



République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
ELOUED**

FACULTÉ DESSCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: :Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Thème

**Etude d'un Problème Statique de
contact avec frottement**

Présenté par:

BEKKOUCHE Mennoubia

CHELBI Khansa

HADJ SAD Amane

Sous la supervision de :

TEDJANI HADJ Ammar

Année universitaire: 2014 – 2015

Dédicace

je dédie ce modeste travail

A ma chère mère, la personne qui a beaucoup sacrifié pour moi sans
elle je n'aurais eu la volonté d'atteindre ce niveau

A mon père avec toute ma reconnaissance

A toute ma famille

A tous mes frères et mes soeurs

A tous mes amis

A tous les enseignants et les éducateurs qui ont contribué à
ma formation durant tout le parcours de mes études jusqu'à ce jour

Bekkouche Mennoubia

Chelbi Khansa

Hadj sad Amane

Notations générales

IN	Ensembles des entiers naturels.
IR	Ensembles des nombres réels .
c	Constante réelle strictement positive
$\langle \cdot, \cdot \rangle_v$	Le produit scalaire sur V défini: $\langle v, \omega \rangle_v = \langle v^1, \omega^1 \rangle_{v(\Omega^1)} + \langle v^2, \omega^2 \rangle_{v(\Omega^2)}$
$\overline{\gamma}^e : \mathcal{H}_1^e \rightarrow H'_{T^e}$	L'application trace définie sur $\mathcal{H}_1^e$
$\overline{R}^e : H'_{T^e} \rightarrow \mathcal{H}_1^e$	L'inverse à droite de l'application $\overline{\gamma}^e$
$\Omega^e \quad \varrho = \overline{1.2}$	Ouvert de $IR^N (N = 1.2.3)$, parfois domaine Lipchitzien
$\overline{\Omega}^e$	L'adhérence de Ω^e
Γ^e	La frontière de Ω^e
$\Gamma_i^e (i = 1.2.3)$	Les parties de frontière Γ^e
$\text{mes}_i^{(\varrho\Gamma)}$	Mesure de Lebesgue (N-1) dimensionnelle de Γ_i^e
$d \Gamma_i^e$	Mesure superficielle sur Γ_i^e
η^e	Normale extérieure unitaire à Γ_i^e
v_η^e, v_τ^e	Les composantes normales et tangentielles de champ vectoriel v^e défini sur Ω^e
$C^1(\Omega^e)$	L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω^e
$D(\Omega^e)$	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω^e
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, T}$	Le produit de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(T)$ et $H^{\frac{1}{2}}(T)$
$V = V(\Omega^1) \times V(\Omega^2)$	
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{v(\Omega^e)}$	Le produit scalaire sur $V(\Omega^e)$ défini par : $\langle v^e, \omega^e \rangle_{v(\Omega^e)} = \langle \varepsilon(v^e), \varepsilon(\omega^e) \rangle_{\mathcal{H}^e}$

Table des matières

Notations générales	ii
Introduction générale	1
1 Formulation du Problème et Hypothèses	3
1.1 Formulation du Problème	4
1.1.1 Position du problème:	4
1.1.2 Formulation mathématique du problème	5
1.2 hypothèses	6
1.3 Formulation variationnelles	9
2 Existence et unicité	16
2.1 Existence de la solution du problème p	16
2.2 Unicité de la solution du problème P:	20
3 Annexe	22
3.1 Rappels de mécanique des milieux continus	23
3.1.1 Contraintes et Déformations	23
3.1.2 Conditions aux limites	24
3.2 Rappels d'analyse	26
3.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert	27
3.2.2 Fonctions convexes - Semi-continuité inferieure	30
3.2.3 Differentiabilité - Sous-différentiabilite	31
3.2.4 Inéquations variationnelles elliptiques	32

3.2.5	Compléments divers	34
3.2.6	Espaces fonctionnels	35
3.2.7	Espaces de distributions	35
3.2.8	Espaces les a l'opérateur déformation	38
Conclusion Générale		39
Bibliographie		40

Introduction générale

Contact de frottement entre corps déformables peut être souvent trouvé dans l'industrie et la vie quotidienne tels que des roues de train avec les rails , une chaussure avec le sol, plaques tectoniques , le système de freinage de la voiture , etc , Des progrès considérables ont été réalisés avec la modélisation et l'analyse des problèmes de contact statiques . La mathématique , mécanique et l'état de l'art numérique peut être trouvé dans les procédures récentes Raous [21]. Seulement récemment , cependant, ont des problèmes quasi-statiques et dynamiques été considérés. La raison réside dans les difficultés considérables que le processus de contact de friction présente dans la modélisation et l'analyse en raison des phénomènes de surface complexes impliqués.

Modèles généraux de contact de frottement thermo élastique , dérivée des principes thermodynamiques , ont été obtenus dans [25] , Problèmes de contact avec quasi-statiques respect normale et de frottement ont été considérés dans [3], où l'existence de solutions faibles a été prouvé. L'existence d'une solution faible au, techniquement très compliqué, problème avec l'état de contact de Signorini a été établi récemment dans [10]. Le problème de contact de frottement quasi-statique pour les matériaux viscoélastiques peut être trouvée dans [23]. et l'une des matières élastovisco plastiques dans [22]. Problèmes dynamiques avec respect normale ont été d'abord considérés dans [19]. L'existence de solutions faibles à des problèmes de contact thermodynamiques avec la génération de chaleur de friction ont été prouvés dans [1] et lorsque l'usure est prise en compte dans [2]. Dans ce travail, nous considérons le processus de contact de frottement qui est sollicité par les forces de volume et de surface tractions, entre deux corps de élastiques. Loi de comportement du matériau est supposé être non linéaire élastique. Le contact est modélisée avec un respect normale et le frottement avec la loi de Coulomb associé de frottement sec. La condition de contact de la conformité normale a été proposé dans [19] et utilisés dans [1] et [15]. Cette condition permet l'interpénétration de la surface du corps dans la fondation. Dans [19] la conformité normale était justifié en considérant l'interpénétration et la déformation des aspérités de surface. Il a été supposé avoir la forme d'une loi de puissance. Nous nous référons à [18] pour l'existence de problèmes statiques avec Signorini et de conditions de Coulomb.

Nous utilisons une expression générale de la conformité normale, est similaire à celui dans [2]. En partie, l'introduction de la condition de contact de la conformité normale, dans des problèmes d'évolution, est motivée par le constat que de condition de Signorini, tandis élégant et facile à expliquer, conduit à des vitesses de surface discontinues qui sont associés à des tractions en finis sur la surface de contact. Ceci est clairement physiquement irréaliste; elle conduit à de graves difficultés mathématiques et numériques qui ne représentent pas nécessairement le processus physique. La condition de la conformité normale prédit grande, mais, les forces de contact finis. En tout cas, nous ne disposons pas encore d'une condition de contact tout à fait satisfaisante, et peut-être il est irréaliste de s'attendre à un seul état pour modéliser la grande variété de phénomènes rencontrés en contact de friction.

Le papier est organisé comme suit. Section 2 contient les notations et certains matériaux préliminaire. Dans la section 3 nous décrivons le modèle pour le processus, Dans la section 3 nous décrivons le modèle pour le processus, mis sous une forme variationnelle, énumérer les hypothèses sur les données du problème et préciser nos principaux résultats. Dans la section 4, en se basant sur la théorie des inégalités variationnelles elliptiques et l'application de fixes points théorèmes, nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution.

Chapitre 1

Formulation du Problème et Hypothèses

Résumé

Dans ce chapitre, on considère un problème statique de contact avec frottement entre deux corps déformables ayant une loi de comportement non linéaire. En utilisant la formule de Coulomb et l'intégrale de coulomb on établit deux formulations variationnelles du problème, (notés P_1, P_2) la première formulation ne dépend que du champ de déplacement, tandis que la deuxième dépend uniquement du tenseur de contraintes.

En utilisant le Dans ce chapitre, on considère un problème statique de contact avec frottement entre deux corps déformables ayant une loi de comportement non linéaire. En utilisant la formule de Coulomb et l'intégrale de coulomb on établit deux formulations variationnelles du problème, (notés P_1, P_2) la première formulation ne dépend que du champ de déplacement, tandis que la deuxième dépend uniquement du tenseur de contraintes.

En utilisant le théorème de Stampachia, on démontre que chacun des problèmes P_1 et P_2 , possèdent une solution unique. Et on termine ce chapitre par étudier le lien entre les solutions des problèmes variationnelles P_1 et P . de Stampachia, on demontre que chacun des problèmes P_1 et P_2 , possèdent une solution unique. Et on termine ce chapitre par étudier le lien entre les solutions des problèmes variationnelles P_1 et P .

1.1 Formulation du Problème

Dans cette section , nous allons introduire le cadre physique et le modèle mathématique du problème utilisé dans ce mémoire . Ensuite , nous présentons la formulation mathématique pour le problème de contact avec frottement entre deux corps élastiques.

1.1.1 Position du problème:

Nous considère deux corps élastique, qui occupent des domaines délimités $\Omega^\varrho (\varrho = 1, 2)$ dans l'espace $\mathbb{R}^N (N = 2, 3)$. avec frontières $\Gamma^\varrho = \partial\Omega^\varrho$ est régulière et composé de trois parties complémentaires $\Gamma_1^\varrho, \Gamma_2^\varrho$ et Γ_3^ϱ .

- Le corps $\bar{\Omega}^\varrho$ est fixé sur la partie Γ_1^ϱ de mesure positive . La partie Γ_2^ϱ est soumis à une densité de forces notés g^ϱ . Dans la configuration initial, les deux corps ont une position de contact comme $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$. Le corps Ω^ϱ est soumis à forces f^ϱ .
- L'unité normale vers l'extérieure de vecteur en Γ^ϱ est dénoté $\eta^\varrho = (\eta_i^\varrho)$. En zone de contact le vecteur normale $\eta = \eta^1 = -\eta^2$ est soumis pour être constant.

Nous dénote par $u^\varrho = (u_i^\varrho)_{1 \leq i \leq N}$ champ de déplacement du corps Ω^ϱ . $\sigma^\varrho = (\sigma_i^\varrho)_{1 \leq i \leq N}$ le champ de contrainte du corps Ω^ϱ et $\epsilon^\varrho = \epsilon(u^\varrho)$ le champ de déformation linéaires .

La loi constitutive élastique du matériel est soumis pour être

$$\sigma^\varrho = F^\varrho(\epsilon(u^\varrho)) \text{ dans } \Omega^\varrho \quad (1.1.1)$$

où F^ϱ est donnée comme une fonction non linéaire. L'équation d'équilibre peut être écrit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma^\varrho + f^\varrho &= 0 && \text{dans } \Omega^\varrho \\ u^\varrho &= 0 && \text{sur } \Gamma_1^\varrho, \quad l = 1, 2 \\ \sigma^\varrho \eta^\varrho &= g^\varrho && \text{sur } \Gamma_2^\varrho \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Où $u^\varrho = (u^1, u^2)$. et $\sigma^1 \eta^1 = \sigma^2 \eta^2$ sur Γ_3 .

Les conditions sur la partie de Γ_3 conformées par les conditions de contact avec frottement de Coulomb

Les conditions Signorini's :

$$[u_\eta] \leq -\mu \sigma_\eta, \sigma_\eta \leq 0, [u_\tau] = 0 \quad (1.1.3)$$

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq -\mu \sigma_\eta & \text{si } [u_\tau] = 0 \\ \sigma_\tau = \mu \sigma_\eta \frac{[u_\tau]}{|[u_\tau]|} & \text{si } [u_\tau] \neq 0 \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Où σ_η et σ_τ est les composantes normale et tangentielle, respectivement de , du champ de contrainte. et $[u_\eta] = u_\eta^1 + u_\eta^2$ représente le saut de déplacement dans une direction normale: soit contact (c-à-d $[u_\eta] = 0$) ou réparation (c-à-d $[u_\eta] < 0$) sont permis.

