N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Théorème de Lax-Milgram, méthode de pénalisation et applications

Présenté par: Omane Mohammed
Tamma Badr Eddine

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Doudi Nadjet	MAA.	Président	Univ. El Oued
Zaouche El Mehdi	MCB.	Rapporteur	Univ. El Oued
Menacer Bekkar	MAA.	Examinateur	Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Dédicaces

Tout d'abord je rends un grand hommage à la mémoire de mon père et je prie dieu le tout puissant de l'accepteur dans son vaste paradis.

je dédie ce modest travail :

A ma mère, que a oeuvré pour ma réussite, par son amour son soutien, et ses précieux conseils.

A ceux qui m'ont soutenu et encouragé à étudier ma chère épouse et mes enfants Youcef et Younes .

A toute ma famille, qui porte le nom Omane.

A tous mes chers amis.

Mohammed

Je dédie ce mémoire :

A mes parents pour leur amour inestimable, leur confiance, leur soutien, leurs sacrifices et toute les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.

A toute ma famille, qui porte le nom Tamma.

A tous mes chers amis.

A tous ceux que j'aime et à qui m'aime.

A mes collègues de département mathématiques de l'université hama lakhdar d'el-oued.

A tous les enseignants de mathématiqe.

A tous ceux qui ont participé àl'élaboration de ce modeste travail.

Badr Eddine

Remerciements

Nous remercions $\ll$ ***Allah*** $\gg$ *qui nous a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.*

Nous tenons à notifier un remerciement spécial à tous nos professeurs qui ont contribué à notre formation de mathématique, en particulier, notre encadreur Monsieur ***"El Mehdi Zaouche"***

Ainsi que tous nos professeurs qui nous ont enseigné durant nos études à la faculté des sciences exactes.

nous remercions également tous nos collègues d'étude, particulièrement notre promotion de master mathématique, 2017/2018 à l'université de ***Chahid Hama Lakhdar El-Oued.***

En fin, nous remercions vivement notre famille pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation.

Notations générales

H	Espace de Hilbert.
V	Espace de Banach.
$W^{m,p}, W_0^{m,p}$,	Espaces de Sbolev.
$W^{-m,q}$,	Dual de $W_0^{m,p}$.
$\mathscr{L}(X, Y)$	Espace des opérateures linéaires bornés de X dans Y.
V'	Espace dual de V.
V''	Espace bidaul de V.
K	est un ensemble non vide convexe fermé de V.
A^*	Adjoint de A.
$A^\perp$	Orthogonal de A.
$(,)$	Produit scalaire .
$\langle , \rangle$	dualité X', X.
∂	L'opérateur de différentiation partielle.
$D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\|\alpha\|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$	Dérivée partielle par rapport au multi-indice α.
Δ	Opérateur de Laplacien.
∇	Opérateur gradient.

$\frac{\partial u}{\partial n}$	dérivée normale extérieure V.
$C_0(\Omega)$	Fonctions continues à support compact dans Ω.
$\partial\Omega$	frontière de Ω.
J	Opérateur de dualité de V dans V''.
$P_k u$	Opérateur de prejection de V dans le convexe fermé K.
$p.p$	Presque partout.
$\rightharpoonup$	Convergence faible.

Table des matières

Introduction générale

Parmi les objectifs aux aspects théoriques des mathématiques ceux qui contribuent aux domaines d'application. Nous nous proposons dans ce travail de présenter quelques théorèmes importants s'appliquant à certains problèmes aux dérivées partielles exprimés sous une formulation faible, ce sont le théorème de Lax-Milgram et la méthode de pénalisation pour résolution les inéquations variationnelles (IV) elliptiques. En outre on va illustrer cette lecture théorique par quelques applications.

Le théorème de Lax-Milgram est utilisé pour assurer l'existence et l'unicité de la solution de certains problèmes, comme les équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles linéaires dans les espaces de Hilbert et de Banach. D'ailleurs, la méthode de pénalisation pour (IV) elliptiques peut être contribuer à la résolution certains problèmes non linéaires après avoir la formulation faible ou bien dans le cas des obstacles. Le mémoire est divisé en trois chapitres :

• Chapitre 1 : Il contient quelques notions préliminaires et outils de base utilisées tout au long de ce travail concernant la topologie et l'analyse fonctionnelle comme les espaces topologiques, les espaces de Sobolev, etc.

• Chapitre 2 : Nous énonçons le théorème de Lax-Milgram dans un espace de Hilbet qui est bien connu. Si H un espace de Hilbert, a est une forme bilinéaire continue coercive sur H et L est une forme linéaire continue de H dans $\mathbb{R}$, le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité d'un élément u de H vérifiant

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H. \tag{1}$$

La preuve de (1) est basée sur le théorème de représentation de Riesz qui est un cas particulier du théorème de Lax-Milgram en remplaçant a par le produit scalaire. Ensuite, on va essayer de donner une extension de (1) à un espace de Banach qui est le théorème de Lax-Milgram dans un espace de Banach. Dans la dernière partie, nous présentons la méthode de pénalisation pour les (IV) elliptiques. Nous commençons à énoncer quelques notions sur les opérateurs monotones, ensuite certains résultats d'existence pour les (IV) elliptiques et enfin, la résolution des (IV) par la méthode de pénalisation.

• Chapitre 3 : Il sera consacré à la consolidation de la lecture théorique présentée au chapitre 2 par des applications. Nons avons considéré le problème de Dirichlet pour l'équation de Sturm-Liouville sur l'intervalle $[0, 1]$. Après avoir la formulation faible de ce problème on a montré l'existence et l'unicité de la solution en appliquant le théorème de Lax-Milgram dans l'espace $H_0^1(]0, 1[)$. Le Laplacien avec condition aux limites de Neumann peut être résolu en appliquant le théorème de Lax-Milgram dans l'espace de Hilbet $H^1(\Omega)$.

Nous avons aussi une équation aux dérivées partielles (EDP) linéaires du second ordre $-\Delta u + cu = F$ avec condition aux limites de Dirichlet homogène qu'on peut la résoudre en utilisant le théorème de Lax-Milgram dans l'espace de Banach $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour les EDP non linéaires nous avons un problème composé d'une équation non linéaire et une condition aux limites de Dirichlet non homogène. Ce problème ne peut être traité que par la méthode de pénalisation.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapiter nous rappelons quelques notions essentielles dans ce mémoire concernant la topologie et l'analyse fonctionnelle.

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1. *Soit $(V, \|.\|_V)$ un espace normé. Une suite $(x_n)_{n\in N}$ de points de V est dite une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N = N(\varepsilon)$ tel que pour tous $m, n > N$, on ait $\|u_n - u_m\|_V < \varepsilon$ (i.e $\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \|u_n - u_m\|_V = 0$).*

Définition 1.1.2. *Un espace normé $(V, \|.\|_V)$ où toute suite de Cauchy est convergente est appelé un espace de Banach.*

Exemple 1.1.1. *Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ munis de leurs normes usuelles sont des espaces de Banach.*

Définition 1.1.3. *Soit E un e.v.n. On dit que V est séparable s'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset V$ qui est dense dans V.*

Définition 1.1.4. *[4] Soit V un espace de Banach et soit J l'injection canonique de V dans V'', On dit que V est réflexif si $J(V) = V''$. C'est à dire on identifie implictement V et V''.*

Corollaire 1.1.1. *[4] Soit V un espace de Banach. Alors V réflexif et séparable si et seulement si V' réflexif et séparable.*

1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.2.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*
On dit que E est muni d'un produit scalaire s'il existe une application

$$\begin{array}{rrcl} h: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (u,v) & \longmapsto & h(u,v) = \langle u, v \rangle \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :
Pour tous u, v et $w \in E$ et α, $\beta \in \mathbb{K}$,
i) $(v,u) = \overline{(u,v)}$ (Hermitienne).
ii) $(\alpha u + \beta w, v) = \alpha(u,v) + \beta(w,v)$; $(u, \alpha w + \beta v) = \overline{\alpha}(u,w) + \overline{\beta}(u,v)$ (Sesquilinéaire).
iii) $(u,u) \geq 0$ et ($(u,u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$) (Définie positive).
Un espace muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.

Définition 1.2.2. *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Une norme sur E est une application $\|.\|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ayant les trois propriétés suivantes :*
1) a) $\|u\|_E \geq 0 \quad \forall u \in E$, b) $\|u\|_E = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ (Définie positive).
2) $\|\lambda u\|_E = |\lambda| \|u\|_E \quad \forall u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ (Homogénéité).
3) $\|u + v\|_E \leq \|u\|_E + \|v\|_E \quad \forall u, v \in E$ (Inégalité triangulaire).

Définition 1.2.3. *Le couple $(X, \|.\|_X)$ où X est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\|.\|_X$ une norme sur X est appelé un espace normé (réel si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).*

Proposition 1.2.1. *(L'identité du parallélogramme).*
Soit E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Alors

$$\forall u, v \in E \quad 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 \tag{1.1}$$

(i.e. dans un parallélogramme la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés).
Preuve *:*

On a

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 &= (u+v,u+v)+(u-v,u-v)\\
&= (u,u)+(v,v)+(u,v)+(v,u)+(u,u)+(v,v)-(u,v)-(v,u)\\
&= 2((u,u)+(v,v))\\
&= 2(\|u\|^2+\|v\|^2)
\end{aligned}$$

d'où (1.1). □

Remarque 1.2.1. *Si l'identité de parallélogramme n'est pas satisfaite par la norme induite alors l'espace en question n'est pas un espace de préhilbertien.*

Définition 1.2.4. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée. Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, (resp. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) H est dit espace de Hilbert réel (resp. complexe).*

1.3 Rappel sur les applications linéaires

Soient E et F deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$. Pour qu'une application linéaire $f: E \longrightarrow F$ soit continue il suffit qu'elle soit continue en un point, elle est alors uniformément continue.
Les applications linéaires continues possédent des propriétés particuliéres remarquables.
Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, une application linéaire $f: E \longrightarrow \mathbb{K}$ est appelée une forme linéaire, et l'espace vectoriel des formes linéaires sur E est le dual algébrique de E (noté $E^\star$). Si E est normé, l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E est le dual topologique de E noté $E^{'} \subset E^\star$.
$E^{'}$ est un sous-espace vectoriel de $E^\star$.

Définition 1.3.1. *Soit $f: X \longrightarrow Y$. On dira que f est une application ouverte si l'image par f de tout ouvert de X est un ouvert de Y .*

Théorème 1.3.1. *[1] (Théoréme de l'application ouverte).*
Soient E et F deux espaces de Banach. Une application linéaire continue surjective $f: E \longrightarrow F$ est une application ouverte.

Définition 1.3.2. *Soit* $(E, \|.\|_E)$ *un espace normé, on note par* E' *son dual topologique,* $E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ *linéaire et continue* $\}$. $E^{'}$ *est normé par :*

$$\|f\|_{E'} = \sup_{u \neq 0} \frac{|f(u)|}{\|u\|_E}.$$

Le dual de E' *est appelé bidual de* E *et est noté* E'',

$$E'' = \{h : E' \longrightarrow \mathbb{K};\ \textit{linéaire et continue}\}.$$

Théorème 1.3.2. *[1]*
Si F *est un espace de Banach, l'espace normé* $\mathcal{L}(E, F)$ *l'est aussi. En particulier le dual topologique* E' *de* E *est un espace de Banach.*

Théorème 1.3.3. *[1](corollaire du théoréme de Hahn-Banach).*
Soient E *un espace normé,* H *un sous-espace vectoriel fermé de* E *et* $u_0 \in E \backslash H$. *Il existe une forme linéaire continue* μ *sur* E *telle que,*

$$\mu(u_0) = 1, \quad \mu(u) = 0 \quad \forall u \in H, \quad \|\mu\| = \frac{1}{\rho}$$

où ρ *(strictement positif) est la distance de* u_0 *à* H.

