$ *;*
- **(e)** *la fonction partielle* $x \mapsto G(x,y)$ *est solution de l'équation* (H) *pour tout* $x \neq y$ *;*
- **(f)** *la fonction partielle* $x \mapsto G(x,y)$ *vérifie les conditions* $(CB)_h$ *pour tout* $y \in [a,b]$.

Théorème 2.1 *(***Existence et unicité de la fonction de Green***) Supposons que le problème homogène* $(H)-(CB)_h$ *n'admet pas de solution non triviale. Alors, il existe une (et une seule) fonction* G *ne dépendant pas de* f*, et dite fonction de Green, telle que, pour toute fonction* f*, la solution* y *du problème non homogène* $(NH)-(CB)_h$ *s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s)\, ds.$$

Démonstration

(i) Existence de la fonction G : Soit ϕ_1 et ϕ_2 les solutions respectives des problèmes à conditions initiales

$$(H)+\begin{cases}\phi_1(a)=\alpha_2\\ \phi_1'(a)=-\alpha_1,\end{cases}\quad \text{et}\quad (H)+\begin{cases}\phi_2(b)=\beta_2\\ \phi_2'(b)=-\beta_1.\end{cases}$$

Alors, ϕ_1, $\varphi_2 \not\equiv 0$ sont linéairement indépendantes car sinon ϕ_1 (et aussi ϕ_2) serait solution du problème (P_0) : $(H)+(CB)_h$ contredisant l'hypothèse. Soit donc $W=\phi_1\phi_2'-\phi_1'\phi_2\neq 0$ leur Wronskien et G la fonction de Green définie par

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{\phi_1(s)\phi_2(x)}{p(s)W(s)}, & a\leqslant s\leqslant x,\\ \frac{\phi_1(x)\phi_2(s)}{p(s)W(s)}, & x\leqslant s\leqslant b.\end{cases}$$

Car, pour toute solution y du problème non homogène $(NH)-(CB)_h$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^x \frac{\phi_1(s)\phi_2(x)}{p(s)W(s)}f(s)\,ds+\int_x^b \frac{\phi_1(x)\phi_2(s)}{p(s)W(s)}f(s)\,ds\\ &= \int_a^b G(x,s)f(s)\,ds.\end{aligned}$$

Remarquons que le produit pW est constant car

$$p(x)W(x)=p(s)W(s)=p(a)W(a)=p(b)W(b)\neq 0,\ \forall\, x,s\in[a,b].$$

En effet, d'après la formule de Lagrange, on a

$$\begin{aligned}\varphi_2(p\varphi_1')'-\varphi_1(p\varphi_1')'=0 \quad&\Leftrightarrow\quad (p\varphi_2\varphi_2')'-(p\varphi_1\varphi_2')'=0\\ &\Leftrightarrow\quad [p(\varphi_2\varphi_1'-\varphi_1\varphi_2')]'=0\\ &\Leftrightarrow\quad pW=cte.\end{aligned}$$

Enfin, G vérifie bien les hypothèses de la fonction de Green.

(ii) Unicité de la fonction G Soit G, H deux fonctions de Green, alors

$$\int_a^b [G(x,s)-H(x,s)]f(s)ds=0,\ \forall\, x\in[a,b],\ f\in C([a,b],\mathbb{R}).$$

Pour x fixé, posons

$$f(s)=G(x,s)-H(x,s),$$

on a
$$\int_a^b [G(x,s)-H(x,s)]^2 ds = 0,\ \forall\, x \in [a,b].$$
Comme G et H sont continues, $G \equiv H$, c'est-à-dire $(G(x,.) = H(x,.), \forall\, x \in [a,b])$.

(iii) Existence et unicité d'une solution : La fonction F définie par,
$$F(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds = \frac{\phi_2(x)}{pW}\int_a^x \phi_1(s)f(s)ds + \frac{\phi_1(x)}{pW}\int_x^b \phi_2(s)f(s)ds$$
est solution du problème $(NH)+(CB)_h$. En effet,
$$\begin{array}{c} F'(x) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,s)f(s)\,ds \\ \text{et} \quad F''(x) = \int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,s)f(s)\,ds + f(x)[\frac{\partial G}{\partial x}(x,x^-) - \frac{\partial G}{\partial x}(x,x^+)]. \end{array}$$
Ou,
$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial G}{\partial x}(x^+,x) & = & \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,x^-) \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}(x^-,x) & = & \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,x^+) \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}(x^+,x) & - & \dfrac{\partial G}{\partial x}(x^-,x) = \dfrac{1}{p}\cdot \end{array}$$
On en déduit l'expression :
$$F''(x) = \int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,s)f(s)\,ds + \frac{f(x)}{p(x)}$$
ainsi que :
$$(pF')' = \int_a^b \left(p\frac{\partial G}{\partial x}\right)'(x,s)f(s)\,ds + f(x).$$
Par suite,
$$\begin{array}{rcl} (pF')' + qF & = & \displaystyle\int_a^b \left[\left(p\frac{\partial G}{\partial x}\right)' + qG\right] f(s)\,ds + f(x) \\ (\text{par définition de } G) & = & -\displaystyle\int_a^b \varphi_0(x)\varphi_0(s)f(s)\,ds + f(x) \\ (\text{par définition de } \varphi_0) & = & f(x). \end{array}$$

L'unicité de la solution y résulte de l'hypothèse sur le problème homogène ainsi que de l'Alternative de Fredholm.

Exemple 2.1 *Considérons le problème à deux points posé sur un intervalle* $[a, b]$.

$$\begin{cases} y'' = f(x), \quad a < x < b \\ y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Construisons les fonctions φ_1 *et* φ_2 *solution des problèmes de Cauchy :*

$$\begin{cases} \varphi_1'' = 0 \\ \varphi_1(a) = 0 \\ \varphi_1'(a) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_2'' = 0 \\ \varphi_2(b) = 0 \\ \varphi_2'(b) = -1. \end{cases}$$

Alors,

$$\varphi_1(x) = (a - x),\ \varphi_2(x) = (b - x)$$

et

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = b - a.$$

D'où la fonction de Green :

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{(x-b)(s-a)}{(b-a)}, & si\ a \leqslant s \leqslant x; \\ \frac{(x-a)(s-b)}{(b-a)}, & si\ x \leqslant s \leqslant b. \end{cases}$$

La solution unique du problème (2.1) est donc donnée par

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds = \frac{x - b}{b - a} \int_a^x (s - a) f(s)\, ds + \frac{x - a}{b - a} \int_x^b (s - b) f(s)\, ds.$$

2.3 Existence et unicité de solution

(Référence principale : [13])

Ce section présente quelques résultats d'existence classiques datant, pour certains, des années passées ; il fait appel aux théorèmes de base sur la théorie du point fixe. Les résultats de ce section varient selon les hypothèses portant sur le terme non linéaire de l'équation différentielle du problème étudié.

Nous présentons quelques résultats généraux d'existence pour le problème aux limites suivant posé sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)); \quad a < x < b \\ (CB) \end{cases}$$

où $f\colon [a,b]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et où (CB) désigne des conditions aux bords linéaires et séparées du type Dirichlet ou Neumann essentiellement. Comme le problème linéaire, la nature et le nombre de solutions du problème $(\mathcal{P})$ dépend de la longueur de l'intervalle d'étude, de la constante de Lipschitz de la fonction f, et des conditions aux limites. Nous allons présenter, pour le problème non linéaire, quelques résultats d'existence classiques lorsque :

• (a) f est lipschitzienne bornée,
• (b) f est continue bornée.
• (a) f est lipschitzienne.

On sait que y est solution du problème

$$y'' = f(x), \quad y(a) = y(b) = 0$$

si et seulement si

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s)\, ds.$$

Cette représentation linéaire nous servira aussi à écrire les solutions du problème de Dirichlet non linéaire

$$y'' = f(x,y,y'); \quad y(a) = y(b) = 0 \tag{2.2}$$

sous la forme

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s, y(s), y'(s))\, ds,$$

telle que G est la fonction de Green définie précédemment.