Autrement dit: ($[u_\eta] \leq 0$) est la condition de non pénétration, $[u_\tau] = u_\tau^1 + u_\tau^2$ représente le saut de déplacement dans une direction tangentielle et $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement.

C'est une version statique de la loi de Coulomb de frottement sèche (voir par exemple Shillor et Sofonea (1997), Rochdi(1998)).

La loi de frottement (1.1.4) ne peut pas excéder la résistance maximum de frottement $-\mu\sigma_\eta$. Ainsi, si l'intégralité reste, les surfaces s'adhèrent et se nomme l'état de la canne, et si l'égalité maintient. Il y est un glissement relatif, la fameuse état de glissement. Par conséquent, la surface de contact Γ_3 est divisée en trois zone : la zone d'adhésion, la zone de glissement et la zone de séparation dans laquelle $[u_\eta] < 0$, c-à-d, il n'y a aucun contact.

1.1.2 Formulation mathématique du problème

Dans ce paragraphe, on considère le problème non linéaire suivant:

Problème 1.1.1 (P) pour $\varrho = 1, 2$ trouve le champ de déplacement $u^\varrho : \Omega^\varrho \rightarrow \mathbb{R}^N$ et le champ de contrainte $\sigma^\varrho : \Omega^\varrho \rightarrow S_N$ tels que:

$$\sigma^\varrho = F^\varrho(\epsilon(u^\varrho)) \quad \text{dans } \Omega^\varrho \quad (1.1.5)$$

$$\text{div } \sigma^\varrho + f^\varrho = 0 \quad \text{dans } \Omega^\varrho \quad (1.1.6)$$

$$u^\varrho = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\varrho \quad (1.1.7)$$

$$\sigma^\varrho \eta^\varrho = g^\varrho \quad \text{sur } \Gamma_2^\varrho \quad (1.1.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(a)} \sigma^1 \eta^1 = \sigma^2 \eta^2 \\ \text{(b)} [u_\eta] \leq 0, \sigma_\eta \leq 0, \sigma_\eta [u_\tau] = 0 \\ \text{(c)} [\sigma_\tau] \leq -\mu \sigma_\eta \\ \text{(d)} [\sigma_\tau] < -\mu \sigma_\eta \implies [u_\eta] = 0 \\ \text{(e)} \sigma_\tau = -\mu \sigma_\eta \implies \exists \lambda \geq 0, \text{ i } \sigma_\tau = -\lambda [u_\tau] \end{array} \right. \quad \text{on } \Gamma_3 \quad (1.1.9)$$

Où σ_n désigne la contrainte normale (ou pression de contact), $[u, \eta] = u^1 \cdot \eta^1 + u^2 \cdot \eta^2$ désigne l'arrête pour le saut relativement au champ de déplacement a travers Γ_3 et $\sigma_\tau^\varrho = \sigma^\varrho \cdot \eta^\varrho - \sigma_\eta \cdot \eta^\varrho$ représente la composante tangentielle de contrainte.

L'équation (...) représente la loi de comportement élastique, où F^ϱ est un opérateur linéaire ou non linéaire, l'équation (1.1.6) représente l'équation d'équilibre où f^ϱ désigne la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable occupant le domaine Ω^ϱ , les relation (1.1.7) et (1.1.8) sont des conditions aux limites classiques des déplacement-tractions. Les conditions aux limites (1.1.9) représentent les conditions de contact avec frottement de Signorini et de Coulomb sur Γ_3 (voir fig 1.1.1)

/ÇáãĩãæÇÑ ááØÈÇÚÉ æÇÎÑÇ/NOUSER00.wmf
Figure 1.1.1 : Contact avec frottement entre deux corps déformables

1.2 hypothèses

Pour étudier le problème P1.1.1, ou aura besoin des hypothèse de régularité suivantes:

$F^\varrho : \Omega^\varrho \times S_N \rightarrow S$ satisfait : e^ϱ et ainsi nous pouvons considérer F^ϱ comme un operateur définie en $\mathcal{H}^\rho$ avec le rang en $\mathcal{H}^\rho$, plus de ça $F^\varrho : \mathcal{H}^\varrho \rightarrow \mathcal{H}^\varrho$ est un operateur continue lipschitz monotone et ainsi F^ϱ est inversible et il s'inverse $(F^\varrho)^{-1} : \mathcal{H}^\varrho \rightarrow \mathcal{H}^\varrho$ est un operateur continue monotone lipschitz:

Nous supposons que ces les forces et les tractions ont la régularité

$$f^\varrho \in H^\varrho, g^\varrho \in L(\sigma_2^\varrho)^N \quad (1.2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(a)} & \text{Il existe } m > 0 \text{ telle que} \\ & (F^\varrho(x, \varepsilon_1) - F^\varrho(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ & \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N, \text{ a.e. } x \in \Omega^\varrho \\ \text{(b)} & \text{Il existe } L > 0 \text{ telle que.} \\ & |F^\varrho(x, \varepsilon_1) - F^\varrho(x, \varepsilon_2)| \leq L |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ & \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N, \text{ a.e. } x \in \Omega^\varrho. \\ \text{(c)} & \text{pour chaque } \varepsilon \in S, x \rightarrow F^\varrho(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable on } \Omega^\varrho. \\ \text{(d)} & x \rightarrow F^\varrho(x, 0) \in \mathcal{H}^\rho. \end{array} \right. \quad (1.2.2)$$

Remarque 1.2.1 en employant (1.2.2) nous obtenons pour tout $\varepsilon^\rho \in \mathcal{H}^\rho$ les fonctions $x \rightarrow F^\varrho(x, \varepsilon^\varrho(x))$ dépend de ε^ϱ et ainsi nous pouvons considérer F^ϱ comme un opérateur définie sur $\mathcal{H}^\varrho$ avec le rang en $\mathcal{H}^\varrho$, plus de ça $F^\varrho: \mathcal{H}^\varrho \rightarrow \mathcal{H}^\varrho$ est un opérateur Lipschitzien et fortement ainsi F^ϱ est inversible et il s'inverse $(F^\varrho)^{-1}: \mathcal{H}^\varrho \rightarrow \mathcal{H}^\varrho$ est aussi un opérateur continue monotone et de Lipschitz :

Nous supposons que les forces et les traction ont la régularité

$$f^\varrho \in H^{-\varrho}, g^\varrho \in IL(\Gamma_2^\varrho)^N$$

Le coefficient de frottement μ satisfait

$$\mu \in L^\infty|\tau_3|, \mu \geq 0 \text{ sur } \tau_3 \quad (1.2.3)$$

Pour l'étude du problème P(1.1.1). on considère le sous-espace fermé V de H_1 définie par:

$$V = V(\Omega^1) \times V(\Omega^2) \quad (1.2.4)$$

où

$$V(\Omega^\varrho) = \{v^\varrho \in H_1^\varrho \mid v^\varrho = \text{sur } \tau_1^\varrho\} \quad (1.2.5)$$

et laissons dénoter le sous-espace fermé de H_1 donné par:

$$\hat{H}_1 = \{\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \in H_1 \mid \sigma^1 \eta^1 = \sigma^2 \eta^2 \text{ sur } \sigma^3\} \quad (1.2.6)$$

tel que $\text{mes } \Gamma_1^\varrho > 0$.

L'inégalité de Korn est :

$$\|\epsilon(v^\varrho)\|_{\mathcal{H}^\varrho} \geq c \|v^\varrho\|_{H_1^\varrho}, \quad \forall v^\varrho \in V(\Omega^\varrho) \quad \varrho = 1, 2 \quad (1.2.7)$$

Ici c dénote une constante positive qui dépend seulement de $\Omega^\varrho, \tau_1^\varrho, \varrho = 1, 2$. Nous munissons V par le produit scalaire:

$$\langle \nu, \omega \rangle_v = \langle \epsilon(\nu^1), \epsilon(\omega^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \epsilon(\nu^1), \epsilon(\omega^1) \rangle_{\mathcal{H}^2} \quad (1.2.8)$$

et $\|\cdot\|_V$ est la norme associée. Il suit inégalité de Korn (1.2.8) ce les normes $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont équivalentes sur V . Puis $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace Hilbert réel. Plus de ça par la théorème de trace de sobolev et (1.2.8) nous avons une constante positive c_0 dépend de $\Omega^\varrho, \tau_1^\varrho, \varrho = 1, 2$ et τ_3 telle que.

$$\|v^\varrho\|_{L^2(\tau_3)^N} \leq c_0 \|\varrho\|_V \quad \forall v \in V \quad (1.2.9)$$

pour $(u, v) \in V$, nous définissons la forme bilinéaire de a par:

$$a(u, v) = \sum_{\varrho=1}^2 \int_{\Omega^\varrho} F^\varrho \epsilon(u^\varrho) \epsilon(v^\varrho) d\Omega^\varrho \quad (1.2.10)$$

et la forme linéaire de forces volumiques et la traction de surface par

$$\langle \varphi^\varrho, v^\varrho \rangle_{V(r^\varrho)} = \int_{\Omega^\varrho} f^\varrho \cdot v^\varrho d\Omega^\varrho + \int_{r^\varrho} g^\varrho v^\varrho \cdot \eta^\varrho dT_2^\varrho, \quad \forall v^\varrho \in V(\Omega^\varrho) \quad (1.2.11)$$

où $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in V$.

et soit $j : \mathcal{H}_1^\varrho \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle

$$j(\sigma, v) = - \int_{\tau_3} \mu \sigma_\eta |v_\tau| d\tau_3 \quad (1.2.12)$$

où $|\cdot|$ dénote la norme euclidienne. Soit $\sigma \in \mathcal{H}_1^\varrho$, la fonctionnelle $j(\sigma, \cdot)$ continue, convexe et non différentiable, c'est ainsi, $j(\sigma, \cdot)$ est convexe et semi-continue inférieurement sur V .

Finalement, nous dénotons dans la suite par U_{ad} l'ensemble de déplacement admissible défini par:

$$U_{ad} = \{v = (v^1, v^2) \in V \mid [v_n] \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\} \quad (1.2.13)$$

L'ensemble U_{ad} est non vide ($0 \in U_{ad}$), fermé et convexe et pour tous $g \in \hat{H}$, soit $\sum_{ad}(g)$ dénote l'ensemble de champ de contrainte admissible donné par

$$\sum_{ad}(g) = \left\{ \tau \in \hat{H}_1 \mid \sum_{\varrho=1}^2 \langle \tau^\varrho \in (v^\varrho) \rangle_{H^\varrho} + j(g, v) \geq \langle g, v \rangle \quad \forall v \in U_{ad} \right\} \quad (1.2.14)$$

ainsi pour chaque $g \in \hat{H}_1$ avec $g_\eta^1|_{\Gamma_3} \leq 0$, l'ensemble $\sum_{ad}(g)$, fermé et convexe.