Définition 1.3.3. *Soit* E *un espace de Banach et soit* $J : E \longrightarrow E''$ *l'injection canonique de* E *dans* E''.
L'espace E *est dit réflexif si* J *est surjective, c'est-à-dire* $J(E) = E''$. *Quand* E *est réflexif,* E'' *est habituellement identifié avec* E.

Définition 1.3.4. *[6] Soit* F *un espace de Banach sur* $\mathbb{R}$, *de norme* $\|.\|$ *et soit* $\|.\|_*$ *la norme dual sur le Banach (dual)* F', *et soit* $(.,.)$ *le produit scalaire entre* F *et* F'. *Soit* $r \longrightarrow \Phi(r)$ *une fonction continue monotone strictement croissante de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}_+$, *tel que* $\Phi(0) = 0$,*et* $\Phi(r) \longrightarrow \infty \quad si \quad r \longrightarrow \infty$.
Une application J *de* $F \longrightarrow F'$ *est dite relative à* Φ *si les conditions suivantes ont lieu :*

$$(J(u), u) = \|J(u)\|_* \|u\| \quad \forall u \in F, \tag{1.2}$$

$$\|J(u)\|_* = \Phi(\|u\|) \qquad \forall u \in F. \tag{1.3}$$

1.4 Fonctions convexes

Définition 1.4.1. *[2] Une fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe lorsque :*

$$\forall (x,y) \in V^2 \quad \forall \lambda \in [0,1] : \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Définition 1.4.2. *[2] Une fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite strictement convexe si :*
$\forall (x,y) \in V^2,\ x \neq y, \quad \forall \lambda \in [0,1]$ *:*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Définition 1.4.3. *[2] Un ensemble C est dit convexe si :*

$$\forall x, y \in C, \quad \forall \lambda \in [0,1] \ : \qquad \lambda x + (1-\lambda) y \in C.$$

1.5 Espaces de Sobolev

Dans toute la suite $I =]a,b[$ est un intervalle (borné ou non) et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

1.5.1 Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Définition 1.5.1. *[3] Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$. On pose*

$$L^p(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R};\ f \ \text{ est mesurable et } \int_I \mid f(x) \mid^p dx < \infty\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_I |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Définition 1.5.2. *[3] On pose*

$$L^\infty(I) = \left\{ f :\ I \longrightarrow \mathbb{R};\ \text{mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \ \text{p.p. sur } I \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \left\{ C;\ |f(x)| \leq C \ \text{p.p. sur } I \right\}.$$

Définition 1.5.3. *[3] L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est défini par*

$$W^{1,p}(I) = \Big\{u \in L^p(I); \quad \exists g \in L^p(I) \quad \textit{tel que} \quad \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(I)\Big\}.$$

On pose

$$H^1(I) = W^{1,2}(I).$$

Pour $u \in W^{1,p}(I)$ on note g par u' et on l'appelle dérivée faible de u.

Proposition 1.5.1. *[3] L'espace $W^{1,p}(I)$ muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

est un espace de Banach.

Pour $1 \leq p < \infty$, la norme ci-dessus est équivalente à la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \Big[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p\Big]^{\frac{1}{p}} \quad si \ 1 \leq p < \infty.$$

L'espace $H^1(I)$ muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + (u',v')_{L^2};$$

est un espace de Hilbert.

La norme associée est

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.5.4. *[3] On définit l'espace*

$$H_0^1(I) = \overline{C_0^1(I)}$$

par rapport à la norme de $H^1(I)$.

Définition 1.5.5. *[3] On désigne par $H^{-1}(I)$ l'espace dual de $H_0^1(I)$.*

1.5.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$

Définition 1.5.6. *[3] Soit $m \geq 2$, p des entiers naturels avec $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace*

$$W^{m,p}(I) = \Big\{u \in L^p(I), u^k \in L^p(I), \quad k = 1, ..., m\}.$$

On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I),$$

et

$$H^{-m}(I) = (H_0^m(I))' = W^{-m,2}(I).$$

On vérifie aisément que pour $u \in W^{m,p}(I)$ *on peut considérer les dérivées faibles successives* $u' = g_1$, $(u')' = g_2$... *jusqu'à l'ordre* m *; on les note* Du, D^2u... D^mu. *L'espace* $W^{m,p}$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

est un espace de Banach.

L'espace H^m *est muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

est un espace de Hilbert.

1.5.3 Espace $W_0^{1,p}(I)$

Définition 1.5.7. *[3] Soit* $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(I)$ *désigne la fermeture de* $C_0^1(I)$ *dans* $W^{1,p}(I)$. *On note*

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

L'espace $W_0^{1,p}(I)$ *muni de la norme induite par* $W^{1,p}(I)$ *est un espace de Banach séparable ; il est réflexif si* $1 < p < \infty$. H_0^1 *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire induit de* H^1.

Remarque 1.5.1. *Si* I *est borné,* $W_0^{1,p}(I)$ *sera muni de la norme*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} = \sum_{1 \leq i \leq n} \|D_i u\|_{L^2},$$

c'est une norme équivaut à celle induite par $W^{1,p}(I)$.

Théorème 1.5.1. *[3] Soit* $u \in W^{1,p}(I)$, *alors* $u \in W_0^{1,p}(I)$ *si et seulement si* $u = 0$ *sur* ∂I.

Remarque 1.5.2. *Toutes les définitions et les propriétés indiqués précédemment restent juste si on remplace* $\mathbb{R}$ *par* $\mathbb{R}^n$.

1.6 Quelques inégalités utiles

Les inégalités suivantes sont d'une grande importance.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(.,.)$, alors

$$|(u,v)| \leq (u,u)^{\frac{1}{2}}(v,v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u,v \in H.$$

Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ tel que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Formule de Green

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et $n(x)$ sa normale extérieure. Soit u et v deux fonctions régulières.Alors

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = -\int_\Omega \nabla u . \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma$$

1.7 Convergence faible ([3])

Définition 1.7.1. *Soit $\{x_n\}_{n\geq 1}$ une suite de lespace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$. On dit que $\{x_n\}$ converge faiblement dans E sil existe un élément $x \in E$ tel que*

$$\forall f \in E', \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Proposition 1.7.1. *Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé. Alors, la convergence forte implique la convergence faible*

$$x_n \xrightarrow{E} x \qquad \Rightarrow \qquad x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x.$$

Proposition 1.7.2. *Soit E un espace de Banach. Si $x_n \rightharpoonup x$ dans E, alors la suite $\{\|x_n\|\}$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.*

Proposition 1.7.3. *Soit E un espace de Banach. Si $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$ et si $f_n \xrightarrow{E'} f$ alors, $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$ (dans le corps des scalaires).*

Proposition 1.7.4. *Soit E un espace de Banach et soit S une partie dense du dual topologique E'. Si la suite $\{\|x_n\|\}$ est bornée et sil existe $x \in E$ tel que $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ pour tout $f \in S$, alors $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$.*

Proposition 1.7.5. *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T une application linéaire continue de E dans F et soit $\{x_n\}$ une suite de E telle que $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$, alors $T(x_n) \overset{F}{\rightharpoonup} T(x)$.*

Chapitre 2

Théorème de Lax-Milgram

Dans ce chapiter , nous allons présenter le théoréme de Lax-Milgram dans un espace de Hilbert et leur extension à un espace de Banach , ainsi que la méthode de pénalisation dont des résultats d'existence pour les inéquations variationnelles (IV) elliptiques .

2.1 Théorème de Lax-Milgram dans un espace de Hilbert

2.1.1 Théoréme des projections

Théorème 2.1.1. *[7]*
Soient H un espace de Hilbert réel et $A \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in H$, il existe un unique $u \in A$ tel que :

$$\| f - u \| = \min_{v \in A} \| f - v \| . \tag{2.1}$$

De plus u est caractérisé par la propriété,

$$(f - u, v - u) \leq 0 \qquad \forall v \in A. \tag{2.2}$$

Si A est un sous-espace vectoriel de H, alors,

$$(f - u, v - u) = 0 \qquad \forall v \in A. \tag{2.3}$$

De plus, f est l'unique élément de A vérifiant cette égalité, $f-u \in A^{\perp}$ et on a la décomposition suivante de H en somme directe orthogonale, $H = A \oplus A^{\perp}$, où $A^{\perp} = \{u \in H; (u,v) = 0 \quad \forall v \in A\}$.

Preuve :

Avant de montrer l'existence et l'unicité de u, on commence par montrer l'équivalence entre (2.1) et (2.2) (i.e la caractérisation de u).

Soit $u \in A$ un élément de H vérifiant (2.1) et soit $w \in A$. On a, $v = [(1-\alpha)u + \alpha w] \in A$, pour $\alpha \in]0,1]$, car A est un convexe, et donc,

$$\begin{aligned} \| f-u \| &\leq \| f - [(1-\alpha)u + \alpha w] \| \\ &= \| (f-u) - \alpha(w-u) \| . \end{aligned}$$

Ce qui implique que l'on a

$$\| f-u \|^2 \leq \| f-u \|^2 - 2\alpha(f-u, w-u) + \alpha^2 \| w-u \|^2 .$$

Donc

$$2(f-u, w-u) \leq \alpha \| w-u \|^2 .$$

En passant à la limite $\alpha \longrightarrow 0^+$, on obtient

$$(f-u, w-u) \leq 0,$$

d'où (2.2).

Inversement

Si u est un élément de H vérifiant (2.2), on a :

$$\begin{aligned} \| f-u \|^2 - \| f-v \|^2 &= (f-u, f-u) - (f-v, f-v) \\ &= (f-u, f-v+v-u) - (f-u+u-v, f-v) \\ &= (f-u, v-u) + (f-u, f-v) - (f-u, f-v) \\ &+ (v-u, f-v) \\ &= (f-u, v-u) + (v-u, f-u+u-v) \\ &= (f-u, v-u) + (v-u, f-u) + (v-u, u-v) \\ &= 2(f-u, v-u) - (u-v, u-v) \\ &= 2(f-u, v-u) - \| u-v \|^2 \leq 0 \qquad \forall v \in A, \end{aligned}$$

ce qui nous conduit à

$$\| f - u \| \leq \| f - v \|, \qquad \forall v \in A.$$

Cela implique

$$\| f - u \| = \min_{v \in A} \| f - v \|,$$

d'où (2.1).

i) Unicité.

Soient u_1, u_2 deux élément de H vérifiant (2.2) alors, on a

$$(f - u_1, v - u_1) \leq 0 \qquad \forall v \in A, \tag{2.4}$$

et

$$(f - u_2, v - u_2) \leq 0 \qquad \forall v \in A. \tag{2.5}$$

On choisit $v = u_2$ dans (2.4) et $v = u_1$ dans (2.5), on obtient

$$(f - u_1, u_2 - u_1) \leq 0 \qquad \forall v \in A, \tag{2.6}$$

et

$$(f - u_2, u_1 - u_2) \leq 0 \qquad \forall v \in A. \tag{2.7}$$

En utilisant (2.6), il vient

$$\begin{aligned} 0 \geq (f - u_2 + u_2 - u_1, u_2 - u_1) &= (f - u_2, u_2 - u_1) + (u_2 - u_1, u_2 - u_1) \\ &= (f - u_2, u_2 - u_1) + \| u_2 - u_1 \|^2 . \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\| u_2 - u_1 \|^2 \leq (f - u_2, u_1 - u_2),$$

et d'aprés (2.7), on obtient

$$\| u_2 - u_1 \|^2 = 0,$$

d'où

$$u_2 = u_1.$$

ii) Existence.

Soit $(v_n)_n \subset A$ une suite minimisante.

Par définition on a ; $d(f, A) \leq \| f - v_n \|_H \leq d(f, A) + \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que

$(v_n)_n$ est de Cauchy, ainsi H étant hilbertien donc un espace complet et on pourra conclure la convergence de $(v_n)_n$.

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et posons $d = d(f, A)$ et $d_k = d(f, v_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

H étant un espace de Hilbert donc la régle du Parallélogramme (1.1) est vérifée.