Lemme 2.1 *Supposons f régulière et soit y une solution du problème (2.2). Alors, on a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}) \max_{a\leqslant x\leqslant b} |y(x)| &\leqslant \tfrac{(b-a)^2}{8} \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \\ (\mathbf{b}) \max_{a\leqslant x\leqslant b} |y'(x)| &\leqslant \tfrac{b-a}{2} \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|. \end{aligned}$$

Démonstration. On a

(a)

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \textstyle\int_a^b |G(x,s)|\, ds \\ &= -\max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \textstyle\int_a^b G(x,s)\, ds. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_a^b G(x,s)\,ds &= \int_a^x \tfrac{(s-a)(x-b)}{b-a}\,ds + \int_x^b \tfrac{(x-a)(s-b)}{b-a}\,ds\\ &= \tfrac{x-b}{b-a}\tfrac{1}{2}(x-a)^2 - \tfrac{x-a}{b-a}\tfrac{1}{2}(x-b)^2\\ &= \tfrac{(x-a)(x-b)}{2}.\end{aligned}$$

Comme

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\frac{(x-a)(x-b)}{2}\right| = \frac{(b-a)^2}{8},$$

alors

$$\int_a^b G(x,s)\,ds \leqslant \frac{(b-a)^2}{8},$$

l'assertion (a) est donc prouvée.

(b) On a également l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\int_a^b \left|\tfrac{\partial G}{\partial x}(x,s)\right|\,ds &= \int_a^x \tfrac{s-a}{b-a}\,ds + \int_x^b \tfrac{b-s}{b-a}\,ds\\ &= \tfrac{1}{2(b-a)}[(x-a)^2+(b-x)^2].\end{aligned}$$

Comme le maximum de la fonction $\theta(x) = (x-a)^2 + (b-x)^2$ est atteint aux extrémités a et b, on a

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}[(x-a)^2+(b-x)^2] = (b-a)^2.$$

Par conséquent,

$$\int_a^b \left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)\right|\,ds \leqslant \frac{b-a}{2}.$$

Enfin,

$$y'(x) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,s)f(s)\,ds$$

l'assertion (b) est donc aussi prouvée.

Remarque 2.1 *Le lemme 2.1 est particulièrement utile lorsque f est une fonction bornée.*

2.3.1 Le cas d'un second membre lipschitzien borné

Théorème 2.2 *Soit $f\colon [a,b]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction continue, lipschitzienne par rapport aux deux dernières variables et bornée. Alors pour tous réels γ, δ, le problème*

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'); \quad a < x < b\\ y(a)=\gamma, \quad y(b)=\delta\end{cases} \tag{2.3}$$

admet au moins une solution $y\in C^2([a,b])$.

Démonstration (méthode de tir)
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \gamma, \quad y'(a) = \eta \end{cases} \tag{2.4}$$

où η est un nombre réel donné, appelé paramètre de tir. On sait, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, que pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, il existe une solution unique $y_\eta(x)$ du problème (2.4) définie sur tout l'intervalle (a, b) (théorème de prolongement) et que cette solution est continue par rapport au paramètre η. Cherchons alors une valeur $\eta \in \mathbb{R}$ telle que $y_\eta(b) = \delta$. Pour ce faire, on se propose de montrer que

$$\lim_{\eta \to -\infty} y_\eta(b) = -\infty, \ \lim_{\eta \to +\infty} y_\eta(b) = +\infty.$$

Le résultat escompté se déduit alors du théorème des valeurs intermédiaires. L'intégration directe de l'équation dans (2.4) donne

$$\forall\, x \in (a, b), \quad y'(x) = \eta + \int_a^x f(t, y(t), y'(t))dt.$$

Mais, la fonction f étant bornée, il existe

$$m \in \mathbb{R}^+, \ |f(x, y, z)| \leqslant m, \ \forall\, (x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2.$$

Il en résulte que

$$\forall\, x \in (a, b), \ |y'(x) - \eta| \leqslant m(x - a),$$

ce qui implique que

$$\forall\, x \in (a, b), \ \eta - m(x - a) \leqslant y'(x) \leqslant \eta + m(x - a),$$

d'un côté

$$\forall\, x \in (a, b), \ y'(x) \leqslant \eta + m(x - a),$$

puis, de nouveau par intégration,

$$y(x) \leqslant \gamma + \eta(x - a) + \frac{m}{2}(x - a)^2$$

et

$$y(b) \leqslant \gamma + \eta(b - a) + \frac{m}{2}(b - a)^2,$$

d'où

$$\lim_{\eta\to-\infty} y_\eta(b) = -\infty.$$

De l'autre côté

$$\forall\, x \in (a,b),\ y'(x) \geqslant \eta - m(x-a)$$

et par intégration,

$$y(x) \geqslant \gamma + \eta(x-a) - \frac{m}{2}(x-a)^2,$$

on obtient donc la minoration

$$y(b) \geqslant \gamma + \eta(b-a) - \frac{m}{2}(b-a)^2$$

puis

$$\lim_{\eta\to+\infty} y_\eta(b) = +\infty.$$

La démonstration du théorème 2.2 est donc complète.

Exemple 2.2 *Le problème non linéaire*

$$\begin{cases} y'' + \sin(y) = f(x); \quad a < x < b \\ y(a) = \gamma, \quad y(b) = \delta \end{cases}$$

admet au moins une solution pour toute fonction continue f et pour tout $(\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque 2.2 *Le théorème demeure vrai si l'une des conditions aux bords est une condition de Dirichlet et l'autre de type Neumann, mais pas lorsque les deux conditions sont de type Neumann.*

2.3.2 Le cas d'un second membre continue borné

Le résultat qui suit montre que dans le théorème 2.2, l'hypothèse f lipschitzienne est redondante.

Théorème 2.3 *Soit $f\colon\ [a,b]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée :*

$$\exists\, M > 0,\ |f(x,y,z)| \leqslant M,\ \forall\,(x,y,z)\ \in [a,b]\times\mathbb{R}^2.$$

Alors le problème

$$\begin{cases} y''(x) &= f(x,y,y'); \quad a<x<b \\ y(a) &= y(b)=0 \end{cases} \tag{2.5}$$

admet au moins une solution $y \in C^2([a,b])$. *De plus,*

$$\forall\, x \in [a,b]:\ |y(x)| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{8} \quad et \quad |y'(x)| \leqslant \frac{M(b-a)}{2}.$$

Démonstration (par le théorème du point fixe de Schauder)

Soit $X = C^1([a,b])$ et

$$\|u\|_X = \max(\sup_{x\in[a,b]} |u(x)|, \frac{b-a}{4} \sup_{x\in[a,b]} |u'(x)|).$$

C'est une norme équivalente à la norme du sup ; X est donc un espace de Banach pour cette norme aussi. On définit l'application :

$$\begin{aligned} T:\ X &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto Y \end{aligned}$$

avec

$$Y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s,y(s),y'(s))ds$$

où G est la fonction de Green associée au problème (2.5).

• T **est bien définie car la fonction** G est définie de manière unique.

• On considère, dans X, la boule fermée de rayon $M\frac{(b-a)^2}{8}$:

$$B = \left\{ u \in X,\ \|u\|_X \leqslant M\frac{(b-a)^2}{8} \right\}.$$

Montrons que

• T **envoie** B **dans** B **:** Soit $y \in B$ et $Y = Ty$. Comme f est bornée par M, on a d'après le lemme 2.1, les estimations

$$|Y(x)| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{8}$$

et

$$|Y'(x)| \leqslant M\frac{b-a}{2},$$

et donc

$$\|Y\|_X = M\frac{(b-a)^2}{8},$$

d'où $Y \in B$ et donc T envoie B dans B (en fait T envoie tout l'espace X dans B).

• T **est continue.** Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X convergente vers une limite $y \in X$ et $Y_n = Ty_n$; alors (Y_n) converge vers Y, grâce à la continuité de f et au théorème de la convergence dominée de Lebesgue ; d'où le résultat.

• T **est compacte.** Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de X ; alors la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^1([a,b])$ et même dans $C^2([a,b])$, car $Y_n'' = f(x, y_n, y_n')$ et f est continue. D'après le théorème d'Ascoli-Arzela, la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $C^1([a,b])$, d'où la compacité de l'application T. D'après le théorème du point fixe de Schauder, T admet un point fixe y, solution du problème (2.5).

