

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministere De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique
Universite Hamma Lakhdar El OUED
Faculte Des Sciences Exactes



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

En vue l'obtention du Diplome **Master** en Mathématique
Spécialité : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

THEME :

La methode de FAEDO-GALERKIN et ses applications

Prépare par : *Mansouri Fatma*

Devant le jury composé de :

Dr.Youmbai Ahmed El Amine	Universite Hamma Lakhdar	Président
Dr.Ahmed Hamrouni	Universite Hamma Lakhdar	Rapporteur
Dr.Gabesi Hussein	Universite Hamma Lakhdar	Examineur

Année Universitaire : 2021/2022

قَالَ رَسُولُ اللَّهِ

وَسَلَّمَ
عَلَيْهِ
صَلَّى اللَّهُ

مَنْ سَلَكَ طَرِيقًا يَلْتَمِسُ
فِيهِ عِلْمًا سَهَّلَ اللَّهُ لَهُ
بِهِ طَرِيقًا إِلَى الْجَنَّةِ

REMERCIEMENTS

Le premier pour ceux qui remercient et louent dans la nuit et les fins du jour, le premier et le dernier, le visible et le caché Toutes les louanges sont dues à Dieu, et tous les remerciements sont dus à Lui qui m'a guidé et m'a inspiré avec patience face aux difficultés que j'ai dû affronter pour accomplir cet humble travail .

Je voudrais également adresser un mot de remerciement au Dr" Hamrouni Ahmed" superviseur, qui m'a aidé à accomplir cette note et n'a pas lésiné sur moi avec ses conseils et ses instructions.

Merci à chaque enseignant qui m'a aidé avec ses connaissances, depuis les premières étapes de l'école jusqu'à ce moment .

Je remercie également tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, et tous les professeurs du Département de Mathématiques en particulier et de la Faculté des Sciences Exactes en général.

Enfin, nous ne pouvons que prier Dieu Tout-Puissant de nous accorder paiement, conseils, chasteté et richesse et de faire de nous un atout pour notre nation.

الإهداء

مرت قاطرة البحث بكثير من العوائق ، ومع ذلك حاولت أن اتخطاها بثبات بفضل من الله ومنه .
إلى روح وقلب من زرع في حب الرياضيات وقوة الإرادة الذي طالما أردت أن أكحل عيني برؤيته معي
فرحا بوصولي إلى هذه المرحلة جدي (جابالله) رحمه الله .
إلى من أوصاني الرحمان بها، من اللجنة تحت قدميها من أفنت عمرها من أجلنا، أمي العزيزة.
إلى أبي العزيز أكرر شكري لك من أعماق قلبي وقفت بجانبني ، وحرصت أن تكون معي في كل لحظاتي.
إلى قوة العائلة ، من يرفعا أيديهما للدعاء لي في صلاتهما (جدي وجدتي) أطال الله في عمرهما.
إلى صديقتي ونصفي الثاني ، إلى نعيي في هذه الحياة ورفيقة دربي وقوتي عند ضعفي (أمّنة) .
إلى (سارة ، خولة ومايا) اخواتي الغاليات من سهرن معي وتحملن ضغوطات دراستي وتقبلت مزاجي معي ،
من مدو أيديهم لي في ظلام الليل .
إلى أخي العزوة القوية والضحكة الجميلة التي أنارت دنياي .
إلى عماتي (فضيلة ، سامية ، نجبية ، خيرة وسعيدة) وأعمامي (بالقاسم ، جمال ، محمد وصلاح) من تمنوا لي
الخير والنجاح وشاركوني الفرحة دائماً .
إلى خالاتي وأخوالي كل المحبة والشكر .

Table des matières

1	Préliminaires	4
1.1	norme et espace de Banach	4
1.1.1	Normes, espace de Banach	4
1.1.2	Dualité	5
1.1.3	Fonction à valeurs dans un espace de Banach	5
1.2	Espace de Hilbert	6
1.2.1	Produit scalaire	6
1.2.2	Espace de Hilbert	6
1.2.3	Bases Hilbertiennes	7
1.3	Généralités et notions de bases	7
1.3.1	Topologie faible	7
1.3.2	Topologie * faible	8
1.3.3	Espaces réflexifs, espaces séparables	9
1.3.4	Espaces de Lebesgue	10
1.4	Les Distributions	11
1.4.1	Définitions et premières propriétés	11
1.4.2	Notion de distribution	11
1.4.3	Opérateurs différentiels	13
1.5	Espaces de Sobolev et Trace	13
1.5.1	Espace de Sobolev	13
1.5.2	Espace de Sobolev particuliers	14
1.5.3	Résultat de compacité	15
1.5.4	Quelques inégalités	15
1.5.5	Trace	17
1.6	Espace des fonctions à valeurs vectorielles	17
1.6.1	Intégration dépendant du temps	17
1.6.2	Espaces de Sobolev dépendant du temps	18
1.7	Formules de Green	20
1.8	Méthode de Faedo Galarkin	21
1.8.1	Présentaion de la méthode de Faedo-Galerkin	22

2	Application 1	24
2.1	Existence de la solution du problème (P_1)	24
2.2	L'unicité de la solution	31
3	Application 2	33
3.1	Position du problème	33
3.1.1	Introduire l'espace	33
3.2	Existence de la solution du problème (P_2)	34
3.3	L'unicité de la solution	43

Les notations Principales utilisées

\mathbb{N} : corps des naturels.

\mathbb{R} : corps des réels.

Ω : est un ouvert de \mathbb{R}^n .

$[0, T]$: l'intervalle fermé $0 \leq t \leq T$

Γ : est la frontière topologique de Ω

$Q = (0, T) \times \Omega$; T est fini

Σ : est la frontière latéral de Q

$x = (x_1, \dots, x_n)$: point générique de \mathbb{R}^n

$dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$: mesure de Lebesgue sur Ω

$\mathcal{D}(\Omega)$: l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact

$\mathcal{D}'(\Omega)$: l'espace des distributions sur Ω

$L^2(\Omega)$: l'espace des classes de fonctions de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dx

$L^p(\Omega)$: l'espace des classes de fonctions de puissance p - ième intégrable pour la mesure de Lebesgue dx

$L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \sup \text{ess }_{t \in \Omega} |u(t)| < \infty\}$

$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 dx.$

$\|u\|_{L^\infty} := \sup \text{ess}_{t \in I} |u(t)|$

$H^1(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre 1 .

$H_0^1(\Omega)$: l'adhérence de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$

$H_0^m(\Omega)$: l'adhérence de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$

$H^m(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre m , pour $m \in \mathbb{N}$ et on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) / D^\alpha u \in L^2(\Omega) ; |\alpha| \leq m \right\}$$

On munit l'espace H^m du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^m(\Omega)$$

$\|x\|$: la norme de x .

E' : le dual topologique de E .

$\langle, \rangle_{E' \times E}$: le crochet de dualité entre l'espace E et son dual topologique

$\nabla u(x) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x))$, le gradient de la fonction u en $x \in \mathbb{R}^n$ (les dérivées sont prises au sens des distributions).

Δ : l'opérateur de Laplace $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

$W^{1,p}$: l'espace de Sobolev, $1 \leq p < \infty$.

$W_0^{1,p}$: la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}$, $1 \leq p < \infty$.

\rightharpoonup : la convergence faible dans $W^{1,p}$, $1 \leq p < \infty$.

$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$: espace de Sobolev

p.p. : presque partout.

$|\cdot|$ la norme associée aux produits scalaires

$\sigma(E, E')$: la topologie faible définie sur E .

$\sigma(E', E)$: la topologie *faible** définie sur E'

$$L^p(0, T, X) = \{f : (0, T) \longrightarrow X ; \text{mesurable} : \int_0^T \|f\|_X^p < \infty\}$$

$$L^\infty(0, T, X) = \{f : (0, T) \longrightarrow X ; \text{mesurable} : \text{ess sup}_{t \in (0, T)} \|f\|_X < \infty\}$$

$$\text{ess sup}_{t \in (0, T)} \|f\|_X = \inf_{t \in (0, T)} \{C > 0, \|f\|_X < \infty \text{ p.p.}\}$$

$$C([0, T], X) = \{f \longrightarrow X ; \text{continue}\}$$

$\mathfrak{D}'(0, T, X)$: l'espace de distributions vectorielles à valeurs dans X .

Introduction

* Aperçu historique

Boris Grigoryevich Galerkin mieux connu sous le nom Galerkin est né le 20 février 1871 à Polotsk (Biélorussie) et mort à 12 juillet 1945 à Moscou (Russie).

Est un mathématicien et un ingénieur russe réputé pour ses contributions à l'étude des treillis de poutres et des plaques élastiques. Son nom reste lié à une méthode de résolution approchée des structures élastiques, qui est l'une des bases de la méthode des éléments finis .

Son premier ouvrage scientifique est publié par les instituts "Transactions". L'article s'intitulait "Une théorie de la courbure longitudinale et une expérience d'application de la théorie de la courbure longitudinale aux cadres à plusieurs étages, aux cadres à jonctions rigides et aux systèmes de cadres"

Il a été distingué par l'Académie russe des sciences avec le prix Staline 1942 .[11]

Alessandro Faedo, mieux connu sous le nom de Sandro est né à Chiampo (près de Vicenza, au Nord-Est de l'Italie) le 18 Novembre 1913 et est mort à Pisa le 16 Juin 2001.

L'activité scientifique de Faedo était essentiellement dans le domaine de l'analyse générale et l'analyse numérique. Ses principales contributions concernent cependant le calcul de variation, la théorie des équations différentielles ordinaires linéaires et la théorie des équations aux dérivées partielles.

Les contributions mathématiques les plus importantes de Faedo destinées à avoir un impact durable sont dans le domaine des équations aux dérivées partielles. Ses écrits dans ce domaine se concentrent sur ce qu'il a appelé "l'analyse existentielle et quantitative des Equations aux Dérivées Partielles (E.D.P)". , en particulier pour les c elliptique ; et hyperboliques.

L'écrit le plus important de Faedo, publié en 1949 dans l' " Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa", contient l'analyse et la description d'une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles dépen-

dantes du temps (voir [4]et [12]).Plus tard, cette méthode que Faedo a appelé "Méthode des moments" ,allait devenir universellement connu comme la "Méthode de Faedo-Galerkin ",ce qui fait l'objet de notre travail.

* Plusieurs méthodes peuvent être employées pour résoudre ce genre de problème .

Dans ce mémoire, nous présentons l'une d'elle, la méthode de **Faedo-Galerkin** dont les bases ont été posées plus haut et par la suite nous donnons quelques applications de celle-ci.

Le travail que nous effectuons s'organise en trois chapitres, répartis comme suit :

Le première chapitre intitulé "Preliminaires", contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude. Dans **le deuxième chapitre** : Nous avons appliqué la méthode de Faedo-Galerkin, pour un problème de l'équation de la chaleur et la condition de Dirichlet :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t) & \text{dans } \Sigma = \Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = g(x) & \text{dans } \Omega \\ u(\sigma, x) = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \times]0, T[\end{cases}$$

Dans **Le troisième chapitre** : Nous avons appliqué la méthode de Faedo-Galerkin, pour un problème non linéaire de mécanique quantique oscillant avec le facteur d'amortissement.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + |u|^\rho u = f \\ u(x, 0) = u_0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1, x \in \Omega & (\text{condition initiale}) \\ u = 0 \text{ sur } \Sigma & (\text{condition aux limite}) \end{cases}$$

Finalement, on donne une conclusion du travail effectué. On termine ce mémoire par une bibliographie riche.

Chapitre 1

Préliminaires

L'étude des équations aux dérivées partielles nécessite la connaissance d'un certain nombre de notions.

Le but de ce chapitre est de rappeler certaines notions indispensables pour la suite de notre travail. Ainsi, nous définissons quelques notions de topologie, d'analyse fonctionnelle, d'analyse générale et quelques espaces de sobolev.

Dans cette section, les notions sont tirées des livres H.Brezis [10], J.L.Lions-Magenes [13] .

1.1 norme et espace de Banach

soit E un \mathbb{k} -espace vectoriel, $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1.1.1 Normes, espace de Banach

Définition 1.1.1. .

Une norme sur E est une fonction réelle $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, vérifiant les trois axiomes suivants :

- (i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (positivité)
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E$ (Homogénéité)
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$ (Inégalité triangulaire)

Définition 1.1.2. .

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme ,
Soit E un espace vectoriel normé .

Définition 1.1.3. (Suites convergentes)

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $a \in E$.

On dit que la suite u a pour limite a , ou converge vers a si la suite réelle $n \mapsto \|u_n - a\|$ a pour limite 0.

On écrit alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - a\|_E = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$$

tel que $n > n_0 \Rightarrow \|u_n - a\|_E < \epsilon$

Définition 1.1.4. (Suites de Cauchy)

Une suite de Cauchy dans E est une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E satisfaisant la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \geq N, \forall q \geq N, \|u_p - u_q\|_E < \epsilon \quad (1.1)$$

Définition 1.1.5. .

Un espace métrique E est dit complet, si dans cet espace toute suite de Cauchy converge .