On remplace dans l'équation (1.1) $u = f - v_m$ et $v = f - v_n$, on obtient

$$2(\| f - v_m \|^2 + \| f - v_n \|^2) = \| (f - v_m) - (f - v_n) \|^2 + \| (f - v_m) + (f - v_n) \|^2$$

$$= \| v_n - v_m \|^2 + 4 \| f - \frac{v_n + v_m}{2} \|^2$$

Ce qui implique que l'on a

$$\| \frac{v_n - v_m}{2} \|^2 = \frac{d_m^2 + d_n^2}{2} - \| f - \frac{v_n + v_m}{2} \|^2 .$$

Or, $\frac{v_n+v_m}{2} \in A$ car A est convexe, il vient

$$\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \| \geq d(f, A),$$

par conséquent de (2.1) on a

$$\begin{aligned} \|\frac{v_n - v_m}{2}\|^2 &= \frac{d_m^2 + d_n^2}{2} - \|f - \frac{v_n + v_m}{2}\|^2 \\ &\leq \frac{d_m^2 + d_n^2}{2} - d^2 \longrightarrow 0, \quad lorsque \quad n, m \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

Ce qui implique que l'on a

$$\lim_{n,m \to \infty} \| v_n - v_m \| = 0.$$

Alors $(v_n)_n$ est une suite de Cauchy dans A qui est complet (car A fermé dans un complet), et (v_n) converge vers $u \in A$ et l'on a $d = \| f - u \|$.□

2.1.2 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 2.1.2. *[7]*

Soit L une forme linéaire continue sur H. Il existe un unique élément u de H tel que,

$$\forall v \in H : \qquad L(v) = (u, v)_H. \tag{2.8}$$

De plus

$$\|u\|_H = \|L\|_{H'}. \tag{2.9}$$

Preuve *:*

a) Existence.

On distingue deux cas ;

<u>1^{er}*cas*</u> *:* $L = 0$

Il suffit de prendre $u = 0_H$.

<u>$2^{éme}$*cas*</u> *:*$L \neq 0$

On introduit le noyau $A = KerL$ *. Alors* A *est un sous espace vectoriel fermé et propre de* A *(car* L *est continue, or l'image réciproque d'un fermé est un fermé , et comme* $\{0\}$ *est un fermé alors* $KerL = L^{-1}(\{0\})$ *est un fermé, et* $H \neq A$*,car* $L \neq 0$ *).*

D'aprés le Théorème 2.1.1, on a la décomposition $H = A \oplus A^{\perp}$*, et l'espace* $A^{\perp}$ *n'est pas réduit à* $\{0\}_H$*. Il contient donc un élément* v_0 *unitaire (de norme 1).*

Soit v *un élément quelconque de* H*, qu'on peut le décomposer de la maniére suivante,*

$$v = \frac{L(v)}{L(v_0)}v_0 + w \quad \textit{où} \quad w = v - \frac{L(v)}{L(v_0)}v_0, \qquad w \in A.$$

Par construction, on a $(v_0, w) = 0$ *car* $v_0 \in A^{\perp}$ *et* $w \in A$*, ainsi*

$$(v_0, v) = \frac{L(v)}{L(v_0)}\|v_0\|^2 = \frac{L(v)}{L(v_0)} \qquad \textit{car} \quad \|v_0\| = 1,$$

ce qui nous conduit à

$$L(v) = L(v_0)(v_0, v) = (L(v_0)v_0, v).$$

On a ainsi construit un élément $u = v_0 L(v_0)$ *de* H *tel que,*

$$\forall v \in H \quad L(v) = (u, v).$$

b) Unicité.

Elle est immédiate, car, si u_1, u_2 *sont deux solutions, alors d'après (2.8) on a*

$$L(v) = (v, u_1) = (v, u_2)$$

Ce qui implique que l'on a

$$(v, u_1 - u_2) = 0 \qquad \forall v \in H$$

et

$$u_1 - u_2 \in H^{\perp}.$$

d'où

$$u_1 - u_2 = 0 \quad et \quad u_1 = u_2.$$

Il reste à montrer (2.9).On a

$$\forall v \neq 0, \qquad \frac{|L(v)|}{\|v\|_H} \leq \| u \|_H \Longrightarrow \|L\|_{H'} = \sup_{v \in H} \frac{|L(v)|}{\|v\|_H} \leq \|u\|_H$$

Donc, on a

$$\|L\|_{H'} \leq \|u\|_H.$$

Pour $u = v$*, on trouve*

$$\|L\|_{H'} \geq \frac{|L(v)|}{\|v\|_H} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|} = \|u\|_H,$$

d'où

$$\|L\|_{H'} = \|u\|_H.$$

Ceci termine la démonstration.□

2.1.3 Théorème de Lax-Milgram

Avant d'énoncer le théorème on fait les hypothéses suivantes,

1) L est une forme linéaire définie sur H de plus, L est continue, c.à.d, il existe une constante $C > 0$ telle que,

$$\forall v \in H : \quad |L(v)| \leq C \parallel v \parallel_H . \tag{2.10}$$

2) a est une forme bilinéaire définie sur $H \times H$ vérifiant de plus,

i) a est continue sur $H \times H$. C.à.d il existe une constante $M > 0$ telle que ,

$$\forall (u, v) \in H \times H : \quad , |a(u, v)| \leq M \parallel u \parallel_H \parallel v \parallel_H . \tag{2.11}$$

ii) a est coercive, c.à.d il existe une constante $\alpha > 0$ telle que,

$$\forall v \in H : \quad a(v, v) \geq \alpha \parallel v \parallel_H^2 . \tag{2.12}$$

Théorème 2.1.3. *[7]*
Soient H un espace de Hilbert réel, a une forme bilinéaire, continue et coercive sur H et L une forme linéaire continue sur H. Alors, il existe un unique élément u de H solution du problème

$$L(v) = a(u, v) \quad \forall v \in H. \tag{2.13}$$

De plus si a est symétrique, u est l'unique solution du problème de minimisation suivant,

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H \tag{2.14}$$

où J est défnie sur H par ;

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \quad \forall v \in H. \tag{2.15}$$

***Preuve** :*
Nous remarquons d'abord qu'en raison de la coercivité de a, si une telle solution existe, elle est unique. Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (2.13), alors par soustraction on a,

$$\forall v \in H \quad a(u_1 - u_2, v) = 0 \tag{2.16}$$

en particulier pour $v = u_1 - u_2$ on a,

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Maintenant, comme $\alpha > 0$, on déduit de la minoration (2.12) que $u_1 = u_2$. Montrons maintenant l'existence d'une telle solution. Pour tout $u \in H$, la forme linéaire $a(u, .)$ étant continue sur H, il existe, d'après le Théorème de la représentation de Riesz 2.1.2 un unique élément $Au \in H$ tel que,

$$\forall v \in H \quad a(u, v) = (Au, v)_H \tag{2.17}$$

De la même façon, il existe un unique $f \in H$ tel que,

$$\forall v \in H \quad L(v) = (f, v)_H.$$

L'équation (2.13) est alors équivalent à trouver $u \in H$ tel que $Au = f$. Il suffit pour cela de montrer que l'opérateur A est linéaire et surjectif.

Soient $u_1, u_2 \in H$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On a*

$$\begin{aligned}(A(u_1+\lambda u_2), v) &= a(u_1+\lambda u_2, v)\\ &= a(u_1, v) + a(\lambda u_2, v)\\ &= a(u_1, v) + \lambda a(u_2, v)\\ &= (Au_1, v) + \lambda(Au_2, v).\end{aligned}$$

Nous remarquons aussi que A *est continu, car nous avons, d'après (2.11), pour* $v = Au$ *dans (2.17) on a,* $\| Au \|_H^2 = a(u, Au) \leq M \| u \|_H \| Au \|_H$. *Ce qui nous donne,*

$$\| Au \|_H \leq M \| u \|_H .$$

Montrons que A *est surjectif : Nous Montrons d'abord que l'image de* A*, notée* $Im(A)$*, est fermée. Soit* (v_p) *une suite de Cauchy dans* $Im(A)$ *:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{N}, \quad tel\ que \quad si \quad q \geq p \geq \delta, \quad alors \quad \|v_p - v_q\| \leq \varepsilon.$$

Comme v_p *et* v_q *sont des éléments de* $Im(A)$*, il existe des éléments* u_p *et* u_q *dans* H *tels que* $Au_p = v_p$ *et* $Au_q = v_q$. *On a*

$$\begin{aligned}\alpha \| u_p - u_q \|_H^2 &\leq \| a(u_p - u_q, u_p - u_q) \| = \| (A(u_p - u_q), u_p - u_q) \|\\ &\leq \| A(u_p - u_q) \|_H \| (u_p - u_q) \|_H .\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\| (u_p - u_q) \|_H \leq \frac{1}{\alpha} \| Au_p - Au_q \|_H .$$

L'espace H *étant complet, la suite* $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge vers un élément* $u \in H$*, et l'opérateur* A *étant continu, nous avons,* Au_p *converge vers* Au*, d'où* $v = Au$. *Nous avons ainsi montré que l'image de* A *est fermée. Ce résultat étant établi, en conséquence, nous avons*

$$H = Im(A) \oplus [Im(A)]^{\perp}$$

Supposons que $Im(A) \neq H$ *; alors* $[Im(A)]^{\perp} \neq \{0\}_H$ *et il existe un élément non nul* $u \in H$ *tel que,*

$$\forall v \in H, (Av, u)_H = 0.$$

Cette relation étant en particulier vraie pour $v = u$*, nous obtenons,*

$$0 = a(u, u) \geq \alpha \| u \|_H^2 .$$

Ce qui entraine $u = 0$ *, nous aboutissons ainsi à une contradiction, ce qui signifie que* $Im(A) = H$ *.*

Pour conclure la preuve du théorème, il reste à montrer que si a est symétrique, le problème de minimisation (2.14) est équivaut au problème (2.13). Soit $u \in H$ *l'unique solution de (2.13) et montrons que u est la solution de (2.14). Soit* $w \in H$*, on va montrer que* $J(u+w) \geq J(u)$

$$\begin{aligned} J(u+w) &= \frac{1}{2}a(u+w, u+w) - L(u+w) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{2}[a(u,w) + a(w,u)] + \frac{1}{2}a(w,w) - L(u) - L(w) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) - L(u) + [a(u,w) - L(w)] + \frac{1}{2}a(w,w) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(w,w) \geq J(u) + \frac{\alpha}{2} \parallel w \parallel_H^2 \end{aligned}$$

Donc $J(u+w) > J(u)$*, pour tout* $w \in H, w \neq 0_H$*.*

Réciproquement, supposons maintenant que u est la solution du problème de minimisation (2.14) et montrons que u est la solution de (2.13) .

Soit $w \in H$ *et* $t > 0$*, on a*

$$J(u+tw) - J(u) \geq 0 \quad et \quad J(u-tw) - J(u) \geq 0.$$

Car u minimise J. On en déduit que,

$t[a(u,w) - L(w)] + \frac{1}{2}t^2 a(w,w) \geq 0 \quad et \quad -t[a(u,w) - L(w)] + \frac{1}{2}t^2 a(w,w) \geq 0 \quad \forall w \in H.$

Comme t est strictement positif, on peut diviser ces deux inégalités par t à obtenir

$a(u,w) - L(w) + \frac{1}{2}ta(w,w) \geq 0 \quad et \quad -a(u,w) + L(w) + \frac{1}{2}ta(w,w) \geq 0 \quad \forall w \in H$

On fait alors tendre t vers 0, nous obtenons,

$$a(u,w) - L(w) \geq 0, \quad et \quad a(u,w) - L(w) \leq 0, \quad \forall w \in V,$$

Ce qui donne en définitive l'égalité $a(u,w) = L(w) \quad \forall w \in V$*. cela signifie que u est la solution du problème (2.13).* $\square$

2.2 Théorème de Lax-Milgram dans un espaces de Banach

Soient $(V, \|.\|_V)$ un espace de Banach, et a est une forme bilinéaire symétrique, coercive et continue sur $V \times V$ et L une forme linéaire continue sur V .
On s'intéresse à l'existence et l'unicité de $u \in V$ tel que,

$$L(v) = a(u, v) \quad \forall v \in V. \tag{2.18}$$

Dans une premiére partie nous faisons une analyse du problème (2.18) dans le cas où a n'est pas symétrique et nous présenterons une méthode qui traite le cas non symétrique.
Dans une seconde partie nous démontrons le théorème de Lax- Milgram pour une forme bilinéaire continue et coercive sur un espace de Banach sur $\mathbb{R}$.

