REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministére De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique
UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR D'EL OUED
FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES
Département De Mathématique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : *Mathmatiques et informatique*
Filiére : *Mathmatiques*
Spécialité : *Mathmatiques fondamentales*

Théme

Les opérateurs de classe n-normal et leurs applications sur les équations d'opérateurs dans les espaces de Hilbert

Présenté par : Zinet Samira
Ben salah Chaima

Devant le jury :

Aissaoui Adel	Prof.	Président	Univ. d'El Oued
Lourabi Hariz Bekkar	MCA	Rapporteur	Univ. d'El Oued
Abd El ouahab Mansour	Prof.	Examinateur	Univ. d'El Oued

Promotion :2021/2022

Remerciements

Nous remercions ≪ **Allah** ≫ qui nous a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.

Nous remercions Monsieur **Dr . Lourabi Hariz Bekkar** : Professeur à **Univ. dEl Oued**, pour sa responsabilité de diriger ce travail. Je le remercie sincérement pour ses conseils avisés à son aide, sa patience et sa disponibilité.

Ainsi que tous nos professeurs qui nous ont enseigné durant nos études à la faculté des sciences exactes.

Nous remercions également tous nos collègues d'études, particulièrement notre promotion de master mathématique, **2021/2022** à l'université **Echahid Hamma Lakhdar**

El-Oued.

En-fin,nous remercions vivement notre famille pour l'aide matérielle et morale durant la période de prépation,

et à tous nos amis et ceux qui nous ont soutenus et nous ont aidés même avec un mot gentil .

Résume

Notre objectif principal dans ce mémoire est de résoudre des équations d' opérateurs de classe n-normal et de l'étendre la proprietés de Fuglede-Putnam pour ce type d'operateures et d'améliorer son utilisation et en ajoutant des conditions aux opérateurs utilisés.

On sait que les équations d' opérateurs, notamment de type sylvester, dont la vacuité est présente dans le cas des coefficients normal de B(H), et dans cette étude nous avons généralisé les résultats à des cas plus généraux qui enrichissent la théorie des operateurs , dans l'espace de Hilbert, et nous avons obtenu des résultats importants, qui sont inclus dans la preuve de cette mémoire.

Mots clés :

opérateur normal , opérateur n-normal , Proprieté de Fuglede-Putnam , équation d’opérateurs.

الملخص

هدفنا الأساسي في هذه المذكرة هو حلول معادلات المؤثرات من الصنف ن- ناظمي وتوسيعه نظرية Fuglede-Putnam من اجل هذا النوع من المؤثرات وتحسين استخدامها بإضافة شروط على المؤثرات المستخدمة.

نعلم أن معادلات المؤثرات وبالاخص من النوع سيلفسترحلولها موجودة في حالة المعاملات الناظمية من (B(H ، و في هذه الدراسة قمنا بتعميم النتائج في حالات اكثر تعميما تثري نظرية المؤثرات وذلك في فضاء هلبارت وحصلنا على نتائج مهمة ، مدرجة بالبرهان في هذه المذكرة.

الكليمات المفتاحية : مؤثر ناظمي , مؤثر ن- ناظمي , خاصية فوجلاد - بيتنام (Fuglede-Putnam) , معادلات المؤثرات.

Abstract

Our main goal in this memor andum is to solve the equations of operators the class n-normal and extend it to the Fuglede-Putnam propriety for this type of operators and improve its use by adding conditions to the used operators.

We know that the equations of operators, especially of the sylvester type, whose vividness is present in the case of the normal coefficients of B (H), and in this study we generalized the results in more general cases that enrich the theory of operators and that in Hilbert space and we got important .results, included in the proof in this memor.

Keywords:

normal operator , n-normal operator , proprety of Fuglede-Putnam , operators equations.

Notations

H	Espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie.
$\mathbb{C}$	Le corps des nombres complexe.
$B(H)$	Espace des opérateurs linéaire bornées sur H.
$\langle .,. \rangle_H$	Produit scalaire.
$\|.\|_H$	La norme.
T^{-1}	L'inverse de l'opérateur T.
T^*	Adjoint de T.
$\lvert T \rvert = \sqrt{T^*T}$	Module T.
$Im(T)$	L'image d'opérqteur T.
$\ker(T)$	Le noyau d'opérateur T.
I_H	L'opérateur identité.
$\rho(T)$	L'ensemble résolvante d'opérateur T .
$R_\lambda(T)$	La résolvante d'opérateur T .
$\sigma(T)$	Le spectre d'opérateur T .
$\sigma_p(T)$	Le spectre ponctuel d'opérateur T .
$\sigma_r(T)$	Le spectre résiduel d'opérateur T .
$\sigma_c(T)$	Le spectre continu d'opérateur T .
$\sigma_a(T)$	L'ensemble spectre approximatif.
$r(T)$	Le rayon spectre d'opérateur T .
$\mathcal{M}(n \times m)$	L'espace des matrices à n lignes et m colonnes , à coefficients dans $\mathbb{R}$.
$(FP)_{B(H)}$	Propriété de Fuglède-Putnam .

Table des matières

Introduction

La théorie d'opérateurs dépend fortement de l'analyse fonctionnelle et que les effets des influences sont des outils pour les chercheurs dans de nombreux domaines scientifiques en particulier, les équations d'opérateurs jouent un rôle important dans la théorie de contrôle et la mécanique quantique où les équations de Sylvestre et Lyapunov .

Dans le premier chapitre, un rappel de toutes les règles de base que nous utilisons dans ce travail, On commence par les définitions et les propriétés de l'espace de Hilbert. Ainsi que par généralités sur les opérateurs linéaires bornés et on présente quelques classes d'opérateurs sur un espace de Hilbert, aussi on rappelle que le spectre d'opérateurs bornés.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons les définitions et les propriétés nécessaires avec quelques classes des opérateurs normaux, ainsi nous avons également parlé dans ce chapitre d'une théorie importante dans la théorie des opérateurs bornés, avec toutes applications *à* savoir : **Propriété de Fulglede-Putnam** , aussi on rappel Spectre d'un opérateur normaux.

Le troisième chapitre nous avons donner des définitions, des résultats de base et les propriétés des opérateurs n-normaux avec quelques classes (n-quasi normal, n-hyponormal) et relation entre les opérateurs normaux et les opérateurs n-normaux.

Finalement, le quatrième chapitre contient une présentation des solutions pour certaines équations d'opérateurs dans le cas infini des modèles de solutions liés aux équations d'opérateurs de la forme $AX - XB = C$ et $(A + \lambda) - (B + \mu) = C$ ou $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
Et nous verrons la condition sur les deux matrices d'opérateurs $\begin{pmatrix} A+\lambda & 0 \\ 0 & B+\mu \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} A+\lambda & C \\ 0 & B+\mu \end{pmatrix}$ pour l'existence de la solution, et l'importance de la propriété Fugled-Putnam pour atteindre la for mulation de la solution. D'autre part, les solutions peuvent également être exprimées en matrice de bloc en utilisant la Similarité de deux matrices et théorie spectrale.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les notations et les définitions qui seront utilisées tout au long de ce mémoire . Nous donnons quelques définitions importantes par la suite :
espace de Hilbert , les opérateurs linaires bornés, quelques classes d'opérateurs puis , spectre d'opérateurs linaire borné.

1.1 Espace de Hilbert

1.1.1 Définition

Définition 1.1.1.
H $un\mathbb{C}$-espace vectoriel, on appelle un produit scalaire l'application :

$$<.,.>: H \times H \to \mathbb{C}$$

$$(x, y) \mapsto <x, y>$$

tel que : $\forall x, y, z \in H, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(1) $<\lambda.x + \mu z, y> = \lambda. <x, y> + \mu. <z, y>$
(2) $<x, y> = \overline{<y, x>}$
(3) $<x, x> \geq 0$, $<x, x> = 0$ si et seulement si $x = 0$

Remarque 1.1.1.
Si H est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,on a :

$$<x, y> = <y, x>$$

Définition 1.1.2.

On appelle espace préhilbertien un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de la norme associée $\|.\|$. Un espace préhilbertien peut être muni d'une structure d'espace métrique
pour la distance

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

proposition 1.1.1.

Tout espace préhilbertien est un espace vectoriel normé, la norme est donnée par

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

Définition 1.1.3.

On dit qu'un espace préhilbertien H,muni de la norme $\|.\|$associée au produit scalaire $\langle .,. \rangle$, est un espace de Hilbert si $(H, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé complet.

1.1.2 Proporietes des espaces de Hilbert :

Proposition 1.1.2. (L'inégalité de Chauchy-Schwarz :)
Soit $< .,. >$un produit scalaire sur$H$ .Alors , pour tous $x, y \in H$, on a :

$$|< x, y >| \leq \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >}$$

avec égalité si , et seulement si , la famille $\{x, y\}$ est liée .
Définition 1.1.4. (Orthogonalité) :

Soit H un espace de Hilbert et $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire sur H . Si F est un sous-espace vectoriel de H, on définit l'orthogonal de F par :

$$F^{\perp} := \{x \in H : \forall y \in F,\ \langle x, y \rangle = 0\}$$

Définition 1.1.5. (Identité du parallélogramme) :

Soient $x, y \in H$ avec H est un espace pré-hilbertien alors :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Remarque 1.1.2.

Un espace vectoriel normé est un espace pré-hilbertien si et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme

Exemple 1.1.1.

$(C[0,1], R, \|\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé mais n'est pas un espace préhilbertien car : si

$$f(x) = 1, g(x) = x \; avec \quad x \in [0,1] \quad \|f(x)\|_\infty = 1, \|g(x)\|_\infty = 1$$

Alors :

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |1+x| = 2, \|f-g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |1-x| = 1$$

Et donc

$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 \neq 2\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2$$

Théoréme 1.1.1. (Identité polarisation) :

Soient $x, y \in H$

1/ Toute forme bilinéaire symétrique $\varphi : H \times H \mapsto E$ vérifie : :

$$4\varphi(x,y) = \varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y)$$

Alors :

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

2/ Toute forme sesquilinéaire $\varphi :\; H \times H \mapsto \mathbb{C}$ (hermitienne ou non) vérifie :

$$4\varphi(x,y) = \varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy)$$

Alors :

$$\forall x, y : \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x+y\rangle + \|y\|^2.$$
$$\forall x, y : \quad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x+y\rangle + \|y\|^2.$$

Théoréme 1.1.2.[3] (projection)

Soit A un ensemble convexe fermé (et non vide) de H alors pour tout $x \in H$,il existe un unique $y \in A$ tel que :

$$\inf_{a\in A} \|x-a\| = \|x-y\|$$

Autremet dit : il existe un unique point $y \in A$ qui est à une distance de x la plus petite possible ce point y s'appelle la projection de x sur A

Corollaire 1.1.1.
Soit F sous espace vectoriel fermé de H , et soit $x \in H$

1) Soit $y \in F$ tell que $\|x-y\| = \inf_{z \in F} \|x-z\|$ Alors $(x-z)$ est orthogonal à F i.e (orthogonal à tous les vecteurs $z \in F$)
2) Réciproquement si $y \in F$; est tel que : $(x-y) \perp F$ alors $\|x-y\| = \inf_{z \in F} \|x-z\|$ i.e y est la projection de x sur F .

Notation 1.1.1.
On notera $y = P_F(x)$ et on dira que y est la projection orthogonale de x sur F

1.2 Généralités sur les opérateurs linéaires bornés

1.2.1 les opérateurs linéaires bornés

Définition 1.2.1.
Soient E , F deux espaces vectoriels normés et

$$T : E \to F$$

T est une application de E dans F.
T est dit opérateur linaire si,

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \ \ \forall x, y \in E : T(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 T(x) + \lambda_2 T(y).$$

Définition 1.2.2.

L' opérateur T sur H est dite borné , s'il existe c positif tel que $\|Tx\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in H$.

Proposition 1.2.1.

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $T : E \to F$ un opérateur linéaire, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. L'ensemble $\{Tx : \|x\| \leq 1\}$ est borné dans F ,
2. T est continu à l'origine 0 de E,
3. T est continu ,
4. $\exists c > 0$ tel que$\forall x \in X \|Tx\|_F \leq c\|x\|_E$.