Définition 1.1.6. .

Une espace E Banach est un espace vectoriel normé complet .

Proposition 1.1.1. .[15]

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

Chaque norme dans E est continue dans E .

Théorème 1.1.1. (Hille-Yosida) [10]

Soit E un espace de Banach , A un opérateur m -accrétif et $u_0 \in D(A)$. Alors il existe un unique $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ tel que

$$\begin{cases} u \in C^1([0, +\infty[, E), & (1, 2a) \\ u(t) \in D(A), \forall t \leq 0, & (1, 2b) \\ u'(t) + Au = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*, & (1, 2c) \\ u(0) = 0, & (1, 2d) \end{cases} \quad (1.2)$$

1.1.2 Dualité

Soit E un espace vectoriel normé ; L'espace $\mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ est appelé l'espace dual de E et est noté E' .

Les éléments de E' sont des formes linéaires.

L'action d'une forme linéaire $f \in E'$ sur un vecteur $x \in E$ est notée

$\langle x \in E \rangle_{E', E}$. Soit $f \in E'$, on a :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} (\langle f, x \rangle). \quad (1.3)$$

On a \mathbb{R} étant un espace de dimension finie donc complet , E' est toujours un espace de Banach.

1.1.3 Fonction à valeurs dans un espace de Banach

Lemme 1.1.1. .[12]

Si $f \in L^p(o, T, X)$ et $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(o, T, X)$ tel que $1 \leq p \leq \infty$, alors : f et après

modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $]0, T[$ continue de $]0, T[\rightarrow X$.

Lemme 1.1.2. [12]

Soit O un ouvert borné de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}t$, les fonctions g_μ et g de $L^q(O)$, $1 < q < \infty$ telles que :

$$\|g\|_{L^q(O)} \leq C \quad g_\mu \rightarrow g \text{ p.p dans } O.$$

Alors

$$g_\mu \rightarrow g \text{ dans } L^q(O) \text{ faible.}$$

1.2 Espace de Hilbert

1.2.1 Produit scalaire

Définition 1.2.1. .

Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel.

Un produit scalaire sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$(x, x) \geq 0, \forall x \in E \quad (\text{On dit que } (\cdot, \cdot) \text{ est positive})$$

$$(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ((\cdot, \cdot) \text{ est dfinie})$$

$$(x, x) = (y, x) \forall x, y \in E \quad (\text{symtrie})$$

$$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z) \forall x, y, z \in E \text{ et } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (\text{bilinearit}).$$

Dans toute la suite le produit scalaire sur E sera noté $(\cdot, \cdot)_E$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien**

.

Lemme 1.2.1. (Inégalité de Cauchy-Schwartz)[17]

Soit E un espace préhilbertien, on a :

$$|(x, y)_E|^2 \leq (x, x)_E (y, y)_E. \quad (1.4)$$

Corollaire 1.2.1. [17]

Soit E un espace préhilbertien :

L'application $x \mapsto \sqrt{(x, x)_E}$ est une norme sur E .

C'est-à-dire $\|x\| = \sqrt{(x, x)_E}$ est une norme sur E .

1.2.2 Espace de Hilbert

Définition 1.2.2. (Espace de Hilbert)

Espace de Hilbert est un espace préhilbertien (espace vectoriel muni d'un produit scalaire) complet pour la norme associée au produit scalaire.

Définition 1.2.3. (Orthogonalité)

Soit E un espace Hilbert :

On dit que $x, y \in E$ sont **orthogonaux** si $(x, y)_E = 0$.

On a $x \in E$ est orthogonal à une partie $F \subset E$ si :

$$\forall y \in F, (x, y)_E = 0. \quad (1.5)$$

On appelle Orthogonale de F l'ensemble :

$$\{x \in E / (x, y)_E = 0 \forall y \in F\} = F^\perp. \quad (1.6)$$

Proposition 1.2.1. (Représentation de Riesz)[2]

Soit E un espace Hilbert , Pour tout $f \in E'$ il existe un et un seul vecteur $x_f \in E$ tel que :

$$\langle f, y \rangle_{E', E} = \langle y, x_f \rangle_E, \forall y \in E. \quad (1.7)$$

Définition 1.2.4. (Convergence faible)

Soit E un espace Hilbert.

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de converge faible vers $x \in E$ si

$$\forall y \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Théorème 1.2.1. .[2]

De toute suite bornée dans un espace de Hilbert E , on peut extraire sous-suite faiblement convergente .

1.2.3 Bases Hilbertiennes

Définition 1.2.5. (Bases Hilbertiennes)

Une **Bases Hilbertiennes** dans un espace Hilbert E est une $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que :

$$i) \|e_n\| = 1, \forall n; \langle e_m, e_n \rangle = 0 \text{ si } m \neq n,$$

et

$$ii) \overline{\text{vect}(e_n, n \in \mathbb{N})} = E.$$

Théorème 1.2.2. .[10]

Tout espace de Hilbert Séparable admet une base hilbertienne .

1.3 Généralités et notions de bases

1.3.1 Topologie faible

Définition 1.3.1. .

Soit E un espace normé , E' est son dual topologique.

On appelle **topologie faible** sur E notée $\sigma(E, E')$, la topologie la moins fine rendant continue toutes les formes linéaires $f \in E'$.

Définition 1.3.2. .

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E ,
on dit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers x dans E ,si $x_n \rightarrow x$ dans $\sigma(E, E')$,
On notera $x_n \rightarrow x$.

Proposition 1.3.1. .[8]

Soit E un espace de Banach et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'élément de E , alors :

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow f(x_n) \rightarrow f(x), \forall f \in E'.$$

Proposition 1.3.2. .[8]

Soit (x_n) une suite de E , On a .

$x_n \rightarrow x$ et seulement si $f(x_n) \rightarrow f(x)$ pour tout $f \in E'$.

- i) Si $x_n \rightarrow x$ fortement , alors $x_n \rightarrow x$ pour $\sigma(E, E')$.
- ii) $x_n \rightarrow x$ pour $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \|x_n\|$.
- iii) Si $x_n \rightarrow x$ pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \rightarrow f$ fortement dans E'
(i.e. $\|f_n - f\|_{E'} \rightarrow 0$) , alors $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Théorème 1.3.1. .[8]

Soit E un espace de Banach réflexif et soit $\{x_n\}$ une suite bornée dans E . Alors il existe une sous-suite extraite $\{x_{nk}\}$ qui converge pour la topologie $\sigma(E, E')$.

1.3.2 Topologie * faible

Soit E un espace de Banach ,soit E' son dual topologique (muni de la norme dual .

$$\|f\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} (|\langle f, x \rangle|)$$

), et soit E'' son bidual , c'est-à-dire le dual de E' muni de la norme :

$$\|\xi\| = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |\langle \xi, f \rangle|. \quad (1.8)$$

On a une injection canonique $J : E \rightarrow E''$ définie comme suit : $x \in E$.

L'application $f \mapsto \langle f, x \rangle$ de E' dans \mathbb{R} constitue une forme linéaire continue sur E' ,i.e un élément de E'' note $J_x()$. On a donc :

$$\langle J_x, f \rangle_{E'', E'} = \langle f, x \rangle_{E', E} \forall x \in E, \forall f \in E'.$$

Il est clair que J est linéaire et isométrique i.e $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$

.

En effet

$$\|J_x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle J_x, f \rangle| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|.$$

On a $J(E) \subset E''$ Ce qui nous permet de définir une nouvelle topologie sur E' .

Définition 1.3.3. .

On appelle topologie *-faible , la topologie la moins fine rendant les formes linéaires $f \rightarrow f(x)$ continues . Pour tout $x \in E$,on la note $^*\text{-}\sigma(E, E')$.
Pour tout $f_0 \in E'$, la base de voisinage pour la topologie *-faible est :
pour $\varepsilon > 0$

$$W = \{f \in E', |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \varepsilon, i = 1, \dots, n, x_i \in E, n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposition 1.3.3. .[8]

Soit E un espace de Banach , si $(f_n)_n$ est une suite de E' , alors f_n converge vers f pour la topologie *-faible ,si et seulement si $f_n(x) \rightarrow f(x)$,pour tout $x \in E$.

Proposition 1.3.4. .[8]

Soit f_n une suite de E' , On a :

- i) $[f_n \xrightarrow{*} f \text{ pour } \sigma(E, E')] \iff [\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \forall x \in E]$.
- ii) si $f_n \rightarrow f$ fortement , alors $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E, E')$.
- iii) $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E, E')$ alors $\|f_n\|$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.
- vi) $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E, E')$ et si $x_n \rightarrow x$ fortement dans E
(i.e. $\|x_n - x\| \rightarrow 0$), alors $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

1.3.3 Espaces réflexifs, espaces séparables

Soit E un espace de Banach et $J : E \rightarrow E''$ l'injection canonique de E dans E'' définie par :

$$J_x(f) = f(x) \forall x \in E, \forall f \in E'.$$

Définition 1.3.4. .

l'espace E est dit **réflexif** ,si $J(E) = E''$.

Ce qui nous donne le résultat suivant ;

Théorème 1.3.2. .[10]

Soit E un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous suite faiblement convergente .

Théorème 1.3.3. (Banach-Alaoglu-Bourbaki) [16]

L'ensemble $B_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$,

est compact pour la topologie faible $^*\sigma(E', E)$,

de plus si E est séparable alors : la boule unité B_E sequentiellement compacte pour la topologie faible *.i.e :pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ bornée de E' on peut extraire une sous suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ qui converge pour la topologie faible $^*\sigma(E', E)$

.

Ce théorème permet à deduire la caractrisation des espaces normés réflexifs (égaux a leurs biduales) un tel espace est necessairement un espace de Banach.

Définition 1.3.5.

Un espace métrique est dit séparable, s'il contient un sous-ensemble dénombrable et dense.

D'où le résultat suivant.

Théorème 1.3.4. [5]

Soit E un espace de Banach séparable, Alors toute suite bornée $(f_n)_n$ dans E' admet au moins une sous suite *-faiblement convergente.

Théorème 1.3.5. [5]

Soit E un espace de Banach, si E' est séparable alors E l'est aussi. La réciproque est en général fautive.

Corollaire 1.3.1. [5]

soit E un espace de Banach alors :

E est réflexif et séparable si et seulement si E' est réflexif et séparable.

Proposition 1.3.5. [5]

Soient E et F des espaces normés séparables et G un sous-espace de E , alors :

i) L'espace $E \times F$ est séparable.

ii) L'espace G est séparable.

1.3.4 Espaces de Lebesgue

Les espaces que nous allons introduire maintenant sont indispensables à la définition d'espace de Sobolev que nous nous verrons par la suite.

Définition 1.3.6.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R} , $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue, c'est-à-dire :

$$L^2(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable, et telle que } \int_{\Omega} |u|^2 < \infty\} \quad (1.9)$$

Théorème 1.3.6. [1]

- Muni du produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad (1.10)$$

l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

- Muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.11)$$

l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Banach

- Muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf(c > 0, |f(x)| < c \text{ p.p. } x, \text{ dans } \Omega) \quad (1.12)$$

l'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach .

Théorème 1.3.7. .[1]

Pour $1 \leq p < \infty$ l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.

1.4 Les Distributions

Les distributions sont une généralisation de la notion de fonction .

1.4.1 Définitions et premières propriétés

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n dont la frontière Γ est régulière.

Définition 1.4.1. (Support d'une fonction)

Le support d'une fonction $f(x)$ noté $\text{Supp}(f)$ est le plus petit ensemble fermé de valeurs de x en dehors duquel la fonction $f(x)$ est identiquement nulle. C'est donc la fermeture de l'ensemble des points x tel que $f(x) \neq 0$.

$$\text{Supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}. \quad (1.13)$$

Définition 1.4.2. (Sous-ensemble compact)

Un sous-ensemble de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est dit compact, s'il est fermé borné .

Définition 1.4.3. (Espace $D(\Omega)$)

On appelle $D(\Omega)$ (ou encore $C_c^\infty(\Omega)$) l'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω et dont le support est compact et inclus dans Ω .

Théorème 1.4.1. .[5]

Soit un réel $p \in [1, +\infty[$, alors $D(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

1.4.2 Notion de distribution

Définition 1.4.4. (Distribution)

On appelle **distribution** sur Ω , toute forme linéaire et continue sur $D(\Omega)$. L'ensemble des distributions est le dual topologique de $D(\Omega)$ noté $D'(\Omega)$.

Remarque 1.4.1. .

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , on muni $D'(\Omega)$ de la topologie faible* induite par $D(\Omega)$. Alors :

- $D'(\Omega)$ est un espace topologique complet .

- Le dual de $D'(\Omega)$ s'identifie à $D(\Omega)$, qui est donc réflexif .
La convergence dans le dual de n'importe quel espace de Sobolev implique la convergence au sens des distributions.

Remarque 1.4.2. .

La définition des distributions et la notation $D'(\Omega)$ sont dues à Laurent Schwartz. La notation $D'(\Omega)$ vient du fait que Schwartz note $D(\Omega)$ l'ensemble $C_c^\infty(\Omega)$ et que , pour un espace vectoriel E , l'espace dual (espace vectoriel des formes linéaires continues sur E) est noté E' .