2.2.1 Symétrisation de formes linéaires et propriétés

Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et a une forme bilinéaire sur V telle que $a(u, u) > 0 \quad \forall u \neq 0.$(i.e a est défnie positive). Soit b une forme bilinéaire définie par

$$b(u, v) = \frac{a(u, v) + a(v, u)}{2} \quad \forall u, v \in V \tag{2.19}$$

Alors, b est symétrique et $b(u, u) = a(u, u) \quad \forall u \in V$. Donc avec b, on arrive à définir un produit scalaire sur $V \times V$ devient un espace préhilbertien que nous désignons par V_b. On notera par $\| u \|_{V_b}$ la norme d'un élément $u \in V_b$

$$\| u \|_{V_b} = \sqrt{a(u, u)}$$

Soit V_b' le dual de V_b i.e. $V_b' = \{f : V_b \longrightarrow \mathbb{R},\ \textit{linéaire et continue}\ \}$.
Supposons que a soit continue sur $V_b \times V_b$ i.e $\exists M > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq M\sqrt{a(u, u)}\sqrt{a(v, v)} \quad \forall u, v \in V.$$

Alors, sous cette hypothése, il existe des applications linéaires A et B de V_b dans V_b' définies par

$$\begin{aligned} A : V_b &\longrightarrow V_b' \\ u &\longmapsto Au \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} Au : V_b &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto Au(v) = a(v,u), \quad (resp.\ \ Bu(v) = a(u,v)) \end{aligned}$$

et on a

$$\| Au \|_{V_b'} = \sup_{v \neq 0} \frac{|Au(v)|}{\| v \|_{V_b}} = \sup_{v \neq 0} \frac{|a(v,u)|}{\| v \|_{V_b}} \leq M \| u \|_{V_b} . \tag{2.20}$$

De plus, si $u \neq 0$:

$$\| Au \|_{V_b'} \geq \frac{|a(u,u)|}{\| u \|_{V_b}} = \frac{\| u \|_{V_b}^2}{\| u \|_{V_b}} = \| u \|_{V_b} . \tag{2.21}$$

D'après (2.20) et (2.21), et si $u \neq 0$,

$$\| u \|_{V_b} \leq \| Au \|_{V_b'} \leq M \| u \|_{V_b} .$$

Mais ces inégalités sont trivialement vérifiées pour $u = 0$. Donc, nous avons

$$\| u \|_{V_b} \leq \| Au \|_{V_b'} \leq M \| u \|_{V_b} \qquad \forall u \in V. \tag{2.22}$$

De même pour B,

$$\| u \|_{V_b} \leq \| Bu \|_{V_b'} \leq M \| u \|_{V_b} \qquad \forall u \in V. \tag{2.23}$$

De ce qui précéde, on a la définition suivante.

Définition 2.2.1. *Soit a une bilinéaire continue sur* $V_b \times V_b$. *On dit que* V_b *posséde la propriété de représentation à droite (resp. à gauche) de Riesz par rapport a si,*
$\forall f \in V_b', \quad \exists u \in V_b \quad ; \quad f(v) = a(v,u) \quad (resp, f(v) = a(u,v)) \ \ \forall v \in V_b$

Proposition 2.2.1. *En termes des applications A et B,* V_b *a la propriété de représentation à droite (resp. à gauche) de Riesz si et seulement si A (resp. B) est surjective.*

Preuve :

Montrons la proposition pour A, et la preuve pour B est similaire. En effet, A est surjective signife que :

$$\forall f \in V_b', \quad \exists u \in V_b; \quad Au(v) = f(v) \quad \forall v \in V_b.$$

C'est à dire

$$\forall f \in V_b', \quad \exists u \in V_b; \quad a(v,u) = f(v) \quad \forall v \in V_b$$

et à partir de l'inégalité (2.22) A est injective. En effet, $Au = Au' \Longrightarrow Au - Au' = 0$. Comme A est linéaire on a, $A(u-u') = 0$, ce implique que $\|A(u-u')\| = 0$,
et d'aprés(2.22), on obtient

$$\|u-u'\| \leq \|A(u-u')\| = 0.$$

Donc

$$\|u-u'\| = 0 \quad et \quad u = u'$$

Alors A est injective.
Donc on a toujours unicité de l'élément u, qui correspond à $f \in V_b'$, dans la défnition 2.2.1 avec $f = Au$ (resp. $f = Bu$).□

Théorème 2.2.1. *[8]*
Soit a une forme bilinéaire continue sur $V_b \times V_b$*. Alors* V_b *possède la propriété de représentation à droite (resp. à gauche) de Riesz par rapport à a si et seulement si* V_b *est complet i.e si et seulement si* V_b *est un espace de Hilbert.*

Preuve :
Nous allons prouver le théorème de la propriété de représentation à droite de Riesz. La preuve pour la propriété de représentation à gauche de Riesz est similaire.
1) Condition nécessaire. Supposons que V_b a la propriété de représentation à droite de Riesz par rapport à a. Cela signifie que A est un isomorphisme de V_b dans V_b' (car A est linéaire et bijective). V_b' étant le dual de V_b, il est donc complet (voir le Théoréme 1.3.3), et en raison des inégalités (2.22), A est un isomorphisme topologique aussi. Par conséquent, V_b est également complet.
2) Condition suffisante. Supposons que V_b soit complet. Nous devons prouver que $A(V_b) = V_b'$ (i.e A est surjective).
i) $A(V_b) \subset V_b'$ évidente.
ii) $V_b' \subset A(V_b)$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in V_b'$ tel que $f \notin A(V_b)$. Montrons que $A(V_b)$ est complet, et si $A(V_b)$ est complet alors il est fermé car il est inclus dans un espace complet V_b' .

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A(V_b)$ une suite de Cauchy i.e.

$$\|f_n - f_m\| \longrightarrow_{n,m\to\infty} 0.$$

Par définition

$$\exists (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V_b; \quad f_n = A(g_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'après l'inégalité (2.22) on a

$$\|f_n - f_m\|_{V_b'} = \|A(g_n) - A(g_m)\|_{V_b'} = \|A(g_n - g_m)\|_{V_b'} \geq \|g_n - g_m\|_{V_b}.$$

En passant à la limite, $n, m \longrightarrow \infty$ on obtient

$$0 \geq \lim_{n,m\to\infty} \|g_n - g_m\|_{V_b} \geq 0 \Longrightarrow \|g_n - g_m\|_{V_b} \longrightarrow 0.$$

i.e. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans V_b et V_b étant complet, donc, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g \in V_b$ et on a $A(g_n) \longrightarrow A(g)$ car A est continue, donc $f_n \longrightarrow f = A(g) \in A(V_b)$. Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f \in A(V_b)$.
Donc $A(V_b)$ est complet, il est alors fermé. Par le Théorème 1.3.3 (corollaire du théorème Hahn-Banach), il existe $\beta \in V_b''$, bidual de V_b tel que

$$\begin{cases} \beta = 0 \quad sur \quad A(V_b) \subset V_b' \\ \beta(f) \neq 0, \qquad f \in V_b' \backslash A(V_b). \end{cases}$$

Comme V_b est complet et donc un espace de Hilbert, il est réflexif (car tout espace de Hilbert est réflexif i.e $V \simeq V''$). Par conséquent, f est représenté par un élément u de V_b i.e.

$$\exists u \in V_b; \quad \beta(h) = h(u) \quad \forall h \in V_b'.$$

Donc, il existe $u \in V_b$ tel que $f(u) \neq 0$, or $Au \in A(V_b)$ et

$$Au \in A(V_b) \Longrightarrow \beta(Au) = 0 \Longrightarrow A(u)u = 0,$$

d'où $a(u, u) = 0$, ce qui implique à son tour que $u = 0$. Mais cela contredit le fait $f(u) \neq 0$. Par conséquent, $A(V_b) = V_b'$, ce qui montre que V_b a la propriété de représentation à droite de Riesz par rapport à a. $\square$
Le théorème de Lax-Milgram se déduit du théorème précédent.

Corollaire 2.2.1. *[8] (Théorème de Lax-Milgram).*
Soit $(V, \|.\|_V)$ un espace de Banach sur $\mathbb{R}$. Soit a une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ qui est coercive i.e.

$$\exists \delta > 0 \ \ \textit{tel que} \ \ a(u,u) \geq \delta \|u\|_V^2 \ \ \forall u \in V,$$

alors
$\forall f \in V', \quad \exists! u \in V(resp. w \in V)\,; \quad f(v) = a(v,u) \quad (resp : f(v) = a(w,v)) \quad \forall v \in V.$
Preuve *:*
Puisque a est coercive, $a(u,u) > 0 \quad \forall u \neq 0$. La continuité et la coercivité de a impliquent que $(V, \|.\|_V)$ et $(V_b, \|.\|_{V_b})$ sont isomorphes. Car le fait que a est coercive nous donne,

$$\forall u \in V \quad a(u,u) \geq \delta \|u\|_V^2. \tag{2.24}$$

D'autre part a est continue implique que,

$$\forall u \in V \quad a(u,u) \leq M \|u\|_V^2. \tag{2.25}$$

De (2.24) et (2.25), on obtient

$$\delta \|u\|_V^2 \leq a(u,u) \leq M \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V.$$

Donc

$$\sqrt{\delta} \|u\|_V \leq \sqrt{a(u,u)} \leq \sqrt{M} \|u\|_V \quad \forall u \in V.$$

Alors

$$\sqrt{\delta} \|u\|_V \leq \|u\|_{V_b} \leq \sqrt{M} \|u\|_V \quad \forall u \in V. \tag{2.26}$$

Ainsi on a une équivalence entre les deux normes $(\|.\|_V$ et $\|.\|_{V_b})$, c'est à dire que V et V_b sont isomorphes (avec V un espace de Banach et V_b un espace de Hilbert). Par conséquent, a est continue sur $V_b \times V_b$ et V_b est complet. D'où, selon le Théorème 2.2.1, V_b a les propriétés de représentation à droite et à gauche de Riesz par rapport à a. Finalement, le corollaire s'en suit immédiatement en observant que, $f \in V'$ si seulement si $f \in V_b'$.
C'est à dire que V et V_b ont le même dual. L'idée derriére de la démonstration du théorème de Lax-Milgram est, que nous l'avons prouvé d'abord pour l'espace V_b sur lequel a est trivialement coercive, en supposant que V_b est complet et a continue sur $V_b \times V_b$. C'est le Théorème 2.2.1 .

Ensuite nous l'avons démontré que pour l'espace de Banach $(V, \|.\|)$ *sur lequel a est continue et coercive, puisque* $(V, \|.\|)$ *est isomorphe à* $(V_b, \|.\|_b)$.

