



République Algérienne Démocratique et Populaire



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

# MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique  
Filière: Mathématiques  
Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

## Thème

# Classe d'opérateurs dérivés des opérateurs normaux

Présenté par: Beribeche Salima et Ghobni Fatima Zohra

Soutenue devant le jury:

M: Doudi Nadjat	MAA	Université d'El-Oued	Président
M: Zaiz Khaoula	.MC(B)	Université d'El-Oued	Rapporteur
M: Guesba Messaoud	MAA.	Université d'El-Oued	Examineur

Année universitaire 2023 – 2024

---

# Remerciements

---

*Tout d'abord, nous remercions **\*Allah\***, le Très Miséricordieux, le Très Miséricordieux, qui nous a accordé la force et la volonté d'accomplir le voyage scientifique. À Lui appartiennent la louange et la gratitude pour toujours et pour toujours.*

*Nous tenons à exprimer nos remerciements à la superviseur, le **Dr. Zaïz khaoula**, pour son enthousiasme et son soutien sans faille pour bien mener à bien ce travail.*

*Nous tenons à exprimer notre gratitude à tous les membres du Collège des Sciences Exactes, en particulier au personnel et aux professeurs du Département de Mathématiques, pour leurs précieux conseils et leurs encouragements continus.*

*Enfin, nous exprimons nos profonds remerciements aux membres du jury pour avoir accepté d'évaluer et de discuter de notre travail.*

---

# Notations

---

$\mathbb{K}$	Corps des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$ .
$H$	Espace de Hilbert.
$D(T)$	Domaine de $T$
$\ker(T)$	Noyau de l'opérateur $T$ .
$\text{Im}(T)$	Image de l'opérateur $T$ .
$B(H)$	Espace des opérateurs linéaires bornés sur $H$ .
$T^{-1}$	Inverse de l'opérateur $T$ .
$T^*$	Adjoint de l'opérateur $T$ .
$\mathcal{K}(H)$	Espace des opérateurs compacts de $H$
$\rho(T)$	Ensemble résolvant.
$\sigma(T)$	Spectre d'opérateur $T$ .
$\sigma_\rho(T)$	Spectre ponctuel d'opérateur $T$ .
$\sigma_r(T)$	Spectre résiduel d'opérateur $T$ .
$\sigma_c(T)$	Spectre continu d'opérateur $T$ .
$\sigma_a(T)$	Spectre approché d'opérateur $T$ .
$r(T)$	Rayon spectral de $T$ .
$W(T)$	Image numérique de $T$ .
$w(T)$	Rayon numérique de $T$ .

---

# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>4</b>
1.1 Opérateurs linéaires bornés sur les espaces de Hilbert . . . . .	4
1.1.1 Espaces de Hilbert . . . . .	4
1.1.2 Projections orthogonales . . . . .	6
1.1.3 Opérateurs linéaires bornés . . . . .	6
1.1.4 Inverse d'un opérateur . . . . .	8
1.1.5 Adjoint d'un opérateur . . . . .	8
1.2 Quelques classes d'opérateurs . . . . .	11
1.2.1 Décomposition polaire . . . . .	13
1.2.2 Spectre d'un opérateur . . . . .	16
1.2.3 Classification de spectre . . . . .	17
1.2.4 Image numérique d'un opérateur . . . . .	18
1.3 Opérateurs normaux . . . . .	21
1.3.1 Définition et propriétés . . . . .	21
1.3.2 Théorème (Fuglede-Putnam) . . . . .	25
1.3.3 Spectre d'un opérateur normal . . . . .	25
1.3.4 Opérateurs convexoïdes . . . . .	27
<b>2 Les Opérateurs n-normaux</b>	<b>30</b>
2.1 Définitions et propriétés . . . . .	30
2.2 Comparaison entre les opérateurs normaux et les opérateurs n-normaux . . . . .	37
2.3 Théorie spectrale des opérateurs n-normaux . . . . .	40

2.4 Les opérateurs $(n,m)$ -normaux . . . . .	46
<b>3 Applications des opérateurs <math>n</math>-normaux</b>	<b>54</b>
3.1 Racine d'un opérateur normal . . . . .	54
3.1.1 Cas Matricielle . . . . .	55
3.2 Opérateur $n$ -nilpotent . . . . .	58
3.3 Cas $T$ est un opérateur 2-normal : . . . . .	59
<b>Conclusion et perspective</b>	<b>63</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>65</b>

---

# Introduction

---

En mathématiques, la théorie des opérateurs étudie les opérateurs linéaires sur l'espace des fonctions, en commençant par les opérateurs différentiels ou intégraux, le concept d'opérateur peut être abstraitement défini par ses propriétés, telles que l'opérateur linéaire borné. En général, la théorie spectrale tourne autour de la représentation des opérateurs linéaires ou des matrices sous forme diagonale.

Considérons  $H$  comme l'espace de Hilbert complexe et  $B(H)$  comme l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés définis sur l'espace de Hilbert  $H$ .

Soit  $T$  un opérateur dans linéaires bornés. On dit que l'opérateur  $T$  est normal s'il satisfait la condition suivante :  $TT^* = T^*T$ . En analyse fonctionnelle et dans de nombreuses applications mathématiques et physiques, les opérateurs normaux jouent un rôle essentiel. Ils sont indispensables pour résoudre des problèmes complexes, tant théoriques que pratiques, en raison de leur capacité à être diagonalisés et de leurs caractéristiques spectrales claires. Pour cela les chercheurs en mathématiques ont des classe des opérateurs dérivés de ce classe très important.

On dit que l'opérateur  $T$  est  $n$ -normal s'il :  $T^n T^* = T^* T^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Et  $(n,m)$ -normal si :  $T^n (T^m)^* = (T^m)^* T^n$  pour  $n, m \in \mathbb{N}$ . Cette notion est apparue pour la première fois dans [1], où, les auteurs ont donné la définition et quelques propriétés générales. Les études ont continué pour examiner les caractéristiques spectrales ainsi que d'autres propriétés, pour plus des détails voir [3, 4, 6].

L'objectif de ce travail est d'appliquer les résultats sur les opérateurs  $n$ -normaux . Nous les étudierons en trois chapitres :

Le premier chapitre : nous commencerons par définir les espaces de Hilbert et les opérateurs linéaires bornés sur cet espace, puis nous aborderons l'inverse et l'adjoint de l'opérateur, et ensuite nous mentionnerons les types d'opérateurs (adjoint, auto-adjoints, positifs, nilpotent, unitaire, compacts et isométriques) et le spectre (ponctuel, résiduel, approché, continu). Enfin, dans cette section, nous parlerons des opérateurs normaux, commençant par leur définition et leurs propriétés, puis la théorie classique et très importante dans la théorie des opérateurs limités, **Fuglede-Putnam**, et le spectre.

Le deuxième chapitre : Au cur de ce travail, nous commencerons par définir et caractériser les opérateurs  $n$ -normaux, puis les comparerons aux opérateurs normaux. Ensuite, nous aborderons la théorie du spectre, et enfin, nous examinerons les opérateurs  $(n,m)$  normaux.

Le Dernier Chapitre : Consiste en des applications. Dans la première partie, nous examinerons comment prouver qu'un opérateur est normal dans un espace de dimension finie et infinie. Dans la deuxième partie, nous montrerons comment extraire les conditions sur la matrice  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  pour qu'elle soit 2-normal, puis nous prendrons des exemples de matrices pour montrer qu'elles sont  $n$ -normaux et calculerons leur spectre en utilisant le logiciel Matlab.

---

# Notions préliminaires

---

Ce chapitre a été consacré de certains concepts fondamentaux que nous avons utilisés dans ce mémoire, tels que les opérateurs linéaires bornés et ses propriétés.

## 1.1 ) Opérateurs linéaires bornés sur les espaces de Hilbert

---

---

### 1.1.1 ) *Espaces de Hilbert*

---

**Définition 1.1.1.** (*Espace vectoriel normé*)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Une application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une norme si elle vérifie les trois propriétés suivantes

- (i)  $\forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0$ .
- (ii)  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (*homogénéité*).
- (iii)  $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (*inégalité triangulaire*).

On dit alors que,  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé.

**Définition 1.1.2.** (*Produit scalaire*)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . On appelle produit scalaire sur  $E$  toute application

$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  qui vérifie les conditions suivantes

- (i)  $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in E$ .
- (ii)  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ .
- (iii)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in E$ .

$$(iv) \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

**Définition 1.1.3. (Espace pré-hilbertiens)**

Un espace pré-hilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

- Si  $H$  est un espace vectoriel réel de dimension finie, alors  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  s'appelle espace euclidien.
- Si  $H$  est un espace vectoriel complexe de dimension finie, alors  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  s'appelle espace hermitien.

**Proposition 1.1.1. [17]**

Dans un espace pré-hilbertien  $H$ , l'application  $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{K}$  donnée par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \forall x \in H$$

est une norme sur  $H$ .

**Définition 1.1.4. (Espace de Hilbert)**

Un espace de Hilbert  $H$  est un espace pré-hilbertien complet.

**Proposition 1.1.2. [25](L'inégalité de Cauchy-Schwarz)**

Soit  $H$  espace pré-hilbertien complexe de dimension finie ou infinie muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  $x, y \in H$  on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

L'égalité est vraie si, et seulement si,  $x$  et  $y$  sont linéairement dépendant.

**Théorème 1.1.1. [17]( Identité de parallélogramme)**

On a  $H$  est un espace pré-hilbertien,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

pour tout  $x, y$  dans  $H$ , où  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ .

**Remarque 1.1.1.**

Un espace vectoriel normé est un espace pré-hilbertien si, et seulement si, sa norme vérifie l'identité du parallélogramme .

**Théorème 1.1.2. [17](Identité de polarisation)**

Soit  $H$  est un espace pré-hilbertien muni du produit scalaire, on a

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

pour tout  $x, y$  dans  $H$ .

### 1.1.2 ) Projections orthogonales

---

#### Définition 1.1.5. (Orthogonalité)

Soient  $H$  un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et  $x, y \in H$ . On dit que  $x$  et  $y$  sont orthogonaux (et on note  $x \perp y$ ) si

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

#### Définition 1.1.6. (Orthogonal d'un ensemble)

Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $A$  est une partie non vide de  $H$ . Le complément orthogonal de  $A$  (noté par  $A^\perp$ ) est défini par

$$A^\perp = \{x \in H; \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in A\}.$$

#### Théorème 1.1.3. [5] (Projection orthogonale)

Soit  $A$  un sous ensemble convexe fermé (et non vide) de  $H$ . Alors pour tout  $x \in H$ , il existe un élément unique  $y \in A$  tel que

$$\inf_{a \in A} \|x - a\| = \|x - y\|.$$

Autrement dit, il existe un point unique  $y \in A$  qui est à une distance de  $x$  la plus petite possible. Ce point  $y$  s'appelle la projection de  $x$  sur  $A$ .

#### Corollaire 1.1.1.

Soit  $F$  sous espace vectoriel fermé de  $H$ , et soit  $x \in H$ .

1. Soit  $y \in F$  tel que  $\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$ . Alors,  $x - y$  est orthogonal à  $F$ . (c-à-d orthogonal à tous les vecteurs  $z \in F$ ).
2. Réciproquement si  $y \in F$  est tel que  $(x - y) \perp F$  alors  $\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$  c-à-d  $y$  est la projection de  $x$  sur  $F$ .
3. La projection orthogonale  $P_F : H \rightarrow F$  est une contraction linéaire. (c-à-d une application linéaire telle que pour tout  $x \in H$ ,  $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$ ).

#### Notation 1.1.1.

On notera  $y = P_F(x)$  et on dira que  $y$  est la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$ .

#### Définition 1.1.7. (Base orthonormée)

Une collection  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  dans l'espace Hilbert est dite orthonormée si

$$\langle x_m, x_n \rangle = \delta_{mn} := \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

### 1.1.3 ) Opérateurs linéaires bornés

---

#### Définition 1.1.8. (Opérateur linéaire)

Soient  $H$  et  $H'$  deux espaces vectoriels. On dit opérateur linéaire de  $H$  dans  $H'$  est une application  $T : D(T) \subset H \rightarrow H'$  ( $D(T)$  est le domaine de  $T$ ) qui vérifie

1.  $T(x + y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in H.$
2.  $T(\alpha x) = \alpha T(x), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in H.$

**Définition 1.1.9. (Noyau et image d'opérateur )**

Soit  $T$  un opérateur linéaire. On définit

- Le noyau de l'opérateur  $T$  par

$$\ker(T) = \{x \in D(T), Tx = 0\}$$

et aussi noté parfois  $N(T)$ .

- Et le image de opérateur  $H$  par

$$\text{Im}(T) = \{Tx, x \in D(T)\}$$

et aussi noté parfois  $\text{Ran}(T)$ .

**Définition 1.1.10. (Commute d'opérateur)**

Soient  $T$  et  $S$  deux opérateurs. On dit que  $T$  et  $S$  commutent si  $TS = ST$  i.e,

$$(TS)x = (ST)x, \forall x \in H.$$

**Définition 1.1.11. ( La somme directe et le produit tensoriel)**

Soient  $T$  et  $S$  deux opérateurs. On définit la somme direct de  $T$  et  $S$  dénoté par  $T \oplus S$  dans l'espace  $H$

$$(T + S)(x \oplus y) = Tx \oplus Sy, \forall x, y \in H$$

et on définit le produit tensoriel de  $T$  et  $S$  dénoté par  $T \otimes S$

$$S \otimes T(x \otimes y) = S(x) \otimes T(y), \forall x, y \in H.$$

**Définition 1.1.12. (Opérateur continu)**

Soit  $T : H \rightarrow H'$  un opérateur linéaire. Alors,  $T$  est continu pour chaque point  $x$  dans  $H$ , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in H; \|x - y\|_H < \delta \Rightarrow \|Tx - Ty\|_{H'} < \epsilon.$$

**Définition 1.1.13. (Vecteur hypercyclique)**

$T$  un opérateur continu sur  $H$ .  $T$  est dit hypercyclique s'il existe  $x \in H$  tel que  $\{T^n(x), n \geq 0\}$  dense dans  $H$ .

**Définition 1.1.14. (Opérateur borné)**

Un opérateur linéaire  $T$  est dit borné, s'il transforme tout ensemble borné de  $H$  à un ensemble borné de  $H$ , c'est à dire que

$$\exists c > 0; \|Tx\| \leq c\|x\|, \forall x \in H.$$

**Théorème 1.1.4. [26]**

Un opérateur linéaire  $T$  est continu si, et seulement si, il est borné.

**Définition 1.1.15. (Norme d'un opérateur )**

$T$  est un opérateur borné, la norme de  $T$  est définie par

$$\|T\| = \inf\{c > 0, \forall x \in H, \|Tx\| \leq c\|x\|\}.$$

**Notation 1.1.2.**

$B(H)$  désigne des opérateurs linéaires et bornés.

**Proposition 1.1.3. [8]**

Pour tout opérateur borné  $T \in B(H)$  on a

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_H}{\|x\|_H} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_H = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \neq 0}} \|Tx\|_H.$$

**1.1.4 ) Inverse d'un opérateur**

---

**Définition 1.1.16. (Inversibilité)**

Soient  $E, F$  deux espace normé, et  $T \in B(H)$ . L'opérateur  $T$  est dit inversible si pour tout  $y \in F$  l'équation  $Tx = y$  admet une seule solution pour tout  $x, y \in H$ .

**Définition 1.1.17. (Opérateur inverse)**

Soit  $T \in B(H)$ , on dit que  $T$  est inversible s'il existe un opérateur  $S \in B(H)$ , tel que

$$TS = ST = I_H.$$

On note à l'inverse de  $T$  par  $T^{-1}$ .

**Théorème 1.1.5. [18]**

L'opérateur inverse  $T^{-1}$  d'un opérateur linéaire  $T$  est aussi linéaire.