1.2.2 Quelques classes d'opérateurs :

Definition 1.2.2
Soit H un espace de Hilbert

1. Un opérateur $S \in B(H)$ est appelé **hermitien** ou **auto-adjoint** si :
$$S = S^*$$
2. Un opérateur $N \in B(H)$ est appelé **normal** si :
$$NN^* = N^*N$$
3. Un opérateur $U \in B(H)$ est appelé **unitaire** si :
$$U^*U = Id_H$$
et
$$UU^* = Id_H$$
4. Un opérateur $U \in B(H)$ est appelé **isométrie** si :
$$U^*U = I$$
5. Un opérateur P est appelé **positif** si : P est auto-adjoint et si :
$$\langle P(x), x\rangle \geq 0, \forall x \in H$$
6. On définit la projection orthogonale par :
$$P^2 = P, P = P^*$$
La projeCtion $P \in B(H)$ est auto-adjoint
7. On dit que A est **hyponormale** si :
$$AA^* \leq A^*A$$
ou
$$\| A^*f \| \leq \| Af \|, \forall f \in H$$
8. On dit que A est **quasinormale** si :
$$AA^*A = A^*AA$$
9. On dit que A est **paranormal** si :
$$\| Ax \|^2 \leq \| A^2x \| . \| x \|$$

10. On dit que A est **compact** si :

$$< Ax_n, x_n >_H \longrightarrow \; 0 \; pour \; tout \; suit \; x_n \; de \; H$$

i.e

$$< x_n, x_n >_H \longrightarrow \; 0 \; alors \parallel Ax_n \parallel_H \longrightarrow 0$$

11. On dit que A est **nilpoten** si :

$$A^k = 0 \quad (A^{k-1} \neq 0) \; d'ordre \; K$$

Remarque 1.2.1.
Normal $\Longrightarrow$ Quasinormal $\Longrightarrow$ Hyponormal $\Longrightarrow$ Paranormal.

Remarque 1.2.2.

1. Au lieu d'auto-adjoint, on dit des fois symétrique si on est sur $\mathbb{R}$ (même sur $\mathbb{C}$),et on dit hermitien sur $\mathbb{C}$.

2. Positif sur $\mathbb{R}$ c'est à dire que T est auto-adjoint et $< Tx, x > \geq 0$.

3. T auto-adjoint $\Longrightarrow T$ normal.

4. T unitaire $\Longrightarrow T$ isométrie, normal et inversible.

5. T positif $\Longrightarrow T$ auto-adjoint

Exemple 1.2.1.

1. Le shift S sur $l^2(\mathbb{N})$ est isométrique mais non unitaire car il n'est même pas normal.

Remarque 1.2.3.
Pour tout opérateur $A \in B(H)$, A^*A est hermitien car :

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$$

Il est même positif car :

$$\forall x \in H < A^*Ax, x > = \parallel Ax \parallel^2 \geq 0$$

Si H est un $\mathbb{R}$-Hilbert, alors on donne la conventon suivante : A est positif, si $A = A^* et < Ax, x > \geq 0$

Lemme 1.2.1.

Soit H un **C**-Hilbert, un opérateur borné A est auto-adjoint si et seulement si : $< Ax, x >$ est réel pour tout x dans H. A est auto-adjoint $\Longleftrightarrow < Ax, x > \in \mathbf{R}$, $\forall x \in H$ sur $\mathbb{C}$.

Démonstration.

$$< A^*x, x >=< x, Ax >= \overline{< Ax, x >} =< Ax, x >$$

i-e : $A = A^*$

Proposition 1.2.2.

soint $A \in B(H)$. Ona :

1. A est normal $\Longleftrightarrow \|Ax\| = \|A^*x\|$, $\forall x \in H$
2. A est unitaire $\Longleftrightarrow \|Ax\| = \|A^*x\| = \|x\|$, $\forall x \in H$.

Démonstration.

1. On a :
$$\|Ax\|^2 - \|A^*x\|^2 =< (A^*A - AA^*)x, x > .$$
D'où
$$A\ normal \Longleftrightarrow \|Ax\| = \|A^*x\|.$$
2. Si A est auto-adjoint (i.e $A = A^*$) alors,
$$< Ax, x >=< x, A^*x >=< x, Ax >= \overline{< Ax, x >}.$$
D'où
$$(Ax, x) \in \mathbf{R}, \forall x \in H$$
Inversement, si $< Ax, x > \in \mathbf{R}$, alors :
$$< Ax, x >= \overline{< Ax, x >} =< x, Ax >=< A^*, x > \forall x \in H.$$
Donc A est auto-adjoint.
3. Si A est unitaire $(i.e AA^* = A^*A = I)$
$$\|Ax\|^2 =< Ax, Ax >=< x, A^*Ax >=< x, Ix >= \|x\|^2$$
et aussi
$$\|A^*x\|^2 =< A^*x, A^*x >=< x, AA^*x >=< x, Ix >= \|x\|^2$$

Inversement, si $\|Ax\| = \|A^*x\| = \|x\|$ alors : A est normal (d'après(1)), donc

$$\|Ax\|^2 =< Ax, Ax >=< x, x > .$$

Donc pour tout $x \in H$, on a

$$< Ax, Ax > - < x, x >=< A^*Ax, x > - < x, x >=< (A^*A-I)x, x >= 0$$

et

$$< A^*x, A^*x > - < x, x >=< AA^*x, x > - < x, x >=< (AA^*-I)x, x >= 0$$

D'ou

$$A^*A = AA^* = I.$$

Ainsi A est bien unitaire.

Exemple 1.2.2.

1. L'identité $I : H \longrightarrow H$ est un opérateur auto-adjoint positife car

$$< Ix, x >=\| x \|^2 \geq 0 \quad \forall x \in H.$$

2. Soit l'opérateur $S : l^2 \longrightarrow l^2$ "shift" défini par

$$S(x_1, x_2, x_3, ..., x_n...) = (0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...).$$

On sait que :

$$S^*(x_1, x_2, x_3, ..., x_n...) = (x_2, x_3, x_4, ...)$$

S n'est pas auto-adjoint car

$$Se_1 \neq S^*e_1 \quad ou \;\; e_1 = (1, 0, 0, 0, ...).$$

S n'est pas positif car

$$(Sx, x) = -1 \;\; ou \;\; x = (-1, 1, 0, 0, ...).$$

D'autre part on a :

$$S^*Sx = S^*(0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) = I_{l^2}$$

et

$$SS^*x = (x_2, x_3, x_4, ...) = (0, x_2, x_3, x_4, ...).$$

Donc S n'est pas normal, n'est pas unitaire, mais c'est une isométrie.

3. Soit $H = L^2[0,1]$ et $A_\varphi \in B(H)$ tel que
$$A_\varphi f(x) = \varphi(x)f(x)$$
avec φ continue sur $[0,1]$ à valeur complexe.
On sait que $A^*f(x) = \overline{\varphi(x)}f(x)$ que nous donne :
A_φ est auto-adjoint $\Longleftrightarrow \varphi = \overline{\varphi}$.
A_φ est toujours normal.
A_φ est unitaire $\Longleftrightarrow \mid \varphi \mid = 1$.
A_φ est positif $\Longleftrightarrow \varphi$ est positif .

1.2.3 L'inverse d'un opérateur

Définition 1.2.3.[6]
On dit qu'un opérateur T est inversible sur l'espace de $B(H)$, s'il existe un opérateur T^{-1} qui vérifie $TT^{-1} = T^{-1}T = I$, où I est l'opérateur identité dans $B(H)$.

1.2.4 L'adjoint d'un opérateur linéaire borné

Définition 1.2.4.
Soit T opérateur dans $B(H)$. L'unique application linéaire $T^* \in B(H)$ telle que pour tous $x, y \in H$ on dit
$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$
est appelée l'adjoint de T .
Proposition 1.2.3.

Soit T opérateur dans B(H). Alors il existe un unique $T^* \in B(H)$ tel que, pour tout $x, y \in H$, on dit :
$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$
On a de plus $\|T^*\| = \|T\|$.

Preuve : Pour tout $y \in H$ l'application $x \mapsto \langle T(x), y\rangle$ est linéaire et continue (de norme inférieure à $\|T\|\|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique élément noté $T^*(y)$ tel que
$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

On vérifie facilement que pour tous $y, z \in H$ et λ scalaire, $T^*(y) + \lambda T^*(z)$ vérifie la propriété qui définit $T^*(y + \lambda z)$. Par unicité, $T^*(y) + \lambda T^*(z) = T^*(y + \lambda z)$, ce qui prouve que T^* est linéaire.
Par définition de la norme opérateur et en utilisant un corollaire d'Hahn-Banach, on a

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup_{y \in H, \|y\| \leq 1} \|T^* y\| = \sup_{x \in H, \|x\| \leq 1 \ y \in H, \|y\| \leq 1} |\langle x, T^* y \rangle| \\ &= \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1 \ y \in F, \|y\| \leq 1} |\langle Tx, y \rangle| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\| \end{aligned}$$

Ainsi T^* est continu et $\|T^*\| = \|T\|$.

proposition 1.2.4.

Si T et S sont deux opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de $B(H)$, alors leurs adjoints T^* et S^* sont aussi deux opérateurs linéaires bornés sur $B(H)$ et les propriétés sui vantes sont vérifiées :

1. $(S + T)^* = S^* + T^*$.
2. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$, pour tout $\alpha \in C$.
3. $(T^*)^* = T$.
4. Si T est inversible,$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
5. $\|T^*\| = \|T\|$.
6. $\|T^* T\| = \|T\|^2$.
7. $(ST)^* = T^* S^*$.

1.2.5 Commutateurs

Soit E un espace vectoriel normé complexe de dimension infinie.

Définition 1.2.5.[7][9]

Un élément X de $B(E)$ est appelé commutateur s'il existe deux opérateurs A et B dans $B(E)$, tels que $X = AB - BA$.

Le commutant X de $A \in B(H)$ est l'ensemble défini par

$$\{A\}^{'} = \{B \in B(E), AB = BA\}$$

Le bicommutant de $A \in B(E)$ est l'ensemble défini par

$$\{A\}^{''} = \{C \in B(E), BC = CB, \forall B \in \{A\}^{'}\}$$

Dans la suite, on va citer quelques propriétés.

1. $\{A\}^{''} = \{\{A\}^{'}\}^{'}$
2. $\{A\}$ est une sous-algèbre de $B(E)$
3. $\{A\}^{''}$ est une sous-algèbre commutative de $B(E)$
4. Tout polynôme de A appartient $\dot{a}\{A\}^{''}$

1.2.6 Racine carré d'un opérateur borné

Definition 1.2.6.

Soit Aun opérateur positif dans $B(H)$, On dit que $S \in B(H)$ est la racine carrée de A si :

$$S^2 = A.$$

Théoréme1.2.1.

Soit $A \in B(H)$ positif, alors il existe un unique opérateur positif $S \in B(H)$ tel que :

$$S^2 = A$$

De plus : si $B \in B(H)$ commute avec A alors : $B \in B(H)$ commute avec S et on écrit :

$$S = A^{\frac{1}{2}}$$

Exemble1.2.3.

L'opérateur $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ est la racine carrée de l'opérateur $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

Corollaire1.2.1.

Soit A et S deux opérateurs positif tels que $SA = AS$, alors SA est positif.

Démonstration.

On a $S \geq 0$ alors d'aprrés le théoréme $\exists A \geq 0$ tel que $A^2 = S$ et aussi $A^* = A$ car A positif nous donne A auto-adjoint.
Soit $x \in H$, on a Donc

$$< SAx, x >=< A^2Ax, x >=< AAx, A^*x >=< AAx, Ax >=< A\underbrace{Ax}_{=y}, \underbrace{Ax}_{=y} >\geq 0$$

La démonstration est acgevée.

Décomposition polaire

Définition 1.2.6.

Soit $T \in B(H)$.