Remarque 2.3 *A des modifications près de la fonction de Green, le théorème 2.3, comme le théorème 2.2 demeure vrai si une des conditions au bord dans le problème (2.5) est remplacée par une condition de Neumann. Ce résultat ne subsiste pas lorsque les deux conditions sont de type Neumann comme le montre le contre-exemple qui suit. Le problème aux limites*

$$\begin{cases} y''(x) &= \sin(y'); \quad 0 < x < 1 \\ y'(0) &= \frac{\pi}{4}, \quad y'(1) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

est équivalent au problème du premier ordre

$$\begin{cases} z'(x) &= \sin(z); \quad 0 < x < 1 \\ z(0) &= \frac{\pi}{4}, \quad z(1) = \frac{\pi}{2}\cdot \end{cases}$$

Une intégration directe conduit immédiatement à l'égalité contradictoire :

$$\ln|\tan(\frac{\pi}{8})| = 1 \Leftrightarrow \tan(\frac{\pi}{8}) = e\cdot$$

2.3.3 Le cas d'un second membre lipschitzien

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'); \quad a < x < b \\ y(a) = \gamma, \quad y(b) = \delta \end{cases} \tag{2.6}$$

Lorsque f est une fonction lipschitzienne non bornée, nous allons prouver un résultat d'existence sous certaines restrictions sur les constantes de Lipschitz. Mais d'abord, donnons le lemme suivant

Lemme 2.2 *Pour toute fonction continue* $h\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$*, la solution du problème*

$$\begin{cases} h''(x) = 0, \quad a < x < b \\ h(a) = \gamma, \quad h(b) = \delta, \end{cases}$$

est donnée par la formule suivante

$$h(x) = \frac{b\gamma - a\delta + (\delta - \gamma)x}{b - a}.$$

Démonstration

De $h''(x) = 0$ *et par intégration deux fois successive, on obtient* $h(x) = c_1 x + c_2$*. Comme* $h(a) = \gamma,\ h(b) = \delta$ *on trouve*

$$c_1 = \frac{\delta - \gamma}{b - a},\ \ c_2 = \gamma - \frac{\delta - \gamma}{b - a}a$$

et la solution devient

$$h(x) = \frac{b\gamma - a\delta + (\delta - \gamma)x}{b - a}.$$

Remarque 2.4 *De plus, si* y *est solution du problème*

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y, y'), \quad a < x < b \\ y(a) = y(b) = 0, \end{cases}$$

alors la fonction $\tilde{y}\colon = y + h$ *est solution du problème*

$$\begin{cases} \tilde{y}''(x) = \tilde{f}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') \\ \tilde{y}(a) = \gamma, \quad \tilde{y}(b) = \delta, \end{cases}$$

où $\tilde{f}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') = f(x, \tilde{y} - h, \tilde{y}' - h')$ *est une fonction possèdant les mêmes constantes de Lipschitz que la fonction* f *elle-même.*

Théorème 2.4 *Supposons que* f *est continue, lipschitzienne par rapport aux deux dernières variables, c'est-à-dire qu'il existe* $K,\ L > 0$ *tel que*

$$|f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| \leq K|y_1 - y_2| + L|z_1 - z_2|,\ \forall\,(x, y_1, z_1),\ (x, y_2, z_2) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2.$$

Alors, si

$$K\frac{(b-a)^2}{8} + L\frac{(b-a)}{2} < 1, \tag{2.7}$$

le problème (2.6) admet une unique solution $y \in C^2([a,b])$*.*

Démonstration (par le théorème du point fixe des applications contractantes de Banach)

On considère l'espace $X = C^1([a,b])$ *muni de la norme*

$$\|u\|_X = \max_{a \le x \le b} (K|u(x)| + L|u'(x)|).$$

C'est une norme équivalente à la norme $\|u\|_X = \max_{a \le x \le b} (|u(x)| + |u'(x)|)$ *;* X *est donc aussi un espace de Banach pour cette norme. On définit l'application :*

$$\begin{array}{rrcl} T: & X & \longrightarrow & X \\ & y & \longmapsto & Y \end{array}$$

où

$$Y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s, y(s), y'(s)) ds$$

et G *est la fonction de Green associée au problème (2.6) avec* $\gamma = \delta = 0$*. Alors*

- T ***est bien définie*** *car la fonction* G *est unique.*
- T ***est contractante :*** *en effet, pour tout* $(y,z) \in X$ *et tout* $x \in [a,b]$*, on a*

$$\begin{array}{rcl} |Ty(x) - Tz(x)| & = & |\int_a^b G(x,s)(f(s,y(s),y'(s)) - f(s,z(s),z'(s)))\, ds| \\ & \le & \int_a^b \max\limits_{a \le s \le b} (K|y(s) - z(s)| + L|y'(s) - z'(s)|)|G(x,s)|\, ds \\ & \le & \int_a^b \ \|y - z\|_X |G(x,s)| ds \\ & \le & \|y - z\|_X \int_a^b |G(x,s)| ds \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} |(Ty)'(x) - (Tz)'(x)| & = & |\int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,s)(f(s,y(s),y'(s)) - f(s,z(s),z'(s)))\, ds| \\ & \le & \int_a^b \max\limits_{s \in [a,b]} (K|y(s) - z(s)| + L|y'(s) - z'(s)|)|\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)|\, ds. \\ & \le & \int_a^b \ \|y - z\|_X |\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)| ds \\ & \le & \|y - z\|_X \int_a^b |\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)| ds \end{array}$$

Sachant (lemme 2.1) que pour tout $x \in [a,b]$*,*

$$\int_a^b |G(x,s)| ds \le \frac{(b-a)^2}{8} \qquad et \quad \int_a^b |\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)| ds \le \frac{b-a}{2},$$

on en déduit que

$$\|Ty - Tz\|_X \le \left(K \frac{(b-a)^2}{8} + L \frac{b-a}{2} \right) \|y - z\|_X.$$

D'après l'hypothèse (2.7), T *est contractante. En vertu du théorème du point fixe de Banach,* T *admet un point fixe unique* y*, solution du problème (2.6).*

Chapitre 3

Méthode des sous et sur-solutions et théorèmes de comparaison

3.1 Introduction

La méthode des sur et sous-solutions est une outil qui permet de s'assurer de l'existence d'une solution du problème considéré située entre une sous-solution et une sur-solution, c'est-à-dire qu'il nous informe sur l'existence et la localisation des solutions. Autrement dit, pour trouver une solution du problème considéré est remplacé par celle de trouver deux fonctions bien ordonnées que satisfont à des inégalités convenables. Pour cela nous exposons quelques théorèmes de comparaison comme introduction à utiliser cet méthode. Après, nous présentons un résultat d'existence de solution de problème de Dirichlet suivant où f ne dépend pas de la dérivée

$$\begin{cases} y'' &= f(x,y); \quad a < x < b \\ y(a) &= \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases}$$

Dans ce cas supposons l'existence de v, w respectivement sous et sur-solutions telles que $v \leq w$. En plus, supposons que f est continue sur l'ensemble

$$K = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R};\ v(x) \leq y \leq w(x)\}.$$

Ensuite, nous ajoutons un résultat d'unicité de solution cet problème lorsque on ajoute la condition f est croissante par rapport à y sur K.

De plus, nous consacrons un autre résultat d'existence de solution de problème aux limites

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'), \quad a \leq x \leq b, \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = \alpha, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = \beta \end{cases}$$

avec a_1, a_2, b_1, $b_2 \geq 0$; $a_1 + a_2 > 0$, $b_1 + b_2 > 0$ et supposons que f est continue et $k-$lipschtzienne par rapport à la 3^{ime} variable sur l'ensemble

$$K = \{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2;\ v(x) \leq y \leq w(x)\}.$$

Avant de passer à traiter de ces résultats, considèrons le problème de Sturm-Liouville non linéaire

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'), \quad a \leq x \leq b, \\ \qquad a_1 y(a) + a_2 y'(a) = \alpha, \\ \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = \beta; \end{cases} \tag{3.1}$$

où α_i, $\beta_i \geq 0$ $(i = 1,2)$ et $\alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_1 + \beta_2 > 0$.