1.3 Formulation variationnelles

Dans cette section , on s'intéresse à la formulation variationnelle du problème considéré qui consiste dans une première formulation notée P_1 , à trouver les champs des déplacements $u = (u^1, u^2)$ tandis que dans la second formulation notée P_2 , on cherche les champs des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$. Ces résultats sont basé sur le lemme suivant:

Lemme 1.3.1 *si (u, σ) sont deux fonctions suffisamment régulières satisfont :*

$$u \in U_{ad}. \sigma \in \sum_{ad}(\sigma) \quad (1.3.1)$$

$$\sum_{\varrho=1}^2 \langle \sigma^\varrho, \epsilon(v^\varrho) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} - \epsilon(u^\varrho)_{\mathcal{H}^\varrho} + j(\sigma, v) - j(\sigma, u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle_V, \quad \forall v \in U_{ad} \quad (1.3.2)$$

$$\sum_{\varrho=1}^2 \langle \tau^\varrho - \sigma^\varrho, \epsilon(v^\varrho) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} \geq 0, \quad \forall \tau \in \varepsilon_{ad}(\sigma) \quad (1.3.3)$$

Démonstration. Preuve. la régularité $u \in U_{ad}$ suite de (1.1.7) et (1.1.9) par l'application de la formule de Green sur (1.1.6) et de (1.1.7),(1.1.8), (1.2.11),(1.2.12) nous avons (1.3.2) choisissons également $v = 2u \in U_{ad}$ et $v = 0 \in U_{ad}$ de (1.3.2) nous trouvons:

$$\sum_{\varrho=1}^2 \langle \sigma^\varrho, \epsilon(u^\varrho) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} + j(\sigma, u) = \langle \varphi, u \rangle_V \quad (1.3.4)$$

En utilisant (1.3.2) nous déduisons:

$$\sum_{\varrho=1}^2 \langle \sigma^\varrho, \epsilon(v^\varrho) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} + j(\sigma, v) \geq \langle \varphi, v \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (1.3.5)$$

La régularité $\sigma \in \sum_{ad}(\sigma)$ est maintenant une conséquence de (1.2.14) et (1.3.5) plus de ça, de (1.2.14) et (1.3.4) nous obtenons

$$\sum_{\varrho=1}^2 \langle \tau^\varrho - \sigma^\varrho, \epsilon(u^\varrho) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} \geq \langle \varphi, u \rangle_V - \langle \varphi, u \rangle_V = 0, \quad \forall \tau \in \sum_{ad} \quad (1.3.6)$$

Par conséquent (1.3.3). ■ ■

Le lemme (1.3.1) et la remarque (1.1.5) nous permettent, comme dans le premier chapitre, de donner deux formulations variationnelles pour le problème P (1.1.1):

Problème 1.3.1 (P₁) pour $\varrho = 1, 2$ trouver le champ des déplacements $u^\varrho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in U_{ad}, \quad F^1(\epsilon(u^1)).\eta^1 = F^2\epsilon(u^2)).\eta^2 \text{ sur } \Gamma_3 \\ a(u, v - u) + j(F(\epsilon(u), v) - j(F\epsilon(u), u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle_V \end{array} \right. \quad \forall v \in U_{ad}$$

où

$$F(\epsilon(u)) = F^1(\epsilon(u^1)) \text{ ou } F(\epsilon(u)) = F^2(\epsilon(u^2))$$

Problème 1.3.2 (P₂) pour $\varrho = 1, 2$, trouver le champs des contraintes $\sigma^\varrho : \Omega^\varrho \rightarrow S_N$, comme:

$$\sigma \in \sum_{\varrho=1}^2 ad(\sigma), \quad \sum_{\varrho=1}^2 \langle \tau^\varrho - \sigma^\varrho, (F^\varrho)^{-1}(\sigma^\varrho) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} \geq 0, \quad \forall \tau \in \sum_{\varrho=1}^2 ad(\sigma) \quad (1.3.7)$$

Les détails de ces correspondances peut être trouvés dans [13].

Théorème 1.3.1 soit $\theta \in \hat{H}_1$ et supposons $G : U_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ est la forme $G(v) = J(v) + j(\theta, v)$ où $J(\cdot)$ et $j(\theta, \cdot)$ sont convexes et inférieure semi-continue inférieurement, $J(\cdot)$ est G - différentiable sur U_{ad} . Ensuite, si u_θ est un minimiseur de G sur U_{ad}

$$\langle DJ(u_\theta), v - u_\theta \rangle + j(\theta, v) - j(\theta, u_\theta) \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad} \quad (1.3.8)$$

Inversement, si (1.3.8) est vraie pour $u_\theta \in U_{ad}$, alors u_θ est un minimiser de G .

- Dans (1.3.8), $DJ(u_\theta)$ est le gradient de J . Etant donné que J est une fonction quadratique. (1.3.8) est exactement

$$u_\theta \in U_{ad}, a(u_\theta, v - u_\theta) + j(\theta, v) - j(\theta, u_\theta) \geq 0 \langle \varphi, v - u_\theta \rangle_V. \quad \forall v \in U_{ad} \quad (1.3.9)$$

- Avec les hypothèses de mes $(\Gamma_1^\varrho) > 0$, la fonction $J(\cdot) + j(\theta, \cdot)$ est strictement convexe est coercive, alors il existe une solution unique de (1.3.8).
- Avec les préparations ci-dessus, le problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb peut être formulé comme le problème de minimisation sous contrainte.

Théorème 1.3.2 supposons l'hypothèse (1.2.2), (1.2.1). Soit $u = (u^1, u^2) \in V$ une solution du problème variationnelle P_1 et $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ est défini par $\sigma^\varrho = F^\varrho(\epsilon(u^\varrho))$, $\varrho = 1, 2$. Alors (u, σ) est une solution du problème P (1.1.1)

Preuve. pour tous $\phi^\varrho \in D^\varrho \equiv (D(\Omega^\varrho))^N$ être arbitraire, $v \equiv u \pm \phi \in U_{ad}$, ou $\phi = (\phi^1, \phi^2)$, et $\phi^{3-\varrho} = 0$, avec (1.3.6) et $\sigma^\varrho = F^\varrho(\epsilon(u^\varrho))$ ce qui suit est vérifiée:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega^\varrho} \sigma^\varrho \cdot \epsilon(v^\varrho - u^\varrho) d\Omega^\varrho - \int_{\Omega^\varrho} f^\varrho \cdot \epsilon(v^\varrho - u^\varrho) d\Omega^\varrho - \int_{\tau_2^\varrho} g^\varrho \cdot \epsilon(v^\varrho - u^\varrho) d\Gamma_2^\varrho \\ &= \int_{\Gamma^\varrho} \sigma^\varrho \cdot \epsilon(v^\varrho - u^\varrho) d\Gamma^\varrho - \int_{\Omega_2^\varrho} (\operatorname{div} \sigma^\varrho + f^\varrho) \cdot (v^\varrho - u^\varrho) d\Omega^\varrho \\ &= \pm \int_{\Omega_2^\varrho} (\operatorname{div} \sigma^\varrho + f^\varrho) \cdot \phi^\varrho d\Omega^\varrho. \end{aligned}$$

Ce qui implique (1.1.6). En appliquant la formule de Green et en utilisant (1.3.6), (1.1.6), nous avons:

$$\sum_{\varrho=1}^2 \langle \sigma^\varrho \eta^\varrho, (v^\varrho - u^\varrho) \eta^\varrho \rangle_{H_{\Gamma^\varrho}' \times H_{\Gamma^\varrho}} + j(\sigma, v) - j(\sigma, u) \geq \sum_{\varrho=1}^2 \langle g^\varrho, (v^\varrho - u^\varrho) \eta^\varrho \rangle_{H_{\Gamma_2^\varrho}' \times H_{\Gamma_2^\varrho}}, \quad \forall v \in U_{ad}$$

prenant $v = u \pm (\omega^1, \omega^2) \in U_{ad}$, avec $\omega^\varrho \in D(\Omega^\varrho, u\Gamma_2^\varrho)^N$ et $\omega^{3-\varrho} = 0$ dans (??), il qui suit

$$\langle \sigma^\varrho \eta^\varrho, \omega^\varrho \eta^\varrho \rangle_{H_{\Gamma_2^\varrho}' \times H_{\Gamma_2^\varrho}} = \langle g^\varrho, \omega^\varrho \eta^\varrho \rangle_{H_{\Gamma_2^\varrho}' \times H_{\Gamma_2^\varrho}}$$

ce qui implique (1.1.8). Soit $(\omega^1, \omega^2) \in H_1$ avec $\omega_\eta^\varrho = 0$, $\omega^\varrho|_{\Gamma_1^\varrho \cup \Gamma_2^\varrho} = 0$ et $\omega_\tau^1|_{\Gamma_3} = -\omega_\tau^2|_{\Gamma_3}$.

Puis $v = u \pm (\omega^1, \omega^2) \in U_{ad}$ et (??) donne:

$$\sum_{\varrho=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau^\varrho \cdot \omega_\tau^\varrho d\Gamma_3 = 0$$

il en résulte

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau^1 \cdot \omega_\tau^1 d\Gamma_3 = \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau^2 \cdot \omega_\tau^1 d\Gamma_3$$

Cela implique $\sigma_\tau^1|_{\Gamma_3} = \sigma_\tau^2|_{\Gamma_3}$ et de (1.3.6) nous avons (1.1.9.a)

Prenant $v = u \pm (\omega^1, \omega^2) \in U_{ad}$, avec $\omega^\varrho \in D(\Omega^\varrho \cup \Gamma_3)^N$, $\omega_\tau^\varrho = 0$ sur Γ_3 et $\omega^{3-\varrho} = 0$ en (??), il résulte que

$$\langle \sigma_\eta^\varrho \omega_\eta^\varrho \rangle_{H_{\Gamma_3}' \times H_{\Gamma_3}} \geq 0$$

En outre $\sigma_\eta^\varrho \leq 0$ sur Γ_3 . Maintenant, par $u \in U_{ad}$, nous avons $[u_\eta] \leq 0$ sur Γ_3 .

Prenant maintenant $v \in U_{ad}$ comme $v_\tau = u_\tau$ et $v_\eta = 0$ dans (??), on obtient:

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\eta [u_\eta] d\Gamma_3 \leq 0$$

et σ a partir de et $\sigma_\eta \leq 0$ sur Γ_3 . On en déduit $\sigma_\eta [u_\eta] = 0$ sur Γ_3 . Par conséquent, (1.1.9.b) détient supposons que $v \in U_{ad}$, avec $v_\eta = u_\eta$ sur Γ_3 . et l'utilisation (1.1.8) (1.1.9.a.b) à (??) nous obtenir:

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau [v_\tau] - \mu \sigma_\eta |[v_\tau]|) d\Gamma_3 - \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau [u_\tau] - \mu \sigma_\eta |[u_\tau]|) d\Gamma_3 \geq 0 \quad (1.3.10)$$

et en choisissant $v_\tau = 2u_\tau$ (resp $v_\tau = 0$) dans (1.3.10) nous en déduisons

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau [u_\tau] - \mu \sigma_\eta |[u_\tau]|) d\Gamma_3 = 0 \quad (1.3.11)$$

copinant (1.3.10) et (1.3.11), nous avons

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau [u_\tau] - \mu \sigma_\eta |[u_\tau]|) d\Gamma_3 \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad} \quad (1.3.12)$$

et laisser $N = \{\mathcal{N} \in \Gamma_3 / |\sigma_\tau| > -\mu \sigma_\eta\}$. De $v \in U_{ad}$ avec $[v_\tau]_{\Gamma_3-N} = 0$ et $[v_\tau]_{\mathbb{N}} = -\sigma_\tau$ dans (1.3.12). On en déduit:

$$\int_N (-|\sigma_\tau|^2 - \mu \sigma_\eta |\sigma_\tau|) d\Gamma_3 \geq 0 \quad (1.3.13)$$

Depuis $|\sigma_\tau| > -\mu \sigma_\eta$ et $\sigma_\eta \leq 0$ sur $\mathbb{N}$, puis $-|\sigma_\tau| - \mu \sigma_\eta < 0$ et $|\sigma_\tau| \neq 0$ sur $\mathbb{N}$. qui implique

$$-|\sigma_\tau|^2 - \mu \sigma_\eta |\sigma_\tau| > 0 \text{ sur } \mathbb{N} \quad (1.3.14)$$

Utilisation (1.3.13) et (1.3.14), nous obtenons $\text{mes}(N) = 0$, on en déduit $|\sigma_\tau| \leq -\mu \sigma_\eta$ p.p sur Γ_3 et donc (1.1.9.c) détient

Utiliser maintenant (1.1.9.c) et (1.3.11) nous déduisons

$$\sigma_\tau [u_\tau] - \mu \sigma_\eta |[u_\tau]| = 0 \quad \text{p.p sur } \Gamma_3 \quad (1.3.15)$$

En outre, à partir de (1.1.9.c) on obtient

$$0 = \sigma_\tau \cdot [u_\tau] - \mu |[u_\tau]| \sigma_\eta \geq |\sigma_\tau| \cdot |[u_\tau]| - \mu |[u_\tau]| \sigma_\eta \geq -|[u_\tau]| (|\sigma_\tau| + \mu \sigma_\eta) \geq 0$$

En conséquence

$$-|[u_\tau]| (|\sigma_\tau| + \mu \sigma_\eta) = 0 \quad (1.3.16)$$

Pour $|\sigma_\tau| < -\mu \sigma_\eta$: à partir de (1.3.16) on déduit $[u_\tau] = 0$, donc (1.1.9.d).