En conclusion que nous avons démontré le théorème de Lax-Milgram dans un espace de Banach pour une forme bilinéaire continue et coercive sans être forcément symétrique.□

2.2.2 Sur la condition de la coercivité

Soient V un espace normé sur $\mathbb{R}$, et $\|u\|_V$ la norme de l'élément $u \in V$. Soit a une forme bilinéaire continue sur $V \times V$, ne vérifie pas forcément la condition $a(u, u) > 0 \quad \forall u \neq 0$. On définit les applications A et B de V dans V' par

$$Au(v) = a(v, u) \quad et \quad Bu(v) = a(u, v).$$

A et B sont toutes les deux continues de V dans V',

$$|Au(v)| \leq M_1 \|u\|_V \|v\|_V; \qquad |Bu(v)| \leq M_2 \|v\|_V \|u\|_V \qquad \forall u, v \in V.$$

Soit $A^\star$ (resp. $B^\star$) l'adjoint de A (resp. B). $A^\star$ et $B^\star$ sont des applications de V'' (le bidual de V) dans V'. C'est à dire

$$A^\star; B^\star : V'' \longrightarrow V'.$$

On remarque que B (resp. A) est la restriction de $A^\star$ (resp. $B^\star$) à $V \subset V''$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \forall u, v \in V, \quad \langle B^\star u, v\rangle &= \langle u, Bv\rangle \\ &= Bv(u) = a(v, u) \\ &= \langle Au, v\rangle. \end{aligned}$$

Cela signifie que

$$B^\star u = Au \qquad \forall u \in V.$$

Donc

$$A = B^\star |_V \qquad (resp.\ \ B = A^\star |_V).$$

Motivé par le corollaire de Lax-Milgram, nous faisons la définition suivante.

Définition 2.2.2. *On dit que V a la propriété à droite (resp.à gauche) de Lax-Milgram par rapport à a si*

$$\forall f \in V', \quad \exists! u \in V; \quad f(v) = a(v, u) \quad (resp : f(v) = a(u, v)) \quad \forall v \in V.$$

Lorsque a est symétrique, alors dire que V a la propriété à droite de Lax-Milgram est équivalent à dire que V a la propriété à gauche de Lax-Milgram.
Dans ce cas, nous parlons simplement de la propriété de Lax-Milgram.
La définition signifie que V a la propriété à droite (resp. à gauche) de Lax-Milgram par rapport à a si et seulement si A(resp. B) est bijective i.e si et seulement si A(resp. B) est un isomorphisme de V dans V' au sens algébrique.

Définition 2.2.3. *La forme bilinéaire a sur V est dite non-dégénérée si,*

$$\forall v \neq 0, \exists u, w \in V; \quad a(u,v) \neq 0 \ \ et \ \ a(v,w) \neq 0.$$

Si a est définie positive,c-à-d. $a(u,u) > 0 \quad \forall u \neq 0$*, alors elle est clairement non dégénérée.*

Théorème 2.2.2. *[9]*
Soit V un espace de Banach. Alors, pour que V ait la propriété à droite (resp. à gauche) de Lax-Milgram par rapport à a, il est nécessaire que

$$\exists c > 0, \forall u \in V \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|a(v,u)|}{\|v\|_V} \geq c\|u\|_V \tag{2.27}$$

$$(resp. \qquad \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|a(u,v)|}{\|v\|_V} \geq c\|u\|_V). \tag{2.28}$$

De plus, si V est réflexif et a est non-dégénérée, alors (2.27),(2.28) est également suffisante pour que V posséde la propriété à droite (resp. à gauche) de Lax-Milgram par rapport à a.

Preuve :
Nous allons prouver le théorème pour le cas de la propriété à droite de Lax-Milgram, la preuve pour l'autre cas est analogue. Supposons que V ait la propriété à droite de Lax-Milgram par rapport à a.
Alors, l'application A de V dans V' est un isomorphisme algébrique, et comme A est continue, par le Théoréme 1.3.1, nous pouvons dire que A est aussi un isomorphisme topologique. Autrement dit, l'inverse

$$\begin{aligned} A^{-1} : V' &\longrightarrow V \\ h &\longmapsto A^{-1}h = u \end{aligned}$$

est continu. i.e.

$$\exists M > 0, \|A^{-1}Au\|_V = \|A^{-1}h\|_V \leq M\|h\|_{V'} \leq M\|Au\|_{V'}.$$

Cela signifie que

$$\|A^{-1}Au\|_V = \|u\|_V \leq M\|Au\|_{V'}$$

et

$$\|Au\|_{V'} \geq \frac{1}{M}\|u\|_V.$$

Or, on a par défnition, $\|Au\|_{V'} = \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \dfrac{|a(v,u)|}{\|v\|_V}$. Donc

$$\|Au\|_{V'} = \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{|a(v,u)|}{\|v\|_V} \geq c\|u\|_V, \qquad avec \quad c = M^{-1}.$$

Ce qui implique (2.27).

Supposons maintenant que V est réflexif et que (2.27) est satisfaite alors,

$$c\|u\|_V \leq \|Au\|_{V'} \leq \|A\|\|u\|_V \qquad \forall u \in V \tag{2.29}$$

Cette double inégalité (2.29), est analogue à (2.22), il s'en suit que A est injective, car si $Au = Au'$ donc $Au - Au' = 0$, et comme A est linéaire on a $A(u - u') = 0$ ce qui implique $\|A(u - u')\| = 0$

D'après(2.29), on obtient

$$c\|u - u'\| \leq \|A(u - u')\| = 0$$

ce que imlique que l'on a

$$\|u - u'\| = 0, (car \quad c > 0)$$

Donc $u = u'$, et que $A(v)$ est un sous-espace fermé de V'.

En utilisant la même démarche que celle dans la preuve du Théorème 2.2.1, on peut prouver, en se basent sur la réflexivité de V et la non-dégénérescence de a, que A est surjective.□

Proposition 2.2.2. *[9]*

Soit V un espace de Banach réflexif, si V a la propriété à droite (resp.à gauche)de Lax-Milgram par rapport à a. Alors, V a aussi la propriété à gauche (resp.à droite) de Lax-Milgram par rapport à a.

Preuve *:*

Nous allons prouver le théorème pour la propriété à droite de Lax-Milgram.La preuve pour l'autre cas est analogue. Puisque V et V' sont des espaces de Banach et puisque V a la propriété droite de Lax-Milgram, il résulte du théoréme 1.3.1 (de l'application ouverte de Banach) que A est un isomorphisme topologique. Donc, $A^\star : V'' \longrightarrow V'$ est aussi un isomorphisme.

Mais, puisque V est réflexif $(V' = V)$ et puisque B est la restriction de $A^\star$ à V , il s'en suit que B de V dans V' est également un isomorphisme, ce qui implique que V a la propriété à gauche de Lax-Milgram.$\square$

Proposition 2.2.3. *[9]*

Soit V un espace de Banach. Supposons que V posséde les propriétés à droite et à gauche de Lax-Milgram par rapport à a, alors V est réflexif.

Preuve *:*

Puisque V a la propriété de lax-Milgram à droite (resp. à gauche) alors l'application A (resp. B) est un isomorphisme topologique de V dans V', il en résulte que $A^\star : V'' \longrightarrow V'$ est également un isomorphisme. Or $A^\star$ est la restriction de B à V , et comme,

$$B : V' \longrightarrow V,$$

est un isomorphisme, alors $A^\star$ est un isomorphisme de V dans V' et aussi de V'' dans V', il en résulte que $V'' = V$ et V est réflexif.$\square$

Corollaire 2.2.2. *[8]*

Si a est symétrique et V a la propriété de Lax-Milgram par rapport à a, alors V est réflexif.

Théorème 2.2.3. *[9]*

Soit V un espace de Banach. Soit a une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ telle que $a(u, u) > 0 \quad \forall u \in V$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) a est coercive.

ii) a est continue sur $V_b \times V_b$ et V a la propriété à droite de Lax-Milgram par rapport à a.

iii) a est continue sur $V_b \times V_b$ et V a la propriété à gauche de Lax-Milgram par rapport à a.

Preuve *:*

Il est facile de voir que la coercivité et la continuité de a sur $V \times V$ impliquent que a est continue sur $V_b \times V_b$. On a déjà montré dans le corollaire 2.2.1 (théorème de Lax-Milgram) que si a est continue et coercive, alors V a les propriétés à droite et à gauche de Lax-Milgram par rapport à a.

Donc, i) $\Longrightarrow$ ii) et i) $\Longrightarrow$ iii). Nous allons prouver que ii) $\Longrightarrow$ i).

Puisque a est continue sur $V \times V$, $\exists M_1 > 0$ tel que

$$|a(u,v)| \leq M_1 \|u\|_V \|v\|_V \qquad \forall u, v \in V \tag{2.30}$$

Puisque a est continue sur $V_b \times V_b$, $\exists M_2$ tel que

$$|a(u,v)| \leq M_2 \sqrt{a(u,u)} \sqrt{a(v,v)} \qquad \forall u, v \in V_b. \tag{2.31}$$

Puisque V a la proprété droite de Lax-Milgram par rapport à a, par le Théorème 2.2.2, il existe $c > 0$ tel que,

$$\forall u \in V, \qquad \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|a(v,u)|}{\|v\|_V} \geq c\|u\|_V.$$

Par conséquent, d'après (2.31)

$$\begin{aligned} |a(v,u)| &\leq M_2 \sqrt{a(u,u)} \sqrt{a(v,v)} \qquad \forall u, v \in V \\ &\leq M_2 \sqrt{a(u,u)} \sqrt{M_1} \sqrt{a(v,v)} \qquad \forall u, v \in V, \end{aligned}$$

ce qui implique que l'on a

$$\sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|a(v,u)|}{\|v\|_V} \leq M_2 \sqrt{M_1} \sqrt{a(u,u)}.$$

Par conséquent, $c\|u\|_V \leq M_2 \sqrt{M_1} \sqrt{a(u,u)} \quad \forall u \in V.$

Alors,on a

$$a(u,u) \geq \delta \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V, \qquad \textit{avec } \left(\delta = \frac{c^2}{M_1 M_2^2}\right).$$

Ce qui signifie que a est coercive.

Donc *ii*) $\Longrightarrow$ *i*). De même *iii*) $\Longrightarrow$ *i*). Ainsi les propriétés précédentes sont équivalentes.$\square$

Corollaire 2.2.3. *[9]*

Soit a une forme bilinéaire symétrique sur l'espace de Banach V telle que $a(u,u) > 0$ pour tout $u \neq 0$. Alors, V a la propriété de Lax-Milgram par rapport à a si et seulement si a est *coercive.*

Preuve *:*

D'aprés le théorème précédent il suffit de montrer que a est continue sur $V \times V$. Comme a est symétrique et $a(u,u) > 0$ pour tout $u \neq 0$, il s'en suit que, $\forall u, v \in V \quad |a(v,u)| \leq \sqrt{a(u,u)}\sqrt{a(v,v)}$ (Cauchy-Schwarz). Par conséquent, a est continue sur $V_b \times V_b$. La conclusion s'en suit immédiatement du théorème ci-dessus.$\square$

Proposition 2.2.4. *[9]*

Soit V un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ et soit a une forme bilinéaire continue sur V telle que $a(u,u) > 0$ pour tout $u \neq 0$. Alors, a est coercive si est seulement si V a la propriété de Lax-Milgram par rapport à b.

Preuve *:*

Supposons que V ait la propriété de Lax-Milgram par rapport à b. Puisque b est symétrique et $b(u,u) = a(u,u) > 0$ pour tout $u \neq 0$, il s'en suit du corollaire 2.2.3 du Théorème 2.2.3 que b est coercive, et donc a est coercive. Inversement, supposons que a soit coercive. Alors, V et V_b sont isomorphes. Puisque V est un espace de Banach, il s'en suit que V_b est complet i.e. V_b est un espace de Hilbert. Par conséquent, le Théorème 2.2.1 implique que V_b a la propriété de Lax-Milgram par rapport à b. Puisque V et V_b ont le même dual, il s'en suit que V a aussi la propriété de Lax-Milgram par rapport à b.$\square$

Chapitre 3

Méthode de pénalisation pour les inéquations variationnelles elliptiques

3.1 Opérateurs monotones

Dans ce qui suit, V est un espace de Banach réflexif et séparable et A une application de V dans V'.

Définition 3.1.1. *On dit que*
i) A est monotone si :

$$\forall u, v \in V, \qquad \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0.$$

ii) A est hémi-continue si : pour tous $u, v, w \in V$, lapplication

$$t \longmapsto \langle A(u + tv), w \rangle \text{ est continue de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.$$

iii) A est coercif si :

$$\lim_{\|u\|_V \to +\infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|_V} = +\infty.$$

iv) A est borné si : l'image de tout borné de V est un borné de V'.