**1.1.5 ) Adjoint d'un opérateur**

---

**Définition 1.1.18. (opérateur adjoint )**

Soit  $T$  opérateur dans  $B(H)$ . L'unique application linéaire  $T^*$  tel que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \forall x, y \in H.$$

L'opérateur  $T^*$  s'appelle l'adjoint de  $T$ .

**Exemple 1.1.1.**

On munit  $\mathbb{R}^2$  de la base canonique  $\{e_1, e_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$  et Soit  $T \in B(\mathbb{R}^2)$  définit par

$$T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Supposons que  $T^*$  l'adjoint de  $T$  est donné par la matrice  $B = (b_{ij})$ .

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_2y_1 + a_{21}x_1y_2 + a_{22}x_2y_2 = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2.$$

Donc,

$$b_{11} = a_{11}, b_{12} = a_{21}, b_{21} = a_{12}, b_{22} = a_{22},$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

**Proposition 1.1.4.** [11]

Soit  $T \in B(H)$ . Alors, on a

1.  $\ker(T) = (\text{Im}(T^*))^\perp$ .
2.  $\overline{\text{Im}(T)} = \ker(T^*)^\perp$ .

*Preuve.*

1. On a

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{x \in H : Tx = 0\} = \{x \in H, \forall y \in H, \langle Tx, y \rangle = 0\} \\ &= \{x \in H, \forall y \in H, \langle x, T^*y \rangle = 0\} \\ &= (\text{Im}(T^*))^\perp. \end{aligned}$$

2. D'après l'assertion 1, on a

$$\ker(T^*)^\perp = (\text{Im}(T)^\perp)^\perp = \overline{\text{Im}(T)}.$$

□

**Théorème 1.1.6.** [12]

Soit  $T \in B(H)$ , alors

- 1)  $(T^*)^* = T$ .
- 2)  $\|T^*\| = \|T\|$ .
- 3)  $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$ .

*Preuve.*

1) On a

$$\langle x, (T^*)^* y \rangle = \langle T^* x, y \rangle = \overline{\langle y, T^* x \rangle} = \overline{\langle T y, x \rangle} = \langle x, T y \rangle, \forall x, y \in H,$$

d'où  $(T^*)^* = T$ .

2) On a

$$\begin{aligned} \langle T x, T x \rangle &= \|T x\|^2 = \langle x, T^* T x \rangle \\ &\implies \|T x\|^2 \leq \|x\| \|T^*\| \|T\| \|x\| \\ &\leq \|T^*\| \|T\| \|x\|^2 \\ &\implies \frac{\|T x\|^2}{\|x\|^2} \leq \|T^*\| \|T\| \\ &\implies \|T\| \leq \|T^*\|. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \langle T^* x, T^* x \rangle &= \|T^* x\|^2 = \langle x, T T^* x \rangle \\ &\implies \|T^* x\|^2 \leq \|x\| \|T\| \|T^*\| \|x\| \\ &\leq \|T\| \|T^*\| \|x\|^2 \\ &\implies \frac{\|T^* x\|^2}{\|x\|^2} \leq \|T\| \|T^*\| \\ &\implies \|T^*\| \leq \|T\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve

$$\|T\| = \|T^*\|.$$

3) D'une part on a

$$\|T^* T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2.$$

D'autre part

$$\|T x\|^2 = \langle T x, T x \rangle = \langle T^* T x, x \rangle \leq \|T^* T x\| \|x\| \leq \|T^* T\| \|x\|^2.$$

Donc,

$$\|T\|^2 = \left( \sup_{\|x\| \leq 1} \|T x\| \right)^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T x\|^2 \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|T^* T\| \|x\|^2 = \|T^* T\|.$$

Ce qui donne

$$\|T^* T\| = \|T\|^2.$$

□

**Proposition 1.1.5.** [7]

Soient  $T$  et  $S$  deux opérateurs de  $B(H)$ . Alors,

(i).  $(\lambda T + \mu S)^* = \bar{\lambda}T^* + \bar{\mu}S^*$ , pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .

(ii).  $(TS)^* = S^*T^*$ .

(iii). Si  $T$  est inversible d'inverse  $T^*$ , alors  $T^*$  est inversible et  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .

**Définition 1.1.19.**

On dit que

- $M$  est invariant pour  $T$ , si  $Tx \in M$  pour tout  $x \in M$ .
- $M$  est réduit pour  $T$ , si  $M$  est invariant pour  $T$  et  $T^*$ .

**Proposition 1.1.6.** [15]

Soit  $T \in B(H)$ . Si  $M$  est invariant pour  $T$ , alors  $M^\perp$  est invariant pour  $T^*$ .

*Preuve.*

Soit  $x \in M$  et  $y \in M^\perp$ , on a

$\langle Tx, y \rangle = 0$  ( car  $M$  est invariant pour  $T$ ), et on a d'autre part

$0 = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$  et par conséquent  $T^*y \in M^\perp$ .

Alors,  $M^\perp$  est invariant pour  $T^*$ . □

**Exemple 1.1.2.**

i)  $M$  est invariant pour  $T$  si, et seulement si,  $T$  s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}$$

dans  $H = M \oplus M^\perp$ .

ii)  $M$  est réducteur pour  $T$  si, et seulement si,  $T$  s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$$

dans  $H = M \oplus M^\perp$ .

---

## 1.2 ) Quelques classes d'opérateurs

---

**Définition 1.2.1.**

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $T$  un opérateur linéaire borné.

$T$  s'appelle

- **Auto-adjoint** ou **hermitien**, si  $T^* = T$ .

- **Positif**, si  $\langle Tx, x \rangle \geq 0$  pour tout  $x \in H$ .
- **Compact**, si  $\langle Tx_n, x_n \rangle_H \rightarrow 0$  pour toute suite orthonormée  $x_n$  de  $H$ . c-à-d,  $\langle x, x_n \rangle_H \rightarrow 0$  alors  $\|Tx_n\|_H \rightarrow 0$ .
- **Normal**, si  $TT^* = T^*T$ .
- **Hyponormal**, si  $TT^* \leq T^*T$ .
- **Quasinormal**, si  $T(T^*T) = (T^*T)T$ .
- **Paranormal**, si  $\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\| \cdot \|x\|$ .
- **Isométrique**, si  $T^*T = I$ .
- **Isométrique partielle**, si  $\|Tx\| = \|x\|$  pour tout  $x \in (\ker T)^\perp$ .
- **Unitaire**, si  $TT^* = T^*T = I$ .
- **Projection**, si  $T^2 = T$ .
- **Projection orthogonale**, si  $T^2 = T, T = T^*$ .
- **Nilpotent**, si  $T^n = 0$ , pour un certain entier naturel  $n$ .
- **Contraction**, si  $\|T\| \leq 1$ .

**Exemple 1.2.1.**

1. L'opérateur Shift  $S$  sur  $\ell^2(\mathbb{N})$  est isométrique.
2. L'opérateur Shift  $S$  sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$  est unitaire.
3. Soit l'opérateur  $T_\varphi$  défini sur l'espace  $L^2[0,1]$

$$T_\varphi : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$$

$$f \longrightarrow T_\varphi f(x) = \varphi(x)f(x)$$

avec  $\varphi$  continue sur  $[0, 1]$  à valeur complexe.

On sait que  $(T_\varphi^* f)(x) = \overline{\varphi(x)} f(x)$  qui nous donne :

$T_\varphi$  est auto-adjoint  $\iff \varphi = \overline{\varphi}$ .

$T_\varphi$  est positif  $\iff \varphi$  est positif.

$T_\varphi$  est toujours normal.

$T_\varphi$  est unitaire  $\iff |\varphi| = 1$ .

**Remarque 1.2.1.**

On a la série des inclusions des classes d'opérateurs suivantes :

normaux  $\subset$  quasinormaux  $\subset$  hyponormaux  $\subset$  paranormaux .

**Remarque 1.2.2.**

1.  $T$  auto-adjoint  $\implies T$  normal.
2.  $T$  unitaire  $\implies T$  isométrie, normal et inversible.
3.  $T$  positif  $\implies T$  auto-adjoint .

**Exemple 1.2.2.**

Soit l'opérateur  $S : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  "Le shift droit"

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

On sait que :

$$S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

$S$  n'est pas auto-adjoint car  $Se_1 = S^*e_1$ , où  $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ .

$S$  n'est pas positif car  $\langle Sx, x \rangle = -1$ , où  $x = (-1, 1, 0, \dots)$ .

$S$  n'est pas normal car :

$$\begin{aligned} S^*Sx &= S^*(0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = I \\ SS^*x &= S(x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) = (0, x_2, \dots, x_n, \dots). \end{aligned}$$

Donc,  $S$  n'est pas unitaire, mais il est une isométrie .

**1.2.1 ) Décomposition polaire**

---

**Définition 1.2.2.**

Soit  $T \in B(H)$ , On appelle valeur absolue de  $T$  l'opérateur  $|T|$  tel que

$$|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$$

**Lemme 1.2.1.**

Soit  $U \in B(H)$ , alors  $U$  est unitaire si, et seulement si,  $U$  est isométrie et surjectif.

**Preuve.**

Si  $U$  est unitaire, il est inversible d'inverse  $U^*$ , donc surjectif. De plus, pour tout  $x$  de  $H$  alors

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle U^*Ux, x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

et  $U$  est isométrique.

Inversement, si  $U$  est isométrique et surjectif, il est inversible et

$$\langle U^*Ux - x, x \rangle = \|Ux\|^2 - \|x\|^2 = 0,$$

alors

$$U^*U = I, U^{-1} = U^*$$

donc

$$UU^* = U^*U = I.$$

□

**Lemme 1.2.2.**

Soit  $T, S \in B(H)$  et auto-adjoints et  $U$  un opérateur unitaire alors

$$S \geq T \Rightarrow USU^* \geq UTU^*.$$

**Preuve.**

Soit  $x \in H$ . Alors,

$$\begin{aligned} \langle USU^*x, x \rangle &= \langle SU^*x, U^*x \rangle \\ &\geq \langle TU^*x, U^*x \rangle \\ &= \langle UTU^*x, x \rangle \end{aligned}$$

Donc,

$$S \geq T \Rightarrow USU^* \geq UTU^*.$$

□

**Théorème 1.2.1. [19]**

pour tout  $T \in B(H)$ , il existe une isométrie partielle  $U$  tel que  $T = U|T|$ . En outre,  $U$  est unique si on impose la condition  $\ker(U) = \ker(T)$ .

**Preuve.**

Remarquons qu'on a

$$\|Tx\|^2 = \||T|x\|^2, \forall x \in H. \tag{1.1}$$

En particulier, on en déduit que  $\ker(|T|) = \ker(T)$  et que

$$|T|x = |T|y \implies Tx = Ty.$$

On définit alors l'application

$$V : \text{Ran}(|T|) \longrightarrow \text{Ran}(T)$$

$$|Tx \rightarrow Tx|.$$

$V$  est isométrique grâce à (1.1). Elle s'étend donc par continuité à un isométrie de  $\overline{\text{Ran}(|T|)}$  vers  $\overline{\text{Ran}(T)}$ , qu'on note encore par  $V$ .

En posant  $U = VP$  avec  $P$  la projection orthogonale sur  $\ker(T)^\perp$ , on obtient une isométrie partielle sur  $H$  vérifiant la propriété énoncée.

Unicité : si  $U_1$  et  $U_2$  sont deux isométries partielles vérifiant  $U_1|T| = U_2|T|$  alors

$$U_1 = U_2 \text{ sur } \overline{\text{Ran}(|T|)}.$$

De plus comme  $\text{Ran}(|T|)^\perp = \ker(T)$ , la condition  $\ker(U_1) = \ker(U_2) = \ker(T)$ , implique que  $U_1 = U_2$  sur  $H$ . □

**Théorème 1.2.2.** [14]

Si  $T \in B(H)$  est inversible, alors  $T$  admet une décomposition polaire

$$T = UP$$

tel que  $U$  est unitaire et  $P$  positif.

**Exemple 1.2.3.**

Trouvons la décomposition polaire  $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2-i & 2i-1 \\ 2+i & -1-2i \end{pmatrix}$ .

Il est clair que  $T \in B(\mathbb{C})$  et inversible, alors :

$$T^*T = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$P = |T| = \sqrt{TT^*} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$U = TP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix}.$$

Et finalement,

$$T = UP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

### 1.2.2 ) Spectre d'un opérateur

---

#### Définition 1.2.3. (Spectre)

Soient  $H$  un espace de Hilbert complexe et  $T \in B(H)$ . On dit spectre de  $T$  est l'ensemble complémentaire de  $\rho(T)$ , et noté  $\sigma(T)$ , c-à-d.

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ non inversible}\}.$$

#### Définition 1.2.4. (Ensemble résolvable)

Soit  $T \in B(H)$ . On appelle ensemble résolvant de  $T$ , et noté  $\rho(T)$ , c-à-d.

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ inversible}\}.$$

#### Remarque 1.2.3.

$$\sigma(T) \cup \rho(T) = \mathbb{C},$$

$$\sigma(T) \cap \rho(T) = \emptyset.$$

#### Exemple 1.2.4.

Soient  $\mu \in \mathbb{C}$  et  $T = \mu I$ .

On a

$$T - \lambda I = (\mu - \lambda)I.$$

Alors,

$$T - \lambda I \text{ inversible} \iff \lambda \neq \mu.$$

Par conséquent,  $\rho(T) = \mathbb{C} - \{\mu\}$ ,  $\sigma(T) = \{\mu\}$ .

#### Définition 1.2.5. (L'enveloppe convexe du spectre)

Soit  $T \in B(H)$ , l'enveloppe convexe du spectre de  $T$  est le plus petit convexe contenant  $\sigma(T)$ , notée  $\text{co}\sigma(T)$ .

#### Lemme 1.2.3.

Soit  $T \in B(H)$ , alors

$$\rho(T^*) = \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda \in \rho(T)\},$$

$$\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

**Théorème 1.2.3.** [29]

Soit  $T \in B(H)$ . Si  $T$  est inversible, alors

$$\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1}; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

**Preuve.**

$T$  inversible  $\iff (T - 0I)$  est inversible  $\iff 0 \notin \sigma(T)$ .

Soit

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \in \rho(T^{-1}) &\iff (T^{-1} - \lambda^{-1}I) \text{ est inversible} \\ &\iff (\lambda I - T)\lambda^{-1}T^{-1} \text{ est inversible} \\ &\iff (\lambda I - T) \text{ est inversible} \\ &\iff \lambda \in \rho(T) \end{aligned}$$

alors

$$\lambda^{-1} \notin \sigma(T^{-1}) \iff \lambda \notin \sigma(T)$$

d'où

$$\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1}) \iff \lambda \in \sigma(T).$$

Donc,  $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1}; \lambda \in \sigma(T)\}$ . □

### 1.2.3 ) Classification de spectre

---

**Définition 1.2.6.**

Soit  $T \in B(H)$ . Alors, on appelle

**Spectre ponctuel** de  $T$ , l'ensemble

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\}.$$

**Spectre résiduel** de  $T$ , l'ensemble

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(\lambda I - T)} \neq H\}.$$

**Spectre continu** de  $T$ , l'ensemble

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(\lambda I - T)} = H\}.$$

**Spectre approché** de  $T$ , l'ensemble

$$\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I, \exists \{x_n\} \subset H : \|x_n\| = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda I)x_n = 0\}.$$

**Remarque 1.2.4.**

Soit  $T \in B(H)$ . Alors,

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T).$$

**Définition 1.2.7. (Rayon spectrale)**

Soit  $T \in B(H)$ , on appelle le rayon spectrale de  $T$  la valeur

$$r(T) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

**Exemple 1.2.5.**

Soit  $H = L^2([0, 1])$ , et  $T \in B(H)$  tel que :

$$Tf(x) = xf(x).$$

On a  $\|T\| = 1$  donc

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}.$$

Alors,  $\sigma(T) = [0, 1] \implies r(T) = 1$ .