Pour $|\sigma_\tau| = -\mu \sigma_\eta$: à partir de (1.3.15) on déduit

$$\sigma_\tau \cdot [u_\tau] = \mu |[u_\tau]| \sigma_\eta = -|\sigma_\tau| \cdot [u_\tau]$$

Si on déduit qu'il existe une constante $\lambda \geq 0$ comme $[u_\tau] = \lambda \sigma_\tau$. donc (1.1.9.e). ■

Théorème 1.3.3 *supposons l'hypothèse (1.2.2), (1.2.1) soit $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ une solution de le problème P_2 , et $u = (u^1, u^2) \in V$ est donnée par $\sigma^\varrho = F^\varrho(\epsilon(u^\varrho))$, $\varrho = 1, 2$, alors μ est une solution du problème variationnel P_1 .*

Démonstration. Tous d'abore nous prouvons $u \in U_{ad}$. Supposant que $u \notin U_{ad}$, et laisser u_* la projection de u sur U_{ad} , nous avons l'existence d'une $\alpha \in \mathbb{R}$ comme:

$$\langle u_* - u, v \rangle_V > \alpha > \langle u_* - u, u \rangle_V, \forall v \in U_{ad}$$

Nous introduisons la fonctionnelle τ_* définie par : $\tau_* = (\epsilon(u_*^1 - u^1), \epsilon(u_*^2 - u^2)) \in \mathcal{H}$, et nous utiliser des produits intérieurs définis par (1.2.9) on déduit:

$$\sum_{\varrho=1}^2 \langle \tau_*^\varrho, \epsilon(v^\varrho) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} > \alpha > \sum_{\varrho=1}^2 \langle \tau_*^\varrho, \epsilon(u^\varrho) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho}, \forall v \in U_{ad} \quad (1.3.17)$$

Prenant $u = 0 \in U_{ad}$ dans (1.3.17). nous obtenons $\alpha < 0$, il est facile de vérifier que

$$\langle \tau_*^1, \epsilon(v^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \tau_*^2, \epsilon(v^2) \rangle_{\mathcal{H}^2} \geq 0 : \forall v \in U_{ad} \quad (1.3.18)$$

Vraiment, nous supposons l'existence de $v_* = (v_*^1, v_*^2) \in U_{ad}$ où

$$\langle \tau_*^1, \epsilon(v_*^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \tau_*^2, \epsilon(v_*^2) \rangle_{\mathcal{H}^2} < 0 \quad (1.3.19)$$

Comme $\beta v_* \in U_{ad} \forall \beta > 0$, si nous remplaçons $v = \beta v_*$ dans (1.3.17) nous obtenons

$$\beta \left(\langle \tau_*^1, \epsilon(v_*^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \tau_*^2, \epsilon(v_*^2) \rangle_{\mathcal{H}^2} \right) > \alpha, \forall \beta > 0$$

Et faire $\beta \rightarrow +\infty$ avec (1.3.19) nous avons $\alpha \leq -\infty$, ce qui constitue une contradiction par le fait que α est réel. Donc, on déduit (1.3.18). En utilisant (1.2.11), (1.2.14).

Maintenant, nous en déduisons

$$\sum_{\varrho=1}^2 \langle \sigma^\varrho, \epsilon(v^\varrho) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} + j(\sigma, v) \geq \langle \varphi, v \rangle_v \quad \forall v \in U_{ad}$$

et en utilisant (1.3.18), nous obtenons

$$\sum_{\varrho=1}^2 \langle \tau_*^\varrho + \sigma^\varrho, \epsilon(v^\varrho) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} + j(\sigma, v) \geq \langle \varphi, v \rangle_v \quad \forall v \in U_{ad}$$

disant

$$\tau_* + \sigma \in \sum_{ad}(\sigma) \quad (1.3.20)$$

choisir $\tau = \tau_* + \sigma \in \sum_{ad}(\sigma)$ dans (1.3.7) et $\sigma^\varrho = F^\varrho(\epsilon(u^\varrho))$. On obtient

$$\sum_{\varrho=1}^2 \langle \tau_*^\varrho, \epsilon(v^\varrho) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} \geq 0 \quad (1.3.21)$$

Utiliser maintenant (1.3.20) et $\alpha < 0$, nous trouvons

$$\sum_{\varrho=1}^2 \langle \tau_*^\varrho, \epsilon(v^\varrho) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} < 0 \quad (1.3.22)$$

Les relation (1.3.21) et (1.3.22) constituent une contradiction, donc on déduit que $u \in U_{ad}$.

Il reste à prouver l'inégalité donnée en (1.3.6).

En utilisant le théorème de représentation de Riesz's nous définissons l'opérateur non-linéaire $R : V \rightarrow V$ par

$$\langle R_v, \omega \rangle_V = \sum_{\varrho=1}^2 \langle F^\varrho, \epsilon(v^\varrho), \epsilon(\omega^\varrho) \rangle_{H^\varrho}$$

donc les hypothèses (1.2.2) sur F^ϱ implique que $\mathbb{R}$ est strictement monotone, coercive et exploitant lipschitzien, sur la plus part, la fonctionnelle $j(\sigma, \cdot)$ est correct, convexe et inférieure continue sur V . Alors résultats de la théorie des inégalités variationnelles elliptiques [4] du deuxième type, nous avons l'existence de $\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}^1, \tilde{\tau}^2) \in \mathcal{H}$ comme

$$\sum_{\varrho=1}^2 \langle \tilde{\tau}^\varrho, \epsilon(v^\varrho) - \epsilon(u^\varrho) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} + j(\sigma, v) - j(\sigma, u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle_v, \forall v \in V \quad (1.3.23)$$

Prenant $u = 2u$ et $v = 0$ dans (1.3.23), puis

$$\sum_{\varrho=1}^2 \langle \tilde{\tau}^\varrho, \epsilon(u^\varrho) \rangle_{H^\varrho} + j(\sigma, v) = \langle \varphi, u \rangle_v \quad (1.3.24)$$

Soustraire (1.3.24) à partir de (1.3.23), cela signifie que $\tilde{\tau} \in \varepsilon_{ad}(\sigma)$ par conséquent à partir de (1.3.7), (1.3.24) et $\sigma^\varrho = (F^\varrho \epsilon(u^\varrho))$. Nous dérivons

$$\langle \varphi, u \rangle_v \geq \sum_{\varrho=1}^2 \langle \sigma^\varrho, \epsilon(u^\varrho) \rangle_{H^\varrho} + j(\sigma, u)$$

l'intégralité inverse découle de (1.2.14) depuis $\sigma \in U_{ad}$ et $u \in U_{ad}$ Par conséquent, nous concluons que

$$\langle \varphi, u \rangle_v = \sum_{\varrho=1}^2 \langle \sigma^\varrho, \epsilon(u^\varrho) \rangle_{H^\varrho} + j(\sigma, u) \quad (1.3.25)$$

En utilisant à nouveau (1.2.14) nous avons

$$\sum_{\varrho=1}^2 \langle \sigma^\varrho, \epsilon(u^\varrho) - \epsilon(u^\varrho) \rangle_{H^\varrho} + j(\sigma, v) - j(\sigma, u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle_v, \forall v \in U_{ad} \quad (1.3.26)$$

et $\sigma^\varrho = (F^\varrho \epsilon(u^\varrho))$, $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \in \hat{H}_1$, il résulte que μ est solution du problème P_1 . ■

Téorème 1.3.2 et théorème 1.3.3, permettent de déduire la suivante.

Corollaire 1.3.1 *supposes l'hypotheses (1.2.2), (1.2.1). Soit $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ une solution de le problème P_2 variationnelle, et $u = (u^1, u^2) \in V$ est donnée par $\sigma^\varrho = (F^\varrho \epsilon(u^\varrho))$, $\varrho = 1, 2$.*

Puis (u, σ) est une solution du problème P .

Aussi théorème 1.3.2 et le lemme 1.3.1 permettra de déduire la suivante.

Corollaire 1.3.2 *supposes l'hypotheses (1.2.2), (1.2.1). Soit $u = (u^1, u^2) \in V$ est une solution du problème P_1 . et le réglage $\sigma^\varrho = (F^\varrho \epsilon(u^\varrho))$, $\varrho = 1, 2$ nous avons $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ une solution du problème P_2 .*

Chapitre 2

Existence et unicité

Résumé

Nous intéressons dans ce chapitre par un résultat d'existence et d'unicité de la solution (u, σ) du problème contact p . D'abord, on montre l'existence et l'unicité de la solution u du problème P_1 . Ensuite nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution σ du problème P_2 .

On sait que si u est la solution du problème P_1 et σ est la solution du problème P_2 , donc la solution du P est $(u; \sigma)$.