Théorème 3.1.1. *[6] Soit A un opérateur vérifiant :*
1. A est borné,
2. A est hémi-continu,

3. A est monotone,

4. A est coercif.

Alors A est surjectif de V dans V', i.e. pour $f \in V'$, il existe $u \in V$ tel que $A(u) = f$.
***Preuve** :(voir[6], page 171)*

Remarque 3.1.1. *[6] Le résultat du Théorème 3.1.1 reste vrai si lon remplace lhypothèse de monotonie par la propriété de type (M) :*

A est de type (M) si :

$$\left.\begin{array}{r} u_n \rightharpoonup u \quad dans \quad V \quad faible \\ A(u_n) \rightharpoonup \chi \quad dans \quad V' \quad faible \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sup\langle A(u_n), u_n\rangle \leq \langle \chi, u\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \chi = A(u).$$

Définition 3.1.2. *[6] On dit que A est pseudo-monotone si :*

$$\left.\begin{array}{r} u_n \rightharpoonup u \quad dans \quad V \quad faible \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sup\langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall v \in V, \quad \liminf_{n\to\infty}\langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle.$$

Proposition 3.1.1. *[6] A borné, hémi-continu, monotone $\Longrightarrow$ A pseudo-monotone $\Longrightarrow$ A est de type (M)*

Théorème 3.1.2. *[6] Soit A un opérateur pseudo-monotone coercif. Alors pour tout $f \in V'$, léquation $A(u) = f$ admet au moins une solution.*

3.2 Résultats d'éxistence pour les inéquations vraiationnelles (I.V) elliptique

Soient V un espace de Banach réflexif séparable, K un convexe fermé non vide de V, $A : K \longrightarrow V'$ un opérateur pseudomonotone, borné et $f \in V'$. sous ces hypothéses on a les deux résultats d'existence suivants :

Théorème 3.2.1. *[6] Soit $A : K \longrightarrow V'$ borné , hémicontinu et monotone et soit K un cenvexe fermé borné non vide de V . Alors , pour tout $f \in V'$, l'inéquation variationnelle :*

$$\begin{cases} Trouve \quad u \in K \quad tel\ que : \\ \langle A(u) - f, v - u\rangle \geq 0, \quad \forall v \in K, \end{cases}$$

admet au moins une solution.

Preuve :(voir[6]. page 245).□

Théorème 3.2.2. *Si K n'est plus nécessairement borné , mais A est supposé coercif an sens suivant :*

$$\exists v_0 \in V \quad tel\ que \quad \frac{\langle A(v), v - v_0 \rangle}{\|v\|_V} \to +\infty, \quad si \quad \|v\|_V \to +\infty.$$

Alors il existe au moins une solution u de l'I.V. tel que

$$u \in K, \qquad \langle A(u) - f, v - u \rangle \geq 0 \qquad \forall v \in K.$$

Preuve :

On approxime le convexe K non borné par un convexe K_R si R est assez grand , fermé non vide ,définit par

$$K_R = \{u \in K; \|u\|_V \leq R\}$$

d'aprés le Théoréme 3.2.1 , il existe $u_R \in K_R$ solution de l'I.V.

$$\langle A(u_R), v - u_R \rangle \geq \langle f, v - u_R \rangle, \qquad \forall v \in K_R.$$

R assez grand pour que $v_0 \in K_R$ (v_0 de la coercivité), $R \geq \|v_0\|$

$$\langle A(u_R), u_R - v_0 \rangle \geq \langle f, u_R - v_0 \rangle \leq \|f\|_{V'}(\|v_0\|_V + \|u_R\|_V), \qquad \|u_R\| \leq C_0, \qquad \forall R.$$

Donc une solution u_R pour $R > C_0$ fournit bien une solution de Théoréme 3.2.1.□

Remarque 3.2.1. *(imporante)*

Dans les inéquations variationnelles il y a toujours deux choses à vérifier

1- *la fonction appartient au convexe K_R.*

2- *l'inéquation est vérifié pour toutes les fonctions tests de K_R.*

En effet,

1- soit $v \in K$ fixé, $\quad w_\lambda = \lambda v + (1-\lambda)u_{R_0}$, $0 < \lambda < 1$.

Montrons que $w_\lambda \in K_{R_0}$, on a

$$\|w_\lambda\|_V \leq \lambda\|v\| + (1-\lambda)\|u_{R_0}\|,$$

comme λ *est assez petit et* $\|u_R\| \leq R_0$*, alors* $\|w_\lambda\|_V \leq R_0$*, donc* $w_\lambda \in K_{R_0}$*.*
2- Montrons que l'inéquation $\langle A(u_{R_0}) - f, v - u_{R_0}\rangle \geq 0$*, est vérifié pour toutes les fonctions tests du convexe, soit* $w - u_{R_0} = \lambda v - \lambda u_{R_0} = \lambda(v - u_R)$*, comme* $\lambda > 0$*, alors l'I.V. (Inéquation Variationnelle) suivant est vérifié*

$$\begin{cases} u_R \in K \\ \langle A(u_{R_0}) - f, v - u_{R_0}\rangle \geq 0, \qquad \forall v \in K. \end{cases}$$

3.3 Résolution des (I.V) par la méthode de pénalisation

Soit V un espace de Banach réflexif, sa norme et celle de son dual sont strictement convexes, et soit K un convexe fermé de V.

Définition 3.3.1. *: On appelle opérateur de pénalisation (attaché à K) tout opérateur* $\beta : V \longrightarrow V'$ *ayant les propriétés suivantes :*

$$\begin{array}{ll} (1) & \beta \text{ est monotone borné et hémicontinu de } V \text{ dans } V' \\ (2) & \{v/v \in V, \beta(v) = 0\} = K. \end{array}$$

Le résultat suivant montre qu'il existe toujours de tels opérateur :

Proposition 3.3.1. *[6] Soit V un espace de Banach de normé strictement convexe ainsi que celle de son dual. Soit J l'application de dualité relative à* Φ *(définition 1.3.4) et soit* Ψ *définie par* $\Psi(r) = \int_0^r \Phi(\sigma)d\sigma$*. Alors*

$$\Psi(\|v\|) - \Psi(\|u\|) \geq (J(u), v - u) \qquad \forall v \in V.$$

et réciproquement si $\xi \in V'$ *vérifie*

$$\Psi(\|v\|) - \Psi(\|u\|) \geq (\xi, v - u) \qquad \forall v \in V.$$

alors $\xi = J(u)$*.*

Proposition 3.3.2. *[6] Si V est strictement convexe* $\Longrightarrow$ *J est strictement monotone.*

Théorème 3.3.1. *[6] On suppose que la norme de V et celle de son dual V' sont strictement convexes, a lieu et soit J un opérateur de dualité de V dans V' relatif à Φ. Alors si P_k désigne L'opérateur de projection de V dans K. L'opérateur β donné par*

$$\beta(u) = J(u - P_k u) \tag{3.1}$$

est un opérateur de pénalisation.

La preuve utilisera un résultat simple, caractérisant la projection $P_K u$ à l'aide de J :

$$P_k u = w \quad \textit{est caractérisé par :} \;\; w \in K \quad \textit{et} \quad (J(u-w), k-w) \leq 0 \quad \forall k \in K. \tag{3.2}$$

En effet, par définition

$$\|u - w\| \leq \|u - (1-\theta)w - \theta k\| \qquad \forall k \in K, \theta \in [0,1]. \tag{3.3}$$

Si l'on introduit, comme au définition 1.3.4, Ψ par

$$\Psi(r) = \int_0^r \Phi(\sigma) d\sigma,$$

(3.3) équivaut à

$$\Psi(\|u - w\|) \leq \Psi(\|u - w - \theta(k-w)\|). \tag{3.4}$$

D'après proposition.3.3.1,

$\Psi(\|u-w\|) - \Psi(\|u-w-\theta(k-w)\|) \geq (J(u-w-\theta(k-w)), \theta(k-w))$ *ce qui joint (3.4) donne, d'après division par $\theta > 0$*

$$(J(u - w - \theta(k-w)), k - w) \leq 0.$$

est faisant tendre θ vers 0 on en déduit (3.2).

Réciproquement, si w satisfait (3.2), alors pour tout $k \in K$:

$\Psi(\|u-k\|) - \Psi(\|u-w\|) \geq (J(u-w), w-k) \geq 0$ *(d'après (3.2)), d'où $\|u-w\| \leq \|u-k\|$ et le résultat.*

***Preuve** :*

Monotonie de β.

On vérifie d'abord que, pour tous $u, v \in V$, on a

$$(J(u - P_k u) - J(v - P_k v), P_k u - P_k v) \geq 0. \tag{3.5}$$

En effet, d'aprés (3.2) :

$$(J(u - P_k u), k - P_k u) \leq 0$$

et l'inéquation analogue pour $P_k v$ *; en prenant respectivement* $k = P_k v$ *et* $k = P_k u$*, on en déduit le résultat par addition.*

Mais, si on pose $\hat{u} = u - P_k u$*,* $\hat{v} = v - P_k v$*, il vient*

$$\begin{aligned} (\beta(u) - \beta(v), u - v) &= (\beta(u) - \beta(v), \hat{u} - \hat{v} + P_K u - P_K v) = \\ &= (J(\hat{u}) - J(\hat{v}), \hat{u} - \hat{v}) + \\ &+ (J(u - P_k u) - J(v - P_k v), P_k u - P_k v). \end{aligned} \tag{3.6}$$

D'après la monotonie de J*, le premier terme du côté droite de (3.6) est positif, ainsi que le deuxième d'après (3.5).*

Donc β *est monotone. On vérifie que* β *est borné et hémicontinu.*

Enfin $J(u - P_k u) = 0$ *équivaut à* $u - P_K u = 0$ *donc à*

$$u = P_k u \in K.\square$$

Exemple 3.3.1. *Soit* A *une matrice symétrique à coeficients* L^∞*, coercive et* $f \in H^{-1}(\Omega)$*,*

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega), v \geq \psi = 0 \quad dans \quad \Omega\}.$$

On considére l'application

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega A\nabla v \nabla u dx - \langle f, v\rangle.$$

Alors on a J *atteint son minimum sur* K*, i.e.*

$$\exists u \in K, \qquad J(u) \leq J(v), \qquad \forall v \in K.$$

Ce u *est caractérisé par l'inéquation variationnelle :*

$$\begin{cases} u \in K \\ \int_\Omega A\nabla u \nabla(v - u)dx \geq \langle f, v - u\rangle, \qquad \forall v \in K. \end{cases}$$

On peut choisir

$$\beta(v) = J(v - P_k v),$$

(existe grace à [6] page .370), J c'est opérateur de dualité de V dans V',

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0 \;\; p.p. \;\; dans \;\; \Omega\}$$

$J = Id$ et $P_k v = v^+$ (i.e. on projete sur $l^2(\Omega)$), donc $\beta(v) = v^-$, par suite l'équation pénalisé correspondante s'écrit

$$\begin{cases} A(u_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- = f \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Exemple 3.3.2. $V = W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 < p < +\infty$. *$A$ donné par*

$$A(v) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\frac{\partial v}{\partial x_i}|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}),$$

$K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega), v \geq 0 \;\; p.p. \;\; dans \;\; \Omega\}$. On projete sur $L^p(\Omega)$ et on choisissant l'opérateur de dualité $J(v) = |v|^{p-2}v$. On obtient :

$$\beta(v) = J(v - P_k v) = -|v^-|^{p-2}v^-,$$

et l'équation pénalisé correspondante est alors :

$$\begin{cases} A(u_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}|u_\varepsilon^-|^{p-2}u_\varepsilon^- = f, \\ u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

Théorème 3.3.2. *Soit $A : V \longrightarrow V'$ un opérateur pseudomonotone et coercif au sens suivant :*

$$\exists v_0 \in K \;\; tel \;\; que \;\; \frac{\langle A(v), v - v_0\rangle}{\|v\|_V} \to +\infty, \;\; si \;\; \|v\|_V \to +\infty.$$