**Remarque 1.2.5.**

Soit  $T \in B(H)$ , alors

1.  $r(T) = r(T^*)$ .
2.  $r(T^n) = r(T)^n$ .

**Théorème 1.2.4. [27]**

Soit  $T \in B(H)$ , alors on a

- La limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$  existe et elle est égale à  $\inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ .
- $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ .

**Corollaire 1.2.1.**

On a  $r(T) \leq \|T\|$ .

**Théorème 1.2.5. (Le théorème de la Correspondance Spectrale)**

Soit  $T$  un opérateur sur un espace vectoriel  $V$  de dimension  $n$ , réel ou complexe, et soit  $q(x)$  un polynôme quelconque. Alors, le spectre de l'opérateur polynomial  $q(T)$  est l'image du spectre de  $T$  sous  $q$ , c'est-à-dire,

$$\sigma(q(T)) = q(\sigma(T)).$$

Comme une épigramme, là où va l'opérateur, va aussi son spectre.

**1.2.4 ) Image numérique d'un opérateur****Définition 1.2.8.**

Soient  $H$  espace de Hilbert et  $T \in (H)$ .

L'image numérique de  $T$  est l'ensemble  $W(T)$  définie par

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle; x \in H, \|x\| = 1\}.$$

*Le rayon numérique* de  $T$  est le réel défini par

$$w(T) = \sup\{\langle Tx, x \rangle; x \in H, \|x\| = 1\}.$$

**Proposition 1.2.1.** [22]

Pour tout opérateurs  $T$  et  $S$  dans  $B(H)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . On a les propriétés suivantes

1.  $W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T)$ .
2.  $W(T + S) \subset W(T) + W(S)$ .
3.  $W(T^*) = \{\bar{\lambda}, \lambda \in W(T)\}$ .

*Preuve.*

1. Soit  $T \in B(H)$  pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} W(\alpha I + \beta T) &= \{\langle (\alpha I + \beta T)x, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle \alpha Ix + \beta Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle \alpha Ix, x \rangle + \langle \beta Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle \alpha Ix, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} + \{\langle \beta Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \alpha W(I) + \beta W(T). \end{aligned}$$

2. Soit  $T$  et  $S \in B(H)$  pour tout  $x \in T, y \in S$ . On a

$$W(T + S) = \{x + y, x \in T, y \in S\}.$$

$W(T)$  normal donc  $W(T + S)$  normal.

$$\begin{aligned} \varphi \in W(T + S) &\implies \varphi \in \{\langle (T + S)x, x \rangle, \|x\| = 1\} \\ &\implies \varphi \in \{\langle Tx + Sx, x \rangle, \|x\| = 1\} \\ &\implies \varphi \in \{\langle Tx, x \rangle + \langle Sx, x \rangle, \|x\| = 1\} \\ &\implies \varphi \in \left( \underbrace{\{\langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1\}}_I + \underbrace{\{\langle Sx, x \rangle, \|x\| = 1\}}_U \right) \end{aligned}$$

alors,  $\varphi \in W(T + S) \implies \varphi \in W(I + U)$ , donc,  $W(T + S) \subset I + U = W(T) + W(S)$ .

- 3.

$$\begin{aligned} W(T^*) &= \{\langle T^*x, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle x, Tx \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\overline{\langle Tx, x \rangle} : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\bar{\lambda}, \lambda \in W(T)\}. \end{aligned}$$

□

**Exemple 1.2.6.**

On définit l'opérateur  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  par

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left( x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots \right).$$

On a  $W(T) = (0, 1]$ .

**Théorème 1.2.6.** [21]

L'opérateur  $T$  est un auto-adjoint si, et seulement si,  $W(T) \subset \mathbb{R}$ .

**Preuve.**

Si  $T$  est auto-adjoint, alors pour tout  $x \in H$ ,

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}.$$

□

**Théorème 1.2.7.** [22]

Si  $W(T)$  est un segment de droite, alors  $T$  est un opérateur normal.

**Preuve.**

Soit  $\alpha$  un point sur le segment de droite ayant une inclinaison  $\theta$ , d'où  $W(e^{-i\theta}[T - \alpha I])$  est inclus dans l'axe des réels. Ainsi, le théorème précédent implique que  $e^{-i\theta}[T - \alpha I]$  est un opérateur auto-adjoint.

On déduit donc, par un calcul simple que  $T$  est un opérateur normal. □

**Théorème 1.2.8.**

Si  $T$  est un opérateur normal. Alors,

$$w(T) = \|T\|.$$

**Théorème 1.2.9.** [6]

Pour tout opérateur unitaire  $U \in B(H)$

$$W(U^*TU) = W(T).$$

En particulier, l'image numérique est invariante par équivalence unitaire.

**Preuve.**

Soit  $T \in B(H)$  et  $U$  est un opérateur unitaire

$$\begin{aligned} W(U^*TU) &= \{ \langle U^*TUx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1 \} \\ &= \{ \langle TUx, Ux \rangle : x \in H, \|x\| = 1 \} \end{aligned}$$

On pose  $Ux = y$  tel que  $\|y\| = 1$

$$\begin{aligned} W(U^*TU) &= \{\langle TUx, Ux \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle Ty, y \rangle : y \in H, \|y\| = 1\} \\ &= W(T). \end{aligned}$$

□

**Théorème 1.2.10.** [22]

On a toujours  $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$ , où  $\overline{W(T)}$  la fermeture de l'image numérique de l'opérateur  $T$ .

*Preuve.*

Soit  $\lambda \in \sigma_a(T)$  (le spectre approché de  $T$ ) et soit  $(x_n)$  une suite de vecteurs unitaires telles que

$$\|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0.$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|\langle (T - \lambda I)x_n, x_n \rangle| \leq \|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0.$$

Donc,  $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda$  et par suite,  $\lambda \in \overline{W(T)}$ , on a alors

$$\sigma_a(T) \subseteq \overline{W(T)}.$$

Ainsi, d'après la proposition, on a  $\partial\sigma(T) \subset \sigma_a(T) \subset \overline{W(T)}$ , (où  $\partial\sigma(T)$  dénoté la frontière de  $\sigma(T)$ ). De la convexité de  $\overline{W(T)}$ , il s'en suit que  $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$ . □

## 1.3 ) Opérateurs normaux

---

### 1.3.1 ) Définition et propriétés

---

**Définition 1.3.1.**

On dit que  $T \in B(H)$  est un opérateur normal, si  $T$  commute avec son adjoint, c-à-d.  $T^*T = TT^*$ .

**Exemple 1.3.1.**

Soit  $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , d'où  $T^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

on a

$$T^*T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = TT^*$$

alors  $T$  est normal .

**Remarque 1.3.1.**

Tous les classes des opérateurs que nous étudions précédents sont opérateurs normaux sauf l'opérateur isométrique

**Proposition 1.3.1.** [13]

Soit  $T \in B(H)$ , les assertions suivantes sont équivalentes

1.  $T$  est normal.
2.  $\|Tx\| = \|T^*x\|, \forall x \in H$ .
3. Dans le cas complexes, les parties réelles et imaginaires de  $T$  commutent.

**Preuve.**

-Pour  $x \in H$ , on a :

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle - \langle T^*x, T^*x \rangle \\ &= \langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle. \end{aligned}$$

Donc, l'équivalence de 1 et 2.

- On pose :  $T = A + iB$ , tel que  $A = \operatorname{Re}(T)$ , et  $B = \operatorname{Im}(T)$  auto-adjoint.

On a :

$$T^* = A - iB, T^*T - TT^* = 2i(AB - BA).$$

D'où :  $T^*T = TT^*$  si, et seulement si,  $AB = BA$ . □

**Lemme 1.3.1.**

Soit  $H$  un espace de Hilbert complexe et  $T \in B(H)$ , alors

1.  $TT^*$  et  $T^*T$  sont normaux.
2. Il existe  $R, S$  auto-adjoint tels que  $T = R + iS$ .

**Preuve.**

$$1. (TT^*)^* = (T^*)^*T^* = TT^* \text{ et } (T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T.$$

2. On pose

$$R = \frac{T + T^*}{2}, S = \frac{T - T^*}{2i}$$

alors  $T = R + iS$  et

$$R^* = \left( \frac{T + T^*}{2} \right)^* = \frac{T^* + T}{2} = R.$$

$$S^* = \left( \frac{T - T^*}{2i} \right)^* = \frac{T^* - T}{-2i} = S.$$

□

**Lemme 1.3.2.**

Soit  $T \in B(H)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors,  $T$  est normal si, et seulement si,  $(T - \lambda I)$  est normal.

**Preuve.**

Si  $T$  est normal, alors

$$\begin{aligned}
 (T - \lambda I)^*(T - \lambda I) &= (T^* - \bar{\lambda}I)(T - \lambda I) \\
 &= T^*T - \lambda T^* - \bar{\lambda}T + \bar{\lambda}\lambda I \\
 &= TT^* - \bar{\lambda}T - \lambda T^* + \bar{\lambda}\lambda I \\
 &= T(T^* - \bar{\lambda}I) - \lambda I(T^* - \bar{\lambda}I) \\
 &= (T - \lambda I)(T^* - \bar{\lambda}I) \\
 &= (T - \lambda I)(T - \lambda I)^*.
 \end{aligned}$$

Reciproquement, si  $(T - \lambda I)$  est normal, alors  $T = (T - \lambda I) - (-\lambda)I$  est normal. □

**Corollaire 1.3.1.**

Si  $T \in B(H)$  est normal, alors

$$\ker(T) = \ker(T^*).$$

**Proposition 1.3.2.** [21]

Soit  $T \in B(H)$  est normal, on a

1. L'opérateur  $\alpha T$  est aussi normal pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ .
2. L'opérateur  $T^n$  est normal pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Preuve.**

1. Nous avons :  $(aT)(aT)^* = a\bar{a}TT^*$ , et  $(aT)^*(aT) = \bar{a}aT^*T$ .

Puisque,  $T$  est normal, d'où il sont égaux.

2.  $T$  est normal, d'où

$$\begin{aligned}
 TT^* &= T^*T \\
 \Rightarrow (TT^*)^n &= (T^*T)^n \\
 \Rightarrow T^n(T^*)^n &= (T^*)^n T^n \\
 \Rightarrow T^n(T^n)^* &= (T^n)^* T^n.
 \end{aligned}$$

C'est-à-dire  $T^n$  est normal, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

□

**Corollaire 1.3.2.**

Soit  $P$  une polynôme et  $T$  est un opérateur normal. Alors,  $P(T)$  est aussi normal.

**Remarque 1.3.2.**

$T^n$  normal  $\not\Rightarrow T$  normal.

**Exemple 1.3.2.**

Soit  $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

on a  $T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  est normal, mais  $T$  n'est pas normal.

**Proposition 1.3.3.** [18]

Soit  $T \in B(H)$  un opérateur normal, on a

$$H = \ker(T) \oplus \overline{\operatorname{Im}(T)}.$$

**Preuve.**

On sait que :  $\ker(T^*) = (\operatorname{Im}T)^\perp$

d'où

$$(\ker(T^*))^\perp = ((\operatorname{Im}T)^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{Im}(T)}.$$

Donc,

$$H = \ker(T^*) \oplus (\ker(T^*))^\perp = \ker(T) \oplus \overline{\operatorname{Im}(T)}.$$

□

**Proposition 1.3.4.** [21](Inverse d'un opérateur normal)

Soit  $T \in B(H)$  un opérateur normal et inversible d'inverse  $T^{-1}$ . Alors,  $T^{-1}$  est aussi normal.

**Preuve.**

On a :

$$\begin{aligned} (T^{-1})^*T^{-1} &= (T^*)^{-1}T^{-1} \\ &= (TT^*)^{-1} = (T^*T)^{-1} \text{ (car } T \text{ normal)} \\ &= T^{-1}(T^*)^{-1} = T^{-1}(T^{-1})^*. \end{aligned}$$

Donc,  $T^{-1}$  est un opérateur normal.

□

**Proposition 1.3.5.** [23]

Pour tout  $U$  est unitaire. L'opérateur  $U^*TU$  est normal si, et seulement si,  $T$  est normal.

**Preuve.**

On a :

$$(U^*TU)^*(U^*TU) = U^*T^*TU$$

et

$$(U^*TU)(U^*TU)^* = U^*TT^*U.$$

On remarque que  $T^*T = TT^*$  si, et seulement si,  $U^*TU$  est normal.

□

**Proposition 1.3.6.** [20]

Soit  $T \in B(H)$ , les assertions suivantes sont équivalentes

- a)  $T$  est normal,
- b)  $T^{-1}T^*$  (ou  $T^*T^{-1}$ ) est unitaire,
- c) il existe un opérateur unitaire  $U$  tel que,  $T^* = UT$ .

**Preuve.**

Montrons que :

- a)  $\implies$  b) On a :

$$\begin{aligned}(T^{-1}T^*)^*(T^{-1}T^*) &= T(T^{-1})^*T^{-1}T^* \\ &= TT^{-1}(T^{-1})^*T = I(TT^{-1})^* = I.\end{aligned}$$

- b)  $\implies$  c) clair.

- c)  $\implies$  a) Pour  $x \in H$ , on a :

$$\begin{aligned}\|T^*x\|^2 &= \|UTx\|^2 \\ &= \langle UTx, UTx \rangle = \langle Tx, U^*UTx \rangle = \|Tx\|^2.\end{aligned}$$

Donc,  $T$  est normal.

□

### 1.3.2 ) Théorème (Fuglede-Putnam)

---

**Théorème 1.3.1.** [16] (Fuglede - 1950)

Soient  $T$  et  $N$  deux opérateurs bornés sur un espace de Hilbert  $H$ , tels que  $TN = NT$  où  $N$  est normal. Alors,

$$TN^* = N^*T.$$

Puis en 1951 Putnam a fait la généralisation au cas de deux opérateurs normaux.

**Théorème 1.3.2.** [28] (Fuglede-Putnam-Rosenblum)

Supposons que  $M$ ,  $N$  et  $T \in B(H)$ , et  $M$ ,  $N$  sont normaux et  $MT = TN$ . Alors,

$$M^*T = TN^*.$$

### 1.3.3 ) Spectre d'un opérateur normal

---

**Proposition 1.3.7.** [4]

Soit  $T \in B(H)$  est normal, alors si  $Tx = \lambda x$ , tel que  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $x \in H$ . Donc,  $T^*x = \bar{\lambda}x$ .

**Preuve.**

Il est clair que  $(T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda}I$ .

Supposons que si  $T$  est normal, alors  $T - \lambda I$  est aussi normal, on a donc

$$\ker(T - \lambda I) = \ker(T - \lambda I)^* = \ker(T^* - \bar{\lambda}I).$$

On a

$$Tx = \lambda x \Leftrightarrow (T - \lambda)x = 0,$$

alors

$$x \in \ker(T - \lambda I) \Leftrightarrow x \in \ker(T^* - \bar{\lambda}I) \Leftrightarrow T^*x = \bar{\lambda}x.$$

□

**Proposition 1.3.8.** [4]

Soit  $T \in B(H)$  est normal. Alors, deux espaces propres de  $T$  associé à des valeurs propres distincts sont orthogonaux.