Définition 3.1 *Une fonction v deux fois dérivable est dite sous-solution du problème (3.1) si*

$$\begin{cases} \forall\, x \in]a,b[, \quad v''(x) & \geq f(x, v(x), v'(x)), \\ \quad a_1 v(a) + a_2 v'(a) & \leq \alpha, \ \ b_1 v(b) + b_2 v'(b) \leq \beta. \end{cases}$$

Une fonction w deux fois dérivable est dite sur-solution du problème (3.1) si

$$\begin{cases} \forall\, x \in]a,b[, \quad w''(x) & \leq f(x, w(x), w'(x)), \\ \quad a_1 w(a) + a_2 w'(a) & \geq \alpha, \ \ b_1 w(b) + b_2 w'(b) \geq \beta. \end{cases}$$

3.2 Théorèmes de comparaison

(Références principales : [1, 3, 12])

Dans cette section, on considère l'équation différentielle $y'' = f(x,y,y')$ où $f \in C(I \times \mathbb{R}^2)$ avec $I = [a,b]$. est supposée qu'elle est croissante par rapport à la seconde variable. Soit v une sous-solution et w une sur-solution avec

$$v(a) \leq y(a) \leq w(a);\ v(b) \leq y(b) \leq w(b).$$

On a alors le résultat de comparaison :

Théorème 3.1 *Si l'une des inégalités est stricte, alors $v < y$.*

Démonstration

Par l'absurde, supposons $v \geq y$ en un point de I et posons $g(t) = v(t) - y(t)$; alors il existe $x_0 \in I$ tel que $g(x_0) \geq 0$, $g'(x_0) = 0$, $g''(x_0) \leq 0$ (x_0 est un point de maximum). Alors, d'après la croissance de f par rapport à la seconde variable, on a

$$\begin{aligned} f(x_0, y(x_0), y'(x_0)) = y''(x_0) &\geq v''(x_0) \\ &\geq f(x_0, v(x_0), v'(x_0)) = f(x_0, v(x_0), y'(x_0)) \\ &\geq f(x_0, y(x_0), v'(x_0)). \end{aligned}$$

Comme une des inégalités est stricte dans les définitions de y, v ou dans la croissance de la fonction f, on aboutit à une contradiction.

Pour terminer cette section, nous présentons, sans démonstration, d'autres résultats de comparaison.

Théorème 3.2 *[3] Supposons f* croissante par rapport à la seconde variable *et qu'il existe $k > 0$ vérifiant la condition de Lipschitz unilatérale par rapport à la 3ème variable :*

$$f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2) \leq k(z_1 - z_2), \quad \forall\, z_1,\ z_2 \in \mathbb{R},\ z_1 \geq z_2.$$

Alors $v \leq y \leq w$ sur I.

Corollaire 3.1 *Sous les hypothèses du théorème 3.2, le problème aux limites*

$$\begin{cases} y'' &= f(x, y, y'), \quad a < x < b \\ y(a) &= \alpha,\ y(b) = \beta. \end{cases}$$

admet au moins une solution.

Théorème 3.3 *[12] Soit v et w respectivement sous-solution et sur-solution et supposons que la fonctions f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ continues avec $\frac{\partial f}{\partial y} \geq 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} \not\equiv 0$ dans la partie*

$$K = \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2;\ v(x) \leq y(x) \leq w(x);\ z = v'(x) = w'(x)\}.$$

Alors $v \leq w$ sur $[a, b]$.

Théorème 3.4 *[1] Soit v et w respectivement sous et sur-solution vérifiant $v(a) = y(a) = w(a)$ et $v(b) = y(b) = w(b)$ où u est l'unique solution du problème aux limites :*

$$\begin{cases} (\mathcal{E}) \quad y'' &= f(x, y, y'), \quad a < x < b \\ \quad y(a) &= \alpha;\ y(b) = \beta. \end{cases}$$

Si tout problème de Cauchy associé à l'équation $(\mathcal{E})$ admet une unique solution, alors

$$v(x) < u(x) < w(x), \quad x \in]a, b[.$$

Remarque 3.1 *Ce théorème concerne les conditions au bord de type Dirichlet ; pour les conditions de Dirichlet en une extrémité et Neumann en une autre, on a respectivement les deux résultats qui suivent :*

Théorème 3.5 *[1] Admettons une condition de type Dirichlet en a et une condition de type Neumann en b. Alors, sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 3.4, on a $v(x) < y(x) < w(x)$, $\forall\, x \in]a, b]$; si de plus f est croissante par rapport à la seconde variable, on peut comparer les dérivées dans l'ordre suivant (le même ordre)*

$$v'(x) < y'(x) < w'(x), \quad \forall\, x \in]a, b[.$$

Théorème 3.6 *[1] Admettons une condition de Dirichlet en b et une condition de Neumann en a et supposons f croissante en la seconde variable. Alors le théorème 3.5 s'applique et donne*

$$v(x) < y(x) < w(x),\ \forall\, x \in [a, b[\text{ et } w'(x) < y'(x) < v'(x),\ \forall\, x \in]a, b[.$$

3.3 Résultats d'existence : le problème de Sturm-Liouville non linéaire

Retour à problème de Sturm-Liouville non linéaire (3.1) qui a été mentionné dans le deuxième chapitre pour étudier l'existence des solutions par méthode des sous et sur-solutions.
Commençons par un premier résultat d'existence :

Théorème 3.7 *Considérons le problème de Dirichlet suivant où f ne dépend pas de la dérivée*

$$\begin{cases} y'' = f(x,y); \quad a < x < b \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases} \tag{3.2}$$

Supposons l'existence de v, w respectivement sous et sur-solutions telles que $v \leq w$. Supposons que f est continue sur l'ensemble

$$K = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R};\ v(x) \leq y \leq w(x)\}.$$

Alors le problème (3.2) admet au moins une solution u telle que $v(x) \leq y(x) \leq w(x)$.

Remarque 3.2 *Comme l'ensemble K est bornée, alors f est bornée sur K. Introduisons alors la fonction $\widetilde{f}$, modifiée de f, définie de la façon suivante*

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,v) + \frac{y - v(x)}{1+y^2}, & si \quad y \leq v(x) \\ f(x,y) + \frac{y-y}{1+y^2}, & si \quad (x,y) \in K \\ f(x,w) + \frac{y - w(x)}{1+y^2}, & si \quad y \geq w(x). \end{cases}$$

Si on pose :

$$\gamma(x,y) = \begin{cases} v(x), & si \quad y \leq v(x) \\ y, & si \quad v(x) \leq y \leq w(x) \\ w(x), & si \quad y \geq w(x) \end{cases}$$

alors

$$\widetilde{f}(x,y) = f(x,y) + \frac{y - \gamma(x,y)}{1+y^2}.$$

De plus,

$$\gamma(x,y) = \max\{v(x), \min(y, w(x))\}$$

et

$$v(x) \leq \gamma(x,y) \leq w(x).$$

Avant de prouver ce théorème, nous avons lemme suivant.

Lemme 3.1 *S'il y a une solution y de $(P_{\widetilde{f}})$, alors*

$$v(x) \leq y(x) \leq w(x).$$

En d'autre termes, y est une solution de (P_f).

Démonstration

Nous avons d'abord prouver que $y(x) \leq w(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Raisonnons par l'absurde. Posons

$$g(x) = y(x) - w(x)$$

et en supposant qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que

$$g(x_0) = \max\{y(x) - w(x),\ x \in [a,\, b]\} > 0.$$

Comme

$$y(a) = \alpha$$

et

$$w(a) \geq \alpha$$

on a

$$g(a) = y(a) - w(a) \leq 0$$

donc $x_0 \neq a$.

Comme

$$y(b) = \beta$$

et

$$w(b) \geq \beta$$

on a

$$g(b) = y(b) - w(b) \leq 0$$

donc $x_0 \neq b$.

Si $x_0 \in]a, b[$ alors $g'(x_0) = 0$ et $g''(x_0) \leq 0$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} y''(x_0) &= \widetilde{f}(x_0, y(x_0)) \\ &= f(x_0, w(x_0)) > w''(x_0), \end{aligned}$$

i.e. $g''(x_0) > 0$. une contradiction.

De même on peut montrer que $v(x) \leq y(x)$ pour $x \in [a,\, b]$.

Démonstration du théorème 3.7.

Nous avons noté dans le remarque précédent que f est bornée sur K. De plus $\widetilde{f}$ est une fonction bornée sur K.