On appelle valeur absolue de A l'opérateur qui s'écrit $\mid A \mid$ tel que :

$$\mid A \mid = \sqrt{A^*A}$$

Lemme.1.2.2

Soit $A \in B(H)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. U unitaire .
2. U isométrie surjective .

Théorème1.2.2.

Soit $A \in B(H)$ et inversible, alors $A = UR$ ou U est unitaire et R est positif.

Démonstration.

Puisque A est inversible, A^* l'est aussi,d'ou A^*A est inversible. Puisque $A^*A \geq 0$ alors $\sqrt{A^*A} = \mid A \mid$ existe et elle est méme inversible. On prend $R = \sqrt{A^*A}$ et $U = AR^{-1}$. Il reste de montrer que U est unitaire.
On a

$$\begin{aligned} U^*U &= (AR^{-1})^*AR^{-1} \\ &= (R^{-1})^*A^*AR^{-1} \quad [R^{-1} = (R^{-1})^* \quad car\ R\ est\ positif] \\ &= R^{-1}(A^*A)R^{-1} = I \quad (car A^*A = R^2). \end{aligned}$$

On déduit que U est isométrie surjective, et d'après le lemme(1.2.2.) on conclut que U est unitaire.

Exemple 1.2.4.

Trouvons la décomposition polaire de $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2-i & 2i-1 \\ 2+i & -1-2i \end{pmatrix}$.

Il est claire que $B \in B(C)$ et inversible, onc on peut applique le théorème(1.2.1) ?.
On a

$$B^*B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

D'où

$$R = \mid B \mid = \sqrt{BB^*} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \ et\ R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$U = BR^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix}.$$

Et finalement,

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix}}_{=U} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=R}.$$

1.2.7 Similarité

Définition 1.2.7.[8]

Soint A et B deux opérateurs dans $B(H)$, on dit que A et B sont similaires si et seulement s'il existe. un opérateur inversible φ tel que : $B = \varphi A \varphi^{-1}$

Lemme 1.2.3.

Soint A et B deux opérateurs dans $B(H)$,$R_\lambda(A)$ et $R_\lambda(B)$ leurs applications résolvantes respectivement, alors $R_\lambda(A)$ et $R_\lambda(B)$ sont similaires si et seulement si A et B les sont

Preuve : Soint A et B deux opérateurs similaires dans $B(H)$ alors il existe un opérateur φ tel que

$$\begin{aligned} B &= \varphi A \varphi^{-1} \\ R_\lambda(B) &= R_\lambda(\varphi A \varphi^{-1}) \\ &= (\varphi A \varphi^{-1} - \lambda I)^{-1} \\ &= ((\varphi A - \lambda I)\varphi^{-1})^{-1} \\ &= \varphi(A - \lambda I)^{-1}\varphi^{-1} \\ &= \varphi R_\lambda(A)\varphi^{-1} \end{aligned}$$

1.3 Spectre des opérateurs linéaire borné :

Définition 1.3.1.

Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $A \in B(H)$. Alors : $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A définit comme le complément du spectre de A. Ou nous rappelons que le spectre de A est définit par :

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda Id) \text{ non inversible } \}$$

Définition 1.3.2.
si $\lambda \in \rho(A)$, $(A - \lambda I)^{-1} = R_\lambda(A)$ est appelée résolvante de A

Proposition 1.3.1. (Identité de Hilbert)

$$R_{\lambda_1}(A) - R_{\lambda_2}(A) = (\lambda_2 - \lambda_1)(R_{\lambda_1}(A).R_{\lambda_2}(A))$$

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \rho(A)$
Preuve : On a

$$R_{\lambda_1} - R_{\lambda_2} = (A - \lambda_1)^{-1} - (A - \lambda_2)^{-1} = (\lambda_2 - \lambda_1)(A - \lambda_1)^{-1}(A - \lambda_2)^{-1}$$

Maintenant on vas établir la nature topologique du spectre.
Théorème 1.3.1.

Le spectre de tout opérateur $A \in B(H)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$.

Preuve : Le spectre de A est borné car : si $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $|\lambda| > \|A\|$, alors : $A - \lambda Id$ est inversible.En effet :

$$|\lambda| > \|A\| \Longrightarrow 1 > \|\lambda^{-1}A\|$$

donc : $I - \lambda^{-1}A$ est inversible (série de Neumann) i-e : $\lambda I - A$ est inversible. D'où : $\lambda \in \rho(A)$ pour montrer que $\sigma(A)$ est fermé on va définir la fonction

$$F : C \longrightarrow B(H)$$

$$\lambda \longmapsto F(\lambda) = \lambda I - A$$

A est continue (c'est même une isométrie) car :

$$\|F(\lambda) - F(\mu)\| = \|(\lambda - \mu)I\| = |\lambda - \mu|$$

On note par : $B_i(H)$ l'ensemble des opérateurs inversibles.

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : F \in B(H)/B_i(H)\}$$

$$= F^{-1}\{(B(H))/B_i(H)\}$$

donc : $\sigma(A)$ fermé car : $B(H)/B_i(H)$ ouvert $\sigma(A)$ est non vide car :

$$\frac{1}{\lambda - A} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1 - \frac{A}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n\right)$$

Si $|\lambda| > \|A\|$ alors la série de Neumann est convergente, donc si
$|\lambda| \longrightarrow \infty, \|R_\lambda\| \longrightarrow 0$.
Si $\sigma(A)$ est vide alors : R_λ est une fonction bornée analytique (entière) donc par le théorème de Liouville $R_\lambda(A)$ égale a zéro et ceci est une contradiction.
D'où : $\sigma(A)$ est non vide.

Définition 1.3.3.

Soit H un espace de Hilbert et soit $A \in B(H)(A - \lambda I)$ inversible si et seulement si :

1. $(A - \lambda I)$ injectif
2. $(A - \lambda I)$ surjective
3. $(A - \lambda I)^{-1}$ borné

Définition 1.3.4.[9]
Soit A un opérateur, si $\lambda \in \sigma(A)$ on a les cas suivants :

1. Le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(A)=\{ \lambda \in \mathbb{C} \ : \ (A - \lambda I) \text{ n'est pas injectif } \}$$

2. Le spectre continu :

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est injectif et } \overline{Im(A - \lambda I)} = H \ \}$$

3. Le spectre résiduel :

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ est injectif et } \overline{Im(A - \lambda I)} \neq H\}$$

Remarque 1.3.1.

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

Lemme 1.3.1.

Soit $A \in B(H)$ alors :

$$\sigma(A^*) = \{\bar{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\}$$

Preuve : Si $\lambda \in \rho(A)$ alors : $T - \lambda I$ est inversible, donc :

$$(A - \lambda I)^* = \bar{\lambda} I - A^*$$

est inversible alors : $\bar{\lambda} \in \rho(A^*)$
Si on remplace A par A^* on trouve $\bar{\lambda} \in \rho(A^*) \Longrightarrow \lambda \in \rho(A)$

Proposition 1.3.2.

Soit A un opérateur borné, A est positif si et seulement si A est auto adjoint et

$$\sigma(A) \subset [0, \infty[$$

Preuve :

1. $\Longrightarrow$ ça vient directement de la propriété d'un opérateur positif.
2. Pour l'autre sens, $\sigma(A) \subset [0, \infty[$, alors pour tout $a > 0$ on a ; $-a \in \rho(A)$ (ensemble résolvant de A). On utilise alors le lemme classique qui dit que si A est auto-adjoint et si $\lambda \in \rho(A)$ alors :

   $$\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{1}{dist(\lambda, \sigma(A))}$$

   dans notre cas on obtient

   $$\|(A + a)u\| \geq a\|u\|$$

   Cela implique que

   $$a\|u\|^2 \leq \|(A + a)u\|^2 \leq \|Au\|^2 + 2a < Au, u > +a^2\|u\|^2$$

   d'où :

   $$< Au, u > \geq -(2a)^2\|Au\|^2$$

   qui est valable pour n'importe quel $a > 0$ ce qui implique bien que A est positif.

Théorème 1.3.2.
Soit $A \in B(H)$

1. Si A est inversible alors :$\sigma(A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\}$
2. $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ (théorème spectral mapping).

Preuve :

1. Puisque A inversible, alors : 0 n'appartient pas a $\sigma(A)$ et $(\sigma(A))^{-1}$ a un sens : On
$$A^{-1} - \lambda^{-1} = (\lambda - A)\lambda^{-1}A^{-1}$$
$\lambda^{-1} \in \rho(A^{-1}) \Longleftrightarrow A^{-1}\lambda^{-1}$ est inversible $\Longleftrightarrow (\lambda - A)\lambda^{-1}A^{-1}$ est inversible donc : $(\lambda - A)$ est inversible. Alors : $\lambda \in \rho(A)$
$$D'ou : \lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-1}) \Longleftrightarrow \lambda \in \sigma(A)$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ posons $Q(z) = \lambda - P(z)$, $Q(Z)$ est un polynôme de degré n car $P(z)$ est un polynôme. D'après : le théorème fondamental de l'algèbre $Q(z)$ admet n racines i-e :
$$Q(z) = c(z - \mu_1)(z - \mu_2)......(z - \mu_n), c \neq 0, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \in \mathbb{C}$$
$$\lambda \in \rho(A) \Longleftrightarrow \lambda I - P(A) \quad inversible \quad \Longleftrightarrow Q(A) \quad inversible$$
$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow c(z - \mu_1)(z - \mu_2)......(z - \mu_n) \quad inversible \\ &\Longleftrightarrow (-\mu_i) \; inversible \quad \forall i \\ &\Longleftrightarrow \mu_i \in P(A) \quad \forall i \\ &\Longleftrightarrow Q(\mu) \neq 0 \quad \forall \mu \in \sigma(A) \\ &\Longleftrightarrow \lambda \neq P(\mu) \quad \forall \mu \in \sigma(A) \\ &\Longleftrightarrow \lambda \quad n'appartient\ pas\ à \quad P(\sigma(A)) \end{aligned}$$

Exemple 1.3.1.
On utilise le théorème spectral pour calculer le spectre d'une polynôme par exemple :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
On a : $\sigma(A) = \{1, 2\}$ Si on veut calculer $\sigma(A^2)$ a partir de $\sigma(A)$ on trouve
$$\sigma(A^2) = \{1, 4\}$$
car : si $P(x) = x^2$, alors : $\sigma(A^2) = (\sigma(A))^2$.

Proposition 1.3.3.
Soit H un espace de Hilbert et $A \in B(H)$ un opérateur auto-adjoint on a :

1. le spectre $\sigma(A)$ est réel de plus si z et $z^{'}$ sont des valeurs propres distincts de A on a
$$\ker(A - zI) \perp \ker(A - z^{'}I)$$
2. $\sigma_r(A) = \emptyset$
3. $\sigma(A) \subset [m, M]$ ou $m = \inf_{\|x\|=1} < Ax, x >$ et $M = \sup_{\|x\|=1} < Ax, x >$.
4. $r(A) = \|A\|$ ou $r(A)$ est le module du plus grand élément du spectre, appelée le rayon spectral.

Définition 1.3.5.
Soit $A \in B(H)$ alors : $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe et :

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Théorème 1.3.3.

Soit A opérateur dans $B(H)$. Alors :

1. A auto adjoint alors $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$
2. A unitaire alors $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda = 1\}$

Remarque 1.3.2.
Si $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ il n'est pas nécessaire que A est auto-adjoint.

Exemple 1.3.2.

Soit A opérateur dans $B(H)$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas auto adjoint mais son spectre est réel.

Chapitre 2

Quelques classes des opérateurs linéaires bornés

Dans ce chapitre, on va parler sur quelques classes des opérateurs linéaires bornés, et nous allons intéresser par les propriétés des opérateurs normaux.

2.1 Définition et exemple

Définition 2.1.1[14]
On dit que $T \in B(H)$ est un opérateur normal, si T commute avec son adjoint i.e. $T^*T = TT^*$.

Exemple 2.1.1.

1/ Soit $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, tel que $a, b \in \mathbb{C}$,$d'o\grave{u}$ $T^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix}$.
On a :$T^*T = TT^*$, alors T est normal .