**Preuve.** Soit  $\lambda'$  autre valeur propre de  $T$  et  $y$  vecteur propre associé, on a

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \langle x, T^*y \rangle \\ \implies \langle \lambda x, y \rangle &= \langle x, \bar{\lambda}'y \rangle \\ \implies \lambda \langle x, y \rangle &= \lambda' \langle x, y \rangle \\ \implies (\lambda - \lambda') \langle x, y \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$\lambda \neq \lambda'$  d'où

$$\langle x, y \rangle = 0 \implies x \perp y.$$

□

**Proposition 1.3.9.** [21]

Le rayon spectral d'un opérateur normal  $T \in B(H)$  vérifie

$$r(T) = \|T\|.$$

**Preuve.**

On suppose d'abord que  $T$  est auto-adjoint on a  $\|T^2\| = \|T\|^2$  et par récurrence sur  $n$  lon obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la relation

$$\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n},$$

il vient

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|T\|.$$

On revient au cas normal, l'élément  $TT^*$  est auto-adjoint et il s'ensuit que l'on a :

$$\begin{aligned}
r(T) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\|T^n(T^n)^*\|^{\frac{1}{n}}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\|(TT^*)^n\|^{\frac{1}{n}}} \\
&= \sqrt{r(TT^*)} = \sqrt{\|TT^*\|} \\
&= \|T\|.
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 1.3.3.**

Soit  $T \in B(H)$  est un opérateur normal. Alors,

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T).$$

**Proposition 1.3.10.** [18]

Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.

**Théorème 1.3.3.** [2]

Soit  $T \in B(H)$  un opérateur normal et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On a

1.  $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}(T_\lambda) = H\}$ .
2.  $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\text{Im}(T_\lambda)} \neq H\}$ .
3.  $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\text{Im}(T_\lambda)} = H \text{ et } \text{Im}(T_\lambda) \neq H\}$ .
4.  $\sigma_r(T) = \phi$ .

**1.3.4 ) Opérateurs convexoïdes**

---

**Définition 1.3.2.**

Soit  $T \in B(H)$  est dit convexoïde si

$$\overline{W(T)} = \text{co}\sigma(T).$$

**Exemple 1.3.3.**

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $N$  un opérateur normal, donc le spectre est le disque fermé  $\overline{D}$  de centre 0 et de rayon  $\frac{1}{2}$ .

Si

$$T = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}.$$

Puisque,  $\sigma(T) = \{0\} \cup \overline{D}$ ,  $\overline{W(T)} = \text{co}(W(M) \cup W(N)) = \overline{D}$ , alors  $T$  est convexoïde.

**Remarque 1.3.3.**

On peut conclure les inclusions suivantes

$$\text{Auto-adjoint} \subset \text{Normal} \subset \text{Hyponormal} \subset \text{Convexoïde}.$$

**Proposition 1.3.11.** [17] Soit  $T \in B(H)$ , alors  $T$  est convexoïde si, et seulement si,

$$\|(T - \lambda)^{-1}\| \leq [\text{dist}(\lambda, \text{co}\sigma(T))]^{-1},$$

pour tout  $\lambda \notin \text{co}\sigma(T)$ .

**Preuve.**

( $\implies$ ) Soit  $\lambda \notin \text{co}\sigma(T)$ . Par la transformation  $T \mapsto \alpha T + \beta$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ,  $\beta \in \mathbb{C}$  on peut supposer que les conjoint  $(\lambda, T)$  satisfait

$$[\lambda < 0, 0 \in \text{co}\sigma(T) \text{ et } \text{co}\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq 0\}],$$

alors,

$$\|(T - \lambda)x\|^2 = \|Tx\|^2 - \lambda[(Tx, x) + (x, Tx)] + \lambda^2\|x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2, \forall x \in H.$$

Comme,  $(T - \lambda)$  est inversible, alors

$$\|x\|^2 \geq \lambda^2 \| (T - \lambda)^{-1}x \|^2,$$

d'où,

$$[\text{dist}(\lambda, \text{co}\sigma(T))]^{-1} = |\lambda|^{-1} \geq \|(T - \lambda)^{-1}\|.$$

( $\impliedby$ ) On a  $\text{co}\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$ , on montre que si  $\lambda \notin \text{co}\sigma(T)$  alors  $\lambda \notin \overline{W(T)}$ . Par application de la transformation  $T \mapsto \alpha T + \beta$ , on peut supposer que

$$\text{si } [\lambda < 0, 0 \in \text{co}\sigma(T) \text{ et } \text{co}\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq 0\}],$$

alors

$$\lambda \notin \text{co}\sigma(T) \text{ et } \text{dist}(\lambda, \text{co}\sigma(T)) = |\lambda|,$$

c.à.d.

$$\|(T - \lambda)^{-1}\| \leq |\lambda|^{-1}.$$

D'où, pour tout  $x \in H$

$$\lambda^2 \|x\|^2 \leq \|(T - \lambda)x\|^2.$$

Par passage au limite quand  $\lambda$  tend vers  $(-\infty)$ , on obtient que pour tout  $x \in H$

$$\langle Tx, x \rangle + \langle x, Tx \rangle = 2\operatorname{Re}\langle Tx, x \rangle \geq 0,$$

d'où,

$$\overline{W(T)} \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\},$$

donc,

$$\lambda \notin \overline{W(T)}.$$

□

**Corollaire 1.3.4.**

Soit  $m$  et  $n$  deux nombres complexes. Si  $\overline{W(T)} = [m, n]$ , alors  $\{m, n\} \subseteq \sigma(T)$ .

**Preuve.**

Si  $\overline{W(T)} = [m, n]$ , alors le théorème 1.2.7 implique que  $T$  est un opérateur normal. (c-à-d convexoïdes).

Ainsi, l'ensemble  $\overline{W(T)}$  est l'enveloppe convexe de  $\sigma(T)$ , ou encore

$$[m, n] = \overline{W(T)} = \operatorname{co}\sigma(T).$$

Il suit donc que

$$\{m, n\} \subseteq \sigma(T).$$

□

---

# Les Opérateurs n-normaux

---

Dans ce chapitre, nous présentons la définition des opérateurs n-normaux. Ainsi, des propriétés et des exemples. De plus, nous examinons la comparaison entre les opérateurs normaux et les opérateurs n-normaux. Enfin, nous discutons également des opérateurs (n,m)-normaux.

## 2.1 ) Définitions et propriétés

---

---

### Définition 2.1.1.

Soit  $T \in B(H)$ , on dit que  $T$  est un opérateur n-normal si

$$T^n T^* = T^* T^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

### Proposition 2.1.1. [10]

Soit  $T \in B(H)$ . Alors,  $T$  est n-normal si, et seulement si,  $T^n$  est normal .

#### *Preuve.*

Soit  $T$  opérateur n-normal, alors  $T^n T^* = T^* T^n$ .

Donc,

$$T^n (T^*)^n = T^* T^n (T^*)^{n-1} = T^* (T^n T^*) (T^*)^{n-2} = (T^*)^2 T^n (T^*)^{n-2} = (T^*)^n T^n$$

D'où,  $T^n$  est normal.

Maintenant, supposons que  $T^n$  est normal. On prend  $T^n T = T T^n$ , par le théorème de Fuglede, on a  $T^* T^n = T^n T^*$ . Par conséquent  $T$  is n-normal. □

**Remarque 2.1.1.**

1. L'opérateur borné normal est  $n$ -normal pour tout  $n$ . Mais l'inverse n'est pas vrai.
2. Tous les opérateurs nilpotents non nuls sont des opérateurs  $n$ -normaux, pour  $n \geq k$  où  $k$  est l'indice de nilpotence, mais ils ne sont pas normaux.

**Exemple 2.1.1.**

1. Soit  $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$  et  $T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . On a

$$T^2 T^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 2 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -2 & i \end{pmatrix} = T^* T^2.$$

Alors,  $T$  est 2-normal mais n'est pas normal.

2. Soit  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors,  $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  c'est un opérateur nilpotente d'indice  $k = 2$ , et 2-normal car  $(T^2 T^* = T^* T^2 = 0)$ . Mais n'est pas normal.

**Proposition 2.1.2.** [3]

Soit  $T \in B(H)$  est  $n$ -normal. Alors,

1.  $T^*$  est  $n$ -normal.
2. Si  $T^{-1}$  existe, alors  $(T^{-1})$  est  $n$ -normal.
3. Si  $S \in B(H)$  est unitairement équivalent à  $T$ , alors  $S$  est  $n$ -normal.

**Preuve.**

1. Puisque,  $T$  est  $n$ -normal,  $T^n$  est normal.

Donc,

$$(T^n)^* = (T^*)^n \text{ est normal, } T^* \text{ est un } n\text{-normal operator.}$$

2. Puisque,  $T$  est  $n$ -normal, on a  $T^n$  normal.

Depuis,

$$(T^n)^{-1} = (T^{-1})^n \text{ est normal, } T^{-1} \text{ est un opérateur } n\text{-normal.}$$

3. Soit  $T$  un opérateur  $n$ -normal et  $S$  être équivalent unitaire de  $T$ .

Alors, il existe un opérateur unitaire  $U$  tel que  $S = UTU^*$ .

Donc,  $S^n = UT^n U^*$ .

Depuis,  $T^n$  est normal,  $S^n$  est normal. Donc,  $S$  est  $n$ -normal.

□

**Proposition 2.1.3.**

Soit  $T \in B(H)$  est  $n$ -normal et  $\alpha$  est scalaire, alors  $\alpha T$  est  $n$ -normal

**Preuve.**

Soit  $T$  est  $n$ -normal et  $\alpha$  est scalaire, alors

$$(\alpha T)^n (\alpha T)^* = \bar{\alpha} \alpha^n (T^* T^n) = \alpha^n \bar{\alpha} (T^n T^*)$$

et

$$(\bar{\alpha} T^*) (\alpha^n T^n) = (\alpha T)^* (\alpha T)^n.$$

Donc,  $\alpha T$  est  $n$ -normal. □

**Théorème 2.1.1.** [3]

1. L'ensemble de tous les opérateurs  $n$ -normal sur  $H$  est un sous-ensemble fermé de  $B(H)$  qui est fermé sous le produit scalaire .
2. Si  $M$  est un sous-espace fermé de  $H$  tel que  $M$  réduit  $T$ , alors  $S = T/M$  est un opérateur  $n$ -normal.

**Preuve.**

1. supposons que  $(T_k)$  soit une suite d'opérateurs  $n$ -normaux convergeant vers  $T$  dans  $B(H)$ . Maintenant,

$$\|T^n T^* - T^* T^n\| \leq \|T^n T^* - T_k^n T_k^*\| + \|T_k^n T_k^* - T^* T^n\| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } k \longrightarrow \infty.$$

Ainsi,  $T$  est  $n$ -normal.

2. Puisque  $T$  est  $n$ -normal,  $T^n$  est normal.

Alors,  $T^n/M$  est normal.

Et puisque  $M$  est invariant sous  $T$ ,  $T^n/M = (T/M)^n$ . Ainsi,  $(T/M)^n$  est normal.

Donc,  $T/M$  est  $n$ -normal. □

□

**Théorème 2.1.2.** [3]

Si  $S, T$  sont des opérateurs  $n$ -normaux qui commutent, alors  $ST$  est un opérateur  $n$ -normal.

**Preuve.**

$ST$  est un opérateur  $n$ -normal si, et seulement si,  $(ST)^* (ST)^n = (ST)^n (ST)^*$ .

On a

$$(ST)^* = T^* S^*$$

$$(ST)^n = S^n T^n$$

donc

$$(ST)^*(ST)^n = (T^* S^*)(S^n T^n). \quad (2.1)$$

Puisque,  $S$  et  $T$  commutent, alors (2.1) devient

$$(ST)^*(ST)^n = (T^*)(S^* S^n)(T^n). \quad (2.2)$$

Puisque,  $S$  est  $n$ -normal, alors (2.2) devient

$$(ST)^*(ST)^n = (T^*)(S^n S^*)(T^n). \quad (2.3)$$

Puisque,  $S$  et  $T$  commutent et  $T$  est  $n$ -normal, alors (2.3) devient

$$\begin{aligned} (ST)^*(ST)^n &= S^n (T^* T^n) (S^*) \\ &= S^n (T^n T^*) (S^*) \\ &= (S^n T^n) (T^* S^*) \\ &= (ST)^n (TS)^*. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $(ST)$  est un opérateur  $n$ -normal. □

**Remarque 2.1.2.**

Le théorème 2.1.2, n'est pas nécessairement vrai si  $S$  et  $T$  non commutent.

**Exemple 2.1.2.**

Soit  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$  deux opérateurs sur espace de Hilbert  $\mathbb{C}^2$ . Alors,  $S$  et  $T$  sont 2-normal.

On remarque que

$$ST = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & i \end{pmatrix} = TS.$$

Mais comme  $(ST)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$  n'est pas normal, donc  $ST$  n'est pas 2-normal.

**Corollaire 2.1.1.**

Si  $T$  est  $n$ -normal, alors  $T^m$  est  $n$ -normal pour tout entier positive  $m$ .

**Lemme 2.1.1.**

Si  $S, T \in B(H)$  sont deux opérateurs 2-normaux et  $ST + TS = 0$ , alors  $T + S$  et  $ST$  sont 2-normaux.

**Preuve.**

Puisque,  $ST + TS = 0$ ,  $S^2 T^2 = T^2 S^2$ . Donc,  $(S + T)^2 = S^2 + T^2$  est normal. Ainsi,  $(S + T)$  est un opérateur 2-normal.

Maintenant, puisque  $ST + TS = 0$ ,  $(ST)^2 = -S^2 T^2 = -T^2 S^2$ . Donc, d'après le théorème 2.1.2,  $ST$  est un opérateur 2-normal. □

**Théorème 2.1.3.** [3]

Soit  $T_1, \dots, T_m$  sont opérateurs  $n$ -normaux sur  $B(H)$ . Alors,  $(T_1 \oplus \dots \oplus T_m)$  et  $(T_1 \otimes \dots \otimes T_m)$  sont opérateurs  $n$ -normaux.

**Preuve.**

Comme,

$$\begin{aligned}
 (T_1 \oplus \dots \oplus T_m)^n (T_1 \oplus \dots \oplus T_m)^* &= (T_1^n \oplus \dots \oplus T_m^n)(T_1^* \oplus \dots \oplus T_m^*) \\
 &= T_1^n T_1^* \oplus \dots \oplus T_m^n T_m^* \\
 &= T_1^* T_1^n \oplus \dots \oplus T_m^* T_m^n \\
 &= (T_1^* \oplus \dots \oplus T_m^*)(T_1^n \oplus \dots \oplus T_m^n) \\
 &= (T_1 \oplus \dots \oplus T_m)^*(T_1 \oplus \dots \oplus T_m)^n.
 \end{aligned}$$

Alors,  $(T_1 \oplus \dots \oplus T_m)$  est un opérateur  $n$ -normal.

Maintenant, pour  $x_1, \dots, x_m \in H$

$$\begin{aligned}
 (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^n (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^*(x_1 \otimes \dots \otimes x_m) &= (T_1^n \otimes \dots \otimes T_m^n)(T_1^* \otimes \dots \otimes T_m^*)(x_1 \otimes \dots \otimes x_m) \\
 &= T_1^n T_1^* x_1 \otimes \dots \otimes T_m^n T_m^* x_m \\
 &= T_1^* T_1^n x_1 \otimes \dots \otimes T_m^* T_m^n x_m \\
 &= (T_1^* \otimes \dots \otimes T_m^*)(T_1^n \otimes \dots \otimes T_m^n)(x_1 \otimes \dots \otimes x_m) \\
 &= (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^*(T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^n(x_1 \otimes \dots \otimes x_m).
 \end{aligned}$$

Alors,  $(T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^n (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^* = (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^*(T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^n$ .

Donc,  $(T_1 \otimes \dots \otimes T_m)$  est  $n$ -normal. □

**Théorème 2.1.4.** [3]

Soit  $T \in B(H)$ ,  $F = T^n + T^*$ , et  $G = T^n - T^*$ . Alors,

$T$  est un opérateur  $n$ -normal  $\Leftrightarrow G$  commute avec  $F$ .