2.1 Existence de la solution du problème p

Dans cette section , nous obtenons un résultat d'existence de la solution $(u; \sigma)$ du problème (p_1, p_2) c'est à dire l'existence d'une solution faible du problème mécanique P . Notre résultat est le suivant

Théorème 2.1.1 *sous les hypothèses (1.2.2), (1.2.1). Alors il existe $C_0 > 0$ ne dépend que de Ω^e , Γ^e et F^e , $\varrho = 1, 2$ telle que $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq C_0$ alors il existe une solution unique (u, σ) du problème P . De plus*

$$\mu \in V, \quad \sigma \in \mathcal{H}_1$$

Proposition 2.1.1 *soit $\theta \in \hat{\mathcal{H}}_1$ et soit (u_θ^1, u_θ^2) la solution de (1.3.9). Alors,*

$$(F^1(\epsilon(u_\theta^1)) \cdot (F^2(\epsilon(u_\theta^2)))) \in \hat{\mathcal{H}}_1 \quad (2.1.1)$$

Preuve. Soit $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ où $\omega^e \in D(\Omega^e \cup \Gamma_3)^N$ et $[\omega\eta] = 0$ sur Γ_3 . Ensuite $\nu = u \pm \omega \in U_{ad}$ dans () donne:

$$\sum_{e=1}^2 \langle F^e(\epsilon(u_\theta^e)), \epsilon(\omega^e) \rangle_{\mathcal{H}^e} = \langle \varphi, \omega \rangle$$

et l'utilisation (1.2.11), avec $\omega^e \eta^e = -\omega^{3-e} \eta^{3-e}$ sur Γ_3 , nous avons

$$\int_{\Gamma_3} \{ F^1(\epsilon(u_\theta^1)) \eta^1 - F^2(\epsilon(u_\theta^2)) \eta^2 \} \cdot \omega^1 \eta^1 d\Gamma_3 = 0$$

Par conséquent, nous concluons que $F^1(\epsilon(u_\theta^1)) \eta^1 = F^2(\epsilon(u_\theta^2)) \eta^2$ sur Γ_3 puis (2.1.1). ■

Voyons maintenant l'opérateur $A : \hat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_1$ définie par

$$A(\theta) = (F^1(\epsilon(u_\theta^1))) \cdot (F^2(\epsilon(u_\theta^2))) \quad (2.1.2)$$

Nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.1.2 *Il existe $C_0 > 0$, telle que $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq C_0$, l'opérateur A a un point fixe unique $\theta^* \in \hat{\mathcal{H}}_1$.*

Preuve. Soit $\theta_i \in \hat{\mathcal{H}}_1$, pour $i = 1, 2$ et soit u_i les solutions de (1.3.9), nous avons.

$$\begin{cases} a(u_1, u_2 - u_1) + j(\theta_1, u_2) - j(\theta_1, u_1) \geq \langle \varphi, u_2 - u_1 \rangle \\ a(u_2, u_1 - u_2) + j(\theta_2, u_2) - j(\theta_2, u_1) \geq \langle \varphi, u_1 - u_2 \rangle \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant (1.3.9) on en déduit que

$$\begin{cases} \sum_{e=1}^2 \int_{\Omega^e} (F^e(\epsilon(u_1^e)) - F^e(\epsilon(u_2^e))) (\epsilon(u_1^e) - \epsilon(u_2^e)) d\Omega^e \leq \\ j(\theta_1, u_2) - j(\theta_1, u_1) + j(\theta_2, u_2) - j(\theta_2, u_1) \end{cases} \quad (2.1.3)$$

De l'inégalité Korn et (1.2.2) les rendements

$$\sum_{e=1}^2 \langle F^e(\epsilon(u_1^e)) - F^e(\epsilon(u_2^e)), \epsilon(u_1^e) - \epsilon(u_2^e) \rangle \geq C_1 \|u_1 - u_2\|_V^2 \quad (2.1.4)$$

Utilisations (1.2.12) nous obtention .

$$j(\theta_1, u_2) - j(\theta_1, u_1) + j(\theta_2, u_1) - j(\theta_2, u_2) = - \int_{\Gamma_3} \mu(\theta_{1\eta}, \theta_{2\eta}) (|[u_{1\tau}]| - |[u_{2\tau}]|) d\Gamma_3$$

Sorte que

$$j(\theta_1, u_2) - j(\theta_1, u_1) + j(\theta_2, u_2) - j(\theta_2, u_1) \leq C_2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\theta_1 - \theta_2\|_{\mathcal{H}_1} \cdot \|u_1 - u_2\|_V$$

et en utilisant (2.1.3) et (2.1.4) et en utilisant le théorème de trace, nous avons

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq C_3 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\theta_1 - \theta_2\|_{\mathcal{H}_1} \quad (2.1.5)$$

de (1.2.2) et (2.1.3) on trouve:

$$\|A\theta_1 - A\theta_2\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C_4 \sum_{\varrho=1}^2 \|\epsilon(u_1^\varrho) - \epsilon(u_2^\varrho)\|_{\mathcal{H}_1}^2 \quad (2.1.6)$$

En outre, à partir de (2.1.5) et (2.1.6), on obtient:

$$\|A\theta_1 - A\theta_2\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C_5 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\theta_1 - \theta_2\|_{\mathcal{H}_1}$$

nous concluons que l'opérateur A est une contraction si $\|\mu\|_{L(\Gamma_3)^\infty} < \frac{1}{C_5}$. Par le théorème du point fixe de Banach, on obtient que cet opérateur a une solution unique point de fixe $\theta^* \in \hat{\mathcal{H}}_1$. ■

Problème 2.1.1 Pour chaque $\theta \in \hat{\mathcal{H}}_1$, il existe un unique $\sigma_\theta \in \hat{\mathcal{H}}_1$, tel que

$$\sigma_\theta \in \Sigma_{ad}(\theta), \quad \sum_{\varrho=1}^2 \langle (F^\varrho)^{-1}(\sigma_\theta) . \tau^\varrho - \sigma_\theta^\varrho \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} \geq 0, \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad} \quad (2.1.7)$$

Preuve. Soit $\sigma \in \hat{\mathcal{H}}_1$, il est facile de vérifier que l'application

$$\tau \rightarrow \sum_{\varrho=1}^2 \langle (F^\varrho)^{-1}(\sigma^\varrho) . \tau^\varrho \rangle_{\mathcal{H}^\varrho}$$

est une forme linéaire continue sur $\hat{\mathcal{H}}_1$ (pour σ fixe). En outre, en utilisant le théorème de représentation de Riesz nous pouvons définir l'opérateur $E : \hat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_1$ par la relation

$$\langle E\sigma, \tau \rangle_{\hat{\mathcal{H}}_1} = \sum_{\varrho=1}^2 \langle (F^\varrho)^{-1}(\sigma^\varrho) . \tau^\varrho \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} \quad \forall \sigma, \tau \in \hat{\mathcal{H}}_1 \quad (2.1.8)$$

Gardant à l'esprit (1.2.2) et l'intégralité de Korn, on en déduit que l'opérateur E est frottement monotone de Lipschitz et continu sur E . En outre $\Sigma_{ad}(\theta)$ est un sous-ensemble fermé, convexe et de mesure nulle.

Selon le théorème de Lions, Stampacchia, nous obtenons l'existence d'un élément $\sigma_\theta \in \hat{\mathcal{H}}_1$ tel que

$$\sigma_\theta \in \Sigma_{ad}(\theta), \quad \langle E\sigma_\theta, \tau - \sigma_\theta \rangle_V \geq 0 : \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(\theta)$$

Puis

$$\sigma_\theta \in \Sigma_{ad}(\theta), \quad \sum_{\varrho=1}^2 \langle (F^\varrho)^{-1}(\sigma_\theta) . \tau^\varrho - \sigma_\theta^\varrho \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} \geq 0, \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(\theta)$$

■

Preuve. Existence: soit $u^* = (u^{*1}, u^{*2}) \in V$ les solution de (??) avec $\theta = \theta^*$

En prenant $v = 0$ et $v = 2u^* \in V$ dans (??), nous obtenons

$$a(u^*, u^*) + j(\theta^*, u^*) = \langle \varphi, u^* \rangle \quad (2.1.9)$$

et de (1.3.9) , (2.1.9) on a

$$a(u^*, v^*) + j(\theta^*, v^*) \geq \langle \varphi, v^* \rangle, \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.1.10)$$

De (1.2.14) , (2.1.10) et $\theta^* = A(\theta^*)$, il en résulte que

$$\theta^* \in \Sigma_{ad}(\theta^*) \quad (2.1.11)$$

Prenons maintenant $v = u \pm \phi \in V$ avec $\phi = (\phi^1, \phi^2)$ et $\phi^\varrho \in (D(\Omega^\varrho))^N$. $\phi^{3-\varrho} = 0$ dans (??), il résulte que

$$\langle F^\varrho(\epsilon(u_\theta^\varrho)), \epsilon(\phi^\varrho) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} = \langle \varphi^\varrho, \phi^\varrho \rangle \quad (2.1.12)$$

En outre, à partir de (1.2.11), (2.1.12) et en appliquant la formule vert, nous avons

$$-\text{Div}(F^\varrho(\epsilon(u_\theta^\varrho))) = f^\varrho \quad \text{dans } \Omega^\varrho \quad (2.1.13)$$

Utilisation (2.1.9) et (1.2.11) in déduit que

$$\begin{aligned} & \sum_{\varrho=1}^2 \int_{\Omega^\varrho} \text{Div}(F^\varrho(\epsilon(u^{*\varrho}))) \cdot u^{*\varrho} d\Omega^\varrho + \sum_{\varrho=1}^2 \int_{\Gamma^\varrho} F^\varrho(\epsilon(u^{*\varrho})) \cdot \eta^\varrho \cdot u^{*\varrho} \eta^\varrho d\Gamma^\varrho + j(\theta^*, u^*) \\ &= \sum_{\varrho=1}^2 \int_{\Omega^\varrho} f^\varrho \cdot u^{*\varrho} d\Omega^\varrho + \sum_{\varrho=1}^2 \int_{\Gamma_2^\varrho} g^\varrho \cdot u^{*\varrho} \eta^\varrho d\Gamma_2^\varrho \end{aligned}$$

Utiliser maintenant (2.1.13) et $u^{*\varrho}|_{\Gamma_1^\varrho} \equiv 0$, nous avons

$$\int_{\Gamma_3} \theta^* \eta \cdot [u^* \eta] d\Gamma_3 + j(\theta^*, u^*) = \sum_{\varrho=1}^2 \int_{\Gamma_2^\varrho} g^\varrho \cdot u^{*\varrho} \eta^\varrho d\Gamma_2^\varrho - \sum_{\varrho=1}^2 \int_{\Gamma_2^\varrho} F^\varrho(\epsilon(u^{*\varrho})) \cdot \eta^\varrho \cdot u^{*\varrho} \eta^\varrho d\Gamma^\varrho \quad (2.1.14)$$

Prenant $v = u \pm \phi \in V$ avec $\phi = (\phi^1, \phi^2) \in V$, $\phi^{3-\varrho} = 0$ et $\phi^\varrho \eta^\varrho = 0$ sur $\Gamma_1^\varrho \cup \Gamma_3^\varrho$ à (1.3.9) il en résulte que

$$\int_{\Omega^\varrho} F^\varrho(\epsilon(u^{*\varrho})) \cdot \epsilon(\phi^\varrho) d\Omega^\varrho = \int_{\Omega^\varrho} f^\varrho \cdot \phi^\varrho d\Omega^\varrho + \int_{\Gamma_2^\varrho} g^\varrho \cdot \phi^\varrho \eta^\varrho d\Gamma_2^\varrho \quad (2.1.15)$$

en appliquant la formule Green à (2.1.15) et en utilisant (2.1.13), nous obtenons

$$F^e(\epsilon(u^{*e}))\eta^e = g^e \quad \text{sur } \Gamma_2^e \quad (2.1.16)$$

La conclusion de (2.1.14) et (2.1.16) il en résulte que

$$\int_{\Gamma_3} \theta^* \eta \cdot [u^* \eta] d\Gamma_3 = -j(\theta^*, u^*) \quad (2.1.17)$$

et pour tout $\tau \in \Sigma_{ad}(\theta^*)$

$$\sum_{e=1}^2 \int_{\Omega^e} \tau^e(\epsilon(u^{*e})) d\Omega^e \geq \langle \varphi, u^* \rangle - j(\theta^*, u^*) \quad (2.1.18)$$

Utilisant de (2.1.13) et (2.1.16) avec $F^1(\epsilon(u^{*1}))\eta^1 = F^2(\epsilon(u^{*2}))\eta^2$ sur Γ_3 on déduit que

$$\sum_{e=1}^2 \int_{\Omega^e} F^e(\epsilon(u^{*e})) \cdot \epsilon(u^{*e}) d\Omega^e = \langle \varphi, u^* \rangle + \int_{\Gamma_3} \theta^* \eta [u^* \eta] d\Gamma_3 \quad (2.1.19)$$

En outre, à partir de (2.1.18), (2.1.19) et (2.1.17), on en déduit l'inégalité (1.3.7) avec prouve que θ est une solution de problème P₂. Il résulte que (u^*, θ^*) est une solution du problème P. ■

2.2 Unicité de la solution du problème P:

Dans cette section ,on montre l'unicité de la solution du problème P

Pour prouver l'unicité de la solution (u^*, θ^*) de problème P obtenue ci-dessus et soit (u, σ) être une autre solution telle que $u \in V$ et $\sigma \in \hat{\mathcal{H}}_1$.