2/ La multiplication T_φ par une fonction mesurable bornée φ est un opérateur normal sur $L^2([0,1])$.

$$T_\varphi : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$$
$$T_\varphi f(t) = \varphi(t) f(t)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\langle T_\varphi f, g \rangle &= \int_0^1 \varphi(t) f(t) \overline{g(t)} dt \\
&= \int_0^1 f(t) \overline{\overline{\varphi(t)}}\ \overline{g(t)} \\
&= \int_0^1 f(t) \overline{\overline{\varphi(t)} g(t)} dt = \langle f(t), \overline{\varphi(t)} g(t) \rangle.
\end{aligned}$$

Donc :$T_\varphi^* g((t)) = \overline{\varphi(t)} g(t)$,oú bien $T_\varphi^* f(t) = \overline{\varphi(t)} f(t)$.
Donc,$T_\varphi^* T_\varphi = T_\varphi T_\varphi^*$.
L'opérateur T_φ est un hermitien (auto-adjoint) s'il la fonction φ est réelle.

Proposition 2.1.1.
Soit $T \in B(H)$, les assertions suivantes sont équivalentes

1. T est normal.
2. $\|Tx\| = \|T^*x\|$,pour tout $x \in H$.
3. Dans les cas complexes, les parties réelles et imaginaires de T commutent.

Preuve :

- Pour $x \in H$, alors :
$$\|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2$$
$$= \langle Tx, Tx\rangle - \langle T^*x, T^*x\rangle.$$
$$= \langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle.$$
Donc I'équivalence de 1 et 2.

- On pose :$T = A + iB$, tel que :$A = Re(T)$, et $B = Im(T)$ auto-adjoint .
On a :
$$T^* = A - iB, T^*T - TT^* = 2i(AB - BA).$$
D'où :$T^*T = TT^*$ si et seulement si $AB = BA$.

Corollaire 2.1.1.
Si $T \in B(H)$ est normal, on a

$$\ker(T) = \ker(T^*).$$

Proposition 2.1.2.[14]

Soit T est normal, on a :

1/ L'opératetr aT est aussi normal pour tout $a \in \mathbb{C}$.

2/ L'opérateur T^n est normal pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve :

1) Nous avons :
$(aT)(aT)^* = a\bar{a}TT^*$,et $(aT)^*(aT) = \bar{a}aT^*T$.
Puisque T est normal, d'où il sont égaux.
2) T est normal,d'où $TT^* = T^*T$
$\Longrightarrow (TT^*)^n = (T^*T)^n$
$\Longrightarrow T^n(T^*)^n = (T^*)^nT^n$
$\Longrightarrow T^n(T^n)^* = (T^n)^*T^n$.
C'est-$\grave{a}$-dire T^n est normal,pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corollaire 2.1.2.

Soit P est polynôme et T est un opérateur normal. Alors $P(T)$ est aussi normal.

Remarque 2.1.1.

Si T^n est opérateur normal, alors T n'est pas opérateur normal.

Exemple 2.1.2.

Soit $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

On a :$T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T^2$ est normal,mais T n'est pas normal.

Proposition 2.1.3.[13]

Soit $TeB(H)$ est norrnal, on a :

$$\ker(T) \oplus \overline{Im(T)} = H.$$

Preuve : On sait que :

$$\ker(T^*) = (ImT)^{\perp},$$

d'où

$$(\ker(T^*))^{\perp} = ((ImT)^{\perp})^{\perp} = \overline{(ImT)}.$$

Donc

$$H = \ker(T^*) \oplus (\ker(T^*))^{\perp} = \ker(T) \oplus \overline{(ImT)}.$$

Proposition 2.1.4.[14] (Inverse d'un opérateur normal)

Soit $T \in B(x)$ est normal et inversible d'inverse T^{-1}. Aiors T^{-1} est aussi normal.

Preuve : On a :

$$\begin{aligned}(T^{-1})^*T^{-1} &= (T^*)^{-1}T^{-1}\\ &= (TT^*)^{-1} = (T^*T)^{-1} \quad (car\ T\ normal)\\ &= T^{-1}(T^*)^{-1} = T^{-1}(T^{-1})^*.\end{aligned}$$

Donc T^{-1} est un opérateur normal.

Proposition 2.1.5.[14]

pour tout est unitaire. L'opérateur U^*TU est normal si et seulement si T est normal

Preuve : On a :

$$(U^*TU)^*(U^*TU) = U^*T^*TU$$

et

$$(U^*TU)(U^*TU)^* = U^*TT^*U$$

On remarque que $T^*T = TT^*$ si et seulement si U^*TU est normal.

Proposition 2.1.6.[14]

Soit $T \in B(H)$,les assertions suivantes sont équivalentes

i) T est normal.

ii) $T^{-1}T^*$ (ou T^*T^{-1}) est unitaire.

iii) Il existe un opérateur unitaire U tel que : $T^* = UT$.

Preuve : Montrons que

. $i) \Longrightarrow ii)$ On a :

$$(T^{-1}T^*)^*(T^{-1}T^*) = T(T^{-1})^*T^{-1}T^*$$

$$= TT^{-1}(T^{-1})^*T^* = I(TT^{-1})^* = I.$$

. $ii) \Longrightarrow iii)$ Claire .

. $iii) \Longrightarrow i)$ Pour tout $x \in H$, on a :

$$\|T^*x\|^2 = \|UTx\|^2$$

$$\begin{aligned}\langle UTx, UTx\rangle &= \langle Tx, U^*UTx\rangle\\ &= \|Tx\|^2\end{aligned}$$

Donc, T est normal.

2.2 Propriété de Fulglede-Putnam

La propriété de Fuglede joue un *rôle* très important dans Ia théorie des opérateurs bornés et non-bornés avec toutes ses applications. Plusieurs travaillent sur ce propriété. Aprds la preuve de Fuglede-Putnam, Rosenblum a donné une preuve simple en utilisant le théorème de Liouville. Berberian a donné une autre preuve avec une matrice qui fait I'équivalence entre celle de Fuglede et Putnam.

2.2.1 Propriété de Fuglede sur les opérateurs bornés

Théoréme 2.2.1.[23] (Fuglede - 1950)

Soient T et N deux opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H , tels que $TN = NT$ *où* N est normal. Alors

$$TN^* = N^*T.$$

Puis en 1951 Putnam a fait la généralisation au cas de deux opérateurs normaux.

Théorème 2.2.2.[23] (fuglede-Putnam-Rosenbtum)

Supposons que M, N et $T \in B(H)$ avec M, N sont normaux et $MT = TN$. Alors

$$M^*T = TN^*$$

Preuve : La preuve suivante est *à* M.Rosenblum.

Supposons que $S \in B(H)$, et posons $V = S - S^*$. On définit :

$$Q = \exp(V) = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n!})V^n.$$

Alors, $V^* = -V$, donc

$$Q^* = \exp(V^*) = \exp(-V) = Q^{-1}.$$

Donc Q est unitaire, la conséquence dont nous avons besoin est que

$$\|\exp(S - S^*)\| = 1 \quad , pour\ tout\ S \in B(H).$$

D'autre part, on a : $MN = TN$ *d'où* par récurrence, alors :

$$M^kT = TN^k \quad , pour\ tout\ k \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$\exp(M)T = T\exp(N), \quad ou\ bien\ \ T = \exp(-M)T\exp(N).$$

Posons : $U_1 = \exp(M^* - M)$ *et* $U_2 = \exp(N^* - N)$.
Puisque M et N sont normaux il s'enuit que :

$$\exp(M^*)T\exp(-N^*) = U_1TU_2 \quad et \quad \|U_1\| = \|U_2\| = 1$$

D'où

$$\|\exp(M^*)T\exp(-\lambda N^*)\| \leq \|T\|.$$

Maintenant, on définit

$$F(\lambda) = \exp(\lambda M^*)T\exp(-\lambda N^*) \quad tel\ que\ (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Les hypothèses du théorème sont vérifiées avec $\bar{\lambda}M$ et $\bar{\lambda}N$ *à* la place de M et N donc implique que :

$$\|F(\lambda)\| \leq \|T\| \quad pour\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Alors, F est une fonction bornée analytique *à* valeur dans $B(H)$.
D'aprés le théordme de Liouville $(F'(\lambda) = 0)$ on a Pour $\lambda = 0$ $F^{'}(0) = 0$:

$$F'(\lambda) = M^*\exp(\lambda M^*)T\exp(-\lambda N^*) + \exp(\lambda M^*)T(-N^*)\exp(-\lambda N^*).$$

D'où :

$$M^*T = TN^*.$$

2.3 Opérateurs quasi-normaux

Déinition 2.3.1.
Un opérateur $S \in B(H)$ est quasi-normal si :

$$S \text{ commute avec } S^*S$$

Proposition 2.3.1.
Si $S = UT$ est la décomposition polaire de S, alors S est quasi-normal si et seulement si : T et U commutent.

Preuve : $T = \mid S \mid = (S^*S)^{\frac{1}{2}}$, U est une isométrie partielle.

1. Si S est quasi-normal alors S et S^*S commutent avec $S^*S = T^2$. Cela implique :
   S et T commutent d'où :

$$\begin{aligned} ST - TS = 0 & \\ & = UTT - TUT \\ & = (UT - TU)T \\ & \Longrightarrow (UT - TU) = 0 \\ & \Longrightarrow UT = TU. \end{aligned}$$

2. Si

$$\begin{aligned} UT = TU &\Longrightarrow UTTT = TUTT = TTUT \\ &\Longrightarrow ST^2 = T^2S \\ &\Longrightarrow S\ est\ quasi-normal. \end{aligned}$$

Proposition 2.3.2

Chaque opérateur quasi-normal est un opérateur sous-normal.

Lemme 2.3.1.

Si N est une extension minimale normal de S alors : S est quasi-normal si et seulement si H est invariant par N^*N.

Preuve : Si S est quasi-normal et $f \in H$ alors

$$\begin{aligned} \|S^*Sf\|^2 &= \langle S^*Sf, S^*Sf\rangle \\ &= \langle Sf, SS^*Sf\rangle \\ &= \langle Sf, S^*S^2f\rangle = \langle S^2f, S^2f\rangle \\ &= \|S^2f\|^2 \\ &= \|N^2f\|^2 \\ &= \|N^*Nf\|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent $N^*Nf \in H$ L'inverse est clair.

2.4 Opérateurs sous normaux

Définition 2.4.1

Un opérateur $T \in B(H)$ est dit sous-normal, s'il existe un espace de Hilbert $K \supseteq H$ et un opérateur normal $N \in B(K)$, tels que H est invariant pour N et $T = N\mid_H$.

En d'autres termes,T est dit sous-normal s'il existe un espace de Hilbert K , tel que H est un sous-espace de K, et iI existe un opérateur normal $N \in B(K)$ qui s'écrit, selon la décomposition $K = H \otimes H^\perp$, sous la forme

$$N = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}\ , et\ A \in B(H), B \in (H^\perp, H), C \in B(H^\perp)$$

Remarque 2.4.1.

1. Tout opérateur normal est un opérateur sous-normal.
2. Tout opérateur isométrique est un opérateur sous-normal.

2.5 Opérateurs hyponormaux

Définition 2.5.1
Un opérateur T est hyponormal si :

$$T^*T \geq TT^*$$

Proposition 2.5.1
Soit T un opérateur hyponormal. Si T est inversible alors T^{-1} est hyponormai.