**Preuve.**

$$FG = GF$$

$$\Leftrightarrow (T^n + T^*)(T^n - T^*) = (T^n - T^*)(T^n + T^*)$$

$$\Leftrightarrow T^{2n} - T^n T^* + T^* T^n - T^{*2} = T^{2n} + T^n T^* - T^* T^n - T^{*2}$$

$$\Leftrightarrow T^n T^* - T^* T^n = 0$$

$\Leftrightarrow T$  est une  $n$ -normal. □

**Théorème 2.1.5.** [3]

Soit  $T \in B(H)$ ,  $B = T^n T^*$ ,  $F = T^n + T^*$ , et  $G = T^n - T^*$ . Alors,  $T$  est un opérateur  $n$ -normal  $\Rightarrow B$  commute avec  $G$  et  $F$ .

**Preuve.**

Comme,  $T$  est un  $n$ -normal,

$$\begin{aligned} BF &= T^n T^* (T^n + T^*) \\ &= T^n T^* T^n + T^n T^* T^* \\ &= T^n T^n T^* + T^* T^n T^* \\ &= (T^n + T^*) T^n T^* \\ &= FB \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} BG &= T^n T^* (T^n - T^*) \\ &= T^n T^* T^n - T^n T^* T^* \\ &= T^n T^n T^* - T^* T^n T^* \\ &= (T^n - T^*) T^n T^* \\ &= GB. \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.1.4.** [3]

Soit  $T \in B(H)$  un opérateur  $n$ -normal et inversible. Alors,  $T$  et  $T^{-1}$  ont un sous-espace invariant fermé non trivial commun.

**Preuve.**

Comme  $T$  est  $n$ -normal et inversible,  $T^n$  et  $(T^{-1})^n$  sont normaux.

Ainsi par [29, Corollaire 4.5]

$T^n$  et  $(T^{-1})^n$  les deux n'ont pas de vecteur hypercyclique.

Ainsi, par

$T$  et  $T^{-1}$  les deux n'ont pas de vecteur hypercyclique.

Donc,

$T$  et  $T^{-1}$  ont un sous-espace invariant fermé non trivial commun .

□

**Proposition 2.1.5.** [3]

Soit  $T \in B(H)$  avec la décomposition cartésienne  $T = A + iB$  où  $A$  et  $B$  sont des opérateurs auto-adjoints. Alors,  $T$  est 2-normal opérateur si, et seulement si,  $B^2$  commute avec  $A$ , et  $A^2$  commute avec  $B$ .

**Preuve.**

Supposons que  $B^2A = AB^2$  et  $A^2B = BA^2$ .

Alors,

$$\begin{aligned} T^2T^* &= (A + iB)^2(A - iB) = (A^2 + iAB + iBA - B^2)(A - iB) \\ &= A^3 - iA^2B - B^2A + iB^3 + iABA + AB^2 + iBA^2 + BAB \end{aligned}$$

et

$$T^*T^2 = A^3 - AB^2 + iA^2B + iABA - iBA^2 + iB^3 + BAB + B^2A$$

puisque  $B^2A = AB^2$  et  $A^2B = BA^2$ ,  $T^2T^* = T^*T^2$ .

Donc,  $T$  est 2-normal.

Maintenant, soit  $T$  2-normal. Donc,  $T^2T^* = T^*T^2$ . D'où,

$$\begin{aligned} -B^2A + iBA^2 - iA^2B + AB^2 &= -AB^2 + iA^2B - iBA^2 + B^2A, \\ (AB^2 - B^2A) + i(BA^2 - A^2B) &= 0. \end{aligned}$$

Soit  $T_1 = AB^2 - B^2A$ ,  $T_2 = BA^2 - A^2B$ .

Alors,

$$T_1^* = -T_1$$

$$T_2^* = -T_2$$

( c'est-à-dire  $T_1, T_2$  sont des hermitiens asymétriques) et  $T_1 + iT_2 = 0$ .

Donc,  $-T_1 + iT_2 = 0$ .

Cela donnez  $T_1 = AB^2 - B^2A = 0$ . De même,  $B^2A = AB^2$ . □

**Remarque 2.1.3.**

L'opérateur 2-normal est un opérateur  $2k$ -normal, et l'opérateur 3-normal est un opérateur  $3k$ -normal.

**Exemple 2.1.3.**

1. Soit  $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ . Alors,  $T^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  est un opérateur normal.

Mais  $T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$  n'est pas normal.

Donc,  $T$  est 2-normal mais n'est pas 3-normal.

2. Soit  $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors,  $T^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$  est un opérateur normal.

Mais  $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$  n'est pas normal.

Donc,  $T$  est 3-normal mais n'est pas 2-normal.

**Proposition 2.1.6.** [3]

Pour  $n \geq 2$ . On a  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$  est  $n$ -normal si, et seulement si,  $b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1}) = 0$ , où  $a, b, c \in \mathbb{C}$ .

*Preuve.*

Soit  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ . Alors,  $T$  est  $n$ -normal si, et seulement si,

$$T^n = \begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}, T^*T^n = T^nT^*.$$

$T$  est normal si, et seulement si,

$$|b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1})| = 0.$$

Donc,

$$b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1}) = 0.$$

□

**Exemple 2.1.4.**

Considérons  $n = 3$  dans la dernière proposition, alors  $T$  est un opérateur 3-normal si, et seulement si,  $b(a^2 + ac + c^2) = 0$ . Prendre  $a = 2, b = 1$ , et  $c = -1 + \sqrt{3}i$ . Alors,

$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 + \sqrt{3}i \end{pmatrix}$  est 3-normal.

Noter que  $T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$  est normal. Ainsi,  $T$  est 3-normal.

## 2.2 ) Comparaison entre les opérateurs normaux et les opérateurs $n$ -normaux

---

**Proposition 2.2.1.** [1]

Supposons que  $T$  est un opérateur normal,  $S$  est un opérateur linéaire. Si  $T$  et  $S$  commutent, alors  $T^*$  et  $S^*$  commutent ainsi.

**Preuve.**

On a  $T$  et  $S$  commutent

$$\begin{aligned} TS &= ST \\ \implies (TS)^* &= (ST)^* \\ \implies S^*T^* &= T^*S^* \end{aligned}$$

donc  $T^*$  et  $S^*$  commutent. □

**Proposition 2.2.2.** [3]

Soit  $T, S$  deux opérateurs  $n$ -normal commutent, tel que  $(S + T)^*$  commute avec  $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k$ . Alors,  $(S + T)$  est un opérateur  $n$ -normal.

**Preuve.**

$$\text{Depuis, } (S + T)^n (S + T)^* = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S^{n-k} T^k \right) (S^* + T^*),$$

$$(S + T)^n (S + T)^* = S^n S^* + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k (S + T)^* + T^n S^* + S^n T^* + T^n T^*.$$

$$\text{Ensuite, } (S + T)^* \text{ est commutent avec } \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k,$$

$$(S + T)^n (S + T)^* = S^* S^n + (S + T)^* \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k + S^* T^n + T^* S^n + T^* T^n.$$

Ainsi,

$$(S + T)^n (S + T)^* = (S + T)^* (S^n + T^n) + (S + T)^* \left( \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k \right).$$

Donc,

$$(S + T)^n (S + T)^* = (S + T)^* \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S^{n-k} T^k \right) = (S + T)^* (S + T)^n.$$

□

**Proposition 2.2.3.** [3]

Supposons que  $T$  est  $k$ -normal et  $(k + 1)$ -normal pour un entier positif  $k$ . Alors,  $T$  est  $(k + 2)$ -normal. Et donc  $T$  est  $n$ -normal pour tout  $n \geq k$ .

**Preuve.**

Puisque,  $T$  est  $k$ -normal,  $T^k T^* = T^* T^k$ .

Alors,  $TT^k T^* T = TT^* T^k T$ .

D'où,  $T^{k+1} T^* T = TT^* T^{k+1}$ .

Puisque,  $T$  est  $(k + 1)$ -normal,  $T^* T^{k+2} = T^{k+2} T^*$ . Ainsi,  $T$  est  $(k + 2)$ -normal. □

**Corollaire 2.2.1.**

Si  $T$  est 2-normal et 3-normal, alors  $T$  est  $n$ -normal pour tous  $n \geq 2$ .

*L'exemple suivant montre qu'un opérateur 2-normal et 3-normal peut ne pas être normal.*

**Exemple 2.2.1.**

Soit  $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$  est un opérateur sur espace de Hilbert complexe .

Alors,  $T$  est 2-normal, 3-normal, et donc c'est  $n$ -normal pour tout  $n \geq 2$  est non normal.

**Proposition 2.2.4. [3]**

Supposons que  $T$  est un opérateur isométrie partielle et  $k$ -normal pour un entier positif  $k$ . Donc, si  $T$  est un opérateur  $(k+1)$ -normal, alors  $T$  est  $n$ -normal pour tout  $n \geq k$ .

**Preuve.**

Puisque,  $T$  est isométrie partielle,  $TT^*T = T$  .

Alors,

$$TT^*T^k = T^k, T^kT^*T = T^k.$$

Puisque,  $T$  est  $k$ -normal,

$$T^{k+1}T^* = T^k, T^*T^{k+1} = T^k.$$

D'où,

$$T^{k+1}T^* = T^*T^{k+1}.$$

Donc,  $T$  est  $(k+1)$ -normal. Donc, d'après la proposition 2.2.3,  $T$  est  $n$ -normal pour tout  $n \geq k$ .  $\square$

**Corollaire 2.2.2.**

Si  $T \in B(H)$  est 2-normal et isométrie partielle, alors  $T$  est  $n$ -normal ( $\forall n \geq 2$ ).

**Lemme 2.2.1.**

Soit  $T \in B(H)$  est  $k$ -normal et  $(k+1)$ -normal. Si  $T$  où  $T^*$  est injectif, alors  $T$  est normal.

**Preuve.**

- Comme,  $T$  est  $(k+1)$ -normal, alors

$$T^{k+1}T^* = T^*T^{k+1}.$$

- Et comme,  $T$  est  $k$ -normal, alors

$$T^{k+1}T^* = T^kT^*T.$$

Donc,

$$T^k(TT^* - T^*T) = 0.$$

- Comme,  $T$  est injectif, alors

$$TT^* - T^*T = 0.$$

Donc,  $T$  est normal.

- Dans le cas  $T^*$  est injectif, comme  $T^*$  est  $k$ -normal et  $(k+1)$ -normal,  $T^*$  est normal.

Donc,  $T$  est normal. □

## 2.3 ) Théorie spectrale des opérateurs $n$ -normaux

---

**Théorème 2.3.1.** [1]

Soit  $T \in B(H)$  un opérateur 2-normal et satisfaisant la condition

$$\sigma(T) \cap (\sigma(-T)) \subset \{0\}.$$

Alors

$$\sigma(T) = \sigma_a(T).$$

**Preuve.**

Puisque,  $\sigma(T) = \sigma_a(T) \cup \sigma_r(T)$ , il suffit de montrer que  $\sigma_r(T) \subset \sigma_a(T)$ .

Soit  $z \in \sigma_r(T)$ . Alors, il existe un vecteur non nul  $x \in H$  tel que  $T^*x = \bar{z}x$ .

Depuis,  $T^{*2}x = \bar{z}^2x$  et  $T^2$  est normal, on a  $T^2x = z^2x$ .

1. Si  $z \neq 0$ , alors  $(T+z)(T-z)x = 0$ .

Puisque,  $-z \notin \sigma(T)$ , il est vrai  $(T-z)x = 0$  et donc  $z \in \sigma_p(T)$ .

2. Si  $z = 0$ , alors  $T^2x = 0$  et on a  $0 \in \sigma_p(T)$ .

Par conséquent,  $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ . □

**Théorème 2.3.2.** [9]

Soit  $T \in B(H)$  2-normal et satisfait  $\sigma(T) \cap (\sigma(-T)) \subset \{0\}$ . Alors,

1. Si  $z$  et  $w$  sont des valeurs propres distinctes de  $T$  et  $x, y \in H$  sont respectivement des vecteurs propres correspondants, alors  $\langle x, y \rangle = 0$ .

2. Si  $z$  et  $w$  sont des valeurs distinctes de  $\sigma_a(T)$  et  $\{x_n\}, \{y_n\}$  sont les suites de vecteurs unitaires dans  $H$  telles que

$$(T-z)x_n \rightarrow 0, (T-w)y_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = 0.$$

**Preuve.**

Comme  $(T^2 - z^2)x_n \rightarrow 0$  et  $(T^2 - w^2)y_n \rightarrow 0$  et  $T^2$  est normal, alors  $(T_n - \bar{w}^2)y_n \rightarrow 0$ .

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} z^2 \langle x_n, y_n \rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \langle z^2 x_n, y_n \rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \langle T^2 x_n, y_n \rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \langle x_n, T^{*2} y_n \rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} w^2 \langle x_n, y_n \rangle .$$

Si  $z^2 = w^2$ , alors  $(z + w)(z - w) = 0$ . Comme  $z \neq w$ , on a  $z = -w$ .

D'après  $\sigma(T) \cap (\sigma(-T)) \subset \{0\}$ , ce la implique  $z = w = 0$ , ce qui est impossible pour des valeurs distinctes.

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle .$$

□

**Corollaire 2.3.1.**

Soit  $T \in B(H)$  est 2-normal et  $\sigma(T) \cap (\sigma(-T)) \subset \{0\}$ .

- Si  $z$  et  $w$  sont des valeurs propres distinctes de  $T$ , alors

$$\ker(T - z) \perp \ker(T - w).$$

Soit  $M$  est un sous-espace de  $H$ . Alors,  $M$  est dit un sous-espace réducteur pour  $T$ .

- Si  $T(M) \subset M$  et  $T^*(M) \subset M$ . ( $M$  c'est un sous-espace invariant pour  $T$  et  $T^*$ ).

**Théorème 2.3.3.** [9]

Soit  $T \in H$  est 2-normal et  $\sigma(T) \cap (\sigma(-T)) \subset \{0\}$ .

Si  $z$  est une valeur propre non nulle de  $T$ , alors

$$\ker(T - z) = \ker(T^2 - z^2) = \ker(T^{*2} - \bar{z}^2) = \ker(T^* - \bar{z}).$$

Donc,  $\ker(T - z)$  est un sous-espace réducteur pour  $T$ .

**Preuve.**

Montrons d'abord  $\ker(T - z) = \ker(T^2 - z^2)$ .

Puisqu'il est évident que

$$\ker(T - z) \subset \ker(T^2 - z^2).$$

Et pour  $x \in \ker(T^2 - z^2)$ , c'est-à-dire

$$\ker(T^2 - z^2)x = 0.$$

Alors,

$$\ker(T + z)(T - z)x = 0.$$

Puisque,  $z \neq 0$  et  $\sigma(T) \cap (\sigma(-T)) \subset \{0\}$ . On a

$$-z \notin \sigma(T).$$

Il s'ensuit

$$(T - z)x = 0 \text{ et } x \in \ker(T - z) = 0.$$

Donc,

$$\ker(T^2 - z^2) \subset \ker(T - z).$$

par conséquent

$$\ker(T - z) = \ker(T^2 - z^2),$$

Depuis,  $T^2$  c'est normal, alors

$$\ker(T^2 - z^2) = \ker(T^{*2} - \bar{z}^2).$$

Puisque,

$$-z \notin \sigma(T^*).$$

Donc,

$$\ker(T^2 - z^2) = \ker(T^{*2} - \bar{z}^2).$$

Finalement, d'après les résultats  $\ker(T - z)$  est un réducteur sous-espace pour  $T$ . □

**Remarque 2.3.1.**

Si  $T$  est un opérateur 2-normal, alors le  $\ker(T)$  n'est pas son sous-espace réducteur .

**Exemple 2.3.1.**

Soit

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Alors,  $S^2 = 0$  et  $\sigma(S) = \{0\}$ ,  $T$  est 2-normal et satisfait  $\sigma(T) \cap (\sigma(-T)) \subset \{0\}$ .