Pour tous $\theta \in \hat{\mathcal{H}}_1$, Par conséquent, en choisissant $\tilde{\sigma}_\theta = A\theta$ et en utilisant (1.3.9) et (2.1.2) nous obtenons

$$\sum_{e=1}^2 \langle \tilde{\sigma}_\theta \cdot \epsilon(v^e) - \epsilon(u_\theta^e) \rangle_{\mathcal{H}^e} + j(\theta, v) - j(\theta, u_\theta) \geq \langle \varphi, v - u_\theta \rangle_V, \quad \forall v \in V \quad (2.2.1)$$

Prenant $v = 2u_\theta$ et $v = 0$ dans (2.2.1) nous obtenons

$$\sum_{e=1}^2 \langle \tilde{\sigma}_\theta \cdot \epsilon(u^e) - \epsilon(u_\theta^e) \rangle_{\mathcal{H}^e} + j(\theta, u_\theta) - j(\theta, u_\theta) = \langle \varphi, v - u_\theta \rangle_V \quad (2.2.2)$$

Utiliser maintenant (2.2.1) et (2.2.2), nous avons

$$\tilde{\sigma}_\theta \in \varepsilon_{ad}(\theta) \quad (2.2.3)$$

et de (2.1.2) , (2.2.2) et (1.2.14), il résulte que

$$\sum_{\varrho=1}^2 \langle (F^\varrho)^{-1} (\tilde{\sigma}_\theta^\varrho), \tau^\varrho - \tilde{\sigma}_\theta^\varrho \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(\theta) \quad (2.2.4)$$

En outre, à partir de (2.2.3) et (2.2.4) il résulte que $\tilde{\sigma}_\theta^\varrho$ est une solution de problème (??).

et par l'unicité de la solution, on déduit $\tilde{\sigma}_\theta = \sigma_\theta$. Puis, nous avons

$$A\theta = B\theta, \quad \forall \theta \in \hat{\mathcal{H}}_1 \quad (2.2.5)$$

Utiliser maintenant le lemme (1.3.1) avec

$$\theta^* = (F^1(\epsilon(u^{*1})) . F^2(\epsilon(u^{*2})))$$

et

$$\sigma = (F^1(\epsilon(u^1)) . F^2(\epsilon(u^2))) .$$

tel que

$$\begin{cases} \theta^* \in \Sigma_{ad}(\theta^*), \sum_{\varrho=1}^2 \langle \tau^\varrho - \theta^{*\varrho}, (F^\varrho)^{-1}(\theta^{*\varrho}) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} \geq 0, \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(\theta^*) \\ \sigma \in \Sigma_{ad}(\theta^*), \sum_{\varrho=1}^2 \langle \tau^\varrho - \sigma^\varrho, (F^\varrho)^{-1}(\sigma^\varrho) \rangle_{\mathcal{H}^\varrho} \geq 0, \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(\sigma) \end{cases} \quad (2.2.6)$$

et de (2.1.7) et (??) et proposition (2.1.2), il en résulte que

$$\theta^* = \sigma$$

D'où

$$F^\varrho(\epsilon(u^{*\varrho})) = F^\varrho(\epsilon(u^\varrho)) \quad \varrho = 1, 2. \quad (2.2.7)$$

Par conséquent, en (1.2.2) et (2.2.7), nous avons

$$u^* = u$$

La preuve du théorème (2.1.1) est terminée.

Chapitre 3

Annexe

A fin de rendre aisée la lecture de ce manuscrit, il nous est paru utile de rappeler des notions principales de la théorie de la mécanique des milieux continus, des résultats classiques en analyse fonctionnelle restreints au seul cadre hilbertien ainsi que les propriétés de base de quelques espaces fonctionnels. C'est l'objet de cette annexe qui est divisée en trois parties. La première est consacrée aux rappels de quelques notions de base tels que le tenseur des contraintes et le tenseur des déformation linéarisé. On y trouve aussi des conditions aux limites de contact avec ou sans frottement d'un corps déformable avec une base rigide. La seconde section est consacrée à des rappels sur les espaces de Hilbert et à quelques éléments d'analyse non linéaire et particulièrement des résultats d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques. On cite aussi dans cette partie quelques lemmes du type Gronwall qui sont utilisés tout le long de ce travail. La dernière section concerne les espaces fonctionnels. On y introduit des espaces de type Sobolev associés à l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence et on présente leurs principales propriétés.

3.1 Rappels de mécanique des milieux continus

Il s'agit dans cette de présenter quelques rappels de milieux continus. Pour plus de détails sur ce sujet nous citons par exemple les ouvrages.

3.1.1 Contraintes et Déformations

On considère un corps déformable occupant un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$), de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ suppose assez régulière, Nous étudions, dans un intervalle de temps $[0, T]$, l'évolution du corps matériel due à l'application de forces de volumes de surfaces. Cette évolution est décrite par l'équation

$$\rho \ddot{u} = \text{Div } \sigma + f \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.1.1)$$

où les inconnues du problème sont :

- le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$,
- le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_N$,

Dans 3.1.1 $S_N = \mathbb{R}_S^{N \times N}$ est l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^N$ " $\ddot{u}$ " (respectivement " $\dot{u}$ ") représente la dérivée seconde du champ des déplacements par rapport au temps (respectivement première) et $\text{Div } \sigma$ est la divergence du champ des contraintes. Les fonctions densité de masse $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$, et la densité des forces volumiques $f : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ sont des données du problème.

Les processus d'évolution modélisés par l'équation (3.1.1) s'appellent *processus dynamiques*. Dans certaines situations, l'équation (3.1.1) peut encore se simplifier. Par exemple dans le cas où $\dot{u} = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (*processus statiques*), ou bien dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho \ddot{u}$ peut être négligé (processus quasi statiques), Dans ces deux cas l'équation (3.1.1) devient :

$$\text{Div } \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.1.2)$$

Dans la suite, on va considérer des solides élasto-viscoplastiques dans le cadre des petites transformations. Dans ce cas, on a besoin du champ des déformations linéarisé $\varepsilon : \Omega \times$

$[0, T] \rightarrow S^N$ défini par:

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.1.3)$$

Où ∂_k représente l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable x_k . On précise en outre qu'on adopte la convention de l'indice muet. Souvent, pour marquer à la dépendance du champ des déformations ε par rapport au champ des déplacements u , on va le noter $\varepsilon(u)$. Remarquons aussi que dans l'étude des processus statiques le temps n'intervient pas et par conséquent les égalités (3.1.2) et (3.1.3) sont satisfaites en Ω au lieu de $\Omega \times (0, T)$.

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus. En effet, il reste à décrire ce qui est propre au matériau lui-même. C'est l'objet des lois de comportement que nous décrivons dans la section suivante.

3.1.2 Conditions aux limites

Supposons maintenant que la frontière du domaine est constituée de trois parties disjointes deux: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Soit ν le vecteur unitaire extérieur à Γ . Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cas statique et par conséquent le temps n'interviendra pas par la suite.

On considère les conditions aux limites suivantes :

$$u = \xi \text{ sur } \Gamma_1 \quad (3.1.4)$$

$$\sigma \nu = g \text{ sur } \Gamma_2 \quad (3.1.5)$$

La condition (3.1.4) est appelée *condition aux limites de déplacement*. Sa signification consiste en ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_1 de la frontière Γ , la fonction ξ étant une donnée du problème (par exemple, si $\xi = 0$ le solide est encasté par la partie Γ_1 de sa frontière dans une structure fixe).

La condition (3.1.5) est appelée *condition aux limites de traction*. Elle signifie que le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma \nu$ est imposé sur la partie Γ_2 de la frontière, g représentant la densité des forces appliquées de surface et constituant une donnée du problème.

Si $\Gamma_1 = \phi$ le problème aux limites est un problème de traction pure et si $\Gamma_2 = 0$ le problème aux limites est un problème de déplacement pur. Si les parties Γ_1 et Γ' sont toutes les deux de mesure de Lebesgue $N - 1$ dimensionnelle strictement positive, le problème considéré est un *problème mixte de déplacement-traction*.

On suppose maintenant que le corps est en contact avec une base rigide S par la partie Γ_3 de la frontière.

On note par v_ν et v_τ la composante normale et respectivement tangentielle de tout champ vectoriel $v = v_\nu \nu + v_\tau \tau$ où $v_\nu = v \cdot \nu$. De même, soit σ_ν et σ_τ la composante normale et respectivement tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy σ_ν il vient : $\sigma_\nu = (\sigma \nu)_\nu, \sigma_\tau = (\sigma \nu)_\tau$ sur Γ_3 . Nous considérons les conditions aux limite suivantes:

a) Conditions de contact avec frottement

Nous présentons dans ce qui suit quelques exemples de lois de frottement. Nous nous bornons au cas statiques utilise notamment en modélisation des processus de chargement monotone.

Exemple 3.1.1 (Loi de TRESCA.)

On suppose que le contact entre le corps et la fondation est *bilatéral* (le contact est maintenu pendant le mouvement). Cette propriété se traduit mathématiquement par:

$$u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

La loi de Tresca présente un seuil de glissement fixe p : lorsque le solide et la fondation sont en contact, la fondation exerce sur le solide un effort tangentiel qui ne dépasse pas un certain seuil :

$$|\sigma_\tau| \leq p \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil, le milieu continu ne peut pas se déplacer par rapport à l'obstacle et il y a blocage, ce qui se traduit par:

$$|\sigma_\tau| \leq p \implies u_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Lorsque ce seuil est atteint le solide peut se déplacer tangentiellement. Par rapport à la fondation et il y a alors glissement. La contrainte tangentielle tend à s'opposer au déplacement. Par conséquent, on a. :

$$|\sigma_\tau| = p \implies \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_t \text{ sur } \Gamma_3.$$

Les conditions aux limites de type frottement de Tresca s'écrivent alors comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\nu = 0 \\ |\sigma_\tau| \leq p \\ |\sigma_\tau| < p \implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = p \implies \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\lambda = -\lambda u_\lambda \end{array} \right.$$

où p est le seuil de glissement.

Exemple 3.1.2 Loi de COULOMB.

C'est une des lois les plus répandues et elle est plus réaliste que la précédente. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de glissement et peut s'annoncer comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu |\sigma_\nu| \\ |\sigma_\tau| < \mu |\sigma_\nu| \implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu |\sigma_\nu| \text{ il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_t \end{array} \right. \quad (3.1.6)$$

où μ est le coefficient de frottement. A (3.1.6) on rajoute des conditions aux limites de contact bilatéral ($u_\nu = 0$) ou unilatéral ($u_\nu \leq 0, \sigma_\nu \leq 0, \sigma_\tau = 0, \sigma_\nu u_\nu = 0$ sur Γ_3).

La loi de *Coulomb* est souvent utilisées pour les corps rigides ou élastiques. On remarque également qu'il s'agit d'une loi à seuil, tant que le seuil est pas atteint, il n'y a pas de glissement. Ce seuil est variable et dépend de la contrainte normale ce qui représente une difficulté majeure pour l'étude mathématique de cette loi de frottement.