Définition 1.4.5. (Fonction localement intégrable)

Une fonction $f(x)$ est dite localement intégrable , si elle est intégrable sur tout compact inclus dans Ω ou encore si

$$\int_A |f(x)|dx < \infty \forall \text{compact } A \subset \Omega.$$

L'ensemble des fonctions localement intégrables forme un espace noté L^1_{loc} .

Remarque 1.4.3. .

- Notons qu'une fonction peut ne pas être intégrable sur tout le domaine Ω mais être localement intégrable. On peut associer à une fonction localement intégrable $f(x) \in L^1_{loc}$, une distribution T_f définie par :

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx \forall \phi \in D(\Omega). \tag{1.14}$$

- Pour toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on définit une distribution associée T_f par :

$$\forall \phi \in D(\Omega) \quad \langle T_f, \Omega \rangle := \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx. \tag{1.15}$$

En général , on écrit f au lieu de T_f tant qu'il n'y a pas de confusion possible entre la distribution et la fonction.

Définition 1.4.6. (Dérivées d'une distribution)

1. Un multi-indice α est un k -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ avec $k \leq n$, Sa longueur est $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ et on note D^α l'opérateur différentiel défini par $D^\alpha = \partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_k}$.
2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $T \in D'(\Omega)$. Pour tout multi-indice α , $D^\alpha T$ désigne la distribution définie par :

$$\forall \phi \in D(\Omega) \quad \langle D^\alpha, T \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle. \tag{1.16}$$

On dit que $D^\alpha T$ est la dérivée d'exposant α de T .

1.4.3 Opérateurs différentiels

Soit n un entier, on note $x = (x_1, \dots, x_n)$ un point (ou vecteur) de \mathbb{R}^n .

Définition 1.4.7.

On appelle *champ de vecteurs*, une application $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, qui à $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe $v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$.

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, son gradient est le champ de vecteurs défini par $\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)$.

Pour un champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on appelle *divergence* la fonction $\operatorname{div} v(x) = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(x) \right)$.

On appelle *laplacien* d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction

$$\Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x).$$

1.5 Espaces de Sobolev et Trace

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels. Plus précisément, un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme L^p de la fonction elle-même, ainsi que de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises dans un sens faible, au sens des distributions afin de rendre l'espace complet.

1.5.1 Espace de Sobolev

Définition et premières propriétés

Définition 1.5.1. (Espace $W^{m,p}(\Omega)$)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $m, p \in \mathbb{N}^*$, on définit l'**Espace Sobolev** $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}, \quad (1.17)$$

où α un multi-indice tel que $0 \leq |\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ est une dérivée partielle de u au sens faible (i.e au sens des distributions) et $L^p(\Omega)$ est un espace de Lebesgue.

Définition 1.5.2. (Espace $H^m(\Omega)$)

Dans le cas $p = 2$, on note $H^m(\Omega)$ l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ défini par (1.17).

Proposition 1.5.1. [18]

L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) défini par :

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx. \quad (1.18)$$

1.5.2 Espace de Sobolev particuliers

Définition 1.5.3. .

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d .

L'espace de Sobolev d'ordre 1 est défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, d \right\},$$

où les dérivées sont prises au sens faible .

Proposition 1.5.2. .[7]

L'application suivante définit un produit scalaire sur $H^1(\Omega)$:

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \quad (1.19)$$

Pour la norme définie par

$$\|u\|_1 = \left(\int_{\Omega} |u|^2 + |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.20)$$

Théorème 1.5.1. .[7]

L'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ est un espace de Hilbert.

Théorème 1.5.2. (Théorème de densité)[7]

Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1 , ou si $\Omega = \mathbb{R}_+^d$, ou encore si $\Omega = \mathbb{R}^d$, alors $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Définition 1.5.4. (L'espace $H_0^1(\Omega)$)

On définit $H_0^1(\Omega)$ comme étant l'adhérence dans $H^1(\Omega)$ de $D(\Omega)$.

Par définition, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ On en déduit le résultat suivant .

Proposition 1.5.3. .[7]

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Définition 1.5.5. (L'espace $H^{-m}(\Omega)$)

Il est possible de caractériser le dual topologique de $H_0^m(\Omega)$ de la façon suivante.

Pour tout $m \geq 1$, on définit l'espace des distributions suivant :

$$H^{-m}(\Omega) = \left\{ f \in D'(\Omega), f = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha \text{ avec } f_\alpha \in L^2(\Omega) \right\}, \quad (1.21)$$

muni de la. norme :

$$\|f\|_{H^{-m}} = \inf \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{L^2}^2 \right). \quad (1.22)$$

On arrive maintenant à l'une des parties principales de cette partie, qui est relative aux résultats de compacité, qui nous seront très utiles dans la démonstration de l'existence des solutions des différents problèmes.

1.5.3 Résultat de compacité

On commence par le théorème de Rellich-Kondrachov.

Théorème 1.5.3. [7]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d de Γ sa frontière supposée régulière .

Alors l'injection :

$$Id : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega),$$

est compacte. On dit que $H^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega)$.

1.5.4 Quelques inégalités

Théorème 1.5.4. (Inégalité de Young)[14]

Soient p et q deux réels vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,alors :

$$\forall(a, b) \in \mathbb{R}_+^d, \forall \varepsilon > 0, ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{q\varepsilon^q} b^q. \quad (1.23)$$

En particulier, si $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy :

$$\forall(a, b) \in \mathbb{R}_+^d, ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. \quad (1.24)$$

En pratique, pour deux réels positifs a et b et pour tout $\varepsilon > 0$.

$$\forall(a, b) \in \mathbb{R}_+^d, \forall \varepsilon > 0, ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{q\varepsilon^q} b^q. \quad (1.25)$$

Lemme 1.5.1. (Gronwall) [3]

Soient $\phi \in L^\infty(0, T)$ et $f \in L^1(0, T)$ positives et g une constante positive, telles que :

Pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\phi(t) \leq g(t) + \int_0^t f(\tau)\phi(\tau)d\tau \quad (a),$$

alors, on a pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\phi(t) \leq g(t) \exp\left(\int_0^t f(\tau)\right) \quad (a).$$

Théorème 1.5.5. (Inégalité de Holder) [20]

Soient f et g deux fonctions respectivement dans L^p et dans L^q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors, le produit $f g$ est dans $L^1(\Omega)$ et on a :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Dans le cas particulier où $p = q = 2$, on obtient l'égalité de Cauchy-schwartz

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Théorème 1.5.6. (convergence dominée de Lebesgue) [6]

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de L^1 . On suppose que :

a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω .

b) Il existe une fonction $g \in L^1$ tel que pour chaque n ,

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Alors

$$f \in L^1 \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

Définition 1.5.6. (Exposant conjugué de Sobolev)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d (qui peut être \mathbb{R}^d tout entier), soit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$.

On appelle conjugué de Sobolev du nombre p , le nombre p^* défini par la relation :

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}. \quad (1.26)$$

Théorème 1.5.7. (Injections continues de Sobolev) [20]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . Si Ω est borné et à une frontière Lipschitz-continue, alors pour tout entier $m \geq 0$ et pour tout $p \in [1, +\infty[$ on dispose des inclusions avec injections continues suivantes :

$$\begin{cases} W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*} \text{ si } m < \frac{d}{p} \\ W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q \forall q \in [1, +\infty[, \text{ si } m = \frac{d}{p} \\ W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}) \text{ si } \frac{d}{p} < m \end{cases} \quad (1.27)$$

Théorème 1.5.8. (Inégalité de Poincaré)[20]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d borné ,connexe de frontière régulière ,alors il existe une constante $c > 0$ (dépendante de Ω) telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Théorème 1.5.9. (Fubini)[10]

Soit f une fonction sommable de $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, alors

$$f(x, \cdot) \in L(E_2) \text{ pour tout } x \in E_2 \text{ et } f(\cdot, y) \in L(E_1) \text{ pour tout } x \in E_1 \quad (a)$$

$$\int_{E_2} f(\cdot, y) dy \in L(E_1) \text{ et } \int_{E_2} f(x, \cdot) dx \in L(E_2) \quad (b)$$

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_{E_1} dx \int_{E_2} f(x, y) dy = \int_{E_2} dy \int_{E_1} f(x, y) dx. \quad (c)$$

Théorème 1.5.10. (Dunford-pettis) [9]

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $\mathfrak{F} \subset L^1(\Omega)$ un sous-ensemble borné. Alors \mathfrak{F} est relativement compact pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$ si et seulement si l'on a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que :

$$\int_A |f| < \varepsilon, \forall f \in \mathfrak{F} \text{ et } \forall A \subset \Omega \text{ avec } |A| < \delta.$$

1.5.5 Trace

Définition 1.5.7. .

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d borné ; **L'application trace** γ_0 est l'application linéaire définie de $H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ dans $L^2(\partial\Omega) \cap C(\overline{\partial\Omega})$ par $\gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}$.

1.6 Espace des fonctions à valeurs vectorielles

Pour étudier les équations aux dérivées partielles (E.D.P) d'évolutions, nous avons besoin d'espaces particuliers faisant intervenir à la fois l'espace et le temps ,d'où l'importance de la partie qui va suivre.

1.6.1 Intégration dépendant du temps

Le cadre naturel d'étude pour les problèmes d'évolution (problème de type parabolique et elliptique) requiert la prise en compte d'espace dépendant du temps.

Etant donnée une fonction $u = (x, t)$, il est toujours commode de séparer les rôles des espace et temps de la manière suivante.

Supposons $t \in [0, T]$ et pour tout $t \in [0, T]$ la fonction $u(\cdot, t)$ appartient à un espace de Hilbert V (par exemple $L^2(\Omega)$ ou $H^1(\Omega)$).

Alors, on peut considérer u comme une fonction de variable réelle t à, valeur dans V :

$$u : [0, T] \rightarrow V.$$

Avec la convention ci-dessus, on écrit $u(t)$ et $u'(t)$ au lieu de $u(x, t)$ et $u_t(x, t)$ respectivement.

Ainsi, nous introduisons les notions suivantes nécessaires pour la suite.

Définition 1.6.1.

On dit que $f : [0, T] \rightarrow V$ est **sommable** dans $[0, T]$,s'il existe une suite $S_n : [0, T] \rightarrow V$ fonctions telle que

$$\int_0^T \|S_n(t) - f(t)\|_V dt \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (1.28)$$

If f est sommable dans $[0, T]$, on définit l'intégrale de f comme suit :

$$\int_0^T f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T S_n(t) \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (1.29)$$

Théorème 1.6.1. (Bochner)[18]

Une fonction mesurable $f : [0, T] \rightarrow V$ est sommable dans $[0, T]$, si et seulement si la fonction réelle $t \rightarrow \|f(t)\|_V dt$ est sommable dans $[0, T]$. De plus,

$$\left\| \int_0^T f(t)dt \right\|_V \leq \int_0^T \|f(t)\|_V dt, \quad (1.30)$$

et

$$(u, \int_0^T f(t)dt)_V = \int_0^T (u, f(t))_V dt, \forall u \in V. \quad (1.31)$$

L'inégalité (1.30) est bien connue pour les fonctions complexes ou réelles.

Par le théorème de représentation de Riesz, (1.31) montre que l'action de chaque élément de V^* commute avec les intégrales.

1.6.2 Espaces de Sobolev dépendant du temps

Une étape importante pour la résolution d'une équation aux dérivées partielles (E.D.P) est de choisir le bon espace dans lequel les éventuelles solutions vont être cherchées.

Une fois la définition des intégrales donnée, nous pourrons introduire les espaces $C([0, T]; V)$ et $L^p([0, T]; V)$, $1 \leq p < \infty$.

On note par $C([0, T]; V)$ l'ensemble des fonctions continues $u : [0, T] \rightarrow V$.

Muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty([0, T]; V)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V.$$

$C([0, T]; V)$ est un espace de Banach.

On définit $L^p([0, T]; V)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables

$u : [0, T] \rightarrow V$ telles que :

si $1 \leq p < \infty$

$$\|u\|_{L^p([0, T]; V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (1.32)$$

Si $p = 2$, la norme est induite par le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2([0, T]; V)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V dt, \quad (1.33)$$

faisant de $L^2([0, T]; V)$ un espace de Hilbert.

Pour définir l'espace de Sobolev, nous avons besoin de donner la notion de dérivée au sens des distributions pour une fonction $u \in L^1_{loc}([0, T]; V)$.

Définition 1.6.2.

On dit qu'une fonction $u' \in L^1_{loc}([0, T]; V)$ est dérivée au sens des distributions (ou au sens faible) de u si

$$\int_0^T \varphi(t)u'(t)dt = - \int_0^T \varphi'(t)u(t)dt,$$

pour tout $\varphi \in D(0, T)$ ou de manière équivalente, si

$$\int_0^T \varphi(t)(u'(t), v)_V dt = - \int_0^T \varphi'(t)(u(t), v)_V dt \quad \forall v \in V. \quad (1.34)$$

Définition 1.6.3. (Dérivée par transposition)

Soit V un espace de Banach, $1 \leq p < +\infty$ et $u \in L^p_V(]0, T[)$. On note D l'espace $C^\infty_c(]0, T[, \mathbb{R})$ et D' l'ensemble des applications linéaires de D dans V .