Soit  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Alors,  $x \in \ker(S)$  et  $SS^*x = x \neq 0$ .

Donc,  $\ker(S)$  ne réduire  $S$  et  $\ker(S) \subsetneq \ker(S^2) = \mathbb{C}^2$ .

On a

$$\sigma(S) = \{0\} \neq \{a + bi \in \mathbb{C} : |ab| \leq \frac{1}{2}\} = W(S)$$

où

$$W(S) = \{\langle Sx, x \rangle, \|x\| = 1\} \text{ (l'image numérique de } S\text{)}.$$

Donc,  $S$  n'est pas convexoïde, c'est-à-dire  $\text{co}\sigma(T) \subsetneq \overline{W(T)}$ , où  $\text{co}\sigma(T)$  est l'enveloppe convexe de  $\sigma(T)$  et  $\overline{W(T)}$  est la fermeture de  $W(T)$ .

**Théorème 2.3.4.** [9]

Soit  $\pi_{00}(T)$  l'ensemble tous valeurs propres isolées de multiplicité finie de  $T$ , et le spectre de Weyl  $w(T) =$

$$\bigcap_{K \in \mathcal{K}(H)} \sigma(T + K), \text{ où } \mathcal{K}(H) \text{ est l'ensemble de tous les opérateurs compacts sur } H.$$

Si  $T$  est un opérateur 2-normal satisfait  $\sigma(T) \cap (\sigma(-T)) \subset \{0\} \implies \sigma(T) - \pi_{00}(T) \subset w(T)$ .

**Théorème 2.3.5.** [9]

Si  $T$  est un opérateur 2-normal alors

$$\sigma(T) \cap (\sigma(-T)) \subset \{0\} \implies w(T) \subset \sigma(T) - (\pi_{00}(T) - \{0\}).$$

*Preuve.*

Soit  $z \in \pi_{00}(T) - \{0\}$ . D'après le théorème 2.3.3,  $\ker(T - z)$  est un sous-espace réducteur de  $T$ . On a donc la décomposition  $T - z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$  sur  $\ker(T - z) \oplus \ker(T - z)^\perp$ .

Puisque,

$$T = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & S + z \end{pmatrix} \text{ et } T|_{\ker(T-z)^\perp} \text{ est 2-normal.}$$

Alors,

$$S + z \text{ est un opérateur 2-normal satisfaisant condition sur } \ker(T - z)^\perp.$$

Si  $z \in \sigma(S + z)$ , alors  $z \in \sigma_p(S + z)$  car  $z$  est un point isolé de  $\sigma(S + z)$ . C'est une contradiction.

Donc,

$$z \notin \sigma(S + z) \text{ et donc } S \text{ est inversible.}$$

Soit  $K = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors,  $K \in \mathcal{K}(H)$  et  $T + K - z = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$  est un opérateur inversible.

Par conséquent,  $z \notin w(T)$ . □

**Théorème 2.3.6.** [9]

Si  $T$  est un opérateur 2-normal avec la propriété que

$$\sigma(T) \cap (\sigma(-T)) = \{0\}$$

alors

$$w(T) = \sigma(T) - \pi_{00}(T)$$

c'est-à-dire que le théorème de Weyl est valable pour  $T$ .

**Théorème 2.3.7.** [9]

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $T - t$  est  $n$ -normal pour tout  $t \geq 0$ .
2.  $T$  est normal.

3.  $T - z$  est  $n$ -normal pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

**Preuve.**

Il suffit de prouver (1)  $\implies$  (2). Puisque,  $T$  et  $T - t$  sont  $n$ -normaux, cela est vrai

$$\begin{aligned} (T - t)^*(T - t)^n - (T - t)^n(T - t)^* &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} t^j (T^*T^{n-j} - T^{n-j}T^*) \\ &= (-1)^{n-1} n t^{n-1} (T^*T - TT^*) + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j \binom{n}{j} t^j (T^*T^{n-j} - T^{n-j}T^*) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$(-1)^{n-1} n (T^*T - TT^*) + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{t^j}{t^{n-1}} (T^*T^{n-j} - T^{n-j}T^*) = 0.$$

Je prends  $t \longrightarrow \infty$ , il tient  $T^*T - TT^* = 0$  et donc  $T$  est normal. □

**Définition 2.3.1.** [9]

En générale, pour  $T$  un opérateur  $n$ -normal dans  $B(H)$ , nous définissons la propriété suivante

$$\sigma(T) \cap \left( \bigcup_{j=1}^{n-1} e^{\frac{2j\pi}{n}i} \sigma(T) \right) \subset \{0\}. \quad (2.4)$$

**Lemme 2.3.1.**

Soit  $T \in B(H)$  satisfaisant (2.4). Si  $z$  est un point isolé de  $(T)$ , alors  $z^n$  est un point isolé de  $(T^n)$ .

**Preuve.**

Supposons que  $z$  est un point isolé de  $\sigma(T)$  et que  $z^n$  n'est pas un point isolé de  $\sigma(T^n)$ . Il existe alors une séquence  $z_k \in \sigma(T)$  telle que  $z_k^n \rightarrow z^n (k \rightarrow \infty)$  par le théorème 1.2.5

1. Si  $z = 0$ , alors il est clair que  $z_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ . Donc, 0 n'est pas un point isolé. C'est une contradiction.

2. Soit  $z \neq 0$ . Puisque,

$$(z_k e^{\frac{2\pi}{n}i} z)(z_k e^{\frac{2 \cdot 2\pi}{n}i} z)(z_k e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i} z)(z_k - z) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \text{ nous pouvons supposer ce qui suit :}$$

(a)  $z_k \rightarrow z (k \rightarrow \infty)$  ou

(b) il existe  $j (j = 1, \dots, n-1)$  tel que  $z_k \rightarrow e^{\frac{2j\pi}{n}i} z (k \rightarrow \infty)$ . Puisque,  $z$  est un point isolé de  $\sigma(T)$ , (1) n'est pas vrai. Si  $z_k \rightarrow e^{\frac{2j\pi}{n}i} z (k \rightarrow \infty)$ , alors  $z_k \rightarrow e^{\frac{2j\pi}{n}i} z$ .

Depuis,  $z_k \in \sigma(T)$  et  $\sigma(T)$  est compact,  $e^{\frac{2j\pi}{n}i} z \in \sigma(T)$ . Puisque,  $z \neq 0$  et  $z \in \sigma(T) \cap (e^{\frac{2j\pi}{n}i} z \sigma(T))$ , c'est une contradiction et prouve le lemme. □

**Théorème 2.3.8.** [9]

Soit  $T \in B(H)$   $n$ -normal et vérifiant (2.4). Alors,  $T$  est isoloïde.

**Lemme 2.3.2.**

Soit  $T \in B(H)$  satisfait (2.4). Si  $z \in \sigma_a(T)$ , alors  $z^n \in \sigma_a(T^n)$ .

**Preuve.**

Suppose que  $z \in \sigma_a(T)$ , et  $z^n \in \sigma_a(T^n)$ . Alors,

il existe une séquence  $z_k \in \sigma(T)$  tel que  $z_k^n \rightarrow z^n (k \rightarrow \infty)$ .

1) Si  $z = 0$ , alors il est clair que  $z_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ .

Donc,  $0 \notin \sigma_a(T)$ , (c'est une contradiction).

2) Soit  $z \neq 0$ . Comme

$$(z_k - e^{\frac{2\pi}{n}i}Z).(z_k - e^{\frac{2-2\pi}{n}i}Z)\dots(z_k - e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i}Z).(z_k - z) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

On peut supposer :

i)  $z_k \rightarrow z (k \rightarrow \infty)$ .

ii) il existe  $j (j = 1, \dots, n-1)$ , tel que  $(z_k - e^{\frac{j\pi}{n}i}Z)(k \rightarrow \infty)$ .

Comme  $z \in \sigma_a(T)$ , i) ne pas vrai. Mais si  $z_k \rightarrow e^{\frac{2j\pi}{n}i}Z (k \rightarrow \infty)$ , alors  $z_k \rightarrow e^{\frac{2j\pi}{n}i}Z$ .

Comme  $z_k \in \sigma(T)$  et  $\sigma(T)$  est compact,  $e^{\frac{2j\pi}{n}i}Z \in \sigma(T)$ .

Comme  $z \neq 0$  et  $z \in \sigma(T) \cap \left( e^{\frac{2j\pi}{n}i}\sigma(T) \right)$ , c'est une contradiction.

□

**Théorème 2.3.9.** [9]

Soit  $T \in B(H)$  et  $n$ -normal satisfait (2.4). Alors,  $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ .

**Théorème 2.3.10.** [9]

Soit  $T \in B(H)$  et  $n$ -normal satisfait (2.4). Alors,

1 - Si  $z$  et  $w$  sont des valeurs propres distinctes de  $T$  et  $x, y \in H$  sont les vecteurs propres correspondants, respectivement, alors  $\langle x, y \rangle = 0$ .

2 - Si  $z, w$  sont des valeurs distinctes de  $\sigma_a(T)$  et  $x_n, y_n$  sont les suites des vecteurs unitaires dans  $H$  tel que  $(T - z)x_n \rightarrow 0$  et  $(T - w)y_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = 0.$$

**Corollaire 2.3.2.**

Soit  $T \in B(H)$   $n$ -normal et satisfait (2.4). Si  $z$  et  $w$  sont des valeurs propres distinctes de  $T$ , alors  $\ker(T - z) \perp \ker(T - w)$ .

**Théorème 2.3.11.** [9]

Soit  $T \in B(H)$   $n$ -normal et satisfait (2.4). Si  $z$  est une valeur propre non nulle de  $T$ , alors  $\ker(T - z) = \ker(T^n - z^n) = \ker(T^{*n} - \bar{z}^n) = \ker(T^* - \bar{z})$  et donc  $\ker(T - z)$  est un sous-espace réducteur pour  $T$ .

**Théorème 2.3.12.** [9]

Si  $T \in B(H)$  est un opérateur  $n$ -normal satisfaisant (2.4), alors

$$\sigma(T) - \pi_{00}(T) \subset w(T) \subset \sigma(T) - (\pi_{00}(T) - \{0\}).$$

De plus,  $T$  est inversible, et  $\sigma(T) - \pi_{00}(T) = w(T)$ , c'est-à-dire, que le théorème de Weyl est valable pour  $T$ .

## 2.4 ) Les opérateurs $(n,m)$ -normaux

---

**Définition 2.4.1.**

Soit  $T \in B(H)$ , on dit que  $T$  est  $(n,m)$ -normal si

$$T^n(T^m)^* = (T^m)^*T^n,$$

où  $n, m$  entiers non négatifs.

**Remarque 2.4.1.**

Tout opérateur normal borné est  $(n,m)$ -normal, (où  $n = m = 1$ ). Et tous les opérateur  $n$ -normal est  $(n,m)$ -normal (où  $m = 1$ ). Mais l'inverse n'est pas toujours vrai.

**Exemple 2.4.1.**

Soit  $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ .

Alors,

$$T^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, T^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, T^3 = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \text{ et } (T^2)^* = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Alors,

$$T^3(T^2)^* = \begin{bmatrix} 32 & 16 \\ 0 & -32 \end{bmatrix} = (T^2)^*T^3.$$

Donc,  $T$  est  $(3,2)$ -normal. Mais est non 3-normal.

Comme,

$$T^3T^* = \begin{bmatrix} 20 & -8 \\ -8 & -16 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 20 \end{bmatrix} = T^*T^3.$$

**Corollaire 2.4.1.**

Nous donnons la condition suffisante et nécessaire pour que la matrice  $2 \times 2$  soit opérateur  $(2,2)$ -normal .

**Exemple 2.4.2.**

Soit  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Alors,  $T(2, 2)$ -normal si  $b = c$ .

**Preuve.**

$T$  est  $(2, 2)$ -normal si, et seulement si,  $T^2(T^2)^* = (T^2)^*T^2$ .

$$\text{On a } T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, T^* = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Noter que,

$$T^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}, \text{ alors } (T^2)^* = \begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$(T^2)^*T^2 = \begin{pmatrix} (a^2 + bc)^2 + c^2(a+d)^2 & (a+d)(b(a^2 + bc) + c(d^2 + bc)) \\ (a+d)(b(a^2 + bc) + c(d^2 + bc)) & b^2(a+d)^2 + (d^2 + bc)^2 \end{pmatrix}$$

et

$$T^2(T^2)^* = \begin{pmatrix} (a^2 + bc)^2 + b^2(a+d)^2 & (a+d)(c(a^2 + bc) + c(d^2 + bc)) \\ (a+d)(c(a^2 + bc) + b(d^2 + bc)) & c^2(a+d)^2 + (d^2 + bc)^2 \end{pmatrix}$$

ce qui implique  $T$  est  $(2, 2)$ -normal si, et seulement si,  $b = c$ . □

**Proposition 2.4.1. [1]**

Soit  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ , où  $a, b, c$  sont des nombres complexes, et  $n, m \geq 2$ . Alors,  $T$  est  $(n, m)$ -normal si, et seulement si,

$$b^2(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1})(a^{m-1} + a^{m-2}c + \dots + c^{m-1}) = 0,$$

$$c^m = a^m \text{ et } c^n = a^n.$$

**Preuve.**

On a

$$T^n = \begin{pmatrix} a^n & b(\sum_{t=1}^n a^{n-t}c^{t-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix} \text{ et } (T^m)^* = \begin{pmatrix} a^m & 0 \\ b(\sum_{t=1}^m a^{m-t}c^{t-1}) & c^m \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$T^n(T^m)^* = \begin{pmatrix} [a^n a^m + b^2(\sum_{t=1}^n a^{n-t} c^{t-1})(\sum_{t=1}^m a^{m-t} c^{t-1})] & [bc^m(\sum_{t=1}^n a^{n-t} c^{t-1})] \\ bc^n(a^{m-1} + a^{m-2}c + \dots + c^{m-1}) & c^n c^m \end{pmatrix}.$$

$$(T^m)^* T^n = \begin{pmatrix} a^n a^m & ba^m(\sum_{t=1}^n a^{n-t} c^{t-1}) \\ [ba^n(\sum_{t=1}^m a^{m-t} c^{t-1})] & [c^n c^m + b^2(\sum_{t=1}^n a^{n-t} c^{t-1})(\sum_{t=1}^m a^{m-t} c^{t-1})] \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,  $T$  est  $(n, m)$ -normal si, et seulement si,

$$b^2 \sum_{t=1}^n a^{n-t} c^{t-1} (\sum_{t=1}^m a^{m-t} c^{t-1}) = 0 \quad c^m = a^m, c^n = a^n.$$

□

**Proposition 2.4.2.** [1]

$T$  est un opérateur  $(n, m)$ -normal si, et seulement si,  $T$  est  $(m, n)$ -normal.

*Preuve.*

Soit  $T$  est  $(n, m)$ -normal, alors  $T^n(T^m)^* = (T^m)^* T^n$ .

Donc,

$$T^m(T^n)^* = ((T^m(T^n)^*)^*)^* = (T^n(T^m)^*)^* = ((T^m)^* T^n)^* = (T^n)^* T^m.$$

Alors,  $T$  est  $(m, n)$ -normal.

□

**Proposition 2.4.3.** [1]

Soit  $T \in B(H)$ . Si  $T$  est  $(n, m)$ -normal, alors  $T^{nm}$  est un opérateur normal.