Alors pour tout $f \in V'$, il existe $u \in K$ tel que :

$$\langle A(u), v - v_0\rangle \geq \langle f, v - u\rangle, \quad \forall v \in K.$$

Preuve *:*

Soit β un opérateur de pénalisation attaché à K,on va monter que

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \quad il \; existe \;\; u_\varepsilon \in K, \; tel \; que: \\ A(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f. \end{cases}$$

pour cela on utilise les remarques suivantes :

i)- l'opérateur $v \longrightarrow A(v) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(v)$ *est pseudomonotone.*

ii)-

$$\begin{cases} \langle A(v), v - v_0 \rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta(v), v - v_0 \rangle \\ = \langle A(v), v - v_0 \rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta(v)_{\beta(v_0)}, v - v_0 \rangle \geq \langle A(v), v - v_0 \rangle, \\ (\textit{car } v_0 \in K \Rightarrow \beta(v_0) = 0, \textit{et } \beta \textit{ est monotone }) \end{cases}$$

et donc

$$\frac{1}{\|v\|}[\langle A(v), v - v_0 \rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta(v), v - v_0 \rangle] \longrightarrow +\infty, \quad si \quad \|v\| \longrightarrow +\infty.$$

d'où l'existence de u_ε *qui vérfie* $A(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f$, *(qui est dit problème pénalisé associé à* $(\langle A(u), v - v_0 \rangle \geq \langle f, v - u \rangle)$*, donc, on peut choisir* u_ε *solution du problème pénalisé telle que :* u_ε *demeure dans un borné de* V *lorsque* $\varepsilon \longrightarrow 0$*. Comme* A *est borné,* $A(u_\varepsilon)$ *demeure dans un borné de* V' *et*

$$\beta(u_\varepsilon) = \varepsilon(f - A(u_\varepsilon)) \longrightarrow 0, \quad quand \quad \varepsilon \longrightarrow 0 \quad dans \quad V'.$$

On a même $\|\beta(u_\varepsilon)\|_V \leq C_1\varepsilon$*. On peut extraire une sous-suite, encore noté* u_ε*, telle que*

$$\begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup u, \quad \textit{faible dans } V \\ A(u_\varepsilon) \rightharpoonup \xi, \quad \textit{faible dans } V'. \end{cases}$$

Montrons que $\beta(u) = 0$*. On déduit de* $\langle \beta(u_\varepsilon) - \beta(u_\varphi) \rangle \geq 0$ *pour tout* φ*, que* $-\langle \beta(\varphi), v - \varphi \rangle \geq 0$*, pour tout* φ*. prenant* $\varphi = u - \lambda\psi, \lambda > 0, \psi \in V$*, on en déduit que* $\langle \beta(u - \lambda\psi), \psi \rangle \leq 0$*, faisant* λ *tendre vers 0, on a donc* $\langle \beta(u), \psi \rangle \leq 0$*, pour tout* ψ*, d'où* $\beta(u) = 0$*, donc* $u \in K$*. Si l'on prend alors* $v \in K$*, on deduit de* $A(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f$*, comme* $(\beta(v) = 0)$ *:*

$$\langle A(u_\varepsilon) - f, v - u_\varepsilon \rangle \geq \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta(v) - \beta(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon \rangle \geq 0. \tag{3.7}$$

On en déduit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup \langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u \rangle \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \langle f, u_\varepsilon - u \rangle = 0. \tag{3.8}$$

Donc comme u_ε *converge faiblement vers* u *dans* V *et d'après (3.8), on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup \langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u \rangle \leq 0.$$

Ce qui implique (car A est pseudomonotone) que l'on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup \langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon - v \rangle \geq \langle A(u), u - v \rangle.$$

D'où d'après (3.7), $\langle f, v - u \rangle \geq \langle A(u), u - v \rangle, \quad \forall v \in K..i.e.$

$$\langle A(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle, \quad \forall v \in K.\square$$

Chapitre 4

Applications

Ce chapiter contient des applications sur le théorème de Lax-Milgram aux espaces de Hilbert et de Banach ainsi que une résolution par la méthode de pénalisation d'un problème d'EDP non linéaire avec condition aux limites de Dirichlet non homogène.

4.1 Appalication du Théorème de Lax-Milgram

Application 1

Soit $f \in L^2(]0,1[)$. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \\ u'(0) = u(0), u'(1) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Soit v une fonction suffisamment régulière. On multiplie la première équation de (4.1) par v et on intègre sur $]0,1[$. En effectuant des intégrations par parties et en tenant compte des conditions aux limites, on obtient :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx + u(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Pour que les intégrales aient un sens, il suffit de prendre $u, v \in H^1(]0,1[)$, auquel cas les fonctions sont continues (car $\in H^1(]0,1[) \subset C(]0,1[)$) et donc les valeurs $u(0)$ et $v(0)$ ont aussi un sens. On en déduit qu'une formulation faible est

$$\begin{cases} \quad \textit{Trouver} \;\; u \in H^1(]0,1[) \;\; \textit{tel que} \\ a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H^1(]0,1[), \end{cases} \tag{4.2}$$

où

$$a(u,v) = \int_0^1 [u'(x)v'(x) + u(x)v(x)]dx + u(0)v(0), \qquad \forall u,v \in H^1(]0,1[),$$

et

$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \qquad \forall v \in H^1(]0,1[).$$

On peut applique le théorème de Lax-Milgram. En effet,

i) la forme linéaire L est continue car $|L(v)| = |\int_\Omega fvdx| \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)}$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et donc $|L(v)| \leq C\|v\|_{L^2(]0,1[)}$ avec $C = \|f\|_{L^2(]0,1[)}$.

ii) la forme bilinéaire a est continue. En effet :

$$|a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2(]0,1[)}\|v'\|_{L^2(]0,1[)} + \|u\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)} + |u(0)||v(0)|,$$

or pour tout $x \in]0,1[$, $v(0) = v(x) + \int_0^x v'(t)dt$ et donc par inégalité triangulaire et par Cauchy-Schwarz, on obtient que $|v(0)| \leq |v(x)| + \|v'\|_{L^2(]0,1[)}$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, et en utilisant une autre fois Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|v(0)| \leq \|v\|_{L^2(]0,1[)} + \|v'\|_{L^2(]0,1[)} \leq 2\|v\|_{H^1(]0,1[)}.$$

La même inégalité est évidemment vraie pour $u(0)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \|u'\|_{L^2(]0,1[)}\|v'\|_{L^2(]0,1[)} + \|u\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)} + 4\|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)} \\
&\leq \|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)} + \|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)} + 4\|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)} \\
&\leq 6\|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que a est continue.

iii) Montrons maintenant que a est coercive.

on a

$$a(u,u) = \int_0^1 u'(x)^2dx + \int_0^1 u(x)^2dx + u(0)^2 \geq \|u\|^2_{H^1(]0,1[)}$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, on peut donc conclure l'existence et l'unicité de la solution de problème variationnel (4.2), qui est une solution faible de problème (4.1).

Application 2

L'étude du problème de Dirichlet pour l'équation de Sturm-Liouville. Soit le problème aux limites suivant,

$$\begin{cases} (-p(u)y'(u))' + q(u)y(u) = f(u), & u \in]0,1[\qquad (E.D) \\ y(0) = 0 \ ; \ y(1) = 0 \qquad (C.L) \end{cases} \tag{4.3}$$

où

$$\begin{cases} q \in C([0,1]); \quad q \geq 0 \;\; sur \;\; [0,1] \\ p \in C^1([0,1]); \;\; \exists \alpha > 0 \;\; tel \;\; que; \;\; p \geq \alpha \;\; sur \;\; [0,1]. \end{cases}$$

Soit y une solution du problème (4.3) et soit x un élément quelconque de $H_0^1(]0,1[)$.
Multiplions l'équation $(E.D)$ par x et intégrons sur $]0,1[$, on obtient par intégration par parties :

$$\int_0^1 [py'(u)x'(u) + qy(u)x(u)]du = \int_0^1 f(u)x(u)du$$

car $x(0) = x(1) = 0$.
On considére alors la forme bilinéaire,

$$B(y,x) = \int_0^1 [py'(v)x'(v) + qy(v)x(v)]dv, \quad \forall x, y \in H_0^1(]0,1[).$$

B est évidemment bilinéaire et symétrique. Elle est définie et positive à cause des conditions imposées à p et q.
B est ainsi un produit scalaire et $H_0^1(]0,1[)$ muni de B est un espace de Hilbert. Le théorème de Riesz, appliqué à cet espace, justifie l'existence et l'unicité de $y \in H_0^1(]0,1[)$, solution du problème,

$$\forall x \in H_0^1(]0,1[); \quad B(y,x) = L(x),$$
$$avec \quad L(x) = \int_0^1 f(u)x(u)du.$$

Revenons à l'application du théorème de Lax-Milgram, montrons que la forme linéaire L est continue, B est continue et coercive :

$$|L(x)| \leq \int_0^1 |f(u)||x(u)|du \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|x\|_{L^2(]0,1[)} \leq C\|x\|_{H^1} \;\; avec \;\; C = \|f\|_{L^2(]0,1[)},$$

donc L est continue.
Aussi, on a

$$|B(y,x)| \leq P\|y'\|_{L^2}\|x'\|_{L^2} + Q\|y\|_{L^2}\|x\|_{L^2}.$$

Notons par P (resp. Q) la borne supérieure de $p(u)$ (resp. $q(u)$) sur $]0,1[$. Donc

$$|B(y,x)| \leq (P+Q)\|y\|_{H^1}\|x\|_{H^1}.$$

D'autre part B est coercive. En effet, d'après les conditions sur p (resp.q), on a

$$\begin{cases} B(x,x) = \int_0^1 (px'^2 + qx^2)dx \geq 0 \\ B(x,x) \geq \alpha \|x\|_{L^2}^2 \qquad p \geq \alpha, \end{cases}$$

or, si $x \in H_0^1(]0,1[)$, on a

$$\begin{aligned} |x(u)| &= \Big| \int_0^u x'(v)dv \Big| \\ &\leq \int_0^u |1 \times x'(v)|dv \\ &\leq \int_0^1 |1 \times x'(v)|dv \leq \|x'\|_{L^2} \Big(\int_0^1 dv \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|x'\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 |x(u)|^2 du \leq \int_0^1 \|x'\|_{L^2}^2 du$$
$$\Rightarrow \|x\|_{L^2}^2 \leq \|x'\|_{L^2}^2.$$

D'où

$$B(x,x) \geq \frac{\alpha}{2}(\|x\|_{L^2}^2 + \|x'\|_{L^2}^2) = \frac{\alpha}{2}\|x\|_{H^1}^2.$$

D'après le théorème de Lax-Milgram le problème $B(y,x) = L(x)$ admet un unique solution $y \in H_0^1(]0,1[)$, qui est une solution faible de problème (4.3).

Application 3

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ régulière. On cherche une solution faible au problème de Neumann avec conditions aux limites homogènes,

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \quad dans \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad dans \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.4}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et n représente la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$. On suppose qu'il existe $u \in H^2(\Omega)$ solution du problème (4.4). En multipliant l'équation $-\Delta u + u = f$ par $v \in H^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega (-(\Delta u)v + uv)dx = \int_\Omega fv dx.$$

D'apès la formule de Green, il vient

$$\int_\Omega (\nabla u.\nabla v + uv)dx - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = \int_\Omega f v dx.$$

Comme $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$ (mais u n'est pas connu sur le bord), la formulation variationnelle de (4.4) s'écrit :

$$\begin{cases} \textit{Trouver} \;\; u \in H^1(\Omega) \;\; \textit{tel que} \\ \int_\Omega (\nabla u.\nabla v + uv)dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{4.5}$$

Pour montrer que cette formulation admet une solution unique, on va utiliser le théorème de Lax-Milgram avec

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v + uv)dx, \quad et \quad L(v) = \int_\Omega f v dx.$$

On voit que a est une forme bilinéaire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\forall u, v \in H^1(\Omega) : \quad |a(u,v)| = \left| \int_\Omega \nabla u.\nabla v + uv dx \right| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

d'où la continuité de a.