Preuve : Cette preuve utilise le fait que si A est un opérateur inversible positif et $A \geq 1$, alors $A^{-1} \leq 1$.
Puisque :

$$T^*T \geq TT^*$$

et Test inversible alors

$$T^{-1}T^*TT^{*-1} \geq T^{-1}TT^*T^{*-1} = 1.$$

Par conséquent : $T^*T^{-1}T^{*-1}T \leq 1$
donc :

$$T^{-1}T^{*-1} \leq T^{*-1}T^{-1}.$$

D'or T^{-1} est hyponormal.
Proposition 2.5.2

Si T un opérateur hyponormal, alors $\|T^n\| = \|T\|^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Preuve : Si $f \in H$ et $n \geq 1$ alors

$$\|T^n f\|^2 = \langle T^n f, T^n f\rangle$$

$$= \langle T^*T^n f, T^{n-1} f\rangle \leq \|T^*T^n f\| \|T^{n-1} f\|.$$

$$\leq \|T^{n+1} f\| \|T^{n-1} f\|$$

Par conséquent

$$\|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1} f\| \|T^{n-1} f\|$$

Nous allons maintenant prouver l'égalité par récurrence.
Clairement, il est vrai pour $n = 1$, et supposons donc que :

$$\|T^k\| = \|T\|^k, pour \quad 1 \leq k \leq n.$$

Alors :$\|T\|^{2n} = \|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1} f\| \|T^{n-1} f\|, \quad$ d'ou $\|Tf\|^{n+1} \leq \|T^{n+1} f\|$.

L'inégalité inverse est valable pour tous les opérateurs alors :

$$\|Tf\|^{n+1} \leq \|T^{n+1}f\| \leq \|Tf\|^{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \|Tf\|^{n+1} = \|T^{n+1}f\|$$

Ainsi, pour chaque nombre naturel n, $\|T^n\| = \|T\|^n$.

Proposition 2.5.3.

Chaque opérateur sous-normal est hyponormal.

Preuve : Soit S un opérateur sous-normal, et N son extension minimale normal. Si nous écrivons

$$N = \begin{pmatrix} S & X \\ 0 & T \end{pmatrix} \quad , \quad N^* = \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ X^* & T^* \end{pmatrix}.$$

Alors

$$0 = N^*N - NN^* = \begin{pmatrix} S^*S & S^*X \\ X^*S & X^*X + TT^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} SS^* + XX^* & XT \\ T^*X^* & TT^* \end{pmatrix}.$$

Par conséquent $0 = S^*S - SS^* - XX^*$, ou $S^*S - SS^* = XX^* \geq 0$.

En généralisant le concept de normalité, plusieurs auteurs ont introduit les classes des opérateurs non-normaux.

Notre nouvelle classe occupe l'endroit indiqué dans les schéma suivant et les inclusions sont tous appropriés :

opérateur normal $\subset$ opérateur quasi-normal $\subset$ opérateur sous-normal $\subset$ opérateur hyponormal.

2.6 Spectre d'un opérateur normal

Proposition 2.4.1. [4]

Soit $T \in B(H)$ est normal, alors :

1. Si $Tx = \lambda x$, tel que $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in H$. Alors : $T^*x = \bar{\lambda}x$.
2. Deux espaces propres de T associé *à* des valeurs propres distincts sont orthogonaux .

Proposition 2.4.2.
Le rayon spectral d'un opérateur normal $T \in B(H)$ vérifie :

$$r(T) = \|T\|.$$

Preuve : On suppose d'abord que T est auto-adjoint.

on a $\|T^2\| = \|T\|^2$ et par récurrence sur n l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation

$$\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}, il\ vient \quad r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|T\|.$$

on revient au cas normal, l'élément TT^* est auto-adjoint et il s'ensuit que l'on a :

$$\begin{aligned} r(T) &= \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\|T^n(T^n)^*\|^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\|(TT^*)^n\|^{\frac{1}{n}}\right)\frac{1}{2} \\ &= (r(TT^*))^{\frac{1}{2}} = (\|TT^*\|)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

Proposition 2.4.3.
Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.

Dans le résultat suivant, nous présentons certaines caractérisations du spectre continu d'un opérateur normal borné.

Théorème 2.4.1

Soit $T \in B(H)$ est normal, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\lambda \in \sigma_c(T)$.

ii) $\lambda \in \sigma(T)\backslash\sigma_p(T)$.

iii) $T - \lambda I$ est injectif, et l'image de $(T - \lambda I)(H)$ n'a pas fermée.

Preuve :

$ii) \Longrightarrow i)$ Puisque $\lambda \in \sigma(T)\backslash\sigma_p(T)$, alors $T - \lambda I$ est injectif, mais ne pas surjectif. Supposons que l'image $(T - \lambda I)(H)$ n'est pas dense dans H, alors il existe $z \in (T - \lambda I)(H)^\perp$. Par conséquent nous avens

$$z \in (T - \lambda I)(H)^\perp = \ker(T^* - \bar{\lambda} I)(H)^\perp = \ker(T - \lambda I).$$

D'o$\grave{u}$ contradiction, donc nous concluons que : $\lambda \in \sigma_c(T)$.

$i) \Longrightarrow iii)$ Est évidente $\grave{a}$ partir de la définition du spectre continu.

iii) $\Longrightarrow$ *ii)* On a $T - \lambda I$ est injectif, alors $\lambda \notin \sigma_p(T)$.
Supposons que $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors il existe un opérateur (inversible) $S \in B(H)$ tel que : $S(T - \lambda I)x = x$ pour tout $x \in H$.
En particulier nous avons

$$\frac{1}{\|S\|}\|x\| \leqslant \|(T - \lambda I)x\|, \quad \forall x \in H.$$

D'o*ù* $(T - \lambda I)$ est complet et fermée dans H, qui est une contradiction.
Nous concluons que : $\lambda \in \sigma(T) \backslash \sigma_p(T)$

Proposition 2.4.4.

Le spectre d'un opérateur normal est égale *à* le spectre approximatif

$$\sigma(T) = \sigma_a(T).$$

Corollaire 2.4.1.

Soit $T \in B(H)$ est un opérateur normal. Alors,

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \sigma_a(T).$$

Théoréme 2.4.2.

Soit H est un espace de Hilbert complexe, soit $T \in B(H)$ un opérateur normal et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

1. $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : R(T_\lambda) = H\}$
2. $\sigma_p(T)\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{R(T_\lambda)} \neq H\}$
3. $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{R(T_\lambda)} = H \quad et \quad R(T_\lambda) \neq H\}$
4. $\sigma_r(T) = \varnothing$

Chapitre 3

Les opérateurs n-normal

Dans cet section, nous presentons les opérateurs n-normaux sur un espace de Hilbert H. Nous donnons quelques propriétés de ces opérateurs. En général, un opérateur n-normal n'a pas nécessaire d'étre un opérateur normal, un opérateur hyponormal.

3.1 Définition et exemple

Définition 3.1.1.[1]
Soit $T \in B(H)$, on dit que un opérateur n-normal si

$$T^n T^* = T^* T^n$$

Proposition 3.1.1.

Soit $T \in B(H)$, alors T est n-normal si et seulement si : T^n est normal.

Preuve :

- Soit $T \in B(H)$ opérateur n-normal,

$$T^n T^* = T^* T^n.$$

Donc

$$\begin{aligned} T^n (T^*)^n &= T^* T^n (T^*)^{n-1} = T^* (T^n T^*) (T^*)^{n-2} \\ &= (T^*)^2 T^n (T^*)^{n-2} = (T^*)^n T^n. \end{aligned}$$

Alors T^n est normal.

- Soit T^n est normal. Comme $T^n T = T T^n$, après propriété de Fuglede $T^* T^n = T^n T^*$. Donc T est n-normal.

Remarque 3.1.1.

L'opérateur borné normal est n-normal pour tout n. Mais l'inverse n'est pas vrai.

Exemple 3.1.1.

Soit $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, on a T est 2-normal mais n'est pas normal.

Proposition 3.1.2.

Soit $T \in B(H)$ est n-normal. Alors

1. T^* est n-normal.
2. Si T^{-1} existe, alors (T^{-1}) est n-normal.
3. Si S, T deux opérateurs $\in B(H)$ sont unitairement équivalents, alors S est n-normal.

Preuve :

1. Comme T est n-normal, donc T^n est normal.
   On a
   $$(T^n)^* = (T^*)^n \quad \textit{est normal.}$$
   alors T^* est un opérateur n-normal.

2. Comme T est n-normal, donc T^n est normal.
   Et on a
   $$(T^n)^{-1} = (T^{-1})^n \quad \textit{est normal.}$$
   alors T^{-1} est un opérateur n-normal.

3. Soit T est un opérateur n-normal et T, S sont unitairement équivalents.
   Donc existe un opérateur unitaire U tel que $S = UTU^*$, alors $S^n = UT^nU^*$.
   Comme T^n est normal, alors S^n est normal $\Longrightarrow S$ est un opérateur n-normal.

Théorème 3.1.1

Si S, T deux opérateurs n-normal commutent, alors ST est un opérateur n-normal.

Preuve : Comme S, T deux opérateurs n-normal commutent $\Longrightarrow S^n, T^n$ sont aussi. Alors S^nT^n est un opérateur normal.
Et on a $S^nT^n = (ST)^n, (ST)^n$ est normal. Donc ST est un opérateur n-normal.

Remarque 3.1.2.
Cette résulta n'est pas nécéssairement vrai Si S, T non commutent.

Exemple 3.1.2.

Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ opérateurs sur espace de Hilbert $\mathbb{C}^2$. S et T sont 2-normal. On remarque que

$$ST = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & i \end{pmatrix} = TS.$$

Mais $(ST)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas normal donc ST n'est pas 2-normal.

Lemme 3.1.1.

Soien $S, T \in B(H)$ sont deux opérateurs 2-normaux commutent et positives. Si

$$ST + TS = 0$$

alors $T + S$ et ST sont deux opérateurs 2-normaux.

Preuve :

1. On a $ST + TS = 0, S^2T^2 = T^2S^2$. Alors $(S+T)^2 = S^2 + T^2$ est normal. Donc $(S+T)$ est un opérateur n-normal.
2. $ST + TS = 0, (ST)^2 = S^2T^2 = T^2S^2$, aprés (3.1.1) ST est un opérateur 2-normal.

Théoréme 3.1.2.
Soit $T_1, ..., T_m$ sont opérateurs n-normaux sur $B(H)$.

alors $(T_1 \oplus .... \oplus T_m)$ et $(T_1 \otimes .... \otimes T_m)$ sont opérateurs n-normaux.

Preuve :

1. $(T_1 \oplus ... \oplus T_m)^n (T_1 \oplus ... \oplus T_m)^* = (T_1^n \oplus ... \oplus T_m^n)(T_m^* \oplus ... \oplus T_m^*)$

$$= T_1^n T_1^* \oplus ... \oplus T_m^n T_m^* = T_1^* T_1^n \oplus ... \oplus T_m^* T_m^n$$
$$= (T_1^* \oplus ... \oplus T_m^*)(T_1^n \oplus ... \oplus T_m^n) = (T_1 \oplus ... \oplus T_m)^* (T_1 \oplus ... \oplus T_m)^n.$$

Alors $(T_1 \oplus ... \oplus T_m)$ est un opérateur n-normal.

2. Pour $x_1, ..., x_m \in H$

$$(T_1 \otimes ... \otimes T_m)^n (T_1 \otimes ... \otimes T_m)^* (x_1 \otimes ... \otimes x_m)$$

$$= (T_1^n \otimes ... \otimes T_m^n)(T_1^* \otimes ... \otimes T_m^*)(x_1 \otimes ... \otimes x_m)$$
$$= T_1^n T_1^* x_1 \otimes ... \otimes T_m^n T_m^* x_m$$
$$= T_1^* T_1^n x_1 \otimes ... \otimes T_m^n T_m^n x_m = (T_1^* \otimes ... \otimes T_m^*)(T_1^n \otimes ... \otimes T_m^n)(x_1 \otimes ... \otimes x_m)$$
$$= (T_1 \otimes ... \otimes T_m)^*(T_1 \otimes ... \otimes T_m)^n(x_1 \otimes ... \otimes x_m).$$

Alors

$$(T_1 \otimes ... \otimes T_m)^n(T_1 \otimes ... \otimes T_m)^* = (T_1 \otimes ... \otimes T_m)^*(T_1 \otimes ... \otimes T_m)^n.$$

Donc $(T_1 \otimes ... \otimes T_m)$ est n-normal.