On définit $u_t \in D'$ par

$$\langle u_t, \varphi \rangle_{D', D} = \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt \quad \text{pour tout } \varphi \in C^\infty_c(]0, T[, \mathbb{R}).$$

Introduisons maintenant les espaces suivants :

a) Notons $W^{1,p}(0, T; V)$ l'espace de Sobolev des fonctions $u \in L^p([0, T]; V)$ ayant pour dérivée faible

$$u' \in L^p([0, T]; V),$$

avec pour norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt + \int_0^T \|u'(t)\|_V^p dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty.$$

b) Si $p = 2$, on peut écrire $H^1(0, T; V)$ au lieu de $W^{1,2}(0, T; V)$. C'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(0, T; V)} = \int_0^T ((u(t), v(t))_V + ((u'(t), v'(t))_V) dt.$$

Énonçons le théorème suivant :

Théorème 1.6.2. [18]

Soit $u \in H^1(0, T; V)$, alors $u \in C([0, T] : V)$ et

$$\|u\|_{L^\infty([0, T]; V)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V \leq C(T) \|u\|_{H^1(0, T; V)}.$$

De plus, le théorème fondamental de calcul nous donne :

$$u(t) = u(s) + \int_s^t u'(r)dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Remarque 1.6.1. .

Le cadre idéal pour les applications des problèmes aux conditions aux limites est le Triplet de Hilbert (V, H, V') .

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

avec V séparable. Il est nécessaire de travailler avec les fonctions $u \in L^2([0, T]; V)$ dont la dérivée $u' \in L^2([0, T]; V')$...

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 1.6.3. .[18]

Soit $u \in L^2([0, T]; V)$ avec $\bar{u} \in L^2([0, T]; V')$, alors :

a) $u \in C([0, T]; H)$ et

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H \leq C \{ \|u\|_{L^2([0, T]; V)} + \|u'\|_{L^2([0, T]; V')} \} . \quad (1.35)$$

b) Si aussi $v \in L^2([0, T]; V)$ et $v' \in L^2([0, T]; V')$, la formule d'intégration par parties suivante est vérifiée

$$\int_s^t \{ \langle u'(r), v(r) \rangle_* + \langle u(r), v'(r) \rangle_* \} dr = (u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H \quad (1.36)$$

pour tout $s, t \in [0, T]$.

Remarque 1.6.2. .

De (1.36) on peut déduire que :

$$\frac{d}{dt} (u(t), v(t))_H = \langle u'(t), v(t) \rangle_* + \langle u(t), v'(t) \rangle_*$$

pour tout $t \in [0, T]$ et (en prenant $u = v$)

$$\int_s^t \frac{d}{dt} \|u(r)\|_H^2 dt = \|u(t)\|_H^2 - \|u(s)\|_H^2 . \quad (1.37)$$

1.7 Formules de Green**Définition 1.7.1. .**

Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n, n > 1$, est dit régulier de classe C^1 si son bord $\partial\Omega$ est une hypersurface (variété de dimension $n - 1$) régulière et si Ω est situé d'un seul côté de sa frontière.

On définit la normale extérieure au bord $\partial\Omega$ comme étant le vecteur unité $\nu = (\nu_i)_{1 \leq i \leq n}$ normal en tout point au plan tangent à Ω et pointant vers l'extérieur de Ω .

Théorème 1.7.1. Formule de Green [7]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n régulier de classe C^1 . Soit w une fonction de $C^1(\bar{\Omega})^n$

à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$, alors elle vérifie la formule de Green

$$\int_{\Omega} \text{div}(w)(x)dx = \int_{\partial\Omega} w(x).n(x)d\sigma_x, \quad (1.38)$$

où $d\sigma_x$ désigne la mesure surfacique sur $\partial\Omega$ (mesure de Lebesgue en dimension $n - 1$), et le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n et $\text{div}(w) := \partial_{x_1}w_1 + \dots + \partial_{x_n}w_n$ est la divergence de $w := (w_1; \dots; w_n)$.

Soit une formulation suivante de la formule de Green .

Corollaire 1.7.1. Formule d'intégrations par parties [7]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n régulier de classe C^1 ; Soient $u \in C^1(\bar{\Omega})^n$ et $v \in C^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans $\bar{\Omega}$, alors, on a :

$$\int_{\Omega} \nabla v . u dx = - \int_{\Omega} v \text{div}(u) dx + \int_{\partial\Omega} v u . n d\sigma_x \quad (1.39)$$

Remarque 1.7.1. .

En dimension $n = 1, \Omega =]a, b[$, on a $n(a) = -1, n(b) = 1$. On retrouve la formule d'intégration par parties classique. On a :

$$\int_b^a u' v dx = - \int_b^a u v' dx + (u(b)v(b) - u(a)v(a)). \quad (1.40)$$

On donne une troisième formulation de la formule de Green.

Corollaire 1.7.2. .[3]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n régulier de classe C^1 ; Soient $u \in C^2(\bar{\Omega})^n$ et $v \in C^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans $\bar{\Omega}$, alors, on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = - \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_x \quad (1.41)$$

ou $\frac{\partial u}{\partial n} := \nabla u . n$ est la dérivée normale de u sur $\partial\Omega$.

1.8 Méthode de Faedo Galarkin

Le principe de cette méthode est basé sur l'idée de remplacer l'espace séparable infini V par un autre V_m fini, le problème approché est posé sur V_m ou nous se ramène à la simple solution d'un système d'équations différentielles ordinaires non linéaire, par ailleurs on peut choisir la mode de construction de V_m de manière à ce que le sous-espace V_m soit une bonne approximation de V et que la solution u_m dans V_m du problème est approchée à la solution exacte u dans V .

Cette méthode n'a pas d'intérêt numérique en général elle est très utile d'un point de vue théorique, notamment pour l'étude des problèmes non linéaires .

1.8.1 Présentation de la méthode de Faedo-Galerkin

1. Présentation

La méthode de Faedo-Galerkin est une méthode approximative parmi d'autres, utilisée pour résoudre (déterminer l'existence et l'unicité des solutions) des Equations aux Dérivées partielles d'évolution.

2. Principe de la méthode

Décrivons ici la stratégie (les étapes) de la méthode.

L'existence par la méthode de Faedo-Galerkin se fait en trois étapes :

(a) **Approximation de Galerkin (Recherche de solutions approchées).**

Dans cette partie, on choisit une famille de fonctions $(\zeta_k)_{k \geq 1}$ constituant

une base orthogonale dans $V = H_0^1(\Omega)$,

et

une base orthonormale dans $H = L^2(\Omega)$.

En particulier, on pourra écrire :

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k \zeta_k,$$

ou

$$g_k = (g, \zeta_k)_0,$$

et les séries sont convergentes dans H.

(b) **Estimation à priori**

Puis, on construit une suite de sous-espaces de dimension finie,

$$V_m = \text{vect} \zeta_1, \dots, \zeta_m,$$

avec évidemment

$$V_m \subset V_{m+1},$$

et

$$\overline{\cup V_m} = V.$$

Pour m fixé, on pose

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) \zeta_k, \quad G_m = \sum_{k=1}^m g_k \zeta_k,$$

et on résout le problème approximatif suivant : Déterminer $u_m \in H_0^1(0, T, V)$ tel que pour $s = 1, \dots, m$ on a

$$\begin{cases} (u'_m(t), \zeta_s)_0 + a(u'_m(t), \zeta_s) = (f(t), \zeta_s)_0, \text{ pour tout } t \in [0, T] \\ U_m(0) = G_m \end{cases} .$$

Pour tout $v \in V_m$ puisque $u'_m \in L^2([0, T], V)$, on a

$$(u'_m(t), v) = \langle u'_m(t), v \rangle.$$

u_m est appelé **approximation de Galerkin** de la solution u .

(c) **Passage à la limite(existence d'une solution faible)**

Daru; cette partie nous montrerons que u_m et u'_m sont bornés dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ respectivement (Estimation de l'énergie).

Alors eu appliquant le théorème de compacité, on pourra montrer que les sous-suites u_{mk} convergent faiblement dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ pendant que u'_{mk} converge faiblement dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$.

Chapitre 2

Application 1

Nous appliquons la methode de **Faedo-Galerkin** pour prouver l'existence de proplème de la chaleur .

Dans ce chapitre, nous considérons l'aquation de la chaleur et la condition de Dirichlet :

$$(P_1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t) & \text{dans } \Sigma = \Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = g(x) & \text{dans } \Omega \\ u(\sigma, x) = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \times]0, T[\end{cases} \quad (2.1)$$

Soit Ω un ensemble borné ouvert dans \mathbb{R}^n , $[0, T]$ est un intervalle de temps fini, $f(x, t)$ fonctions réelles .

Nous voulons trouver une formulation faible. Avançons formellement. Comme nous l'avons fait plusieurs fois, nous multiplions l'équation de diffusion par une fonction lisse $v = v(x)$, disparaissant à la limite de Ω , et intégrons plus de Ω . Nous trouvons

$$\int_{\Omega} u_t(x, t)v(x)dx - \int_{\Omega} \Delta u(x, t)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x, t)v(x)dx.$$

En intégrant par parties le second terme [13], on obtient

$$\int_{\Omega} u_t(x, t)v(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t)\nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x, t)v(x)dx. \quad (2.2)$$

Tout d'abord, étant donné qu'il s'agit d'équations d'évolution, il est commode de Adopter le point des espaces impliquant le temps, et considérer.

2.1 Existence de la solution du problème (P_1)

Nous voulons montrer que le problème (2.1) a exactement une solution faible, qui dépend Continuellement sur les données dans une norme appropriée. Bien qu'il existe des variantes du théorème de Lax-Milgram parfaitement adapté à Résoudre les problèmes d'évolution, nous utiliserons la méthode dite de Faedo-Galerkin [19] , aussi Plus commode pour les approximations numériques. Décrivons la stratégie principale. Nous divisons en trois étapes.

Dans Etape 1 solutions approchées du problème . A l'étape 2, des estimations a priori pour u_n sont dérivées. A l'étape 3 passage aux limites, dériver la régularité de \dot{u} et justifier la condition initiale .

Etape 1: Solutions approchées

Nous sélectionnons une suite de fonctions lisses $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ constituant

un base orthogonal dans $V = H_0^1(\Omega)$,

et

un base orthogonal dans $L^2(\Omega)$.

En particulier, nous pouvons écrire $\sum_{k=1}^{\infty} g_k w_k$,

où $g_k = (g, w_k)_0$ et la série converge en $L^2(\Omega)$.

Nous construisons la suite des sous-espaces de dimension finie

$$V_n = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}.$$

Clairement

$$V_n \subset V_{n+1} \quad \text{et} \quad \overline{\cup V_n} = V.$$

Pour n fixe, on a

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) w_k, \quad G_n = \sum_{k=1}^n g_k w_k. \quad (2.3)$$

Nous résolvons le problème approximatif suivant Déterminer u_n dans $H^1(0, T, V)$, satisfaisant. Pour tout $s = 1, \dots, n$,

$$\begin{cases} (\dot{u}_n(t), w_s)_0 + a(u_n(t), w_s) = (f(t), w_s)_0 & a.e t \in [0, T] \\ u_n(0) = G_n \end{cases} \quad (2.4)$$

Notons que l'équation différentielle dans (2.4) est vraie pour chaque élément de la base W_s , $s = 1, \dots, n$, si et seulement si elle est vraie pour chaque $v \in V_n$. De plus, puisque $\dot{u}_n \in L^2(0, T; V)$, nous avons

$$(\dot{u}_n(t), v)_0 = \langle \dot{u}_n(t), v \rangle_*.$$

Nous allons le lemme suivant :

Lemme 2.1.1. .

Pour tout n , il existe une solution unique u_n de problème (2.4). En Particulier, puisque $u_n \in H^1(0, T; V_n)$, nous avons $u_n \in C([0, T]; V_n)$.

Démonstration. Puisque w_1, \dots, w_n . Sont mutuellement orthonormées dans $L^2(\omega)$, nous avons

$$(\dot{u}_n(t), w_s)_0 = \left(\sum_{k=1}^n \dot{c}_k(t) w_k, w_s \right)_0 = \dot{c}_s(t),$$

aussi w_1, \dots, w_n est un système orthogonal dans V_n , Par conséquent

$$a\left(\sum_{k=1}^n c_k(t)w_k, w_s\right) = (\nabla w_s, \nabla w_s)_0 c_s(t) = \|\nabla w_s\|_0^2 c_s(t),$$

on pose

$$F_s(t) = (f(t), w_s), \quad \mathbf{F}_n(t) = (F_1(t), \dots, F_n(t)),$$

et

$$\mathbf{C}_n(t) = (C_1(t), \dots, C_n(t)), \quad g_n = (g_1, \dots, g_n).$$

Si l'on introduit la matrice diagonale

$$\mathbf{W} = \text{diag}\left\{\|\nabla w_1\|_0^2, \|\nabla w_2\|_0^2, \dots, \|\nabla w_n\|_0^2\right\}.$$

De l'ordre n , le problème (2.4) est équivalent au système suivant de n désaccouplé Equations différentielles ordinaires linéaires, à coefficients constants :

$$\dot{\mathbf{C}}_n(t) = -\mathbf{W}\mathbf{C}_n(t) + \mathbf{F}_n(t) \quad a.e. t \in [0, T]. \quad (2.5)$$

Avec condition initiale

$$C_n(0) = g_n.$$

Depuis $\mathbf{F} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$. Il existe une solution unique $\mathbf{C} \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$, de la forme

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t)w_k.$$

Nous en déduisons $u_n \in H^1(0, T; V_n)$. □

Remarque 2.1.1. .