*Preuve.*

Supposons que  $T$  est  $(n, m)$ -normal, alors

$$T^n(T^m)^* = (T^m)^* T^n,$$

et  $(T^k)^* = (T^*)^k$  pour chaque  $k$  entier non négatif. Donc,

$$\begin{aligned} T^{nm}(T^{nm})^* &= (T^n)^m ((T^m)^n)^* = \underbrace{(T^n T^n \dots T^n)}_{n\text{-fois}} \underbrace{(T^m T^m \dots T^m)^*}_{m\text{-fois}} \\ &= T^n T^n \dots T^n (T^m)^* \dots (T^m)^* = T^n T^n \dots (T^m)^* T^n (T^m)^* \dots (T^m)^* \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= \underbrace{(T^m)^* (T^m)^* \dots (T^m)^*}_{m\text{-fois}} \underbrace{(T^n T^n \dots T^n)}_{n\text{-fois}} = \underbrace{(T^m T^m \dots T^m)^*}_{m\text{-fois}} \underbrace{(T^n T^n \dots T^n)}_{n\text{-fois}} \\ &= ((T^m)^n)^* (T^n)^m = ((T^n)^m)^* (T^n)^m = (T^{nm})^* T^{nm}. \end{aligned}$$

Donc,  $T^{nm}$  est normal. □

**Lemme 2.4.1.**

Soit  $T \in B(H)$  est un opérateur  $(n,m)$ -normal. Alors,

1.  $T^*$  est  $(m,n)$ -normal.
2. Si  $T^{-1}$  existe, alors  $T^{-1}$  est  $(n,m)$ -normal .
3. Si  $S \in B(H)$  est équivalent unitaire à  $T$ , alors  $S$  est  $(n,m)$ -normal.
4. Si  $M$  est un sous-espace fermé de  $H$  qui réduit  $T$ , alors  $A|_M$  est  $(n,m)$ -normal sur  $M$ .
5. Si  $T$  est  $(n,m)$ -normal, alors  $T^k$  est normal où  $k$  est le multiple le moins commun de  $n$  et  $m$ .
6. Si  $T$  est quasi-nilpotent, alors  $T$  est nilpotent.

**Preuve.**

Puisque  $T$  est  $(n,m)$ -normal, alors  $T^n(T^m)^* = (T^m)^*T^n$ .

1. Par proposition 2.4.2,

$$(T^*)^n((T^*)^*)^m = (T^*)^n T^m = T^m (T^*)^n = ((T^*)^*)^m (T^*)^n.$$

Alors,  $T^*$  est  $(m,n)$ -normal.

2. On a

$$\begin{aligned} (T^{-1})^n((T^{-1})^*)^n &= (T^n)^{-1}(T^*)^k)^{-1} = ((T^*)^m(T^n))^1 = ((T^n)(T^m)^*)^{-1} = (T^n(T^m)^*)^{-1} \\ &= ((T^m)^*)^{-1}(T^n)^{-1} = ((T^{-1})^*)^m(T^{-1})^n. \end{aligned}$$

Alors,  $T^{-1}$  est  $(n,m)$ -normal.

3. Comme  $S$  et  $T$  sont unitairement équivalents, alors  $S = UTU^*$ . Donc,  $(UTU^*)^n = UT^nU^*$ .

Alors,

$$\begin{aligned}
S^n(S^m)^* &= (UTU^*)^n((UTU^*)^m)^* \\
&= UT^nU^*(UT^mU^*)^* \\
&= UT^nU^*U(T^m)^*U^* \\
&= UT^n(T^m)^*U^* \\
&= U(T^m)^*T^nU^* \\
&= U(T^m)^*U^*UT^nU^* \\
&= ((T^mU^*)^*U^*)UT^nU^* \\
&= (U(T^mU^*))^*UT^nU^* \\
&= ((UTU^*)^m)^*(UTU^*)^n \\
&= (S^m)^*S^n.
\end{aligned}$$

Donc,  $S$  est (n,m)-normal.

4. On a  $T$  est (n,m)-normal, alors par la proposition 2.4.3,  $T^{nm}$  est normal,  $M$  réduit  $T$ , alors  $T_{|M}^{nm}$  est normal.

De plus

$$T_{|M}^{nm} = (T_{|M})^{nm},$$

donc  $(T_{|M})^{nm}$  est normal.

5. Pour pour  $k = n.j$  et  $k = m.l$ . Puis  $T$  est (n,m)-normal, il 'ensuit que

$$T^{*k}T^k = \overbrace{T^{*m} \dots T^{*m}}^{\ell} \cdot \overbrace{T^n \dots T^n}^j = T^n \dots T^n \cdot T^{*m} \dots T^{*m} = T^k T^{*k},$$

que signifie que  $T^k$  est normal.

6. Si  $T$  est quasi-nilpotent, tq  $\sigma(T) = \{0\}$ , alors  $\sigma(T^k) = \{0\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

Soit  $k_0$  le multiple le moins commun de  $n$  et  $m$ . Alors,  $T^{k_0}$  est normal d'après le lemme 2.4.1 (5).

Puisque,  $T^{k_0} = 0$ .

□

**Corollaire 2.4.2.**

Soit  $T \in B(H)$  alors  $(n, m)$ -normal, donc  $T$  est isoloid est paraloïd. En outre, que  $\lambda$  soit un point isolé du spectre de  $T$ , alors  $\lambda$  est un pôle du résolveur et les instructions suivantes.

1. Si  $\lambda = 0$ , alors  $H_0(T) = E_T(\{0\})H = \ker(T^{nm}) = \ker(T^{*nm})$ ,  $E_T(\{0\})$  est auto-adjoint et l'ordre de  $0$  n'est pas supérieur à  $n$ .
2. Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $H_0(T - \lambda) = E_T(\{\lambda\})H = \ker(T - \lambda)$  et l'ordre de  $\lambda$  est 1.

**Théorème 2.4.1.** [1]

Suppose que  $S$  commute avec  $T$ . Si  $S$  et  $T$  deux opérateurs  $(n, m)$ -normaux, alors  $(ST)$  est  $(n, m)$ -normal.

**Preuve.**

Comme,  $S$  commute avec  $T$ , alors  $(ST)^n = S^n T^n$ .

De plus,  $S$  commute avec  $T^*$  et  $T$  commute avec  $S^*$ .

On a :

$$\begin{aligned}
 (ST)^n ((ST)^m)^* &= S^n T^n (S^m T^m)^* = S^n T^n (T^m)^* (S^m)^* \\
 &= S^n T^n (T^m)^* (S^m)^* = S^n (T^m)^* T^n (S^m)^* \quad (T \text{ est } (n, m)\text{-normal}) \\
 &= (T^m)^* S^m (S^m)^* T^n = (T^m)^* (S^m)^* S^m \quad (S \text{ est } (n, m)\text{-normal}) \\
 &= ((ST)^m)^* (ST)^n.
 \end{aligned}$$

Alors,  $ST$  est  $(n, m)$ -normal. □

**Théorème 2.4.2.** [1]

Soit  $T_1, T_2, \dots, T_p$  sont des opérateurs  $(n, m)$ -normaux sur  $B(H)$ , alors  $(T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)$  est un opérateur  $(n, m)$ -normal.

**Preuve.**

Puisque  $T_1, T_2, \dots, T_p$  sont  $(n, m)$ -normaux, alors  $T_i^n (T_i^m)^* = (T_i^m)^* T_i^n \quad \forall i = 1, 2, \dots, p$ , alors

$$\begin{aligned}
 (T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)^n ((T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)^m)^* &= (T_1^n \oplus T_2^n \oplus \dots \oplus T_p^n) (T_1^m \oplus T_2^m \oplus \dots \oplus T_p^m)^* \\
 &= (T_1^n \oplus T_2^n \oplus \dots \oplus T_p^n) ((T_1^m)^* \oplus (T_2^m)^* \oplus \dots \oplus (T_p^m)^*) \\
 &= T_1^n (T_1^m)^* \oplus T_2^n (T_2^m)^* \oplus \dots \oplus T_p^n (T_p^m)^* \\
 &= (T_1^m)^* T_1^n \oplus (T_2^m)^* T_2^n \oplus (T_p^m)^* T_p^n \\
 &= ((T_1^m)^* \oplus (T_2^m)^* \oplus \dots \oplus (T_p^m)^*) (T_1^n \oplus T_2^n \oplus \dots \oplus T_p^n) \\
 &= (T_1^m \oplus T_2^m \oplus \dots \oplus T_p^m)^* (T_1^n \oplus T_2^n \oplus \dots \oplus T_p^n) \\
 &= ((T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)^m)^* (T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)^n.
 \end{aligned}$$

Donc,  $(T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)$  est  $(n,m)$ -normal.  $\square$

**Théorème 2.4.3.** [1]

Soit  $T_1, T_2, \dots, T_p$  sont des opérateurs  $(n, m)$ -normaux sur  $B(H)$ , alors  $(T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p)$  est un opérateur  $(n, m)$ -normal.

**Preuve.**

Puisque  $T_1, T_2, \dots, T_p$  sont  $(n,m)$ -normaux, alors  $T_i^n (T_i^m)^* = (T_i^m)^* T_i^n \quad \forall i = 1, 2, \dots, p$ .

Et soit  $x_1, x_2, \dots, x_p \in H$ , alors

$$\begin{aligned} & (T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p)^n ((T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p)^m)^* (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p) \\ &= (T_1^n \otimes T_2^n \otimes \dots \otimes T_p^n) (T_1^m \otimes T_2^m \otimes \dots \otimes T_p^m)^* (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p) \\ &= T_1^n (T_1^m)^* x_1 \otimes T_2^n (T_2^m)^* x_2 \otimes \dots \otimes T_p^n (T_p^m)^* x_p \\ &= (T_1^m)^* T_1^n x_1 \otimes (T_2^m)^* T_2^n x_2 \otimes (T_p^m)^* T_p^n x_p \\ &= ((T_1^m)^* \otimes (T_2^m)^* \otimes \dots \otimes (T_p^m)^*) (T_1^n \otimes T_2^n \otimes \dots \otimes T_p^n) (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p) \\ &= (T_1^m \otimes T_2^m \otimes \dots \otimes T_p^m)^* (T_1^n \otimes T_2^n \otimes \dots \otimes T_p^n) (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p) \\ &= ((T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p)^m)^* (T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p)^n (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p). \end{aligned}$$

Donc,  $(T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p)$  est  $(n,m)$ -normal.  $\square$

**Théorème 2.4.4.** [1]

Pour  $T \in B(H)$ , soit  $F = T^n + T^{*m}$  et  $G = T^n - T^{*m}$ .

Alors,  $T$  est  $(n,m)$ -normal si, et seulement si,  $F$  commute avec  $G$ .

**Preuve.**

Par  $FG = T^{2n} - T^n T^{*m} + T^{*m} T^n - T^{*2m}$  et  $GF = T^{2n} + T^n T^{*m} - T^{*m} T^n - T^{*2m}$ .

Alors,

$$FG = GF$$

$$\Leftrightarrow T^{*m} T^n = T^n T^{*m}.$$

$$\Leftrightarrow T \text{ est } (n,m)\text{-normal} \quad \square$$

**Théorème 2.4.5.** [9]

Pour  $T \in B(H)$ , soit  $A = T^n T^{*m}$ ,  $F = T^n + T^{*m}$  et  $G = T^n - T^{*m}$ . Si  $T$  est  $(n,m)$ -normal, alors  $A$  commute avec  $F$  et  $G$ .

**Preuve.**

Puisque  $T$  est  $(n, m)$ -normal, nous avons

$$AF = T^n T^{*m} (T^n + T^{*m}) = T^n T^n T^{*m} + T^{*m} T^n T^{*m} = FA.$$

$$AG = T^n T^{*m} (T^n - T^{*m}) = T^n T^n T^{*m} - T^{*m} T^n T^{*m} = GA.$$

□

**Théorème 2.4.6.** [9]

Soit  $T$  un opérateur  $(n, m)$ -normal inversible. Alors,  $T$  et  $T^{-1}$  ont un sous-espace invariant fermé commun non trivial.

**Preuve.**

Soit  $k$  le moins commun multiple de  $n, m$ . Puis d'après le lemme 2.4.1(5)

$T^k$  normale. D'où  $T^{-k}$  : également normal.

$T^k$  et  $T^{-k}$  n'ont vecteur hypercyclique.

$T$  et  $T^{-1}$  n'ont vecteur hypercyclique.

$T$  et  $T^{-1}$  ont un sous-espace invariant fermé non trivial commun.

□

**Proposition 2.4.4.** [1]

Soit  $T$  est  $(k, m)$ -normal et  $(k + 1, m)$ -normal, où  $k, m$  sont entiers non négatifs, alors  $T$  est  $(k + 2, m)$ -normal. Donc,  $T$  est opérateur  $(n, m)$ -normal pour tout  $n, m$ .

**Preuve.**

Depuis  $T$  est  $(k, m)$ -normal, et  $(k + 1, m)$ -normal.

Alors,

$$T^k (T^m)^* = (T^m)^* T^k, T^{k+1} (T^m)^* = (T^m)^* T^{k+1},$$

alors

$$\begin{aligned} T^{k+2} (T^m)^* &= T T^{k+1} (T^m)^* = T (T^m)^* T^{k+1} = T (T^m)^* T^k T \\ &= T T^k (T^m)^* T = T^{k+1} (T^m)^* T \\ &= (T^m)^* T^{k+1} T = (T^m)^* T^{k+2}. \end{aligned}$$

Donc,  $T$  est  $(k + 2, m)$ -normal, alors  $T$  est  $(n, m)$ -normal .

□

**Proposition 2.4.5.** [1]

Soient  $T$  un opérateur  $(n, k)$ -normal et  $(n, k+1)$ -normal, où  $n, k$  sont entiers non négatifs, alors  $T$  est  $(n, k + 2)$ -normal. Donc,  $T$  est  $(n, m)$ -normal.

---

# Applications des opérateurs n-normaux

---

Dans ce chapitre, on va voir quelques applications des opérateurs n-normal, où dans la première parties on va calculer la racine de l'opérateur normal qui est un opérateur 2-normal, après on va vu un programme logiciel Matlab pour tester les matrices si elle est n-normal ou non.

## 3.1 ) Racine d'un opérateur normal

---

---

Dans ce parties, on va calculer la racine de l'opérateur de multiplication qui est normal et on va montrer qu'il est un opérateur 2-normal.

On définit l'opérateur de multiplication comme suit :

Soit  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable bornée sur un espace mesurable  $(X, \mathcal{M})$ . La multiplication par  $\phi$ , notée  $M\phi$ , est un opérateur définie sur l'espace des fonctions mesurables  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  de la manière suivante :

$$(M\phi)(x) = \phi(x) \cdot f(x)$$

- D'abord, Il s'agit prouver que  $M\phi$  est un opérateur normal. En suite,  $(M\phi)^*$  l'adjoint de  $M\phi$  est défini comme suit :

$$(M\phi)^* f = \bar{\phi} \cdot f$$

pour tout  $f \in L^2(X)$ , où  $\bar{\phi}$  est la fonction conjuguée de  $\phi$ .

Donc, pour vérifier si  $M\phi$  est normal, nous devons calculer  $M\phi(M\phi)^*$ ,  $(M\phi)^*M\phi$  et voir s'ils sont

égaux. On a

$$M\phi(M\phi)^* = M\phi(\bar{\phi}f) = \phi\bar{\phi}f$$

$$(M\phi)^*M\phi = (\bar{\phi}f)\phi = \phi\bar{\phi}f$$

puisque

$$M\phi(M\phi)^* = (M\phi)^*M\phi$$

on trouve que  $M\phi$  est un opérateur normal.

— Pour trouver la racine carrée de l'opérateur  $M\phi$ , nous devons trouver un opérateur  $R$  tel que

$$R^2 = M\phi.$$

En général, il n'est pas toujours possible de définir une racine carrée pour tous les opérateurs. Cependant, dans certains cas spécifiques, il est possible de le faire.

Dans ce cas, nous voulons trouver un opérateur  $R$  tel que

$$R^2 = M\phi,$$

c'est-à-dire :

$$R^2 = (M\phi)$$

Puisque, nous savons que  $M\phi = \phi \cdot$ , où  $\cdot$  est la multiplication par la fonction  $f$ , nous pouvons essayer de trouver un opérateur  $R$  tel que  $R^2 = \phi \cdot$ .