Proposition 3.1.3.
Soit $T \in B(H)$ avec la décomposition cartésienne $T = A + iB$ ou A et B sont auto-adjoint. Alors T est 2-normal si et seulement si

$$B^2 \text{ commute avec } A, \text{ et } A^2 \text{ commute avec } B$$

Preuve :

1. Supposer $B^2A = AB^2$ et $A^2B = BA^2$.
   Alors :

$$T^2T^* = (A + iB)^2(A - iB) = (A^2 + iAB + iBA - B^2)(A - iB)$$
$$= A^3 - iA^2B - B^2A + iB^3 + iABA + AB^2 + BA^2 + BAB$$

   et

$$T^*T^2 = A^3 - AB^2 + iA^2B + iABA - iBA^2 + iB^3 + BAB + B^2A$$

   comme $B^2A = AB^2$ *et* $A^2B = BA^2$, *d'où* $T^2T^* = T^*T^2$. Donc T est 2-normal.

2. Soit T est 2-normal $\Longrightarrow T^2T^* = T^*T^2$, alors :

$$-B^2A + iBA^2 - iA^2B + AB^2 = -AB^2 + iA^2B - iBA^2 + B^2A,$$

$$(A^2B - BA^2) + i(BA^2 - A^2B) = 0.$$

   Soit

$$T_1 = AB^2 - B^2A, T_2 = BA^2 - A^2B.$$

   Alors

$$T_1^* = -T_1, T_2^* = -T_2$$

   $(T_1, T_2$ sont symétriques hermitiens),et $T_1 + iT_2 = 0$. Alors $-T_1 + iT_2 = 0$. Donc $T_1 = AB^2 - B^2A = 0$ Méme, $B^2A = AB^2$.

Remarque 3.1.3.

L'opérateur 2-normal est un opérateur 2k-normal, et l'opérateur 3-normal est un opérateur 3k-normal.

Exemple 3.1.3.

1. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Alors $T^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ est opérateur normal.

   Mais $T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ est non normal.

2. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $T^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ est opérateur normal.

   Mais $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ est un opérateur non normal.

Proposition 3.1.4.

Pour $n \geq 2$. On a $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est n-normal si et seulement si

$b(a^{n-1} + a^{n-2}c + ... + c^{n-1}) = 0, \quad où\ a, b, c \in \mathfrak{C}$.

Preuve :

Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Alors T est n-normal si et seulement si

$$T^n = \begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + ... + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}, T^*T^n = T^nT^*.$$

T est normal si et seulement si

$$\mid b(a^{n-1} + a^{n-2}c + ... + c^{n-1}) \mid = 0.$$

Donc

$$b(a^{n-1} + a^{n-2}c + ... + c^{n-1}) = 0.$$

Exemple 3.1.4.

Considérons $n = 3$ dans la proposition précedente, alors T est 3-normal si et seulement si $b(a^2 + ac + c^2) = 0$. Prendre $a = 2, b = 1, et\ c = -1 + \sqrt{3}i$. Alors $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 + \sqrt{3}i \end{pmatrix}$ est 3-normal.

Mais $T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ est normal,donc T est 3-normal.

Proposition 3.1.5.
En génerale et après la proposition (3.1.4).On a Si

$$T = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad alors \quad T^n = \begin{pmatrix} A^n & \sum_{i=0}^{n-1} A^i X B^{n-i-1} \\ 0 & B^n \end{pmatrix}.$$

Où A et X sont opérateurs dans $B(H)$

3.2 La classe d'opérateurs n-normal

3.2.1 Opérateurs n-quasi normal

Définition 3.2.1.[19]
L'opérateur $T \in B(H)$ est n-quasi normal, si :

$$T^n T^* T = T^* T^{n+1} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Remarque 3.2.1.

i) L'opérateur 1-quasi normal est un opérateur quasi normal.

ii) Chaque opérateur quasi-normal est n-quasi-normal, quelque soit n .

Proposition 3.2.1.
L'opérateur n-normal est aussi n-quasi normal. Mais l'inverse n'est pas vrai.

Définition 3.2.2.[26],[27]et[10]

A) Opérateurs Quasi n- normal :
On dit qu'un opérateur $T \in B(H)$ est Quasi n normal si, ($\forall n \in \mathbb{Z}^+$)

$$T(T^*T^n) = (T^*T^n)T.$$

B) Opérateur K-Quasi-normal :
On dit qu'un opérateur $T \in B(H)$ est K-Quasi-normal si

$$T(T^*T)^K = (T^*T)^K T.$$

C) Opérateur N-Quasi-normal :
on dit qu'un opérateur $T \in B(H)$ est N-Quasi-normal si et seulement si

$$T(T^*T) = N(T^*T)T.$$

D) Opérateurs (K, N) Quasi-normal :
On dit qu'un opérateur $T \in B(H)$ est (K, N) Quasi-normal si satisfait :

$$T^K(T^*T) = N(T^*T)T^K, \quad où\ K \in \mathbb{Z}^+\ et\ N \in B(H).$$

E) Opérateur (K, N) Quasi n-normal :
on dit qu'un opérateur $T \in B(H)$ est (K, N)- Quasi n-normal si satisfait

$$T^K(T^*T^n) = N(T^*T^n)T^K \ , \quad où\ K \in \mathbb{Z}^+\ et\ N \in B(H).$$

F) Opérateur $(K, N)^*$ Quasi n-normal :
on dit qu'un opérateur $T \in B(H)$ est $(K, N)^*$-Quasi n-normal si satisfait :

$$T^K(T^*T^n)^K = N(T^*T^n)^K T^K \ , \quad où\ K \in \mathbb{Z}^+\ et\ N \in B(H).$$

Remarque 3.2.2.
soit T est un opérateur $(K, N)^*$-Quasi n-normal, tel que :

1. Si $N = I$ alors T est un opérateur quasi n-nonnal.
2. Si $K = 1, n = 1$ alors T est un opérateur N-quasi normal .
3. Si $K = 1, N = I$ alors T est un opérateur quasi n-normal .
4. Si $n = 1, N = I$ alors T estun opérateur quasi normal .
5. Si $K = 1, n = 1, N = I$ alors T est un opérateur quasi normal.

3.2.2 Opérateurs n-hyponormal

Définition 3.2.3.[16]
un opérateur $T \in B(H)$ est appelé un opérateur n-hyponormal si :

$$T^nT^* \leq T^*T^n.$$

Proposition 3.2.1.
Soient $S, T \in B(H)$ deux opérateurs sont unitairement équivalents, et T est n-hyponormal. Alors, l'opérateur S aussi est n-hyponormal.

Preuve : Comme, S et T sont unitairement équivalents, alors il existe un opérateur unitaire U tel que

$$S = UTU^*$$

d'ou ,

$$S^n = UT^nU^*.$$

Nous avons,

$$\begin{aligned} S^nS^* &= UT^nU^*(UTU^*)^* \\ &= UT^nU^*UT^*U^* \\ &= UT^nT^*U^* \\ &\leq UT^*T^nU^* \\ &= S^*S^n. \end{aligned}$$

Donc : $S^nS^* \leq S^*S^n$, alors S est un opérateur n-hyponormal.

Proposition 3.2.2.

Soit $T \in \ B(H)$ est un opérateur n-hyponormal. Alors, T^* est non n-hyponormal.

Preuve : On a T est un opérateur n-hyponormal, alors :

$$\begin{aligned} T^nT^* \leq T^*T^n &\Longrightarrow (T^nT^*)^* \leq (T^*T^n)^* \\ &\Longrightarrow (T^*)^*(T^n)^* \leq (T^n)^*(T^*)^* \\ &\Longrightarrow T(T^*)^n \leq (T^*)^nT \\ &\Longrightarrow (T^*)^nT \geq T(T^*)^n. \end{aligned}$$

Donc T^* est non n-hyponormal.

Corollaire 3.2.1.

si T et T^* sont deux opérateurs n-hyponormaux.

Alors, l'opérateur T est un opérateur n-normal.

Théoréme 3.2.1.

Soient $S, T \in B(H)$ deux opérateurs n-hyponormaux commuterrt avec

$ST^* = T^*S$ Alors, ST est un opérateur n-hyponormal.

Preuve : On a :

$$ST = TS \Longrightarrow S^nT^n = (ST)^n.$$

et

$$ST^* = T^*S \Longrightarrow S^nT^* = T^*S^n.$$

AIors

$$\begin{aligned} ST^* = T^*S &\Longrightarrow TS^* = S^*T \\ &\Longrightarrow T^nS^* = S^*T^n. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} (ST)^n(ST)^* &= S^nT^nT^*S^* \\ &\leq S^nT^*T^nS^* \\ &= T^*S^nS^*T^n \\ &\leq T^*S^*S^nT^n. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(ST)^n(ST)^* \leq (ST)^*(ST)^n.$$

Donc, ST est un opérateur n-hyponormal.

3.3 Relation entre les opérateurs normaux et les opérateurs n-normaux

Proposition 3.3.1. [11]
Supposons que T est un opérateur normal, S est un opérateur linéaire.

Si T et S commutent, alors T^* et S^* commutent ainsi.

Théoréme 3.3.1.
Soit S, T deux opérateurs n-normal commutent, tel que :

$(S+T)^*$ commute avec $\sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} S^{n-k}T^k$. Ators $(S+T)$ est un opérateur n-normar.

Démonstration

$$(S+T)^n(S+T)^* = \left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} S^{n-k}T^k\right)(S^*+T^*),$$

$$(S+T)^n(S+T)^* = S^nS^* + \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} S^{n-k}T^k(S+T)^* + T^nS^* + S^nT^* + T^nT^*.$$

comme $(S+T)^*$ est commute avec $\sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} S^{n-k}T^k$,

$$(S+T)^n(S+T)^* = S^*S^n + (S+T)^* \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} S^{n-k}T^k + S^*T^* + T^nS^n + T^*T^n.$$

Alors

$$(S+T)^n(S+T)^* = (S+T)^*(S+T)^n + (S+T)^* \left(\sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} S^{n-k}T^k\right).$$

Donc

$$(S+T)^n(S+T)^* = (S+T)^* \left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} S^{n-k}T^k\right) = (S+T)^*(S+T)^n.$$

Remarque 3.3.3.
la somme de deux opérateurs n-normal commutent ne pas nécessairement n-normal.

Exemple 3.3.1.

Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a S et T sont 2-normal, et commutent.Mais $S + T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
donc $(S + T)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ -non-normal.
Donc $S + T$ est un opérateur non 2-normal.

Proposition 3.3.2.

Soit T est un opérateur k-normal et (k+1)-normal pour tout k entier positif.

Alors T est (k+2)-normal.
Donc, T est normal pour tout $n \geq k$

Preuve : On a T est k-normal, $T^kT^* = T^*T^k$.

Donc

$$TT^kT^*T = TT^*T^kT. \qquad Alors \qquad T^{k+1}T^*T = TT^*T^{k+1}.$$

comme T est (k+1)-normal, $T^*T^{k+2} = T^{k+2}T^*$
Alors T et (k+2)-normal .

Corollaire 3.3.1.

Si T est 2-normal et 3-normal, alors T est n-normal pour tous $n \geq 2$.

Exemple 3.3.2.

Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ est un opérateur sur espace de Hilbert complex .

Alors T est 2-normal, 3-normal, donc est n-normal $\forall n \geq 2$ mais est non normal.

Proposition 3.3.3.

Soit $T \in B(H)$ est un opérateur k-normal et est un isométrie partielle.

Alors T est (k+1)-normal.
Et donc T est n-normaL $(\forall n \geq k)$ et k entier positif.

Preuve : Comme T est un isométrie partielle [9] , $TT^*T = T$.

Donc

$$TT^*T^k = T^k \; et \; T^kT^*T = T^k.$$

Comme T est K-normal

$$T^{k+1}T^* = T^k \quad et \quad T^*T^{k+1} = T^k.$$

Alors
$$T^{k+1}T^* = T^*T^{k+1}.$$
Donc T est $k+1$-normal. Et donc d'aprés la proposition(3.4.2) précédente T est n-normal pour tout n, k.

Corollaire 3.3.2.

Si $T \in B(H)$ est 2-normal et isométrie partielle, alors

T est n-normal ($\forall n \geq 2$).