En effet, pour tout $(x,y) \in K$,

$$\begin{aligned}|\widetilde{f}(x,y)| &\leq \max_{a\leq x\leq b}\left(|f(x,y)| + \frac{y}{1+y^2} + \frac{\gamma(x,y)}{1+y^2}\right)\\ &\leq \max_{a\leq x\leq b}|f(x,y)| + \frac{1}{2} + \max_{a\leq x\leq b}\frac{\gamma(x,y)}{1+y^2}\\ &\leq \max_{a\leq x\leq b}|f(x,y)| + \frac{1}{2} + \max_{a\leq x\leq b}(|v(x)|,\, |w(x)|).\end{aligned}$$

Donc, le problème $(P_{\widetilde{f}})$ admet, d'après le théorème 2.3, chapitre 2, au moins une solution y telle que $y \in C^2([a,b])$ car $\widetilde{f} \in C^0[a,b]$.

De plus, par le lemme précédent, nous avons démontré que $v(x) \leq y(x) \leq w(x)$.

Corollaire 3.2 *(***Résultat d'existence et d'unicité***) Si $f\colon\ [a,b]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'ensemble K, croissante par rapport à y, alors le problème (3.2) admet exactement une solution $y \in C^2([a,b])$.*

Démonstration

- **(a) Existence :** Comme indiqué dans la démonstration de théorème (3.7), le problème (3.2) admet au moins une solution $y \in C^2([a,b])$.
- Pour l'unicité, soient y_1 et y_2 deux solutions du problème (3.2) et $z = y_1 - y_2$. Alors

$$\begin{cases} z'' &= f(x,y_1) - f(x,y_2), \quad a < x < b\\ z(a) &= z(b) = 0.\end{cases}$$

Multiplions l'équation ci-dessus par z et intégrons par parties sur (a,b), on obtient

$$-\int_a^b (z'(x))^2\, dx = \int_a^b (f(x,y_1) - f(x,y_2))\,(y_1 - y_2)\, dx.$$

Or, f est croissante par rapport à y donc $\int_a^b (z'(x))^2\, dx \leq 0$. Par conséquent $z' = 0$ et $z(x) = z(a) = 0$, d'où $y_1 = y_2$. Pour le cas où f dépend de la dérivée, on a le théorème plus général suivant :

Théorème 3.8 *Soit le problème aux limites*

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'), \quad a \leq x \leq b,\\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = \alpha,\\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = \beta \end{cases} \tag{3.3}$$

avec a_1, a_2, b_1, $b_2 \geq 0$; $a_1 + a_2 > 0$, $b_1 + b_2 > 0$ et supposons satisfaites les hypothèses suivantes :

(i) *Il existe v, w fonctions de classe C^1 sous et sur-solution avec $v \leq w$ sur $[a, b]$.*

(ii) *f est continue et $k-$lipschtzienne par rapport à la 3^{ime} variable sur l'ensemble*

$$K = \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2;\ v(x) \leq y \leq w(x)\}.$$

Alors le problème (3.3) admet au moins une solution $y \in C^2([a, b])$ telle que

$$v(x) \leq y(x) \leq w(x),\ \forall\, x \in [a, b].$$

Démonstration

Soit un réel $c > \max\limits_{a \leq x \leq b}(|v'(x)|, |w'(x)|)$ et considérons pour $(x, y, z) \in K$ une première modification $f^\star$ de la fonction f définie par :

$$f^\star(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, c), & \text{si} \quad z \geq c \\ f(x, y, z), & \text{si} \quad |z| \leq c \\ f(x, y, -c), & \text{si} \quad z \leq -c \end{cases}$$

et étendue à $[a, b] \times \mathbb{R}$ par la fonction

$$f^{\star\star}(x, y, z) = \begin{cases} f^\star(x, v(x), z), & \text{si} \quad y \leq v(x) \\ f^\star(x, w(x), z), & \text{si} \quad y \geq w(x) \end{cases}$$

puis une seconde modification $\widetilde{f}$ de la fonction $f^{\star\star}$ donnée par :

$$\widetilde{f}(x, y, z) = f^{\star\star}(x, (\gamma(x, y)), z) + \frac{y - \gamma(x, y)}{1 + y^2}$$

où, rappelons-le, $\gamma(x, y) = \max\{v(x), \min(y, w(x))\}$. Alors pour tout $(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2$, on a :

$$|\widetilde{f}(x, y, z)| \leq \max_{a \leq y \leq b, v(x) \leq y \leq w(x), -c \leq z \leq c} |f(x, y, z)| + \frac{1}{2} + \max_{a \leq x \leq b}(|v(x)|, |w(x)|).$$

• La fonction $f^\star$ est aussi $k-$lipschitzienne, en effet, pour $|z_1| \leq c$, par exemple (les autres cas se traitent de la même manière), et $z_2 \geq c$ on a :

$$\begin{aligned} |f^\star(x, y, z_1) - f^\star(x, y, z_2)| &= |f(x, y, z_1) - f(x, y, c)| \\ &\leq k|z_1 - c| = k(c - z_1) \\ &\leq k(z_2 - z_1) = k|z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

Par suite, $\widetilde{f}$ est aussi $k-$lipschitzienne et bornée, alors d'après le théorème 2.2, le problème $(P_{\widetilde{f}})$ admet au moins une solution y.

• Nous pouvons prouver que $v(x) \leq y(x) \leq w(x)$ comme indiqué dans la démonstration de lemme 3.1.

Corollaire 3.3 *Si* $f\colon\ [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue,* croissante par rapport à y, *alors le problème de Neumann*

$$\begin{cases} y'' &= f(x,y), \quad a < x < b \\ y'(a) &= \gamma, \quad y'(b) = \delta \end{cases} \tag{3.4}$$

admet une solution si et seulement s'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ *telle que*

$$\int_a^b f(x,c)\,dx = \delta - \gamma. \tag{3.5}$$

Démonstration

(a) Condition nécessaire. Soit $y \in C^2([a,b])$ une solution du problème (3.4) ; on a immédiatement :

$$\int_a^b f(x,y(x))\,dx = \delta - \gamma.$$

La solution y étant bornée, soit $m \leq y(x) \leq M$, $\forall\, x \in [a,b]$. Comme f est croissante par rapport à y, on a :

$$\int_a^b f(x,m)\,dx \leq \int_a^b f(x,y(x))\,dx \leq \int_a^b f(x,M)\,dx.$$

Introduisons à présent la fonction continue F définie par

$$\begin{aligned} F\colon\ [m,M] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto F(t) = \textstyle\int_a^b f(x,t)\,dx. \end{aligned}$$

En vertu du théorème intermédiaire, comme

$$\int_a^b f(x,m)\,dx \leq \delta - \gamma \leq \int_a^b f(x,M)\,dx$$

i.e.

$$F(m) \leq \delta - \gamma \leq F(M)$$

il existe une constante $c \in [m, M]$ telle que $F(c) = \delta - \gamma$, d'où l'égalité (3.5).

(b) Condition suffisante. Etant donné la condition (3.5), construisons une sous et une sur-solution au problème (3.4). Soit φ la solution du problème linéaire

$$\begin{cases} \varphi'' &= f(x, c), \\ \varphi'(a) &= \gamma; \quad \varphi'(b) = \delta. \end{cases}$$

Soit $k_1,\ k_2$ deux constantes telles que

$$k_1 + \varphi(x) \leq c \leq k_2 + \varphi(x),\ \forall\, x \in [a, b]$$

puis considérons les fonctions :

$$v(x) = k_1 + \varphi(x),\ w(x) = k_2 + \varphi(x).$$

Elles vérifient

$$\begin{cases} v'' = \varphi'' = & f(x, c) \geq f(x, v(x)), \\ v'(a) = \varphi'(a) = & \gamma, \quad v'(b) = \varphi'(b) = \delta \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} w'' = \varphi'' = & f(x, c) \leq f(x, w(x)), \\ w'(a) = \varphi'(a) = & \gamma, \quad w'(b) = \varphi'(b) = \delta. \end{cases}$$

D'après le théorème 3.8, le problème (3.4) admet au moins une solution.