Une approche possible est de considérer l'opérateur  $R$  défini par :

$$Rf = \sqrt{\phi} \cdot f$$

où  $\sqrt{\phi}$  est la racine carrée de la fonction  $\phi$ , qui est bien définie puisque  $\phi$  est bornée. Alors, calculons  $R^2$  :

$$R^2f = R(Rf) = R(\sqrt{\phi} \cdot f) = \sqrt{\phi} \cdot (\sqrt{\phi} \cdot f) = (\sqrt{\phi})^2 \cdot f = \phi \cdot f = M\phi$$

Donc, dans ce cas particulier, l'opérateur  $R$  défini comme  $Rf = \sqrt{\phi} \cdot f$  est la racine carrée de l'opérateur  $M\phi$ .

— Finalement,  $R$  est un opérateur 2-normal car  $M\phi$  est un opérateur normal.

### 3.1.1 ) Cas Matricielle

---

Dans ce partie, on va chercher la racine carré d'un matrice normal.

On considère, la matrice normale suivante :

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est hermitienne, car elle est égale à sa propre transposée conjuguée :

$$T^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, la matrice  $T$  est une matrice normale.

Pour trouver la racine carrée d'une matrice, une approche consiste à utiliser la décomposition spectrale si la matrice est diagonalisable.

Pour une matrice hermitienne comme  $T$ , la décomposition spectrale peut être utilisée. Étant donnée la matrice  $T$  :

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tout d'abord, nous trouvons les valeurs propres et les vecteurs propres de  $T$ . Ensuite, nous pouvons exprimer  $T$  sous la forme  $T = PDP^{-1}$ , où  $P$  est la matrice contenant les vecteurs propres en tant que colonnes et  $D$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres. Ensuite, la racine carrée de  $T$  est donnée par  $P\sqrt{D}P^{-1}$ , où  $\sqrt{D}$  est obtenue en prenant la racine carrée de chaque valeur propre. Calculons cela :

1. Valeurs propres de  $T$  :

$$\begin{aligned} \det(T - \lambda I) &= 0 \\ \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) &= (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\ \lambda_1 &= 1, \quad \lambda_2 = 3 \end{aligned}$$

2. Vecteurs propres correspondant à  $\lambda_1 = 1$  :

$$T - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Noyau}(T - \lambda_1 I) = \text{généralisé par } \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{Vecteur propre normalisé : } v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Vecteurs propres correspondant à  $\lambda_2 = 3$  :

$$T - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Noyau}(T - \lambda_2 I) = \text{généralisé par } \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Vecteur propre normalisé :  $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Maintenant, nous construisons  $P$  et  $D$  :

$$P = [v_1 \quad v_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ensuite, nous calculons  $\sqrt{D}$  :

$$\sqrt{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{1} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Enfin, nous calculons  $P\sqrt{D}P^{-1}$  pour trouver la racine carrée de  $T$  :

$$\begin{aligned} P\sqrt{D}P^{-1} &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} & 3 \\ 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent, la racine carrée de la matrice  $T$  est :

$$\sqrt{T} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

## 3.2 ) Opérateur n-nilpotent

---

Nous avons vu dans le deuxième chapitre que tous opérateurs nilpotents sont des opérateurs n -Normal, donc, nous découvrirons quelques exemples des matrices nilpotentes.

On définit la matrice  $T$  comme suit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour trouver le plus petit  $n$  tel que  $T^n = 0$ , calculons  $T^2$ ,  $T^3$  et  $T^4$  :

$$T^2 = T \times T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = T \times T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^4 = T \times T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme vous pouvez le voir,  $T^4 = 0$ , ce qui fait de  $T$  une matrice 4-nilpotente.

L'utilisateur  $T$  est de taille  $(n \times n)$  et 5-nilpotent.

Compris! Construisons une matrice 5-nilpotente de taille  $6 \times 6$ . Considérez la suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour trouver le plus petit  $n$  tel que  $T^n = 0$ , calculons  $T^2$ ,  $T^3$ ,  $T^4$  et  $T^5$  :

$$T^2 = T \times T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = T \times T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^4 = T \times T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^5 = T \times T^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme vous pouvez le voir,  $T^5 = 0$ , ce qui fait de  $T$  une matrice 5-nilpotente.

### 3.3 ) Cas $T$ est un opérateur 2-normal :

---

Un opérateur  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , où  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  est dit être 2-normal si, et seulement si,  $(a + d) = 0$  et  $|b| = |c|$ .

*Preuve.*

Soit  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $T^* = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ .

On a

$$T^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} T^2 T^* &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^3 + abc + ab^2 + bd^2 & a^2c + bc^2 + abd + bd^2 \\ a^2c + acd + b^2c + bd^2 & ac^2 + dc^2 + b^2c + d^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^* T^2 &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^3 + abc + ac^2 + dc^2 & a^2b + abd + bc^2 + cd^2 \\ ba^2 + b^2c + acd + d^2c & ab^2 + b^2d + bcd + d^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ensuite,  $T^2 T^* = T^* T^2$  implique que a

$$a^3 + abc + ab^2 + bd^2 = a^3 + abc + ac^2 + dc^2$$

$$\Rightarrow ab^2 + b^2d = ac^2 + dc^2$$

$$= b^2(a + d) = c^2(a + d)$$

$$\Rightarrow b^2(a + d) - c^2(a + d) = 0$$

$$= (b^2 - c^2)(a + d) = 0$$

$$\Rightarrow b^2 - c^2 = 0 \vee a + d = 0$$

$$\Rightarrow |b| = |c| \vee a + d = 0. \quad \square$$

***Code MATLAB pour vérifier les cas n-normaux et calculer le spectre***

---

*% Demande de saisir la matrice carrée A*

`A = input('Entrez la matrice carrée A : ');`

```

% Liste pour stocker les cas qui satisfont la condition
cas_n_normaux = [];
% Résolution du problème pour chaque valeur de 1 à 12
for n = 1:12
    % Calcul de la condition
    condition = (A^n * transpose(A)) - (transpose(A) * A^n);
    % Vérification de la satisfaction de la condition
    if condition==0
        % Ajout du cas à la liste des cas n-normal
        cas_n_normaux = [cas_n_normaux, n];
    end
end

% Vérification de l'existence de cas satisfaisant la condition
if isempty(cas_n_normaux)
    disp('non n-normal');
else
    % Affichage des cas n-normal sans répétition
    disp(['n-normal dans les cas suivants : ', num2str(unique(cas_n_normaux))]);

    % Calcul du spectre uniquement pour les cas n-normal
    valeurs_propres = eig(A);
    disp('Le spectre :');
    disp(valeurs_propres)
end

```

# Exemples

## 1. Cas de la matrice $3 \times 3$ :

```
>> matla
Entrez la matrice carrée A : [1+2i,0,0;0,2+3i,0;0,0,3+4i]

A =

    1.0000 + 2.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
    0.0000 + 0.0000i    2.0000 + 3.0000i    0.0000 + 0.0000i
    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    3.0000 + 4.0000i

n-normal dans les cas suivants : 1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12
Le spectre :
    1.0000 - 2.0000i    2.0000 - 3.0000i    3.0000 - 4.0000i
```

## 2. Cas de la matrice $4 \times 4$ :

```
>> matla
Entrez la matrice carrée A : [1,0,2,3;0,2,3,0;2,1,0,0;0,0,3,2]

A =

    1    0    2    3
    0    2    3    0
    2    1    0    0
    0    0    3    2

non n-normal
```

## 3. Cas de la matrice $6 \times 6$ :

```
>> matla
Entrez la matrice carrée A : [1,2,0,0,0,0;0,1,2,0,0,0;0,0,1,2,0,0;0,0,0,1,2,0;0,0,0,1,2,2;0,0,0,0,1]

A =

    1    2    0    0    0    0
    0    1    2    0    0    0
    0    0    1    2    0    0
    0    0    0    1    2    0
    0    0    0    0    1    2
    2    0    0    0    0    1

n-normal dans les cas suivants : 1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12
Le spectre :
   -1.0000 + 0.0000i    0.0000 - 1.7321i    0.0000 + 1.7321i    2.0000 - 1.7321i    2.0000 + 1.7321i    3.0000 + 0.0000i
```

---

# Conclusion et perspectives

---

Dans ce travail, nous avons étudié les opérateurs de type  $n$ -normal. Parmi les résultats obtenus dans cette recherche

- Pour tout  $T \in B(H)$ , les opérateurs  $n$ -normaux sont définis de telle manière que  $T^n$  commute avec son adjoint :  $T^n T^* = T^* T^n$ .

-  $T$  est un opérateur  $n$ -normal si et seulement si  $T^n$  est normal.

- Tout opérateur normal est un opérateur  $n$ -normal, mais l'inverse n'est pas vrai.

- Les opérateurs nilpotents non nuls sont des opérateurs  $n$ -normaux pour  $n \geq k$ , où  $k$  représente l'indice de la nilpotence, mais ils ne sont pas normaux.

- Tous les opérateurs de puissance  $n$  sont normaux, alors leur somme et leur produit seront également normaux avec la même puissance  $n$ .

-  $T$  est un opérateur  $(n,m)$ -normal si et seulement si  $T^n (T^m)^* = (T^m)^* T^n$ .

En conclusion, nous avons constaté qu'il y a eu peu de recherches menées sur ses propriétés spectrales et numériques, suscitant un vif intérêt pour l'étude et la découverte de résultats sur ces aspects à l'avenir, qui font partie des perspectives résultant de ce travail.

De plus, peut-on trouver des conditions suffisantes plus pratiques sur les opérateurs  $n$ -normaux pour les rendre normaux ?.

---

# Bibliographie

---

- [1] H. Abood, Eiman, Mustafa A. Al-loz\*, On some generalization of normal operators on Hilbert space, Iraqi Journal of Science, 2015, Vol 56, No, pp : 2C, 1786-1794.
- [2] M. Akkouchi, Remarks on the spectrum of bounded and normal operators on Hilbert space, An. St. Univ. Ovidius Constanta. 16/2 (2008), 7-14.
- [3] S.A. Alzuraiqi , A.B. Patel, On n-Normal Operators, General Mathematics Notes, Vol. 1, No.2, December 2010, 61-73.
- [4] G. Aubrun, Théorie des Opérateurs<sup>1</sup> M1 Mathématiques, Université de la Réunion.
- [5] J. Baptiste, H.Urruty, Bases, outils et principes pour l'analyse variationnelle, institut de Mathématiques de Toulouse. Université Paul Sabatier Toulouse France, Springer, New York Dordrecht London, 2012.
- [6] S. Bouzenada, Etude des opérateurs finis et leurs caractérisations, Thèse de Doctorat, Université de Annaba 2008.
- [7] P. Bryan, Rynne and Martin A. Youngson, Linear functional Analysis, Springer Verlag London Limited, 2000.
- [8] J. Charles, M.Mbekhta, H.Queffélec, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs, Dunod, Paris, 2010.
- [9] M.  $Ch\bar{\sigma}^a$ , Biljana Nacevska<sup>b</sup>, Spectral Properties of n -Normal Operators, Department of Mathematics, Kanagawa Univaersity, Hiratsuka, (2018).
- [10] M.  $Ch\bar{\sigma}^a$ , Ji Eun Lee<sup>b</sup>, Kotaro Tanahashhi<sup>c</sup>, Atsushi Uchiyama<sup>d</sup>, Remarks on n-normal Operators, Department of Mathematics, Kanagawa Univaersity, Hiratsuka, 2018.
- [11] S. Chavan, Spectral theorem for normal operators : application, Harish-Chandra research institute, Allahabad, 2007.
- [12] H. Chebli. Analyse Hilbertienne, Centre Publication Universitaire,Tunis, 2001.
- [13] J.B. Conway, A Course in Functional Analysis, Springer-New York, 1985.

- [14] L. Debnath, P. Mikusinski, Introduction to Hilbert spaces with applications, University of Central Florida Orlando, USA, 1990.
- [15] B. K. Driver. Analysis Tools with Applications. Springer, Berlin Heidelberg, New York, Paris, London, Milan, Tokyo, June 2003.
- [16] B. Fuglede, A commutativity theorem for normal operators. Proc. Nati. Acad. Sci. 36 (1950), 35-40.
- [17] T. Furuta, Invitation to linear operators : from matrices to bounded linear operators on Hilbert space, Taylor and Francis, London and New York (2001).
- [18] I. Gohberg, S.Goldberg, M.A.Kaashole, Basic classes of linear operator, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.
- [19] S. Goldberg, Unbounded linear operators, Mc Graw-Hill, United States of America, 1966.
- [20] P.R. Halmos, A Hilbert space problem book. Second edition, Springer-verlag, New York, 1982.
- [21] M. Guesba, Traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts, thèse de doctorat, Univ. Mohamed Boudiaf-Msila, 2017.
- [22] K.E. Gustafson et K. M. R. Duggirala, Numerical Range, The Field of Values of Linear Operators and Matrices, Springer, New York, 1997.
- [23] T. Kato, Perturbation theory for linear operator, Springer, 1980 (2nd edition).
- [24] C. Kitai, Invariant Closed Sets for Linear Operators, Ph.D. Thesis, University of Toronto, 1982.
- [25] Marçay.D.Fraçois, Espaces de Hilbert, Département de Mathématiques dOrsay, Université Paris-Saclay, France, 2016.
- [26] M. Nadir, Opérateurs continus, Cours danalyse fonctionnelle sur le site web ([www.mostefanadir.com](http://www.mostefanadir.com)), 2017.
- [27] W. Rudin, Functional analysis, Mcgraw-hill book company, New York, 1973.
- [28] C.R. Putnam, On Normal Operators in Hilbert Space, Amer. J. Math. 73(1951) 357-362.
- [29] M. Soussane, Thèse magistère "Inégalités des opérateurs auto-adjoints", Université dOran, Juin 2014.

## Résumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés en particulier aux opérateurs des  $n$ -normaux et à leurs applications. Nous avons commencé par quelques préliminaires sur les opérateurs linéaires bornés et leurs propriétés, notions initiales et théorèmes fondamentaux. Ensuite, nous avons étudié les opérateurs  $n$ -normaux en les définissant et mentionnant leurs caractéristiques principales, puis nous les comparons aux opérateurs normaux. Nous donnons ensuite un aperçu des opérateurs  $(n, m)$  normaux. Enfin, nous avons vu quelques exemples et applications.

**Mots clé:** Opérateur normal, opérateur  $n$ -normal, opérateur  $(n, m)$ -normal, spectre.

## Abstract

In this memory, we are interested in the power normal operators and its applications. We begin with a few preliminaries on bounded linear operators and their properties, initial notions and fundamental theories. Then, we study  $n$ -normal operators by defining them and mentioning their main characteristics, and then we compare them to linear operators. Next, we provide an overview of  $(n, m)$ -normal operators. Finally, we explain how to apply spectral theory to these operators.

**Keywords:**

Normal Operator,  $n$ -normal operator,  $(n, m)$ -normal operator, spectrum.

## المخلص

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة المؤثرات  $n$  ناظميه تعاريف وخواص وتطبيقات، بحيث بدأنا ببعض المفاهيم الأولية والنظريات الأساسية لنظرية المؤثرات الخطية والمحدودة. بعدها خصصنا الفصل الثاني للمؤثرات  $n$ ناظميه تعاريفه وبعض خواصه بحيث تطرقنا الى بعض خواصه الطيفية. أيضا قدمنا مقارنة بين المؤثرات الناظمية و  $n$ ناظميه. وفي الأخير قدمنا بعض الأمثلة والتطبيقات.

**الكلمات المفتاحية:** مؤثر ناظمي، مؤثر  $n$  ناظمي، مؤثر  $(n, m)$  ناظمي، الطيف.