Lemme 3.3.1.

Soit $T \in B(H)$ est k-normal. Si T ou T^* est injectif, alors

T est normal

Preuve : on a T est k-normal $\Longrightarrow T^{k+1}T^* = T^kT^*T$.

Donc

$$T^k(TT^* - T^*T) = 0.$$

Comme T est injectif $\Longrightarrow TT^* - T^*T = 0$. Alors T est normal.
Dans cas T^* est injectif, comme T^* est k-normal et $(k+1)$-normal $\Longrightarrow T^*$ est normal. Donc T est normal.

3.4 Les opérateur (n,k)-normal

Définition 3.4.1. [11]
Soit T est opérateur borné. On appelle T est (n,k)-normal si et

seulement si
$$T^n(T^k)^* = (T^k)^*T^n$$

ou n, k entiers non négatifs.

Remarque 3.4.1.

tout opérateur normal borné est (n,k)-normal

(*où* $n = k = 1$). Et tous les opérateur n-normal est (n,k)-normal (*où* $m = 1$)
Mais I'inverse n'est pas toujour vrai

Exempre 3.4.1.

Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Alors, $T^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad T^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$
et $(T^2)^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, alors $T^3(T^2)^* = \begin{pmatrix} 32 & 16 \\ 0 & -32 \end{pmatrix} = (T^2)^*T^3$.
Donc,T est (3,2)-normal. Mais est non 3-normal,

$$\left(T^3T^* = \begin{pmatrix} 20 & -8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 20 \end{pmatrix} = T^*T^3 \right)$$

Corollaire 3.4.1

Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors T (2,2)-normal si $b = c$

Preuve : T est (2,2)-normal si et seulement si $T^2(T^2)^* = (T^2)^*T^3$.

On a $T^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,
et

$$T^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} \Longrightarrow (T^2)^* = \begin{pmatrix} a^2+bc & c(a+d) \\ \\ b(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}.$$

Alors

$$(T^2)^*T^2 = \begin{pmatrix} (a^2+bc)^2 + c^2(a+d)^2 & (a+d)(b(a^2+bc) + d(d^2+bc)) \\ \\ (a+d)(b(a^2+bc) + c(d^2+bc)) & b^2(a+d)^2 + (d^2+bc)^2 \end{pmatrix},$$

et

$$T^2(T^2)^* = \begin{pmatrix} (a^2+bc)^2 + b^2(a+d)^2 & (a+d)(c(a^2+bc) + c(d^2+bc)) \\ \\ (a+d)(c(a^2+bc) + b(d^2+bc)) & c^2(a+d)^2 + (d^2+bc)^2 \end{pmatrix}.$$

ce qui implique T est (2,2)-normal si et seulement si $b = c$.

Proposition 3.4.1.

Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, *où* a, b, c sont des nombres complexes,

et $n, k \geq 2$. Alors T est (n,k)-normal si et seulement si

$$b^2(a^{n-1} + a^{n-2}c + ... + c^{n-1})(a^{k-1} + a^{k-2}c + ... + c^{k-1}) = 0, \quad c^k = a^k \textit{ et } c^n = a^n$$

Preuve : On a

$$T^n = \begin{pmatrix} a^n & b\left(\sum_{d=1}^{n} a^{n-d}c^{d-1}\right) \\ \\ 0 & c^n \end{pmatrix} \text{ et } (T^k)^* = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ \\ b\left(\sum_{d=1}^{k} a^{k-d}c^{d-1}\right) & c^k \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$T^n(T^m)^* = \begin{pmatrix} \left[a^n a^k + b^2\left(\sum_{d=1}^{n} a^{n-d}c^{d-1}\right)\left(\sum_{d=1}^{k} a^{k-d}c^{d-1}\right)\right] & \left[bc^k\left(\sum_{d=1}^{n} a^{n-d}c^{d-1}\right)\right] \\ \\ bc^n\left(\sum_{d=1}^{k} a^{k-d}c^{k-1}\right) & c^n c^k \end{pmatrix}.$$

Et

$$(T^k)^*T^n = \begin{pmatrix} a^n a^k & ba^k\left(\sum_{d=1}^{n} a^{n-d}c^{d-1}\right) \\ \\ \left[ba^n\left(\sum_{d=1}^{k} a^{k-d}c^{d-1}\right)\right] & \left[c^n c^k + b^2\left(\sum_{d=1}^{n} a^{n-d}c^{d-1}\right)\left(\sum_{d=1}^{k} a^{k-d}c^{d-1}\right)\right] \end{pmatrix}.$$

Par conséquent T est (n,k)-normal si et seulement si

$$b^2\left(\sum_{d=1}^{n} a^{n-d}c^{d-1}\right)\left(\sum_{d=1}^{k} a^{k-d}c^{d-1}\right) = 0 \quad c^k = a^k \quad et \quad c^n = a^n.$$

Proposition 3.4.2.

Soit T est un opérateur borné. Si T est (n,k)-normal, alors T^{nk} est un opéra

teur normal.

Preuve : T est un opérateur (n,k)-normal, alors $T^n(T^k)^* = (T^k)^*T^n$, et $(T^c) = (T^*)^c$ pour chaque c entier non négatif, Donc :

$$T^{nk}(T^{nk})^* = (T^n)^k((T^k)^n)^* = \underbrace{(T^nT^n...T^n)}_{k-times}\underbrace{(T^kT^k...T^k)^*}_{n-times}$$

$$= T^nT^n...T^n(T^k)^*...(T^k)^* = T^nT^n...(T^k)^*T^n(T^k)^*...(T^k)^*$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$= \underbrace{(T^k)^*(T^k)^*...(T^k)^*}_{n-time}\underbrace{(T^nT^n...T^n)}_{k-times} = \underbrace{(T^kT^k...T^k)^*}_{n-times}\underbrace{(T^nT^n...T^n)}_{k-times}$$

$$= ((T^k)^n)^*(T^n)^k = ((T^n)^k)^*(T^n)^k = (T^{nk})^*T^{nk}.$$

Donc T^{nk} est normal.

Proposition 3.4.3.

T est un opérateur (n,k)-normal si et seulement si T est (k,n)normal.

Preuve : Soit T est (n,k)-normal, alors $T^n(T^k)^* = (T^k)^*T^n$. Donc :

$$T^k(T^n)^* = ((T^k(T^n)^*)^*)^* = (T^n(T^k)^*)^* = ((T^k)^*T^n)^* = (T^n)^*T^k.$$

Alors T est (k,n)-normal.

Proposition 3.4.4.

Si $T \in B(H)$ est un opérateur (n,k)-normal, alors

1. T^* est (n,k)-normal.
2. Si T^{-1} existe alors T^{-1} est (n,k)-normal.
3. Soient $S, T \in B(H)$ deux opérateurs sont unitairement équivalents, alors S est (n,k)-normal.

Preuve : On a T est (n,k)-normal, alors $T^n(T^k)^* = (T^k)^*T^n$.

1. Aprés la proposition (3.4.3)
$$(T^*)^n((T^*)^*)^k = (T^*)^nT^k = T^k(T^*)^n = ((T^*)^*)^k(T^*)^n.$$
Alors T^* est (n,k)-normal.
2. On a : $(T^{-1})^n((T^{-1})^*)^n = (T^n)^{-1}(T^*)^k)^{-1}) = ((T^*)^k(T^n))^{-1} = ((T^n)(T^k)^*)^{-1}$
$$= (T^n(T^k)^*)^{-1} = ((T^k)^*)^{-1}(T^n)^{-1} = ((T^{-1})^*)^k(T^{-1})^n.$$
Alors T^{-1} est (n,k)-normal.
3. Comme S et T sont unitairement équivalents, alors $S = UTU^*$. Donc : $(UTU^*)^n = UT^nU^*$.
Alors :
$$\begin{aligned} S^n(S^k)^* &= (UTU^*)^n((UTU^*)^k)^* = UT^nU^*(UT^kU^*)^* \\ &= UT^nU^*U(T^k)^*U^* = UT^n(T^k)^*U^* = U(T^k)^*T^nU^* \\ &= U(T^k)^*U^*UT^nU^* = ((T^kU^*)^*U^*)UT^nU^* = (U(T^kU^*))^*UT^nU^* \\ &= ((UTU^*)^k)^*(UTU^*)^n = (S^k)^*S^n. \end{aligned}$$
Donc S est (n,k)-normal.

Proposition 3.4.5.

Soit T est (c,k)-normal et (c+1,k)-normal, ou c, k sont entiers non négatifs, alors T est (c+2,k)-normal. Donc T est (n,k)-normal.

Preuve : On a T est (c,k)-normal, et (c+1,k)-normal. Alors

$$\begin{aligned} T^c(T^k)^* = (T^k)^*T^c \quad et \quad T^{c+1}(T^k)^* = (T^k)^*T^{c+1} \\ \Longrightarrow T^{c+1}(T^k)^* = TT^{k+1}(T^k)^* = T(T^k)^*T^{c+1} = T(T^k)^*T^cT \\ = TT^c(T^k)^*T = T^{c+1}(T^k)^* = (T^k)T^{c+1}T = (T^k)^*T^{c+2}. \end{aligned}$$

Donc T est (c+2,k)-normal, alors T est (n,k)-normal. $\forall n, k$.

Proposition 3.4.6.[11]

Soit T est (n,c)-normal et (n,c+1)-normal , *où* n, c sont entiers non négatifs , alors T est (n,c+2)-normal. Donc T est (n,k)-normal.

Théoréme 3.4.1

Soient S et T deux opérateurs (n,k)-normaux, si S commute avec T, alors (ST) est (n,k)-normal.

Preuve : Comme S et T sont commutent, alors $(ST)^n = S^nT^n$. De plus, S commute avec T^* et T commute avec S^*, on a :

$$\begin{aligned} (ST)^n((ST)^k)^* = S^nT^n(S^kT^k)^* = S^nT^n(T^k)^*(S^k)^* \\ = S^nT^n(T^k)^*(S^k)^* = S^n(T^k)^*T^n(S^k)^* \quad (T\ est\ (n,k) - opèrateur) \\ = (T^k)^*S^k(S^k)^*T^n = (T^k)^*(S^k)^*S^k \quad (S\ est\ (n,k) - opèrateur) \\ = ((ST)^k)^*(ST)^n. \end{aligned}$$

Alors ST est (n,k)-normal.

Théoréme 3.4.2

Soit $T_1, T_2, ..., T_p$ sont des opérateurs (n,k)-normaux sur $B(H)$, alors $(T_1 \oplus T_2 \oplus ... \oplus T_p)$ est un (n,k)-normal.

Preuve : Comme $T_1, T_2, ..., T_p$ sont (n,c)-normaux, alors :

$$T_i^n(T_i^k)^* = (T_i^k)^*T_i^n \quad \forall i = 1, 2, ..., p$$

$$(T_1 \oplus T_2 \oplus ... \oplus T_p)^n((T_1 \oplus T_2 \oplus ... \oplus T_p)^k)^* = (T_1^n \oplus T_2^n \oplus ... \oplus T_p^n)(T_1^k \oplus T_2^k \oplus ... \oplus T_p^k)^*$$

$$= (T_1^n \oplus T_2^n \oplus ... \oplus T_p^n)((T_1^k)^* \oplus (T_2^k)^* \oplus ... \oplus (T_p^k)^*) = T_1^n (T_1^k)^* \oplus T_2^n (T_2^k)^* \oplus ... \oplus T_p^n (T_p^k)^*$$

$$= (T_1^k)^* T_1^n \oplus (T_2^k)^* T_2^n \oplus ... \oplus (T_p^k)^* T_p^n = ((T_1^k)^* \oplus (T_2^k)^* \oplus ... \oplus (T_p^k)^*))(T_1^n \oplus T_2^n \oplus ... \oplus T_p^n)$$

$$= (T_1^k \oplus T_2^k \oplus ... \oplus T_p^k)^* (T_1^n \oplus T_2^n \oplus ... \oplus T_p^n) = ((T_1 \oplus T_2 \oplus ... \oplus T_p)^k)^* (T_1 \oplus T_2 \oplus ... \oplus T_p)^n.$$

Alors $(T_1 \oplus T_2 \oplus ... \oplus T_p)$ est (n,k)-normal.