Exemple 3.1 *Le problème de Neumann linéaire*

$$\begin{cases} y''(x) = h(x), \quad a < x < b \\ y'(a) = \gamma; \quad y'(b) = \delta \end{cases}$$

admet une solution si et seulement si $\int_a^b h(x)\, dx = \delta - \gamma$. On retrouve ainsi un résultat déjà obtenu au chapitre 1 pour les problèmes linéaires (Alternative de Fredholm).

Remarque 3.3 *Contrairement au problème de Dirichlet, l'unicité d'une solution n'est plus assurée dans le cas de conditions de type Neumann. Par exemple, la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ 0, & |x| \leq 1 \\ x + 1, & x \leq -1 \end{cases}$$

est continue, croissante et vérifie $\int_{-a}^{+a} f(x,0)\,dx = 0$ *avec* $a > 1$. *Cependant,* $\forall\, c \in [-1,+1]$, *la fonction constante* $y(x) \equiv c$ *est solution du problème :*

$$\begin{cases} y'' &= f(x,y(x)), \quad -a < x < +a \\ y'(-a) &= y'(+a) = 0. \end{cases}$$

Chapitre 4

Quelques applications - Résultats complémentaires -

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence des solutions de problème suivant

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}([a, b] \times \mathbb{R}^2)$. En ajoutant des conditions suffisantes des types -Croissance monomiale- Croissance sous linéaire- Croissance quadratique pour obtenir les résultats souhaités en utilisant les outils des chapitres précédents de ce mémoire.
Ensuite, nous ajoutons un résultat d'existence pour le problème non linéaire :

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}([0, 1] \times \mathbb{R}^2)$ est continûment dérivable par rapport au couple (y, z). En ajoutant d'autres conditions pour obtenir le résultat souhaité et qu'en utilisant méthode de sous-solution, sur-solution et méthode de point fixe.

4.2 Problème 1 (Croissance monomiale)

On considère le problème à deux points :

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

où $f \in \mathcal{C}([a, b] \times \mathbb{R}^2)$.

Théorème 4.1 *Supposons que le problème (4.1) vérifie la condition de croissance suivante :*
$(\mathcal{H})$ $\exists\, k_1,\, k_2,\, k_3 \geq 0$ $(k_1 + k_2 > 0)$,

$$|f(x, y, z)| \leq k_1|y| + k_2|z| + k_3,\ \forall\, (x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2.$$

Si la somme $k_1 + k_2$ est assez petite, le problème (4.1) *admet au moins une solution.*

Remarque 4.1 **(i)** *La condition $(\mathcal{H})$ inclut les croissances monomiales en x ou en y ainsi que la condition :*

$$|f(x, y, z)| \leq k_1|y| + k_2|z| + g(x)$$

avec $g \in \mathcal{C}([a, b])$.

(ii) *Le cas $k_1 = k_2 = 0$ est le théorème* 2.4*, chapitre 2.*

(iii) *Les conditions aux bords de type Dirichlet peuvent être remplacées par des conditions de type Neumann en un point et Dirichlet en l'autre.*

Démonstration :

Soit l'espace de Banach $X = \mathcal{C}^1([a, b])$ muni de la norme du sup et $T\colon X \to X$ l'application définie par :

$$(Ty)(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, y(s), y'(s))\, ds$$

où G est la fonction de Green associée à l'opérateur y'' avec conditions Dirichlet (exemple 2.1, chapitre 2). En vertu de l'hypothèse $(\mathcal{H})$, on a, $\forall\, x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |Ty(x)| &\leq \int_a^b |G(x, s)|(k_1|y(s)| + k_2|y'(s)| + k_3)\, ds. \\ |(Ty)'(x)| &\leq \int_a^b |\frac{\partial G}{\partial x}(x, s)|(k_1|y(s)| + k_2|y'(s)| + k_3)\, ds. \end{aligned}$$

Sachant que $\int_a^b |G(x,s)|ds \leq M_0$ et $\int_a^b |\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)| \leq M_1$ (lemme 2.1, chapitre 2), il vient, en posant $M = \max(M_0, M_1)$ et $k = k_1 + k_2$:

$$\|Ty\|_X \leq M(k_1\|y\|_X + k_2\|y\|_X + k_3) = M(k\|y\|_X + k_3).$$

Supposons $0 < k < \frac{1}{M}$ et posons $R = \frac{k_3 M}{1-kM}$, alors

$$(\|y\|_X \leq R \Rightarrow \|Ty\|_X \leq R)\,.$$

Par suite T envoie la boule fermée B_R dans elle-même. De plus,

1. T est continue car f est continue.
2. T est compacte.

D'après le théorème de Schauder, T admet au moins un point fixe $y \in \mathcal{C}^1([a,b])$ solution du problème (4.1). Enfin, comme $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ alors $y \in \mathcal{C}^2([a,b])$.

4.3 Problème 2 (Croissance sous linéaire)

Théorème 4.2 *Supposons satisfaite l'hypothèse suivante :*
$\exists\, k_1,\, k_2,\, k_3 \geq 0 \;\; (k_1 + k_2 > 0),\; \exists\, \gamma \in]0,1[$ *tel que :*

$$|f(x,y,z)| \leq k_1|y|^\gamma + k_2|z|^\gamma + k_3,\; \forall\,(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2.$$

Alors, le problème (4.1) *admet au moins une solution.*

Démonstration :

En conduisant la même démonstration que dans le problème précédent, on obtient, pour tout $\|y\|_X \leq R$:

$$\|Ty\|_X \leq M(k\|y\|_X^\gamma + k_3) \leq M(kR^\gamma + k_3).$$

Pour montrer que T envoie B_R dans B_R, il suffit de vérifier l'assertion suivante

$$\forall\,(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^+)^2,\; \exists\, R_0 > 0 \text{ tel que } R_0 - \alpha R_0^\gamma = \beta.$$

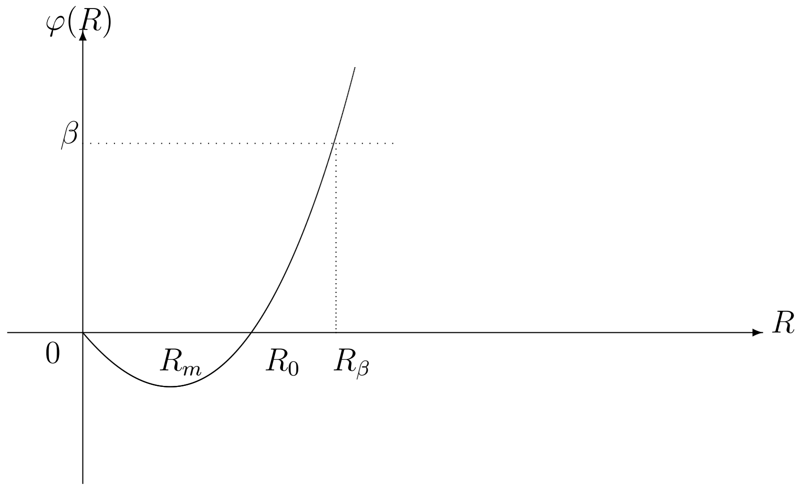

FIGURE 4.1 –

Le reste de la démonstration est inchangé. Étudions la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(R) = R - \alpha R^\gamma$ avec $\alpha > 0$ et $0 < \gamma < 1$. On a les propriétés suivantes :

$$\varphi'(R) = 1 - \alpha\gamma R^{\gamma-1} = 0 \Leftrightarrow R = e^{-\frac{1}{\gamma-1}\ln(\alpha\gamma)} = R_m.$$

De plus,

$$\varphi'(R) \geq 0 \Leftrightarrow R \geq R_m,$$

et

$$\varphi(0) = 0, \ \lim_{R\to+\infty} \varphi(R) = +\infty.$$

La fonction φ a donc l'allure représentée dans la figure 4.1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que

$$\forall\, \beta > 0, \ \exists\, R_\beta > 0 : \ \varphi(R_0) = \beta,$$

d'où la relation (4.3).