3.2 Rappels d'analyse

Il s'agit dans cette section de rappeler quelques résultats d'analyse non linéaire utilisés dans ce mémoire. Par simplicité, nous nous restreignons au seul cadre hilbertien. On précise que

pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section, on peut consulter par exemple

3.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Dans la suite, H désigne un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire ainsi que de la norme associée notes respectivement par $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ et $|\cdot|_H$. On note aussi par H' l'espace dualité de H et par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ la dualité entre H' et H .

a) Propriétés élémentaires

Théorème 3.2.1 (Théorème de représentation de Riesz-Frechet) *Etant donnée $\eta \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que*

$$\langle \eta, v \rangle_{H' \times H} = \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H.$$

On a de plus

$$|\eta|_{H'} = |f|_H$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'application $\eta \rightarrow f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et son dual H' .

On dit que la suite $(u_n) \subset H$ est faiblement convergente vers l'élément $u \in H$ et on note $u_n \rightarrow u$ si

$$\langle v, u_n \rangle_H \rightarrow \langle v, u \rangle_H \quad \forall v \in H.$$

Dans ce cas, u s'appelle limite faible de la suite (u_n) . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte que si $u_n \rightarrow u$ dans H alors $u_n \rightarrow u$ dans H . La réciproque n'est pas en général vraie. De plus, puisque tout espace de Hilbert est réflexif, on a le résultat suivant:

Théorème 3.2.2 *Soit (u_n) une bornée de H . Il existe alors un élément $u \in H$ et une sous-suite de (u_n) encore notée (u_n) telle que $u_n \rightarrow u$.*

Un élément $u \in H$ qui est la limite faible d'une sous-suite de la suite (u_n) s'appelle point faiblement adhérent à la suite (u_n) . On prouve que:

Théorème 3.2.3 *Si la suite $(u_n) \subset H$ possède un unique point faiblement adhérent $u \in H$ alors $u_n \rightarrow u$*

Autrement dit, Le théorème précédent affirme que si toutes les sous-suites faiblement convergentes d'une suite (u_n) ont la même limite faible u , alors toutes la suite (u_n) converge faiblement vers u .

Solent u et v deux éléments de H . On dit que u et v sont orthogonaux et on note $u \perp v$ si $\langle u, v \rangle_H = 0$. Soit M un sous-espace vectoriel de H . On pose

$$M^\perp = \{v \in H \mid v \perp u \quad \forall u \in M\}$$

On dit que $M^\perp$ est l'orthogonal de M dans H et on peut prouver le résultat suivant :

Théorème 3.2.4 *Soit M un sous-espace fermé de H . Alors $M^\perp$ est un supplémentaire topologique de M c'est-à-dire*

1. $M^\perp$ est sous-espace fermé H :
2. $M \cap M^\perp = \{0\}$ et $M + M^\perp = H$

On va finir ce paragraphe par un résultat concernant la projection sur un convexe ferme :

Théorème 3.2.5 *Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in H$ il existe $u \in K$ unique tel que*

$$|f - u|_H = \min_{v \in K} |f - v|_H \quad (3.2.1)$$

De plus, u est caractérisé par la propriété suivante

$$u \in K \quad \langle u, v - u \rangle_H \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in K. \quad (3.2.2)$$

Etant donné $K \subset H$ un convexe ferme non-vide, le théorème précédent nous permet d'associer à chaque-élément $f \in H$ l'élément u défini par (3.2.1) ou (3.2.2). On note $u = P_K f$. On a mis ainsi en évidence l'opérateur $P_K : H \rightarrow K$ qui s'appelle opérateur projection de H sur K .

b) Théorème du point fixe -Théorème de Lax-Milgram

On va commencer par rappeler un résultat classique qui est Le théorème de point fixe de Banach. Ce résultat intervient dans les démonstrations de bon nombre des résultats d'existence et d'unicité établis dans les chapitres précédents.

Théorème 3.2.6 *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $F : X \rightarrow X$ une application contractante, c'est-à-dire qu'il existe un réel k vérifiant $0 < k < 1$ tel que*

$$d(F(x_1), F(x_2)) \leq k(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

L'application F admet alors un point fixe unique $x \in X$ i.e. $F(x) = x$.

Soit maintenant $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur $H \times H$. La forme a est dite

1. continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq M |u|_H |v|_H \quad \forall u, v \in H$$

2. coercive s'il existe un réel $m > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq m |u|_H^2 \quad \forall u \in H$$

Remarque 3.2.1 *Soient $A : H \rightarrow H$ un opérateur et $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$. la forme définie par*

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle \quad \forall u, v \in H \tag{3.2.3}$$

On a alors les propriétés suivantes :

- i) a est bilinéaire si et seulement si A est linéaire.
- ii) a est continue si et seulement si A est continu.
- iii) a est coercive si et seulement si A est défini positif,

Le second rappel de ce paragraphe concerne le fameux théorème de Lax-Milgram

Théorème 3.2.7 *Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $f \in H$, il existe un unique $u \in H$ tel que*

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H \tag{3.2.4}$$

3.2.2 Fonctions convexes - Semi-continuité inférieure

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et a valeurs dans $]-\infty, +\infty]$. Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$ c'est-à-dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi((tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u, v \in X, t \in]0, 1[$$

La fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tels que $u \neq v$.

Pour toute fonction $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$, on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par:

$$\text{dom } \varphi = \{u \in X \mid \varphi(u) < +\infty\}$$

$$-\text{epi } \varphi = \{(u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(u) \leq \alpha\}$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants:

1. φ est propre si et seulement si $\text{dom } \varphi \neq \emptyset$.
2. Le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe.
3. φ est convexe si et seulement si $\text{epi } \varphi$ est un ensemble convexe dans $X \times \mathbb{R}$.

Une fonction $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) en $u_0 \in H$ si

$$\liminf_{u \rightarrow u_0} \varphi(u) \geq \varphi(u_0).$$

Une fonction est dite s.c.i. sur $K \subset H$ si elle est s.c.i. en tout point de K et elle est, dite s.c.i. si elle est s.c.i. sur tout H .

La propriété de semi-continuité inférieure peut être caractérisée par:

Lemme 3.2.1 Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. φ est semi-continue inférieurement.
2. L'épigraphe de φ est fermé dans $H \times \mathbb{R}$.

Puisque dans un espace vectoriel norme tout ensemble convexe est simultanément fermé pour la topologie forte et la topologie faible, le lemme précédent conduit au résultat suivant :

Théorème 3.2.8 *Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et propre. Alors φ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie faible de H .*

Soit maintenant K un sous-ensemble de H . On appelle fonction indicatrice de K , la fonction $\psi_K : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ définie par

$$\psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.2.5)$$

En utilisant cette définition, on peut facilement prouver le résultat suivant:

Lemme 3.2.2 *K est un ensemble convexe, fermé et non vide de H si et seulement si la fonction indicatrice ψ_K est convexe, semi-continue inférieurement et propre.*

3.2.3 Différentiabilité - Sous-différentiabilité

On note à présent, par 2^H l'ensemble de toutes les parties de H .

Une fonction $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite Gâteaux-différentiable au point $u \in H$ s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in H$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = \langle \nabla\varphi(u), v \rangle_H \quad \forall v \in H$$

L'élément $\nabla\varphi(u)$ s'appelle la différentielle au sens de Gâteaux de φ en u .

La fonction φ est dite Gâteaux-différentiable si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de H ; dans ce cas l'opérateur $u \rightarrow \nabla\varphi(u) : H \rightarrow H$ s'appelle le gradient de φ

La convexité des fonctions Gâteaux-différentiables peut être caractérisée de la façon suivante

Lemme 3.2.3 Soit $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable. φ est alors une fonction convexe si et seulement si

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle \nabla \varphi(u), v - u \rangle_H \quad \forall u, v \in H. \quad (3.2.6)$$

L'inégalité (3.2.6) suggère une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes : on dit que la fonction $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est sous-différentiable en un point $u \in H$ s'il existe $f \in H$ tel que

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in H$$

L'élément f est alors appelé un sous-gradient de φ en u et l'ensemble des sous-gradients de φ en u est appelé le sous-différentielle de φ en u et est noté $\partial\varphi(u)$:

$$\partial\varphi(u) = \{f \in H : \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in H\} \quad (3.2.7)$$

On note par $\text{dom}(\partial\varphi)$ l'ensemble défini par

$$\text{dom}(\partial\varphi) = \{u \in H \mid \partial\varphi(u) \neq \emptyset\} \quad (3.2.8)$$

En utilisant (3.2.8), (3.2.7) ainsi que la définition du domaine d'une fonction, il résulte

$$\text{dom}(\partial\varphi) \subset \text{dom} \varphi$$

3.2.4 Inéquations variationnelles elliptiques

Soient $A : H \rightarrow H$ un opérateur non linéaire, $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $f \in H$. Un bon nombre de problèmes aux limites en équations aux dérivées partielles ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un rapport avec des problèmes mathématiques de la forme suivante :

Trouver u tel que :

$$u \in K, \langle Au, v - u \rangle_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in K \quad (3.2.9)$$

Le problems (3.2.9) est appele in equation variationnelle elliptique de seconde espèce sur H . D'autres problemes rencontrés en mecanique ont un rapport avec des problèmes mathématiques similaires de la forme suivante :

Trouuet u tel que :

$$u \in H, \langle Au, v - u \rangle_H \geq \langle f(u), v - u \rangle_H \quad \forall v \in H \quad (3.2.10)$$

où K est un sous-ensemble non vide de H . Le probleme (3.2.10) est appelé inéquation variationnelle elliptique de première espece sur H .

Remarquons que si $\varphi \equiv 0$ (ou $K = H$), alors (3.2.9). (resp. (3.2.10)) est equivalente au probleme suivant :

Trouver u tel que :

$$u \in H, \langle Au - v \rangle_H = \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H \quad (3.2.11)$$

On obtient ainsi une équation variationnelle.

On dit que l'opérateur A defini sur un espace de Hilbert H est:

a) de Lipschitz si A vérifiée

il existe $m > 0$ tel que $(A(\varepsilon_1) - A(\varepsilon_2)).(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2$ pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in A$;

b) fortement monotone si A vérifiée

il existe $L > 0$ tel que $|A(\varepsilon_1) - A(\varepsilon_2)| \leq L |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in A$.

On peut démontrer (voir par exemple [48]) que si A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz alors A est inversible et A^{-1} est fortement monotone et de Lipschitz.

En ce qui concerne les problèmes (3.2.9) et (3.2.10), on ales résultats d'existence et d'unicité suivants :

Théorème 3.2.9 *Si A est un operateur fortement monotone et de Lipschitz et φ est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement alors l'inéquation variationnelle elliptique (3.2.9) admet une solution unique,*

Théorème 3.2.10 *Si A est un operateur fortement monotone et de Lipschitz et K est un convexe fermé non vide de H alors l'inéquation variationnelle elliptique (3.2.10) admet une solution unique*

3.2.5 Compléments divers

On présente ici de lemmes classiques de type Gronwall utilisés dans troisième chapitre de cette thèse.

Lemme 3.2.4 Soient $m, n \in C(0, T, \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\psi \in C(0, T, \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Pour Le cas particulier $m = 0$, ce Lemme devient :

Corollaire 3.2.1 Soient $n \in C(0, T, \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. $\psi \in C(0, T, \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s) \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Lemme 3.2.5 Soient $m, n \in C(0, T, \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\psi \in C(0, T, \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\frac{1}{2} \psi^2(t) \leq \frac{1}{2} a^2 + \int_0^t m(s) \psi ds + \int_0^t n(s) \psi^2(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$|\psi(t)| \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Dans le cas particulier $m = 0$: ce Lemme devient :

Corollaire 3.2.2 Soient $n \in C(0, T, \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\psi \in C(0, T, \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\psi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t n(s) \psi^2(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$|\psi(t)| \leq a \exp\left(\int_0^t n(s) ds\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

3.2.6 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section des espaces du type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence déformation. On présente de plus leur principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On rappelle aussi quelques espaces définis sur un intervalle réel et à valeurs dans un espace de Hilbert. On adopte ici la convention de l'indice muet et on précise aussi que toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans cette section sont introduits dans cette section.