Nous avons choisi une base $\{w_k\}$ orthonormale dans L^2 et orthogonale dans H_0^1 parce que, par rapport à cette base, l'opérateur de Laplace devient diagonal opérateur, comme il est reflété par le problème approximatif (2.5). Cependant, la méthode Fonctionne en utilisant n'importe quelle base comptable pour les deux espaces. Le problème (2.4) devient

$$\dot{\mathbf{C}}_n(t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{C}_n(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_n(t) \quad a.e. t \in [0, T],$$

où depuis w_1, \dots, w_n est un base dans V_m , La matrice M est positive, donc non singulière.

$$M = (M_{sk}), M_{sk} = (w_s, w_k)_0, \quad W = (W_{sk}), W_{sk} = (\nabla w_s, \nabla w_k)_0.$$

Ceci est particulièrement important dans la mise en oeuvre numérique du procédé, où, en général, les éléments de la base en V_n ne sont pas mutuellement orthogonaux.

Etape 2: Estimations à priori de u_n

Notre but est de montrer que nous pouvons extraire de la suite des approximations de Galerkin $\{U_n\}$ une sous-suite convergeant en un certain sens à une solution de problème (2.1). C'est un problème typique de compacité dans les espaces de Hilbert. L'outil clé est le théorème (2.1.2) :

$$\|x\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|. \quad (2.6)$$

Donc, ce dont nous avons besoin est de montrer que les normes Sobolev appropriées de un peuvent être Estimées par des normes appropriées des données, et les estimations sont indépendantes . De n . En outre, ces estimations doivent être suffisamment puissantes pour Limite comme $n \rightarrow +\infty$ dans l'équation d'approximation

$$(\dot{u}_n, v)_0 + (\nabla u_n, \nabla v)_0 = (f, v)_0.$$

Dans notre cas, nous serons en mesure de contrôler les normes de u_n dans $L^\infty([0, T]; H)$ et $L^2([0, T]; V)$, et la norme de \dot{u}_n dans $L^2([0, T]; V^*)$, Soit les normes

$$\max_{t \in [0, T]} \|u_n(t)\|_0, \quad \int_{\Omega} \|u_n(t)\|_1^2 dt \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \|\dot{u}_n(t)\|_*^2.$$

Ainsi, on a $u_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) w_k$ etre la solution du problème (2.4).

Théorème 2.1.1. (*Estimation de u_n*).

Pour chaque $t \in [0, T]$, l'estimation suivante tient :

$$\|u_n(t)\|_0^2 + \int_0^t \|u_n(s)\|_1^2 ds \leq \|g\|_0^2 + c^2 \int_0^t \|f(s)\|_0^2 ds \quad (2.7)$$

Une autre estimation est donnée dans le Problème (2.1).

Démonstration. En multipliant l'équation (2.4) par $c_k(t)$ et en fait la somme pour $k = 1, \dots, n$, on obtient

$$(\dot{u}_n(t), u_n(t))_0 + a(u_n(t), u_n(t)) = (f(t), u_n(t))_0. \quad (2.8)$$

Pour $t \in [0, T]$. Maintenant, notez que

$$(\dot{u}_n(t), u_n(t))_0 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_0^2, \quad a.e \ t \in (0, T),$$

et

$$a(u_n(t), u_n(t)) = \|\nabla u_n(t)\|_0^2 = \|u_n(t)\|_1^2.$$

A partir des inégalités de Schwarz et de Poincaré et de l'inégalité élémentaire¹

$$(f(t), u_n(t))_0 \leq \|f(t)\|_0 \|u_n(t)\|_0 \leq C \|f(t)\|_0 \|u_n(t)\|_1$$

1. $|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$

$$\leq \frac{c^2}{2} \|f(t)\|_0^2 + \frac{1}{2} \|u_n(t)\|_1^2.$$

Ainsi, à partir de (2.6), nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_0^2 + \|u_n(t)\|_1^2 \leq c^2 \|f(t)\|_0^2.$$

Nous intégrons maintenant entre $(0, t)$, puisque $u_n(0) = G_n$ et en observant que $\|G_n\|_0^2 \leq \|g\|_0^2$

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{dt} \|u_n(s)\|_0^2 ds + \int_0^t \|u_n(s)\|_1^2 ds &\leq c^2 \int_0^t \|f(s)\|_0^2 ds. \\ \|u_n(t)\|_0^2 - \|u_n(0)\|_0^2 + \int_0^t \|u_n(s)\|_1^2 ds &\leq c^2 \int_0^t \|f(s)\|_0^2 ds. \end{aligned}$$

Par l'orthogonalité de w_1, \dots, w_n dans $L^2(\Omega)$, Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \|u_n(t)\|_0^2 + \int_0^t \|u_n(s)\|_1^2 ds &\leq \|G_n\|_0^2 + c^2 \int_0^t \|f(s)\|_0^2 ds \quad (2.9) \\ &\leq \|g\|_0^2 + c^2 \int_0^t \|f(s)\|_0^2 ds \end{aligned}$$

lequel est(2.7). □

Nous donnons maintenant une estimation de la norme de \dot{u} dans $L^2(0, T; V^*)$.

Théorème 2.1.2. (*Estimation de \dot{u}_n*)

L'estimation suivante tient :

$$\int_0^T \|\dot{u}_n(t)\|_*^2 dt \leq 2\|g\|_0^2 + 4c^2 \int_0^T \|f(t)\|_0^2 dt. \quad (2.10)$$

Démonstration. on a $v \in V$ on pose $v = w + z$ alors $w \in V_n$ et $z \in V_n^\perp$.

nous avons $\|w\|_1 \leq \|v\|_1$ on pose $v = w$ dans le problème (2.4) ; ce rendement

$$(\dot{u}_n(t), v)_0 = (\dot{u}_n(t), w)_0 = -a(u_n(t), w) + (f(t), w)_0.$$

Depuis

$$|a(u_n(t), w)| \leq \|u_n(t)\|_1 \|w\|_1.$$

Nous inférons, en utilisant les inégalités de Schwarz et de Poincaré,

$$\begin{aligned} |(\dot{u}_n(t), w)_0| &\leq \|u_n(t)\|_1 \|w\|_1 + \|f(t)\|_0 \|w\|_1 \\ &\leq \{\|u_n(t)\|_1 + c\|f(t)\|_0\} \|w\|_1 \\ &\leq \{\|u_n(t)\|_1 + c\|f(t)\|_0\} \|v\|_1 \end{aligned}$$

Alors, par la définition de la norme en V^* , on peut écrire

$$\|\dot{u}_n(t)\|_* \leq \|u_n(t)\|_1 + c\|f(t)\|_0.$$

Equiper les deux côtés et intégrer plus de $(0, t)$ nous obtenons

$$\int_0^t \|\dot{u}_n(s)\|_* ds \leq 2 \int_0^t \|u_n(s)\|_1 ds + 2c^2 \int_0^t \|f(s)\|_0 ds.$$

En utilisant (2.7) pour estimer $2 \int_0^t \|u_n(s)\|_1 ds$, nous obtenons facilement (2.8). \square

Etape 3: Passage à la limite

Nous appelons u_n une approximation de Galerkin de la solution u .

Nous montrons que $\{u_n\}$ et $\{\dot{u}_n\}$ sont bornés dans $L^2([0, T]; V)$ et $L^2([0, T]; V^*)$ respectivement .

Alors, le théorème (2.1.2) de compacité faible implique une sous-suite $\{u_{m_k}\}$ converge faiblement dans $L^2([0, T]; V)$ vers un élément u , alors que $\{\dot{u}_{m_k}\}$ converge faiblement dans $L^2([0, T]; V^*)$ à \dot{u} .

Théorèmes 2.1.1 et 2.1.2 montrent que la suite des approximations de Galerkin $\{u_n\}$ est borné dans $L^\infty([0, T]; V)$, donc dans $L^2([0, T]; V)$, tandis que $\{\dot{u}_n\}$ est borné dans $L^2([0, T]; V^*)$. Nous utilisons maintenant le théorème de compacité (2.1.2) et déduisons qu'il existe un sous suite, pour simplifier, désignons toujours par $\{u_n\}$, tel que comme $n \rightarrow \infty$,

$$u_n \rightarrow u \quad \text{faiblement dans } L^2([0, T]; V),$$

et

$$\dot{u}_n \rightarrow \dot{u} \quad \text{faiblement dans } L^2([0, T]; V^*).$$

Cette u est la solution unique du problème (2.1). Précisément :

Théorème 2.1.3. .

Soit $f \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))$ et $g \in L^2(\Omega)$, alors, u est la solution unique du problème (2.1), de plus

$$\|u(t)\|_0^2 + \int_0^t \|u(s)\|_1^2 ds \leq \|g\|_0^2 + 2c^2 \int_0^t \|f(s)\|_0^2 ds, \quad (2.11)$$

pour tout $t \in [0, T]$, et

$$\int_0^t \|\dot{u}(s)\|_1^2 ds \leq 2\|g\|_0^2 + 4c^2 \int_0^t \|f(s)\|_0^2 ds. \quad (2.12)$$

Démonstration. (L'existence)

Dire que $u_n \rightharpoonup u$, faiblement dans $L^2([0, T]; V)$ comme $n \rightarrow +\infty$, signifie que

$$\int_0^T (\nabla u_n(t), \nabla v(t))_0 dt \rightarrow \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v(t))_0 dt,$$

pour tout $v \in L^2([0, T]; V)$. De même, $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}$, faiblement dans $L^2([0, T]; V^*)$, signifie que

$$\int_0^T (\dot{u}_n(t), v(t))_0 dt = \int_0^T \langle \dot{u}_n(t), v(t) \rangle_* dt \rightarrow \int_0^T \langle \dot{u}(t), v(t) \rangle_* dt,$$

pour tout $v \in L^2([0, T]; V)$. □

Nous voulons utiliser ces propriétés pour passer à la limite comme $n \rightarrow +\infty$ dans le problème (2.4), en gardant à l'esprit que les fonctions de test doivent être choisies dans V_n .

Fix $V \in L^2([0, T]; V)$; Nous pouvons écrire .

$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)w_k$ avec la lasrie convergent dans V , for a.e. $t \in [0, T]$, on a

$v_N(t) = \sum_{k=1}^N b_k(t)w_k$ Et conservez N fixe, pour le moment. Si $n \geq N$, alors $v_N \in L^2([0, T]; V_n)$.

Multiplication Equation (2.4) par $b_k(t)$ et fait la somme pour $k = 1, \dots, N$, on a

$$(\dot{u}_n(t), v_N(t))_0 + (\nabla u_n(t), \nabla v_N(t))_0 = (f(t), v_N(t))_0.$$

on integrer entre $(0, T)$ qui donne

$$\int_0^T \{(\dot{u}_n, v_N)_0 + (\nabla u_n, \nabla v_N)_0\} dt = \int_0^T (f, v_N)_0 dt. \quad (2.13)$$

Grâce à la convergence faible des u_n et \dot{u}_n dans leurs espaces respectifs, nous pouvons $n \rightarrow +\infty$. Depuis

$$\int_0^T (\dot{u}_n, v_N)_0 dt = \int_0^T \langle \dot{u}_n, v_N \rangle_* dt \rightarrow \int_0^T \langle \dot{u}, v_N \rangle_* dt.$$

On obtient

$$\int_0^T \{ \langle \dot{u}, v_N \rangle_* + (\nabla u, \nabla v_N)_0 \} dt = \int_0^T (f, v_N)_0 dt.$$

Maintenant, laisser $N \rightarrow +\infty$ en observantt $v_N \rightarrow v$ in $L^2([0, T]; V)$ et en particulier faiblement aussi dans cet espace . On obtient

$$\int_0^T \{ \langle \dot{u}, v \rangle_* + (\nabla u, \nabla v)_0 \} dt = \int_0^T (f, v)_0 dt. \quad (2.14)$$

Alors, (2.14) est valide pour tout $v \in L^2([0, T]; V)$. Cela implique

$$\langle \dot{u}(t), v \rangle_* + (\nabla u(t), \nabla v)_0 = (f(t), v)_0,$$

pour tout $v \in V$ et $t \in [0, T]$. Donc u satisfait

$$\langle \dot{u}(t), v \rangle_* + a(u(t), v) = (f(t), v)_0 \quad a.e. t \in [0, T] \quad (2.15)$$

D'après le théorème (1.1.1), nous savons que $u \in C([0, T]; H)$.