4.4 Problème 3 (Croissance quadratique)

Théorème 4.3 *Supposons que le second membre f vérifie l'une des hypothèses suivantes :*
$\exists\, k_1,\, k_2,\, k_3 \geq 0,\ \forall\, (x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2$ *:*

- *ou bien* $|f(x, y, z)| \leq k_1|y| + k_2|z|^2 + k_3$

- *ou bien* $|f(x,y,z)| \leq k_1|y|^2 + k_2|z| + k_3$
- *ou bien* $|f(x,y,z)| \leq k_1|y|^2 + k_2|z|^2 + k_3$

c'est-à-dire $|f(x,y,z)| \leq k_1|y|^m + k_2|z|^n + k_3,$ *avec* $(n,m) \in \{1,2\}^2$.
S'il existe k_1 *et* k_2 *sont assez petits, le problème* (4.1) *admet au moins une solution.*

Démonstration :

Afin d'appliquer le théorème du point fixe de Schauder, on suit le même raisonnement que pour les problèmes précédents ; il suffit alors de trouver une boule fermée $B = B(0,R)$ telle que l'application T envoie B dans elle-même, ce qui revient à vérifier que l'inéquation du second degré suivante admet au moins une solution positive

$$\alpha R^2 + \beta R + \gamma \leq R \tag{4.2}$$

où les constantes α et β sont à choisir convenablement ($\alpha > 0,\ \beta \geq 0$). On vérifie que si $0 < \alpha < \frac{(\beta-1)^2}{4\gamma},\ \ 0 \leq \beta \leq 1$, alors il existe $k_2 > k_1 > 0$ tel que $\forall\, R \in [R_1, R_2]$, l'inéquation (4.2) admet une solution positive (avec avec R_1, R_2 sont des solutions d'équation associée a l'inéquation (4.2)).

4.5 Problème 4 (Croissance quadratique, suite)

Lemme 4.1 *(Lemme de Nagumo-Bernstein)[9]*
Soit $I =]a,b[$, $f \in C(\overline{I} \times \mathbb{R}^2,\ \mathbb{R})$ *et* $h \in C(\mathbb{R}^+,\ \mathbb{R}^+_\star)$ *une fonction satisfaisant à la condition de croissance de Nagumo-Bernstein :*

$$\int^{\infty} \frac{s}{h(s)} ds = +\infty. \tag{4.3}$$

et il existe $M > 0$, *tel que* $\forall\, x \in \overline{I},\ |y| \leq M,\ z \in \mathbb{R},\ |f(x,y,z)| \leq h(|z|)$.

Soit y *une solution de l'équation différentielle* $y'' = f(x,y,y')$ *telle que* $|y(x)| \leq M,\ \forall\, x \in \overline{I}$. *Alors il existe* $N = N(M,h,I) > 0$ *tel que* $|y'(x)| \leq N,\ \forall\, x \in I$.

Remarque 4.2 *L'hypothèse (4.3) est une hypothèse de croissance de type Nagumo-Bernstein ; elle est satisfaite si* $\int^{\infty} \frac{s}{h(s)} ds = +\infty$, *ce qui est en particulier vraie pour toute fonction lipschitzienne.*

Théorème 4.4 *Supposons que le second membre f vérifie les hypothèses suivantes :*
$\exists\, k_1,\, k_2,\, k_3 > 0$ *telles que :*

(H1) $|f(x,y,z)| \leq k_1|z|^2 + k_2,\ \forall\,(x,y,z) \in [a,b]\times\mathbb{R}^2$

(H2) f *admet une dérivée partielle par rapport à y satisfaisant*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \geq k_3 > 0,\ \forall\,(x,y,z) \in [a,b]\times\mathbb{R}^2.$$

(H3) $f(x,0,0) > 0,\ \ \forall\, x \in [a,b]$.

Alors, le problème (4.1) *admet au moins une solution* $y \in \mathcal{C}^1([a,b])$.

Démonstration :

On va monter cet résultat dans les étapes suivantes.

Etape 1.

D'après le théorème des accroissement finis et l'hypothèse (H2), il existe $\xi \in (0,y)$ tel que

$$f(x,y,0) = f(x,0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi,0);$$

alors, pour tout y tel que $|y| > \max\limits_{a\leq x\leq b} \frac{f(x,0,0)}{k_3} :\ = M_0$, on a :

$$yf(x,y,0) = yf(x,0,0) + y^2\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi,0) \geq yf(x,0,0) + k_3y^2 > 0.$$

Etape 2.

Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $|y(x_0)| = \max\limits_{a\leq x\leq b} |y(x)|$, alors $|y(x_0)| \leq M_0$, sinon $y(x_0)f(x_0,y(x_0),0) > 0$ entraînant $y(x_0)y''(x_0) > 0$, ce qui contredit le fait qu'en x_0, la fonction y présente un extrémum.

En déduire que $|y(x)| \leq M_0,\ \forall\, x \in [a,b]$.

Etape 3.

Comme l'hypothèse (H1) qui est une hypothèse de croissance de type Nagumo-Bernstein (voir lemme 4.1), la fonction h dans cet lemme est définie par $h(s) = k_1 s + k_2$ et comme $|y(x)| \leq M_0,\ \forall\, x \in [a,b]$, donc il existe $M_1 = M_1(M_0,h) > 0$ tel que $|y'(x)| \leq M_1,\ \forall\, x \in [a,b]$.

Etape 4.

On considère l'espace $X = \mathcal{C}^1([a,b])$ muni de la norme

$$\|y\|_X = \max\left(\sup_{a\leq x\leq b}|y(x)|, \sup_{a\leq x\leq b}|y'(x)|\right)$$

ainsi que l'application T défini comme dans section 1, vérifie les conditions de théorème de Schauder.

En effet, considérons la boule fermée de X

$$B = \{y \in X : \ \|y\|_X \leq \max(M_0, M_1)\}.$$

Alors, d'après la partie (I), l'application T envoie X dans B. De plus, T est continue car f l'est. Enfin T est compacte. Donc T admet, par le théorème du point fixe de Schauder, au moins un point fixe $y \in \mathcal{C}^1([a,b])$ solution du problème (4.1).

Remarque 4.3 *Le résultat du problème reste vrai si les conditions de Dirichlet sont remplacées par les conditions aux bords suivantes :*

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

où les constantes α_i, β_i $(i = 1, 2)$ vérifient l'une des restrictions :

- **(i)** $\alpha_1, \ \alpha_2, \ \beta_1, \ \beta_2 > 0$
- **(ii)** $\alpha_2 = 0, \ \beta_1 \geq 0$ *et* $\beta_2 > 0$
- **(iii)** $\beta_2 = 0, \ \alpha_1 \geq 0$ *et* $\alpha_2 > 0$
- **(iv)** $\alpha_1 = 0, \ \beta_1 > 0$ *et* $\beta_2 \geq 0.$

Exemple 4.1 *Étudions le problèmes de Dirichlet posé sur* $[0, 1]$ *:*

$$\begin{cases} y'' = y'^2 + 2y + 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

La fonction $f(x, y, z) = 1 + 2y + z^2$ *vérifié les hypothèses* $(H1) - (H3)$ *:*

(H1) $|f(x,y,z)| \leq 2|y| + |z| + 1 \leq |z| + 2, \ \forall (x,y,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2.$
Ici, $k_1 = 1, \ k_2 = 2, \ M_0 = \frac{1}{2}$.

(H2) f *admet une dérivée partielle par rapport à* y, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2$ *satisfaisant*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \geq 2 > 0, \ \forall (x,y,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2.$$

Ici, $k_3 = 2$.

(H3) $f(x,0,0) = 1 > 0, \ \forall x \in [0,1]$.
Alors,le problème proposé possède au moins une solution.

4.6 Problème 5 (Méthodes diverses)

On considère le problème de Dirichlet non linéaire :

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'), \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

où $f \in \mathcal{C}([0,1] \times \mathbb{R}^2)$ est continûment dérivable par rapport au couple (y,z).

Théorème 4.5 *Supposons que la fonction* f *de problème (4.4) vérifie les hypothèses suivantes :*

(H1) $f(x,0,0) \geq 0, \forall x \in [0,1]$ *et* $M_0 \colon = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} f(x,0,0) > 0$.

(H2) $\exists k_1 > 0, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \geq k_1, \forall (x,y,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$.

(H3) $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \leq 2, \exists k_2 > 0 : |f(x,y,z)| \leq k_2(1 + |z|^\alpha), \forall (x,y,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$.

Alors, le problème (4.4) *admet au moins une solution.*

Remarque 4.4 *En raisonnant cet résultat par deux méthodes différentes (méthode de sous et sur-solutions ; méthode de point fixe).*

Démonstration :

Partie (I) Méthode de sous et sur-solutions.