3.2.7 Espaces de distributions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On note par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles suivant indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω et par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace, distributions sur Ω . Le produit de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ sera noté par $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On précise en outre que le produit scalaire canonique ainsi que la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$ seront respectivement notées par " $\cdot$ " et $|\cdot|$. Nous introduisons également les espaces suivants:

$$D = \{\varphi = (\varphi_i) \mid \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega), i = \overline{1, N}\} = \mathcal{D}(\Omega)^N$$

$$\mathcal{D} = \{\phi = (\phi_{ij}) \mid \phi_{ij} \in \mathcal{D}(\Omega), i, j = \overline{1, N}\} = \mathcal{D}(\Omega)_s^{N \times N}$$

$$D' = \{u = (u_i) \mid u_i \in \mathcal{D}'(\Omega), i = \overline{1, N}\} = \mathcal{D}'(\Omega)^N$$

$$\mathcal{D}' = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathcal{D}'(\Omega), i, j = \overline{1, N}\} = \mathcal{D}'(\Omega)_s^{N \times N}$$

Les dualités entre Les espaces D' et D , $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$ seront notées respectivement par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D' \times D}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$. Plus précisément on a :

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi \rangle_{D' \times D} &= \langle u_i, \varphi_i \rangle \\ \langle \sigma, \phi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} &= \langle \sigma_{ij}, \phi_{ij} \rangle\end{aligned}$$

pour tout $u \in D'$, $\varphi \in D$, $\sigma \in \mathcal{D}'$ et $\phi \in \mathcal{D}$ avec la convention de l'indice muet.

Considérons maintenant l'opérateur défini pour les fonctions et pour les distributions $\partial_i = \partial / \partial x_i$, $i = \overline{1, N}$. On a

$$\langle \partial_i, \theta, \psi \rangle = - \langle \theta, \partial_i, \psi \rangle \quad \forall \theta \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (3.2.12)$$

On introduit également les opérateurs différentiels du premier ordre définis par

$$\varepsilon : D \rightarrow \mathcal{D}, \quad \varepsilon(\varphi) = (\varepsilon_{ij}(\varphi)), \quad \varepsilon_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_j \varphi_i + \partial_i \varphi_j) \quad \forall i, j = \overline{1, N}, \varphi \in \mathcal{D} \quad (3.2.13)$$

$$\text{Div} : \mathcal{D} \rightarrow D, \quad \text{Div} \phi = (\partial_j \phi_{ij}) \quad \forall i = \overline{1, N}, \phi \in \mathcal{D} \quad (3.2.14)$$

On va utiliser les mêmes notations pour les opérateurs correspondants définis sur les espaces de distributions :

$$\varepsilon : D' \rightarrow \mathcal{D}', \quad \varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \forall i, j = \overline{1, N}, u \in \mathcal{D} \quad (3.2.15)$$

$$\text{Div} : \mathcal{D}' \rightarrow D', \quad \text{Div} \sigma = (\partial_j \sigma_{ij}), \quad \forall i = \overline{1, N}, \sigma \in \mathcal{D}'. \quad (3.2.16)$$

En utilisant (3.2.12), on obtient facilement (3.2.17)

$$\langle \varepsilon(u), \phi \rangle_{\mathcal{D}' \times D} = - \langle u, \text{Div} \phi \rangle \quad \forall u \in D', \phi \in \mathcal{D} \quad (3.2.17)$$

(3.2.18)

$$\langle \text{Div} \sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} = - \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{D}' \times D} \quad \forall \sigma \in \mathcal{D}', \varphi \in D. \quad (3.2.18)$$

L'opérateur ε défini par (3.2.13) pour les fonctions et par (3.2.15) pour les distributions s'appelle opérateur déformation. L'opérateur Div défini par (3.2.14) pour les fonctions et par (3.2.16) pour les distributions s'appelle opérateur divergence.

On va utiliser aussi les notations

(3.2.19)

$$H = \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1, N}\} = L^2(\Omega)^N. \quad (3.2.19)$$

(3.2.20)

$$\mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega), i = \overline{1, N}\} = L^2(\Omega)_S^{N \times N}. \quad (3.2.20)$$

Les espaces H et $\mathcal{H}$ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires canoniques

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_H &= \int_{\Omega} u_i v_i \, dx \quad \forall u, v \in H \\ \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} \, dx \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

.

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement par $|\cdot|_H$ et $|\cdot|_{\mathcal{H}}$.

Compte tenu de l'identification de $L^2(\Omega)$ à un sous-espace de distributions sur Ω , on peut considérer que $H \subset D'$ et $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$. Par conséquent, les opérateurs déformation et divergence peuvent être définis respectivement sur les espaces H et $\mathcal{H}$. Cela nous conduira à l'étude d'autres espaces fonctionnelles, dans les paragraphes ??et ??.

Pour l'instant, on rappelle la définition de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega), i = \overline{1, N}\}.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \partial_i u, \partial_i v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

On notera la norme associée par $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$. On note de plus par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace fermé de $H^1(\Omega)$.

3.2.8 Espaces liés à l'opérateur déformation

Pour l'opérateur déformation défini par (??), il est naturel d'introduire l'espace

$$H_1 = \{u \in H \mid \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}.$$

On considère sur H_1 produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = \langle u, v \rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in H_1.$$

et on note la norme associée par $|\cdot|_{H_1}$. On obtient ainsi que l'injection $H_1 \subset H$ et l'opérateur déformation $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ sont des opérateurs continus. De même, compte tenu de l'identification de H et $\mathcal{H}$ à des sous-espaces de D' et $\mathcal{D}'$, en utilisant (??) il résulte (3.2.21)

$$\langle \varepsilon(u), \phi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} + \langle u, \text{Div } \phi \rangle_H = 0 \quad \forall u \in H, \quad \phi \in \mathcal{D} \quad (3.2.21)$$

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution de problème de contact entre deux corps élastiques et déformables avec frottement de Coulomb et les conditions de Signorini.

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution on a utilisé les arguments suivants: inéquation variationnelle elliptique et théorème de point fixe.

Bibliographie

- [1] Amassad, A., Sofonea, N.I., Analysis of a quasistatic viscoplastic problem involving Tresca friction law, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 1988. 55-72.
- [2] Andrews, K.L., Klarbring, A., Shilor, M., Wright, S., A dynamical thermoviscoelastic contact problem with friction and wear, Int. J. Engng. Sci. 35(1997), no.14, 1291-1309.
- [3] Andrews, K.L., Kuttler, K.L., Shilor, M., On the dynamic behavior of a thermoviscoelastic body in frictional contact with a rigid obstacle. Euro. J. App. Math., 8(1997), 417-436.
- [4] Atkinson, K., Han, W., Theoretical numerical analysis a functional analysis framework, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [5] Bryan P. Rynne et Martin A. Youngson, Linear Functional Analyse.
- [6] Claude Portenier, Analyse Fonctionnelle, 2003-2004
- [7] Daniel Li, Analyse Fonctionnelle (Master 1 Mathématiques-Informatique), Université d'Aix-Marseille.
- [8] David Manceau et Stéphane Maingot, Théorie Spectrale.
- [9] Drabla, S., Analyse variationnelle de quelques problèmes aux limites en élasticité et en viscoplasticité, Thèse de Doctorat, Univ. Setif, 1999.
- [10] Duvaut, G., Lions, J.L., Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.

- [11] Hadj Ammar, T., Etude théorique et numérique d'un problème de contact sans frottement entre deux corps déformables, Mémoire de Magister, Univ. Ouargla, 2006.
- [12] J.Chevalier, Analyse Fonctionnelle Appliquée, Université de Liege faculté des sciences Appliquées, 1998.
- [13] Jean -philippe Nicolas, Analyse Complexe et Analyse Spectrale.
- [14] Kikuchi, N., Oden, J.T., Contact Problems in Elasticity, A Study of Variational inequalities and Finite Element Methods , SIAM, Philadelphia, PA, 1988.
- [15] Martins, J.A.C., Oden, T.J., Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, Nonlin. AnaL, 11(1987): no. 3,407-428.
- [16] Nečas, J., Jarušek, J., Haslinger, J., On the solution of the variational inequality to the signorini problem with small friction, Boll. U .M.I., 5(17B) (1980), 796-811.
- [17] Raous, M., Jean, :M., Moreau, J.J., Contact Mechanics, Plenum Press, New York, 1995.
- [18] Rochdi, M., Shilor, M., Sofonea, M., Quasistatic viscoelastic contact with normal compliance and friction, J. Elasticity, 51(1998), 105-126.
- [19] Rochdi, M., Sofonea, M., frictionless contact between two elastic-viscoplastic bodies, Quart. J. Mech. App. Math., 50(1997), no. 3,481-496.
- [20] Version Longue, Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale MT 404, 2001-2002.

Résumé :

Ce document traite de l'étude d'un problème non linéaire de contact avec frottement entre deux corps déformables. La loi de comportement élastique est un supposé être non linéaire et le contact est modélisée avec les conditions et la version de la loi de Coulomb de frottement sec de Signorini.

Nous présentons deux formulations variationnelles, noté P1, P2, du problème considéré, où P1 dépend du champ de déplacement et P2 dépend du champ de contrainte. Nous établissons existence et unicité des résultats , en utilisant des arguments des inégalités variationnelles elliptiques et une propriété de point fixe et le lion , Théorème Stampachia.

Mots-clés: les conditions de Signorini, matériau élastique, loi de comportement non linéaire. La loi de Coulomb de frottement. problèmes de contact. point fixe

Abstract : This paper deals with the study of a nonlinear problem of friction contact between two deformable bodies. The elastic constitutive law is a assumed to be nonlinear and the contact is modeled with Signorini's conditions and version of Coulomb's law of dry friction. We present two variational formulations, noted P 1 , P 2, of the considered problem, where P 1 depends on the displacement field and P 2 depends on the stress field. We establish existence and uniqueness results, using arguments of elliptic variational inequalities and a fixed point property and *Lion* *s*, *Stampachia* theorem.

Keywords : Signorini's conditions, elastic material, nonlinear constitutive law, Coulomb's law of friction, contact problems, fixed point.

الملخص: تتناول هذه الدراسة مشكلة غير خطية لاتصال احتكاك بين جسمين قابلين للتشوه ومرنين. القانون التأسيسي للمرونة هو غير خطي. نقدم الصيغتين المتغيرتين P 1 و P 2 للمشكلة المدروسة، حيث يعتمد الأولى على المجال في الثانية يعتمد على حقل القيود. و وحدانية الحلول و حجج المتراجحات التغايرية الناقصية و خاصية نقطة ثابتة مبرهنة ' *Lion s*, *Stampachia* '

الكلمات المفتاحية : 'سينيوريني'، القانون التأسيسي غير الخطية، 'Stampachia', 'Lion s', 'نقطة ثابتة', 'متراجحات', 'تغايرية', 'ناقصة', 'حجج', 'حلول', 'وحدانية', 'مشكلة', 'مدروسة', 'خطية', 'غير', 'تأسي', 'قانون', 'مرنين', 'قابلين', 'للتشوه', 'جسمين', 'بين', 'احتكاك', 'لاتصال', 'مشكلة', 'غير', 'خطية'.