Il reste à vérifier que $u(t)$ satisfait la condition initiale $u(0) = g$.

On pose que $v \in C^1([0, T]; V)$ avec $v(T) = 0$. L'intégration par parties (voir Théorème 1.2, b)), nous obtenir

$$\int_0^T (\dot{u}_n, v_N)_0 dt = (G_n, v_N(0))_0 - \int_0^T (u_n, \dot{v}_N)_0 dt.$$

De sorte que, de (2.13) nous trouvons

$$- \int_0^T \{(u_n, \dot{v}_N)_0 + (\nabla u_n, \nabla v_N)_0\} dt = -(G_n, v_N(0))_0 + \int_0^T (f, v_N)_0 dt.$$

Laissez d'abord $n \rightarrow +\infty$ et alors $N \rightarrow +\infty$ on a

$$- \int_0^T \{(u, \dot{v})_0 + (\nabla u, \nabla v)_0\} dt = -(g, v(0))_0 + \int_0^T (f, v)_0 dt. \quad (2.16)$$

D'autre part, l'intégration par parties dans la formule (2.12) (voir le théorème 1.2, b)) nous trouvons

$$- \int_0^T \{(u, \dot{v})_0 + (\nabla u, \nabla v)_0\} dt = -(u(0), v(0))_0 + \int_0^T (f, v)_0 dt. \quad (2.17)$$

En soustrayant (2.16) de (2.17), on en déduit

$$(u(0), v(0))_0 = (g, v(0))_0.$$

Et l'arbitraire de $v(0)$ forces $u(0) = g$.

2.2 L'unicité de la solution

Soit u_1 et u_2 des solutions faibles du même problème. Alors, $w = u_1 - u_2$ est une solution faible de

$$\langle \dot{w}(t), v \rangle_* + (\nabla w(t), \nabla v)_0 = 0,$$

pour tout $v \in V$ et $t \in [0, T]$, avec les données initiales $w(0) = 0$. Choisissons $v = w(t)$ on a

$$\langle \dot{w}(t), w(t) \rangle_* + (\nabla w(t), \nabla w(t))_0 = 0,$$

ou

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_0^2 = -\|w(t)\|_1^2,$$

d'où, depuis $\|w(0)\|_0^2 = 0$

$$\|w(t)\|_0^2 = - \int_0^t \|w(s)\|_1^2 ds \leq 0,$$

qui implique $w(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Cela donne l'unicité de la solution faible.

Chapitre 3

Application 2

Nous appliquons la methode de **Faedo-Galerkin** pour prouver l'existence de proplème non linéaire de mécanique quantique oscillant avec le facteur d'amortissement .

dans ce chapitre nous considérons la problème

$$(P_2) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + |u|^\rho u = f \\ u(x, 0) = u_0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1, x \in \Omega & (\text{condition initiale}) \\ u = 0 \text{ sur } \Sigma & (\text{condition aux limite}) \end{cases}$$

3.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ assez régulier.

Soit le cylindre Q de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ telle que :

$$Q = \Omega \times]0, T[\text{ et } \Sigma = \Gamma \times]0, T[,$$

ou Σ est la frontière latérale de Q .

On cherche une fonction $u = u(x, t)$ solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + |u|^\rho u = f \\ u(x, 0) = u_0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1, x \in \Omega & (\text{condition initiale}) \\ u = 0 \text{ sur } \Sigma & (\text{condition aux limite}) \end{cases} \quad (3.1)$$

tel que ε est nombre strictement positif.

Ce problème aux dérivée partielle hyporbolique non linéaire qui intervient en mécanique quantique relativisté.

$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}$ représente le terme d'amortissement.

3.1.1 Introduire l'espace

On définit l'espace V comme suit : $V = H_0^1 \cap L^p(\Omega)$ tel que $p = \rho + 2$,il est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_V = \|u\|_{H_0^1} + \|u\|_{L^p}$$

V est un espace séparable puisque l'espace s'identifie par l'application $v \longrightarrow (v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n})$ à un sous-espace vectoriel fermé de l'espace $L^p(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \dots \times L^2(\Omega)$ et $L^p(\Omega)$ est un espace séparable pour $1 \leq p < \infty$ et $\prod L^{p_i}$ séparable et uniformément convexe donc on peut projeter un ensemble dénombrable dense sur les sous-espaces.

$\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans V , et on définit l'espace dual de V par :

$$V' = (H_0^1(\Omega))' + (L^p(\Omega))' = H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega).$$

Si $v \in V'$ $v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + g$ tel que $v_i \in L^2(\Omega)$, et $g \in L^{p'}(\Omega)$.

Si $\rho > 0$ alors $p > 2$ d'après le théorème de prolongement de Sobolev

$H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ ou $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{n-2}{2n}$ et $n \geq 3$.

Si $p < q$ alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ donc $\rho + 2 < \frac{2n}{n-2}$ (i.e. $p < \frac{4}{n-2}$).

Dans ce cas V et $H_0^1(\Omega)$ sont identiques. En remarquant que :

$$H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)$$

où $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$ et $L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega))$ est le dual de $L^1([0, T], H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega))$.

Remarque 3.1.1. .

Pour $\varepsilon < 0$ le problème (3.1) devient un problème de forçement qui intervient aussi en physique où on le peut étudier dans le même espace $V = H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, dans ce cas un terme $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}$ représente le terme de forçement.

3.2 Existence de la solution du problème (P_2)

Théorème 3.2.1. .

Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et f, u_0, u_1 des fonctions données telles que :

$$f \in L^2(Q). \tag{3.2}$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \quad p = \rho + 2, \rho > 0. \tag{3.3}$$

$$u_1 \in L^2(\Omega). \tag{3.4}$$

Alors il existe une fonction u vérifiant :

$$u \in L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)). \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)). \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + |u|^\rho u = f \text{ dans } Q. \tag{3.7}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \Omega. \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad x \in \Omega. \tag{3.9}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (3.10)$$

$$Q = \Omega \times]0, T[\text{ et } \varepsilon > 0.$$

Remarque 3.2.1. .

On va vérifier que les conditions initiales et les conditions aux limites ont un sens.

On a

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &\in L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)). \end{aligned}$$

D'après le lemme (1.1.1) on prend :

$$X = L^2(\Omega) \text{ et } p > 2 \text{ on obtient :}$$

$$L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ alors } u \in L^\infty([0, T], L^2(\Omega)),$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)),$$

et u continue de $[0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ de sorte que (3.5) a un sens.

Par contre :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)),$$

et

$$H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega))' = H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega).$$

L'équation (3.4) équivalent au :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + |u|^\rho u + f,$$

et comme

$$\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1, H^{-1}),$$

alors

$$\Delta u \in L^\infty([0, T], H^{-1}(\Omega)),$$

$\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$: désigne l'espace des applications linéaires continues de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Ainsi :

$$f \mapsto |f|^\rho f \text{ applique } L^p(\Omega) \rightarrow L^{p'}(\Omega) \text{ alors :}$$

$$|u|^\rho u \in L^\infty([0, T], L^{p'}(\Omega))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2([0, T], L^2(\Omega)) + L^\infty([0, T], H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)).$$

En particulier :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2([0, T], H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)).$$

D'après le lemme (1.1.1), on prend $X = H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)$ il vient : $\frac{\partial u}{\partial t}$ est continue de

$$[0, T] \longrightarrow H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega),$$

de sorte que (3.6) a un sens.

Démonstration. (du théorème) La preuve du théorème est donnée en trois étapes : tout d'abord on va construire des solutions approchées en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin, ensuite on établit une estimation à priori sur ces solutions approchées u_μ enfin on va passer à la limite dans le problème approché afin d'obtenir une solution de notre problème et ceci par la propriété de la compacité pour le terme non linéaire. \square

Etape 1: Solutions approchées

On construit d'abord une suite de fonctions, solutions du problème posé en dimension finie.

Soit l'espace vectoriel $V = H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, on considère les sous-espaces vectoriel de dimension finie $V_m \subset V$.

Soit $w_1, w_2, \dots, w_m \dots$ une suite de V , tel que pour tout m, w_1, w_2, \dots, w_m sont linéairement indépendants, et que V_m désignant l'espace finie engendré par

$w_1, w_2, \dots, w_m, w_i \forall i V_m$ est un sous-espace vectoriel de V de dimension

$m (V_m \subset V)$, on peut choisir une base (w_1, w_2, \dots, w_m) de V_m

V est séparable donc admet une base (w_1, w_2, \dots, w_m) .

Les combinaisons linéaires finies de w_i sont denses dans V , i.e : V_m dense dans V (la suite V_m dense dans V) et $V_m \subset V_{m+1}, \bigcup V_m = V$

On cherche $u_m = u_m(t)$ solution approchée $u_m \in V_m$ tel que :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i.$$

Les g_{im} sont donc les coordonnées de u_m dans cette base.

Pour simplifier l'écriture on pose : $v' = \frac{\partial v}{\partial t}, v'' = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \dots etc$.

On cherche une fonction $u_m : \Omega \times]0, T_m[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $0 \leq T_m \leq T$ où :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \in V_m.$$

Les g_{im} sont des fonctions par rapport à la variable t définies sur l'intervalle $]0, t_m[$ étant à déterminer par les conditions :

$$\begin{cases} (u_m'', w_j) + a(u_m(t), w_j) + \varepsilon(u_m', w_j) + (|u|^\rho u_m, w_j) = (f(t), w_j) \\ g_{im}(0) = \alpha_{im} \\ g'_{im}(0) = \beta_{im} \\ 1 \leq j \leq m \end{cases} \quad (3.11)$$

où

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \quad (3.12)$$

Les α_{im}, β_{im} étant choisir de manière que :

$$u_m(0) = u_{0m} = \sum_{i=1}^m \alpha_{im} w_i \longrightarrow u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \quad (3.13)$$

$$u_m'(0) = u_{1m} = \sum_{i=1}^m \beta_{im} w_i \longrightarrow u_1 \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (3.14)$$

Et ceci quand m tend vers l'infinie. $\alpha_{im} = (\alpha_{1m}, \dots, \alpha_{mm}), \beta_{1m} = (\beta_{1m}, \dots, \beta_{mm})$.
Le système (3.11) d'équation différentielle ordinaire non linéaire et compléter par les conditions unitiales (3.13) (3.14).

Pour tout m w_1, \dots, w_1 sont linéairement indépendants donc $\det(w_i, w_j) \neq 0$, ce qui implique que le système composé admet une solution locale pour tout $t \in [0, t_m] \subseteq [0, T]$

Etape 2: Estimation à priori

Dans cette etape on va montrer que $t_n = T$.

En multipliant (3.11) d'indice j par $g'_{im}(t)$ et l'on somme en j il vient :

$$\begin{aligned} (u_m'', u_m') + a(u_m(t), u_m'(t)) + \varepsilon(u_m', u_m'(t)) + (|u|^\rho u_m, u_m'(t)) \\ = (f(t), u_m'(t)) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} (u_m'', u_m') &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_m', u_m') = \frac{1}{2} |u_m'(t)|^2 \\ & \quad (u_m', u_m') = \|u_m'(t)\|_{L^2}^2 \\ a(u_m, u_m') &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (a(u_m', u_m)) = \frac{1}{2} \|u_m(t)\|^2 \\ & \quad \int_{\Omega} |u_m(t)|^\rho u_m(t) u_m'(t) dx \\ &= \int_{\Omega} |u_m(t)|^{\rho-1} \frac{u_m(t)}{|u_m(t)|} u_m'(t) dx \\ &= \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(t)|^p dx \end{aligned}$$

on a :

$$|u_m(t)|^\rho u_m(t) \in L^{p'}(\Omega).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-schwartz on obtient :

$$\| |u_m(t)|^\rho u_m(t) \|_{L^{p'}(\omega)}^{p'} = \int_{\Omega} |u_m(t)|^{\rho p' + p'} dx = \int_{\Omega} |u_m(x, t)|_{L^p(\omega)}^p,$$

où

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

($p = pp' - p' \implies \rho p' + p' = (p - 2)p' + p' = pp' - p'$ donc $\rho p' + p' = p$)
 posons $\|u\| = \sqrt{a(u, u)}$ (=norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente) $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2) + \varepsilon |u'_m(t)|_{L^2}^2 + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(x, t)|^p dx \\ = (f(t), u'_m(t)), \end{aligned} \quad (3.16)$$

on intègre entre 0 et t on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2) + \frac{1}{p} \|u_m(t)\|_{L^p}^p + \varepsilon \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 d\sigma = \\ \frac{1}{2} (|u'_m(0)|^2 + \|u_m(0)\|^2) + \frac{1}{p} \|u_m(0)\|_{L^p}^p + \int_0^t |f(\sigma) u'_m(\sigma)| d\sigma. \end{aligned}$$

D'après (3.13) (3.14) on obtient :

$$\frac{1}{2} (|u'_m(0)|^2 + \|u_m(0)\|^2) - \frac{1}{p} \|u_m(0)\|_{L^p}^p = \frac{1}{2} (|u'_{1m}|^2 + \|u_{0m}\|^2) + \frac{1}{p} \|u_m(0)\|_{L^p}^p.$$