En outre a est coercive car $a(v,v) = \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. D'ailleurs, L est une forme linéaire sur $H^1(\Omega)$ et sa continuité découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall v \in H^1(\Omega) : \quad |L(v)| = \left| \int_\Omega f v dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites et on en déduit qu'il existe une unique fonction $u \in H^1(\Omega)$ solution de la formulation variationnelle (4.5), qui est une solution faible de problème (4.4).

Application 4

Soit le problème

$$\forall F \in (W_0^{1.q}(\Omega))' \;\;, \;\; \exists! u \in W_0^{1.p}(\Omega) \quad tel\ que,$$

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi + \int_\Omega c u \varphi = \langle F, \varphi \rangle_{(W_0^{1.q}(\Omega))', W_0^{1.q}(\Omega)} \quad \forall \varphi \in W_0^{1.q}(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, c > 0.$$

On choisit

$$a(u,\varphi) = \int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi + \int_\Omega c u \varphi, \quad u \in W_0^{1.p}(\Omega), \;\; \varphi \in W_0^{1.q}(\Omega).$$

i) Continuité : comme a est bilinéaire et il existe $M > 0$, tel que,

$$|a(u,\varphi)| \leq M\|u\|_{W_0^{1.p}(\Omega)}\|\varphi\|_{W_0^{1.q}(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1.p}(\Omega), \ \ \forall \varphi \in W_0^{1.q}(\Omega).$$

D'où la continuité de a.

ii) Inégalité variationnelle :

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in W_0^{1.q}(\Omega)-\{0\}} \frac{|a(u,\varphi)|}{\|\varphi\|_{W_0^{1.q}(\Omega)}} &= \sup_{\varphi \in W_0^{1.q}(\Omega)-\{0\}} \frac{|\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi + \int_\Omega cu\varphi|}{\|\varphi\|_{W_0^{1.q}(\Omega)}} \\ &\geq \frac{|\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega cu^2|}{\|u\|_{W_0^{1.p}(\Omega)}} \\ &\geq \min(1,c)\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{W_0^{1.p}(\Omega)}} = \min(1,c)\|u\|_{W_0^{1.p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc il existe une conctante $C = \frac{1}{\min(1,c)}$ tel que

$$\|u\|_{W_0^{1.p}(\Omega)} \leq C \sup_{\varphi \in W_0^{1.q}(\Omega)-\{0\}} \frac{|a(u,\varphi)|}{\|\varphi\|_{W_0^{1.q}(\Omega)}}, \quad \forall u \in W_0^{1.p}(\Omega) - \{0\}.$$

Si $u = 0$ on a aussi

$$0 = \|0\|_{W_0^{1.p}(\Omega)} \leq C \sup_{\varphi \in W_0^{1.q}(\Omega)-\{0\}} \frac{|a(0,\varphi)|}{\|\varphi\|_{W_0^{1.q}(\Omega)}} = 0, \quad \forall u \in W_0^{1.p}(\Omega) - \{0\}.$$

On déduit que

$$\|u\|_{W_0^{1.p}(\Omega)} \leq C \sup_{\varphi \in W_0^{1.q}(\Omega)-\{0\}} \frac{|a(u,\varphi)|}{\|\varphi\|_{W_0^{1.q}(\Omega)}}, \quad \forall u \in W_0^{1.p}(\Omega).$$

d'où, d'après le Théorème 2.2.3, la coercivité de a.

Alors, on a

$$\forall F \in W_0^{1.q}(\Omega) \equiv (W_0^{-1.p}(\Omega))', \quad \exists! u \in W_0^{1.p}(\Omega); \quad a(u,\varphi) = \langle F, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in W_0^{1.q}(\Omega).$$

Cela équivaut à dire que le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = F \quad dans \quad (W_0^{1.p}(\Omega))' \\ u \in W_0^{1.p}(\Omega) \end{cases}$$

admet une unique solution.

4.2 Application de la méthode de pénalisation

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$ et $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle vérifiant

$$\begin{aligned} x \longmapsto \mathcal{A}(x,\xi) \ \text{ est mesurable } \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \\ \xi \longmapsto \mathcal{A}(x,\xi) \ \text{ est continue } \ \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{4.6}$$

et pour certaines constantes $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{p.p. } x \in \Omega : \ \lambda \|\xi\|^2 \leq \mathcal{A}(x,\xi).\xi \tag{4.7}$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{p.p. } x \in \Omega : \ |\mathcal{A}(x,\xi)| \leq \Lambda \|\xi\|. \tag{4.8}$$

D'ailleurs, pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ tels que $\xi \neq \eta$ et p.p. $x \in \Omega$:

$$(\mathcal{A}(x,\xi) - \mathcal{A}(x,\eta)).(\xi - \eta) > 0. \tag{4.9}$$

Le problème

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que :} \\ \\ u = 1 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_\Omega \big[\mathcal{A}(x, \nabla u).\nabla \xi + u\xi\big] dx = \int_\Omega f \xi dx \\ \forall \xi \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet une unique solution. En effet, soient $V = H_0^1(\Omega)$ muni de la norme de $\in H^1(\Omega)$ et

$$K = \{u \in H^1(\Omega)/ \ u = 1 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Pour $u \in V$, considérons l'application

$$\begin{aligned} A(u) : H^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto \int_\Omega \big[\mathcal{A}(x, \nabla u).\nabla \xi + u\xi\big] dx. \end{aligned}$$

En appliquant le Théorème 3.3.2 (Chapitre 2) pour prouver que (P) admet une solution.

• $A(u) \in V'$: Il est claire que $A(u) : V \to \mathbb{R}$ est linéaire. En outre, d'après (4.8) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$| < A(u), \xi > | \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\xi\|_{H^1(\Omega)} \tag{4.10}$$

où C est une constante ne dépend pas de u. Donc $A(u)$ est continue. D'où $A(u) \in V'$.

• A est borné : C'est une conséquence de (4.10).

• A est hémicontinu : En utilisant (4.6), (4.8) et le théorème de convergence dominée, on peut montrer que pour tous $u, v, w \in V$, la fonction $\rho(t) =< A(u+tv), w >$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• A est monotone : Soient $u, v \in V$. D'après (4.9), on obtient

$$< A(u) - A(v), u - v >= \int_\Omega \left[(\mathcal{A}(x, \nabla u) - \mathcal{A}(x, \nabla v)).\nabla(u-v) + (u-v)^2\right] dx \geq 0,$$

d'où la monotonie de A.

• A est coercif. Il existe $v_0 = 1 \in K$ tel que

$$< A(v), v - v_0 >= \int_\Omega \left[\mathcal{A}(x, \nabla v).\nabla v + v(v-1)\right] dx.$$

En utilisant (4.7), il vient

$$\begin{aligned} < A(v), v - v_0 > &\geq \min(1, \lambda)\|v\|^2_{H^1(\Omega)} - \int_\Omega v dx \\ &\geq \min(1, \lambda)\|v\|^2_{H^1(\Omega)} - \sqrt{mes(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

ce qui nous conduit à

$$\frac{< A(v), v - v_0 >}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \to \infty \quad \text{lorsque} \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \to \infty.$$

On en déduit que A est coercif.

Comme

$$\xi \in V \mapsto \int_\Omega f\xi dx$$

appartient à V', on conclut d'après le Théorème 3.3.2 (Chapitre 2) qu'il existe $u \in K$ une solution de l'inéquation variationnelle

$$< A(u), w - u >\geq \int_\Omega f(w-u) dx \ \ \forall w \in K. \tag{4.11}$$

Si on choisit $w = u \pm \xi$ où $\xi \in V$ dans (4.11), il vient

$$\int_\Omega \left[\mathcal{A}(x, \nabla u).\nabla\xi + u\xi\right] dx = \int_\Omega f\xi dx \ \ \forall \xi \in V.$$

Donc le problème (P) admet une solution.

Unicité : Soient $u, v \in K$ deux solution du problème (P). Donc pour tout $\xi \in V$:

$$\int_\Omega \big[\mathcal{A}(x,\nabla u).\nabla\xi + u\xi\big]dx = \int_\Omega f\xi dx \tag{4.12}$$

$$\int_\Omega \big[\mathcal{A}(x,\nabla v).\nabla\xi + v\xi\big]dx = \int_\Omega f\xi dx. \tag{4.13}$$

Soustrayons (4.13) de (4.12), on obtient

$$\int_\Omega \big[(\mathcal{A}(x,\nabla u) - \mathcal{A}(x,\nabla v)).\nabla\xi + (u-v)\xi\big]dx = 0 \ \ \forall\xi \in V. \tag{4.14}$$

On choisit $\xi = u - v$ comme fonction test dans (4.14), il vient

$$\int_\Omega \big[(\mathcal{A}(x,\nabla u) - \mathcal{A}(x,\nabla v)).\nabla(u-v) + (u-v)^2\big]dx = 0,$$

d'où, d'après (4.9) :

$$0 < \int_\Omega (u-v)^2 dx = 0,$$

ce qui nous conduit à $u = v$ p.p. dans Ω. On conclut que la solution du problème (P) est unique.

Conclusion

Ce travail a mis en évidence les aspects théoriques et appliqués de deux théorèmes impostants qui sappliquent à certains problèmes concernant les équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, ce sont le théorème de Lax-Milgram et la méthode de pénalisation pour les inéquations variationnelles (IV) elliptiques. On a présenté le théorème de Lax-Milgram dans un espace de Hilbert, sa extension à un espace de Banach et la méthode de pénalisation pour résolution les (IV) elliptiques. Dailleurs, nous avons donné quelques applications sur cette lecture théorique.

Bibliographie

[1] V. Avanissian, *Initiation à l'analyse fonctionnelle, Presses universitaires de France,(1996).*

[2] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.*

[3] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Masson, Paris, 2005.*

[4] D. Driliaris, N. Yannakakis, *Generalizations of Lax-Milgram theorem,BVP, ED87104, Doc10.1155/2007/87104.*

[5] J. Leray - J.L. Lions, *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes*
de Minty et Browder, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 97107.

[6] J.L. Lions, *Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris (1969).*

[7] B. Lucquin, *équations aux dérivées partielles et leurs approximations, Ellipses,(2004).*

[8] S. Ramaswamy, *The Lax-Milgram theorem for Banach spaces. I.Proc. Japan Acad, 56A, 462-464, (1980).*

[9] S. Ramaswamy, *The Lax-Milgram theorem for Banach spaces. II.Proc. Japan Acad, 57A, 29-33, (1981).*

ملخص :

الغرض من هذه المذكرة هو تقديم قراءة نظرية لنظرية لاكس ميلقرام في فضاء هيلبرت ، وتمديدها إلى فضاء باناخ وطريقة المعاقبة في حل متراجحات تغايرتية الشبيهة بالقطع الناقص. بالإضافة إلى ذلك ، سوف نقوم بتجسيد هذا الجزء النظري من قبل بعض التطبيقات.

كلمات مفتاحية : نظرية لاكس ميلقرام، طريقة المعاقبة، المتراجحات التغايرتية الشبية بالقطع الناقص.

Résumé:

Le but de ce mémoire est de présenter une lecture théorique du théorème de Lax-Milgram dans un espace de Hilbert, sa extension à un espace de Banach et la méthode de pénalisation pour résoudre les inéquations variationnelles (IV) elliptiques. En outre, nous allons consolider cette partie théorique par quelques applications.

Mots-clés : Théorème de Lax-Milgram, méthode de pénalisation, inéquation variationnelle

Abstract:

This dissertation aim at presenting a theoretical reading of Lax-Milgram theory in Hilbert space,and its extension to a Banach space and the method of penalization to resolve the elliptical inequality variations. Besides, we will use this theoretical part in some applications.

Key words: Lax-Milgram theory, penalization method, variational inequalities.