Nous le prouvons en trois étapes.

Etape 1. Montrons que $\exists\, K > 0,\ yf(x,y,0) > 0,\ \forall\, x \in [0,1]$ et $\forall\, y \in \mathbb{R},\ |y| > K$.

En vertu du théorème des accroissements finis, il existe θ compris entre 0 et y tel que

$$f(x,y,0) = f(x,0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,\theta,0).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} yf(x,y,0) &= yf(x,0,0) + y^2\frac{\partial f}{\partial y}(x,\theta,0) \\ &\geq yf(x,0,0) + y^2 k_1 > 0 \end{aligned}$$

pour tout y tel que $|y| > K$: $= \frac{1}{k_1}\max\limits_{0\leq x\leq 1} f(x,0,0) = \frac{M_0}{k_1}\cdot$

Etape 2. On déduire une sous et une sur-solution au problème (4.4).

Les fonctions $v = -K$ et $w = +K$ vérifient, en vertu de la croissance de la fonction f par rapport à l'argument y :

$$\begin{cases} 0 = v'' \geq f(x,-K,0) \\ v(0) = v(1) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = w'' \leq f(x,+K,0) \\ w(0) = w(1) > 0. \end{cases}$$

Ce sont donc des sous et sur-solutions respectivement.

Etape 3. Montrons que le problème (4.4) admet au moins une solution.

Le problème (4.4) admet, d'après l'étape 2, une sous et une sur-solution ; de plus la fonction f vérifie, par rapport au 3ème argument, une condition de croissance de type Nagumo-Bernstein ; en effet,

$$\int_1^\infty \frac{s}{1+s^\alpha}\,ds \geq \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{s}{s^\alpha}\,ds \longrightarrow +\infty \text{ si } \alpha < 2;$$

le cas $\alpha = 2$ donne également $\frac{1}{2}\ln(1+s^2)|_1^\infty \longrightarrow +\infty$. Par suite, le problème (4.4) admet au moins une solution $y \in \mathcal{C}^2([0,1])$ avec $|y| \leq K$.

En plus, Etant donné l'hypothèse (H3), l'estimation de la dérivée y' d'une solution y s'obtient par le lemme 4.1, que :

$$\exists\, M_1 = M_1(K,k_2,\alpha) > 0 :\ |y'(x)| \leq M_1,\ \forall\, x \in (0,1).$$

Partie (II) Méthode de point fixe.

On suppose que la fonction f vérifie les hypothèses (H2) et (H3). Dans l'espace de Banach $X = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme du sup, considérons l'application T définie par

$$(Ty)(x) = \int_0^1 G(x,s) f(s, y(s), y'(s)) ds$$

où G est la fonction de Green du problème

$$y'' = 0,\ y(0) = y(1) = 0,$$

c'est à dire (lemme 2.1, chapitre 2)

$$G(x,y) = \begin{cases} s(t-1), & 0 \leq s \leq t \\ t(s-1), & t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Maintenant, Nous le prouvons en trois étapes.

Etape 1. Montrons que si $0 < k_2 < 1$, alors il existe $R > 0$ tel que T envoie la boule fermée $\overline{B}(0,R)$ dans elle même.

Grâce à l'hypothèse (H3) et à lemme 2.1, chapitre 2, on a les estimations

$$|(Ty)(x)| \leq k_2 \int_0^1 |G(x,s)|(|y'(s)|^\alpha + 1)\, ds \leq \frac{k_2}{8}(1 + \|y\|_X^\alpha).$$

$$|(Ty)'(x)| \leq k_2 \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)|(|y'(s)|^\alpha + 1)\, ds \leq \frac{k_2}{2}(1 + \|y\|_X^\alpha).$$

Par suite,

$$\|Ty\|_X \leq \frac{k_2}{2}(1 + \|y\|_X^\alpha) \leq \frac{k_2}{2}(1 + R^\alpha) \quad \text{si } \|y\|_X \leq R.$$

Par suite, T envoie la boule fermée $B(0,R)$ dans elle-même si

$$\frac{k_2}{2}(1 + R^\alpha) \leq R \Leftrightarrow \frac{1 + R^\alpha}{R} \leq \frac{2}{k_2},$$

ce qui est possible si $\frac{2}{k_2} \geq 2$ soit $0 < k_2 \leq 1$.

Etape 2. Montrons que T est complètement continue.

Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans X, la suite $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi dans X d'après l'étape 1, l'équation dans (4.4) donne que $(Ty_n)''$ est bornée indépendamment de n ($|(Ty_n)''| \leq k_3(1 + |y_n'|^\alpha)$) ; ce qui donne la compacité de l'opérateur T ; quant à la continuité de l'opérateur T, elle se déduit aisément du théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Etape 3. On déduire l'existence de solution au problème (4.4).

D'après le théorème du point fixe de Schauder, T admet donc au moins un point fixe ; d'où une solution du problème (4.4).

Conclusion et perspective

Dans ce travail, nous avons traité des quelques problèmes aux limites du second ordre associés à des équations différentielles posées sur des intervalles bornés où les conditions aux bords à deux points. Au départ, nous avons introduit le concept de fonction de Green après nous présentons quelques résultats généraux pour des modèles des problème aux limites non linéaire du second ordre. En établissant des conditions suffisantes pour obtenir l'existence de solutions. En plus, nous exposons quelques thérèmes de comparaison comme introduction à utiliser les méthode des sous et sur-solutions pour étudier l'existence et l'unicité par fois des solutions de problème proposée. Finalement, nous avons étudié, également en plus de nos études précédentes dans ce travail, quelques résultats complémentaires de chapitres précédents de plusieurs types selon des conditions sur les fonctions imposées.

Dans les différents chapitres de cette recherche, pour étudier les problèmes proposées, nous avons transformés chaque problème en une équation opérationnelle, dans ce cas on utilise la fonction de Green associée au problème imposé avec appliquer la théorie de point fixe pour prouver les résultats fournis. D'autres fois nous avons utilisé une méthode de sous et sur-solutions pour démontrer nos résultats.

Ce travail est venu clarifier certaines méthodes pour l'existence et l'unicité des solutions à quelques problèmes aux limites non linéaires. Son objectif est de fournir le bénéfice souhaité aux chercheurs dans ce domaine d'étude ou d'utiliser ses résultats pour des applications dans différents domaines.

Nous espérons que cette recherche profitera aux chercheurs qui étudient dans la spécialité des équations différentielles, et qu'ils auront du soutien dans d'autres recherches qui sont un prolongement de cette recherche.

Bibliographie

[1] P. B. Bailey, L. F. Shampine, P. E. Waltman, *Nonlinear two point Boundary Value Problems*, Academic Press (1968).

[2] P. B. Bailey, L. F. Shampine, P. E. Waltman, *Existence and uniqueness of solutions of the second order boundary value problem*, Bull. A.M.S.72, 96 (1966).

[3] Bernfeld S.R. & Lakhmikantham V., *An Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems*, Academic Press (1974).

[4] L. Brüll, J. Mawhin, *Finiteness of the set of solutions of some boundary-value problems for ordinary differential equations*, Archivum aMthematicum, Vol. 24 (1988), No. 4, 163-172.

[5] W.E. Boyce & R.C Diprima, *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons (1986).

[6] K.Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1985.

[7] N. FUKAGAI, T. KUSANO & K. YOSHIDA *Some Remarks on the Supersolution-Subsolution Method for Superlinear Elliptic Equations*, JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 123, 131-141 (1987).

[8] A.Granas & J.Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-verlag, New-York, 2003.

[9] R. Guenther, J. Lee, A. Granas, *Nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations*, Rozprawy Matematyczne tom/nr w serii : 244 wydano : 1985.

[10] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons (1964).

[11] H. B. KELLER, *Existence theory for two point boundary value problems*, Bull. A.M.S.72, 728 (1966).

[12] S. Ladas, V. Lakhmikantham & A. Vatsala, *Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations*, Pitman Advanced Publishing Program (1985).

[13] L.C. Piccinini, G. Stampacchia & G. Vidossich, *Ordinary Differential Equations in* $\mathbb{R}^n$*. Problems and Methods*, Springer Verlag (1984).