Alors :

$$\frac{1}{2} (|u'_{1m}|^2 + \|u_m(0)\|^2) + \frac{1}{p} \|u_m(0)\|_{L^p}^p \leq C_1.$$

On applique¹ on trouve :

$$\int_0^t |f(\sigma)| |u'_m(\sigma)| d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_0^t |f(\sigma)|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 d\sigma \quad (3.17)$$

$$\int_0^t |f(\sigma)|^2 d\sigma \leq C_2 \text{ car } f \in L^2(Q)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2) + \frac{1}{p} \|u_m(t)\|_{L^p}^p + \varepsilon \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 d\sigma \\ \leq C_3 + \frac{1}{2} \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 d\sigma, \end{aligned} \quad (3.18)$$

où

$$C_3 = C_1 + \frac{1}{2} C_2,$$

1. $|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$

donc

$$\frac{1}{2}(|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2) + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|_{L^p}^p \leq C_3 + \frac{1-2\varepsilon}{2} \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 d\sigma. \quad (3.19)$$

On peut écrire :

$$|u'_m(t)|^2 \leq C_4 + (1-2\varepsilon) \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 d\sigma. \quad (3.20)$$

Si $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.On applique le lemme de Gronwall il vient :

$$|u'_m(t)|^2 \leq C_4 e^{(1-2\varepsilon)t} \leq C_5, \quad t \in [0, T_n],$$

et si $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$, alors :

$$|u'_m(t)|^2 \leq C_4 + \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 d\sigma.$$

Autre fois on applique le lemme de Gronwall, on obtient :

$$|u'_m(t)|^2 \leq C_4 e^t \leq C_6 \quad t \in [0, T_n].$$

On déduit que :

$$|u'_m(t)| \leq C \text{ ou } C > 0 \text{ est un constant independant de } m \\ \text{pour tout } t \in [0, t_m], \quad (3.21)$$

d'après (3.15) (3.16) que :

$$\|u_m(t)\| + \|u_m(t)\| \leq C, \quad (3.22)$$

où $C > 0$ est un constant indépendant de m pour tout $t \in [0, t_m]$ Enfin on arrive au résultat désiré que $t_m = T$

lorsque $m \rightarrow +\infty$ et u_m demeure dans un borné de $L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega))$ et u'_m demeure dans un borné de $L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$

Etape 3: Passage à la limite

1- La convergence faible

on a u_m bornée dans $L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega))$ donc elle est bornée dans $L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega))$,

mais

$$L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \sim (L^1([0, T], H^{-1} + L^{p'}(\Omega)))',$$

et comme $L^1([0, T], H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega))$ et d'après le théorème (1.5.10) on trouve :

alors il existe une sous-suite extraite u_μ tel que :

$$u_\mu \rightarrow u \text{ dans } L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)),$$

c'est à dire :

$$\int_0^T \langle u_\mu(t), \varphi \rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle u, \varphi \rangle dt \forall \varphi \in L^1([0, T], H^{-1} + L^{p'}(\Omega)),$$

les injections :

$$H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega),$$

et

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

sont continués, alors :

$$\begin{aligned} u_\mu &\longrightarrow u \text{ dans } L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \text{ faible*} \\ u_\mu &\longrightarrow u \text{ dans } L^2([0, T], H_0^1(\Omega)) \text{ faible} \end{aligned}$$

donc u_μ bornée dans $L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$,

et

$$L^\infty([0, T], L^2(\Omega)) \sim (L^1([0, T], L^2(\Omega)))'$$

$L^2(\Omega)$ est réflexif et séparable, $L^1([0, T], L^2(\Omega))$ est séparable, et d'après le théorème (1.3.3) ,

il existe une sous-suite u'_μ de u'_m tel que :

$$u'_\mu \longleftarrow u' \text{ dans } D'(0, T, H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)),$$

c'est à dire :

$$\int_0^T \langle u'_\mu(t), \varphi \rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle u', \varphi \rangle dt \forall \varphi \in L^1([0, T], L^2(\Omega)).$$

Alors :

$$\begin{aligned} u'_\mu &\longrightarrow u' \text{ dans } L^\infty([0, T], H_0^1 \cap L^2(\Omega)) \text{ faible*} \\ u'_\mu &\longrightarrow u' \text{ dans } L^2([0, T], H_0^1 \cap L^2(\Omega)) \text{ faible,} \end{aligned}$$

par l'injection continue.

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \text{ faible*} \quad (3.23)$$

$$u'_\mu \longrightarrow u' \text{ dans } L^2([0, T], L^2(\Omega)) \text{ faible.} \quad (3.24)$$

2- La convergence forte

u_m borné dans $L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega))$ on va démontré que

u_m est borné dans $L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$.

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(\Omega) \cap L^\rho(\Omega) \\ \|u_m\|_{L^\infty([0, T], V)} &= \sup_{[0, T]} \|u\|_V < \infty \\ V \hookrightarrow H_0^1 &\implies \|u_m\|_{H_0^1} \leq K \|u_m\|_V, K > 0 \\ \int_0^T \|u_m\|_{H_0^1}^2 dt &\leq K^2 \int_0^T \|u_m\|_V^2 dt \\ &\leq K^2 \int_0^T M^2 dt = (KM)^2 T < \infty. \end{aligned}$$

Alors u_m est borné dans $L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$, et u'_m est borné dans $L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$

$$\|u'_m\|_{L^2(\Omega)} dt = K' \int_0^T \|u_m\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Donc u'_m est borné dans $L^2([0, T], L^2(\Omega))$

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u_m\|_{L^2(\Omega)} dt &= \int_0^T \left[\int_\Omega |u|^2 dx \right] dt \quad (Fubini) \\ &= \int_0^T \int_\Omega |u|^2 dx dt = \int_0^T \int_\Omega |u|^2 dx dt \\ &= \int_Q |u|^2 dx dt \\ &= \|u_m\|_{L^2(Q)}^2 \end{aligned}$$

car

$$Q = \Omega \times]0, T[$$

u_m et u'_m demeurent borné dans $L^2(Q)$.

Aussi u_m demeure borné dans $H^1(Q)$ et on sait que l'injection $: H^1(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$ est compacte.

Donc la convergence faible de la suite u_μ extraite de u_m dans $H^1(Q)$ est forte dans $L^2(Q)$ presque par tout.

Alors

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^2([0, T], H_0^1(\Omega) \cap L^\rho(\Omega)) \text{ fort p.p} \quad (3.25)$$

$$u'_\mu \longrightarrow u' \text{ dans } L^2([0, T], L^2(\Omega)) \text{ faible p.p} \quad (3.26)$$

3- Le terme non linéaire

On va étudier la convergence de $:|u_m|^\rho u_m$.

On a :

$$\| |u_m|^\rho u_m \|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} = \int_\Omega |u_m|^{\rho p' + p'} dx = \int_\Omega |u_m(x, t)|^p dx \leq C_p,$$

ou :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \text{ et } p = \rho + 2,$$

alors :

$|u_m|^\rho u_m$ demeure dans un borné de $L^\infty([0, T], L^{p'}(\Omega))$,

ce qui implique qu'il existe une sous-suite $|u_\mu|^\rho u_\mu$ de $|u_m|^\rho u_m$ tel que :

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \longrightarrow \omega \text{ dans } L^\infty([0, T], L^{p'}(\Omega)) \text{ faible}^*. \quad (3.27)$$

On va maintenant montrer que :

$$w = |u_\mu|^\rho u_\mu. \quad (3.28)$$

En effet, on applique le lemme (1.1.2) avec :

$$O = Q, g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu \text{ et } q = p',$$

et d'après (3.25) ,(3.26) on obtient :

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^2(Q) \text{ p.p.},$$

et :

$$|u_m|^\rho u_m \longrightarrow \omega \text{ dans } L^\infty([0, T], L^{p'}(\Omega)) \text{ faible}^*,$$

donc

$$g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu \longrightarrow |u|^\rho u = g \text{ p.p dans } L^{p'}(\Omega),$$

et comme :

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \longrightarrow \omega \text{ dans } L^\infty([0, T], L^{p'}(\Omega)),$$

et la limite est unique, alors :

$$g = |u|^\rho u = \omega.$$

Ce qui implique :

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \longrightarrow |u|^\rho u = g \text{ dans } L^\infty([0, T], L^{p'}(\Omega)) \text{ faible}.$$

On va démontrer maintenant que la solution approchée u_μ verifie (3.7) , on a :

$$(u_m'', w_j) + a(u_m(t), w_j) + \varepsilon(u_m', w_j) + (|u|^\rho u_m, w_j) = (f(t), w_j).$$

Soit j fixé $\mu > j$ et $m = \mu$ alors la dernière expression sera :

$$(u_\mu'', w_j) + a(u_\mu(t), w_j) + \varepsilon(u_\mu', w_j) + (|u|^\rho u_\mu, w_j) = (f(t), w_j), \quad (3.29)$$

mais :

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^2([0, T], H_0^1 \cap L^\rho(\Omega)) \text{ faible}^*$$

$L^\infty(0, T) = (L^1(0, T))'$ et $L^1(0, T)$ est séparable alors :

$$a(u_\mu, w_j) \longrightarrow a(u, w_j) \text{ dans } L^\infty(0, T) \text{ faible}^*$$

$$(u'_\mu, w_j) \longrightarrow (u', w_j) \text{ dans } L^\infty(0, T) \text{ faible*}$$

et donc :

$$\left(\frac{d^2 u_\mu}{dt^2}, w_j\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{du_\mu}{dt}, w_j\right) \longrightarrow \left(\frac{du}{dt}, w_j\right) \text{ dans } \mathfrak{D}'(0, T),$$

et d'après (3.27),(3.28) on trouve :

$$(|u_\mu|^\rho u_\mu, w_j) \longrightarrow (|u|^\rho u, w_j) \text{ dans } L^\infty(0, T) \text{ faible*} .$$

On déduit alors que :

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, w_j) + a(u, w_j) + \varepsilon \frac{d}{dt}(u, w_j) + (|u_\mu|^\rho u_\mu, w_j) = (f, w_j),$$

et cela pour j fixé, mais comme la base $\{w_j\}$ est dense dans l'espace séparable $H_0^1 \cap L^p(\Omega)$ alors on a :

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, v) + a(u, v) + (|u_\mu|^\rho u_\mu, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1 \cap L^p(\Omega).$$

D'où résulte que la solution u satisfait (3.5), (3.6) , (3.7) .

Il reste à montrer les conditions uniales (3.8) et (3.9) , en effet on a :

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^\infty([0, T], H_0^1 \cap L^p(\Omega)) \text{ faible*}$$

$$u'_\mu \longrightarrow u' \text{ dans } L^2([0, T], L^2(\Omega))$$

$$u'_\mu \longrightarrow u' \text{ dans } L^\infty([0, T], L^2(\Omega)) \text{ faible*}$$

D'après le lemme (1.1.1) alors u_μ est continue sur $[0, T]$ donc continue en 0 et :

$$u_\mu(0) \longrightarrow u(0) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

et d'après (3.13) alors :

$$u_\mu(0) \longrightarrow u(0) = u_0 \text{ dans } H_0^1 \cap L^p(\Omega)$$

3.3 L'unicité de la solution

Théorème 3.3.1. .

On se place les hypothèses du théorème (3.2.1) avec $\rho \leq \frac{2}{n-2}$ alors la solution est unique.

Démonstration. Supposons que le problème admet deux solutions u et v alors on a :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \varepsilon u' + |u|^\rho u = f \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1 \end{cases} \quad \begin{cases} v'' - \Delta v + \varepsilon v' + |v|^\rho v = f \\ v(0) = v_0, v'(0) = v_1 \end{cases}$$

si on pose : $w = u - v$ alors w vérifie :

$$\begin{cases} w'' - \Delta w + \varepsilon w' + (|u|^\rho u - |v|^\rho v) = 0 \\ w(0) = 0, w'(0) = 0 \\ w \in L^\infty([0, T], H_0^1 \cap L^P(\Omega)) \\ w' \in L^\infty([0, T], L^2(\Omega)) \end{cases}$$

on va démontrer que $w = 0$ sur $[0, T]$.

Pour $v \in H_0^1(\Omega)$ on a : $(w'', v) + a(w, v) + \varepsilon(w', v) = (|v|^\rho v - |u|^\rho u)$,
mais $w' \in L^2(\Omega)$ dans ce cas on considère $0 < s < T$ et une fonction $Z(t)$ définie par :

$$Z(t) = \begin{cases} - \int_t^s w(\xi) d\xi & \text{si } t \leq s \\ 0 & \text{si } t \geq s \end{cases}$$

et $w_1(t) = \int_0^t w(\xi) d\xi \forall t > s$

$$w_1(t) - w_1(s) = \int_0^t w(\xi) d\xi - \int_0^s w(\xi) d\xi = - \int_t^s w(\xi) d\xi = Z(t)$$

donc $Z(t) = w_1(t) - w_1(s)$ ou $t \leq s$

$$\begin{aligned} Z(s) &= w_1(s) - w_1(s) = 0 \implies Z(s) = 0 \\ Z'(t) &= w_1'(t) = w(t) - w(0), \end{aligned}$$

on a : $w(0) = 0 \implies Z'(t) = w(t)$, $Z(0) = w_1(0) - w_1(s) = -w_1(s)$ alors :

$$\begin{cases} Z(t) = w_1(t) - w_1(s) = -w_1(s) \\ Z(0) = w_1(s) \\ Z(s) = 0 \\ Z'(t) = w(t) \end{cases}$$

$w \in L^\infty([0, T], H_0^1 \cap L^P(\Omega))$, $w' \in L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$

$$(w'', Z) + a(w, Z) + \varepsilon(w', Z) + (|u|^\rho u - |v|^\rho v, Z) = 0,$$

On intègre entre 0 et s :

$$\int_0^s (w'', Z) dt + \int_0^s a(w, Z) dt + \varepsilon \int_0^s (w', Z) dt + \int_0^s (|u|^\rho u - |v|^\rho v, Z) dt = 0$$

$$\int_0^s (w'', Z) dt = -\frac{1}{2}|w(s)|^2, \int_0^s a(w, Z) dt = -\frac{1}{2}\|w_1(s)\|^2, \int_0^s (w', Z) dt = - \int_0^s |w(t)|^2 dt,$$

car $Z(0) = w_1(0) - w_1(s) = -w_1(s)$

$$-\frac{1}{2}|w(s)|^2 - \varepsilon \int_0^s |w(t)|^2 dt - \frac{1}{2}\|w_1(s)\|^2 = - \int_0^s (|u|^\rho u - |v|^\rho v, Z) dt. \quad (3.30)$$

Le terme non linéaire : $|\int_{\Omega} (|u|^{\rho}u - |v|^{\rho}v)Z dx| \leq \int_{\Omega} |u|^{\rho}u - |v|^{\rho}v|Z| dx$

On a : $\frac{\partial}{\partial x_n}(|u|^{\rho}u) = \rho|u|^{\rho} \frac{\partial u}{\partial x_n} + |u|^{\rho} \frac{\partial u}{\partial x_n} = (\rho + 1)|u|^{\rho} \frac{\partial u}{\partial x_n}$.

Alors d'après la formule de l'accroissement finie généralisé on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|u|^{\rho}u - |v|^{\rho}v)w' dx &\leq (\rho + 1) \int_{\Omega} \sup(|u|^{\rho}, |v|^{\rho})|u - v||w'| dx = \\ &(\rho + 1) \int_{\Omega} \sup(|u|^{\rho}, |v|^{\rho})|w||w'| dx \leq K \int_{\Omega} |u|^{\rho} + |v|^{\rho}|w||w'| dx \\ \int_{\Omega} (|u|^{\rho}u - |v|^{\rho}v)w' dx &\leq K \int_{\Omega} |u|^{\rho} + |v|^{\rho}|w||w_1(t) - w_1(s)| dt \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\|u\|_{L^{n\rho}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^{n\rho} \right)^{\frac{1}{n\rho}} = \left(\left(\int_{\Omega} \|u\|^{\rho} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{\rho}} = \| |u|^{\rho} \|_{L^n(\Omega)}^{\frac{1}{\rho}}$$

Donc $\|u\|_{L^{n\rho}(\Omega)}^{\rho} = \| |u|^{\rho} \|_{L^n(\Omega)}$

L'inégalité de Hölder nous donne :

$$\begin{aligned} K \int_{\Omega} |u|^{\rho} + |v|^{\rho}|w||w_1(t) - w_1(s)| dt &\leq K \left(\int_{\Omega} |u|^{\rho} + |v|^{\rho} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\Omega} |w|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} |w'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K \left[\left(\int_{\Omega} (|u|^{\rho})^n \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\int_{\Omega} (|v|^{\rho})^n \right)^{\frac{1}{n}} \right] \left(\int_{\Omega} |w|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} |w'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K [\| |u|^{\rho} \|_{L^n(\Omega)} + \| |v|^{\rho} \|_{L^n(\Omega)}] \cdot [\|w(t)\|_{L^q(\Omega)}] [\|w'(t)\|_{L^2(\Omega)}] \end{aligned}$$

tel que : $\frac{1}{q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = 1$, $on a : \rho \leq \frac{2}{n-2}$, $alors : \rho n \leq q$

$$|u|^{\rho}, |v|^{\rho} \in L^n(\Omega)$$

$$H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega) : \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, n \geq 3$$

$$u, v \in L^{\infty}(0, T, H_0^1(\Omega))$$

$$\|u\|_{L^n(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Alors : $\| |u|^{\rho} \|_{L^n(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } K (\| |u|^{\rho} \|_{L^n(\Omega)} + \| |v|^{\rho} \|_{L^n(\Omega)}) + \|w(t)\|_{L^q(\Omega)} + \|w'(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq K (\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\rho} + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{\rho}) + \|w(t)\|_{L^q(\Omega)} + \|w'(t)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Et comme : $u, v \in L^{\infty}([0, T], H_0^1(\Omega)), H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$,

$$\text{alors : } \int_0^s (|u|^{\rho}u - |v|^{\rho}v, Z) dt \leq K_1 \int_0^s |w(t)| (\|w_1(t) - w_1(s)\|) dt. \quad (3.32)$$

D'après (3.30) on trouve :

$$\frac{1}{2}|w(s)|^2 + \varepsilon \int_0^s |w(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\|w(s)\|^2 \leq K_1 \int_0^s |w(t)| (\|w_1(t) - w_1(s)\|) dt$$

L'inégalité de Young nous donne :

$$\begin{aligned}
& K_1 \int_0^s \|w(t)\|(\|w_1(t) + w_1(s)\|)dt \\
& \leq \lambda \frac{K_1^2}{2} \int_0^s |w(t)|^2 + \frac{1}{2\lambda} \int_0^s \|w_1(t)\|^2 dt + \lambda \frac{K_1^2}{2} \int_0^s |w(t)|^2 + \frac{1}{2\lambda} \int_0^s \|w_1(s)\|^2 dt \\
& \leq \lambda K_1^2 \int_0^s |w(t)|^2 + \frac{1}{2\lambda} \int_0^s \|w_1(t)\|^2 dt + \frac{s}{2\lambda} \|w_1(s)\|^2.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{1}{2}|w(s)|^2 + \varepsilon \int_0^s |w(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\|w(t)\|^2 \leq \lambda K_1^2 \int_0^s |w(t)|^2 + \frac{1}{2\lambda} \int_0^s \|w_1(t)\|^2 dt + \frac{s}{2\lambda} \|w_1(s)\|^2$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{2}|w(s)|^2 + (\varepsilon - \lambda K_1^2) \int_0^s \|w(t)\|^2 dt + \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2\lambda}\right) \|w_1(s)\|^2 \leq \frac{1}{2\lambda} \int_0^s \|w(t)\|^2 dt \quad ,$$

on choisit λ de façon tel que :

$$\varepsilon - \lambda K_1^2 = \frac{\varepsilon}{2} \implies \lambda = \frac{\varepsilon}{2K_1^2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{s}{2\lambda} > 0 \text{ pour } 0 \leq s \leq s_0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{s_0}{2\lambda} = \frac{1}{4} \implies s_0 = \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{On deduit que : } \frac{1}{2}|w(s)|^2 + \|w(t)\|^2 \leq \left(\frac{2K_1}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^s |w(t)|^2 dt + \|w(s)\|^2$$

$$\text{d'apres (3.2.1) on obtient : } |w(s)|^2 + \|w_1(t)\|^2 \leq C \int_0^s |w(t)|^2 dt + \|w(s)\|^2 dt,$$

$$\text{D'apres le lemme de Gronwall on a : } \|w_1(s)\| = 0 \implies -w_1(s) = 0.$$

$$\text{Donc : } Z(0) = \int_0^s \|w(\xi)\|^2 d\xi = 0.$$

D'après le théorème d'anulation :

$$w(\xi) = 0 \implies w(s) = 0.$$

Pour $s \in [0, s_0]$

Si $s_0 \geq T$. Alors $w(t) = 0$ sur $[0, T]$.

Si $s_0 < T$. Alors $w(t) \neq 0$ sur $[0, T]$.

On recommence sur $[s_0, 2s_0]$ et ainsi de suite, donc : $w(t) = 0$ sur $[0, T]$

$$w(t) = u(t) - v(t) = 0 \implies u(t) = v(t).$$

Enfin on arrive au résultat désiré, et la solution est unique.

□

conclusion

Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode de Faedo-Galerkin pour prouver l'existence et l'unicité de certains problèmes d'équations aux dérivées partielles. Cette méthode est basée sur les étapes suivantes :

1. On construit des solutions approchées par réduction à la dimension finie par la méthode de Faedo-Galerkin. Cette solution approchée dans l'espace finie muni d'une base des fonctions, en générale elle est une solution d'un système d'équations ordinaires non linéaire où on peut utiliser le théorème d'existence locale des équations différentielles ordinaires. Solution approchée est donnée par une suite pour le problème approché.
2. On établit une estimation à priori pour la solution approchée qui nous l'existence global.
3. Enfin, on passe à la limite sur la dimension grâce au lemme de compacité.

Où nous avons appliqué cette méthode pour deux problèmes : le premier inclut l'équation de la chaleur et le second est un problème hyperbolique non linéaire de mécanique quantique oscillant avec le facteur d'amortissement.

Bibliographie

- [1] A. Fortin, Les éléments finis, de la théorie à la pratique (Editions de l'Ecole Polytechnique de Montreal, 2011).
- [2] A. Kirillov et A. Gvichiani, théorèmes et problèmes d'analyse fonctionnelle Mir, 1982.
- [3] A. Quarteroni, and R. Sacco, and F. Saleri, Méthodes numériques, algorithmes, analyse et applications. Springer, Lausanne, 2007.
- [4] C. Dawson. Godunov-mixed methods for advection-diffusion equations in multi-dimensions, SIAM J. Numer. Anal., Vol.30, pp. 1915-1332, 1993.
- [5] F. Demengel et G. Demengel, Espaces fonctionnels utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles, ISBN CNRS-Edition 2007.
- [6] François DE MARÇAY, Département de Mathématiques d'Orsay Université Paris-Sud, France, Théorie de l'intégration de Lebesgue <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~merker/Enseignement/Integration/lebesgue-integrale.pdf> (18:16, 2/04/2022)
- [7] G. Allaire, Analyse numérique et optimisation (Editions de l'Ecole Polytechnique, 2005)
- [8] H. Brezis. Analyse fonctionnelle, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer (2010).
- [9] H. Brezis. Analyse fonctionnelle, théorie et application, Masson (1983).
- [10] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Masson, Paris; 1987.
- [11] <https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Boris-Grigoryevich-Galerkin.html> (14-04-2022)
- [12] J. Demailly. P, (1991), Analyse numérique et Equations différentielles, Presses universitaires de Grenoble, 1991.J.
- [13] J. Lions. L-Magenes, problèmes aux limites non homogènes et applications, volumel, Dunod Paris, 1968.
- [14] Kazarinoff, Nicholas D, Analytic inequalities, New York, Holt, Rinehart and Winston 1961.

- [15] Marc. Sage, cours ,Espaces vectoriels normés 2: continuité ,compacité ,connexité ,29 mai 2017.
- [16] R. Adams. Sobolev Spaces, New York : Academic Press (1975).
- [17] S.Lang, Analyse réelle ,Paris ,inter editions 1977 .
- [18] S. Salsa, Partial differential equations in action, from modelling to theory. Springer- Verlag Italy, Milano 2008.
- [19] T . Z . BOULMEZAOU, Espace de Sobolev avec poids pour l'équation de Laplace dans le demi-espace , C . R . Acad . Sci . Paris , t 328 , serie i 221-226 , 1999
- [20] Vincent Manet ,Méthode de éléments finis (Vulgarisation des aspects mathématiques et illustration de la méthode)

Résumé

Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode de Faedo-Galerkin pour prouver l'existence et l'unicité de certains problèmes d'équations aux dérivées partielles. Où nous avons appliqué cette méthode pour deux problèmes : le premier inclut l'équation de la chaleur et le second est un problème hyperbolique non linéaire de mécanique quantique oscillant avec le facteur d'amortissement. Cette méthode s'est avérée efficace pour résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles.

ملخص

في هذا العمل إستعملنا طريقة فايدوقالركين لإثبات الوجود و الوحدانية لبعض المسائل للمعادلات التفاضلية الجزئية .
حيث طبقنا هذه الطريقة لمسألتين : الأولى تشمل معادلة الحرارة و الثانية مسألة زائدية غير خطية للميكانيك الكوانتي مذبذبة بعامل التخماد.
و قد أثبتت هذه الطريقة نجاعتها في حل المسائل المعادلات التفاضلية الجزئية.

Summary

In this work, we used the Faedo-Galerkin method to prove the existence and uniqueness of certain partial differential equation problems. Where we applied this method for two problems : the first includes the heat equation and the second is a nonlinear hyperbolic problem of quantum mechanics oscillating with the damping factor. This method has proven effective in solving partial differential equation problems.