Théoréme 3.4.3

Soit $T_1, T_2, ..., T_p$ sont des opérateurs (n,k)-normaux sur $B(H)$, alors $(T_1 \otimes T_2 \otimes ... \otimes T_p)$ est un (n,k)-normal.

Preuve : Comme $T_1, T_2, ..., T_p$ sont (n,c)-normaux, alors :

$T_i^n (T_i^k)^* = (T_i^k)^* T_i^n \quad \forall i = 1, 2, ..., p.$ *Et soit* $x_1, x_2, ..., x_p \in H$, donc :

$$(T_1 \otimes T_2 \otimes ... \otimes T_p)^n ((T_1 \otimes T_2 \otimes ... \otimes T_p)^k)^* (x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_p)$$
$$= (T_1^n \otimes T_2^n \otimes ... \otimes T_p^n)(T_1^k \otimes T_2^k \otimes ... \otimes T_p^k)^* (x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_p)$$
$$= T_1^n (T_1^k)^* x_1 \otimes T_2^n (T_2^k)^* x_2 \otimes ... \otimes T_p^n (T_p^k)^* x_p = (T_1^k)^* T_1^n x_1 \otimes (T_2^k)^* T_2^n x_2 \otimes ... \otimes (T_p^k)^* T_p^n x_p$$
$$= ((T_1^k)^* \otimes (T_2^k)^* \otimes ... \otimes (T_p^k)^*)(T_1^n \otimes T_2^n \otimes ... \otimes T_p^n)(x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_p)$$
$$= (T_1^k \otimes T_2^k \otimes ... \otimes T_p^k)^* (T_1^n \otimes T_2^n \otimes ... \otimes T_p^n)(x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_p)$$
$$= ((T_1 \otimes T_2 \otimes ... \otimes T_p)^k)^* (T_1 \otimes T_2 \otimes ... \otimes T_p)^n (x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_p).$$

Alors $(T_1 \otimes T_2 \otimes ... \otimes T_p)$ est (n,k)-normal.

3.5 Théorie spectrale des opérateurs n-normaux

Théoréme 3.5.1 [22]
Soit $T \in B(H)$ est n-normale $\sigma(T) \cap \sigma(-T) \subset \{0\}$. Alors

$$\sigma(T) = \sigma_a(T)$$

Preuve : Comme $\sigma(T) = \sigma_a(T) \cup \sigma_r(T)$, il suffit de montre que $\sigma_r(T) \cup \sigma_a(T)$. Soit $z \in \sigma_r(T)$. Alors il existe un vecteur non nul $x \in H$ tel que $T^* x = \bar{z} x$.

Comme $T^{*^n}x = \bar{z}^n x$ et T^n est normal, on a $T^n x = z^n x$

1. Si $z \neq 0$, alors $(T - z)x = 0$.
   Comme $-z \notin \sigma(T), (T - z)x = 0$ donc $z \in \sigma_p(T)$.
2. Si $z = 0$, alors $T^n x = 0$ et on a $0 \in \sigma_p(T)$.
   Donc $\sigma(T) = \sigma_a(T)$

Lemme 3.5.1

Soit T un opérateur n-normaux et $\lambda \in \sigma(T)$.Alors $\lambda^n \in \sigma(T^n)$.

Théoréme 3.5.2 [22]

Soit $T \in B(H)$ est n-normale $\sigma(T) \cap \sigma(-T) \subset \{0\}$.

1. Si z et w sont des valeurs propres distinctes de T sont les vecteurs propres correspondants (respectivement), alors $< x, y >= 0$.
2. Si z et w sont des valeurs distinctes par $\sigma_a(T)$ et $\{x_n\}, \{y_n\}$ sont les séquences de vecteurs unitaires dans H tel que

$$(T - z)x_n \longrightarrow 0 \quad et \quad (T - w)y_n \longrightarrow 0 (n \longrightarrow \infty)$$

   alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} < x_n, y_n >= 0$$

Preuve : Comme $(T^n - z^n)x_n \longrightarrow 0 \quad et \quad (T^n - w^n)y_n \longrightarrow 0$.
Et T^n est normal $\Longrightarrow (T^n - \bar{w}^n)y_n \longrightarrow 0$. Donc

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} z^n < x_n, y_n >= \lim_{n \longrightarrow \infty} < z^n x_n, y_n >= \lim_{n \longrightarrow \infty} < T^n x_n, y_n >$$
$$= \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x_n, T^{*^n} y_n \rangle = \lim_{n \longrightarrow \infty} w^n \langle x_n, y_n \rangle.$$

Si $z^n = w^n$, alors $(z + w)(z - w) = 0$.
Comme $z \neq w$, on a $z = -w$, et $\sigma(T) \cap \sigma(-T) \subset \{0\}$.
Ce qui implique $z = w = 0$, qui est impossible pour des valeurs distinctes.
Par conséquent,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} < x_n, y_n >= 0$$

Corollaire 3.5.1
Soit $T \in B(H)$ est n-normal et $\sigma(T) \cap \sigma(-T) \subset 0$.

Si z et w sont des valeurs propres distinctes de T, alors

$$\ker(T - z) \perp \ker(T - w).$$

Soit M est un sous-espace de H. On dit M est un sous-espace réduce pour T.
Si $T(M) \subset M$ et $T^*(M) \subset M$. (M c'ast un sous-espace invariant pour T et T^*) .

Chapitre 4

Resolution des équations d'opérateurs pour les opérateurs n-normal

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solution de quelque équations d'opérateurs de type Sylvester et stein, dans le cas infini et la solution définie sous deux forme .

4.1 L'équation $AX - XB = C$ dans $B(H)$

Rappelons que si M est un sous-espace vectoriel fermé de H et $T \in B(H)$, alors T s'écrit suivant la décomposition $H = M \oplus M^{\perp}$ sous la forme

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A \in B(M)$, $B \in B(M^{\perp}, M)$, $C \in B(M, M^{\perp})$ *et* $D \in B(M^{\perp})$

Proposition 4.1.1.

Soit A un opérateur linéaire borné défini sur $H \oplus H$ tel que $A = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$

alors son adjoint A^* est donné par $A^* = \begin{pmatrix} Q^* & S^* \\ R^* & T^* \end{pmatrix}$.

Preuve : Soient $A = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ on a

$$
\begin{aligned}
\langle AX, Y\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} Qx_1 + Rx_2 \\ Sx_1 + Tx_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \langle Qx_1 + Rx_1, y_1\rangle + \langle Sx_1 + Tx_2, y_2\rangle \\
&= \langle Qx_1, y_1\rangle + \langle Rx_2, y_1\rangle + \langle Sx_1, y_2\rangle + \langle Tx_2, y_2\rangle \\
&= \langle x_1, Q^*y_1\rangle + \langle x_2, R^*y_1\rangle + \langle x_1, S^*y_2\rangle + \langle x_2, T^*y_2\rangle \\
&= \langle x_1, Q^*y_1 + S^*y_2\rangle + \langle x_2, R^*y_1 + T^*y_2\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q^* & S^* \\ R^* & T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle X, A^*Y\rangle
\end{aligned}
$$

Proposition 4.1.2.

Soit T un opérateur dans $B(H)$ et T^* son adjoint alors, les deux opérateurs T^*T et TT^* sont positifs.

Preuve : On a pour tout $f \in H$

$$\langle T^*Tf, f\rangle = \langle Tf, Tf\rangle = \|Tf\|^2 \geq 0$$

et

$$\langle TT^*f, f\rangle = \langle T^*f, T^*f\rangle = \|T^*f\|^2 \geq 0$$

Lemme 4.1.1.[2]

Si la matrice d'opérateurs $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ définie sur $H \oplus H$ est inversible alors, l'opérateur $S^*S + Q^*Q$ est inversible sur H .

Preuve : Soit $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ un matrice inversible sur $H \oplus H$ alors, $S^*S + Q^*Q$ est un opérateur positif (somme de deux opérateur positif),

$$\sigma(S^*S + Q^*Q) = \sigma_a(S^*S + Q^*Q)$$

Où σ et σ_a representent réspectivement le spectre, et le spectre approche, si on suppose $S^*S + Q^*Q$ est non inversible alors, il existe une suite $(x_n)_n \subset H$ telle que :

$$\|x_n\| - 1, \forall n \geq 1 \ et \ \lim_{n \longrightarrow \infty} \|(S^*S + Q^*Q)x_n\| = 0$$

On a

$$\left\| \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} (x_n \oplus 0) \right\|^2$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}(x_n \oplus 0), \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}(x_n \oplus 0) \right\rangle.$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}(x_n \oplus 0), (x_n \oplus 0) \right\rangle$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} Q^* & S^* \\ R^* & T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}(x_n \oplus 0), (x_n \oplus 0) \right\rangle.$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} Q^*Q + S^*S & Q^*R + S^*T \\ R^*Q + T^*S & R^*R + T^*T \end{pmatrix}(x_n \oplus 0), (x_n \oplus 0) \right\rangle.$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} (Q^*Q + S^*S)x_n \\ (R^*Q + T^*S)x_n \end{pmatrix}, (x_n \oplus 0) \right\rangle$$
$$= \langle (Q^*Q + S^*S)x_n, x_n \rangle.$$

mais comme

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} ((S^*S + Q^*Q)x_n, x_n) = 0$$

alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}(x_n \oplus 0) \right\|^2 = 0$$

Ce qui contredit notre hypothése et la preuve est achevée.

Théoréme 4.1.1.[15]

Soient A et B deux opérateurs normaux bornés dans $B(H)$ et verifient la propriété de $(FP)_{(B(H))}$ (propriété de Fuglede- Putnam) C est opérateur dans $B(H)$, alors l' équation :

$$AX - XB = C$$

admet une solution X dans $B(H)$ si et seulement si, $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont deux opérateurs similaires sur $H \oplus H$.

Preuve : Si l'équation $AX - XB = C$ admet une solution X, alors

$$\begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX - XB \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

par conséquent $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont similaires, supposons maintenant que les opérateurs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont similaires alors, il existe un opérateur inversible $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ dans $B(H \oplus H)$ tel que

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} AQ & AR \\ BS & BT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QA & QC + RB \\ SA & SC + TB \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne aprés l'identification terme par terme

$$AQ = QA \ \ et \ \ AR - RB = QC$$

$$BS = SA \ \ et \ \ BT - TB = SC$$

en appliquant la propriété $(FP)_{B(H)}$ (propriété de Fuglede- Putnam), on obtient $BS^* = S^*A$ et $AQ^* = Q^*A$ par conséquent

$$AS^*S = S^*SA$$

d'où A commute avec S^*S et Q^*Q, donc avec la somme $S^*S + Q^*Q$ l'inverse $(S^*S + Q^*Q)^{-1}$ commute aussi avec A, car en général si A commute avec B, il commute avec B^{-1} . En effet

$$AB = BA \Leftrightarrow B^{-1}BAB^{-1} = B^{-1}ABB^{-1} \Leftrightarrow AB^{-1} = B^{-1}A$$

de plus on obtient

$$\begin{aligned}(S^*S + Q^*Q)C &= Q^*(AR - RB) + S^*(BT - TB) \\ &= (AQ^*R + AS^*T) - (Q^*RB + S^*TB) \\ &= A(Q^*R + S^*T) - (Q^*R + S^*T)B\end{aligned}$$

D'après lemme (4.1.1) l'opérateur $S^*S + Q^*Q$ est inversible, son inverse commute avec A par conséquent

$$C = A(S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T) - (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T)B$$

d'où

$$X = (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T)$$

Corollaire 4.1.1.

Soint A et B deux opérateurs dans $B(H)$, si la paire (B, A) satisfait la propriété $(FP)_{B(H)}$ (propriété de Fuglede- Putnam), alors l'équation $AX - XB = C$ admet une solution X dans $B(H)$ si et seulement si $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont deux opérateurs similaires sur $H \oplus H$ l'undes cas suivants :

i) A dominant .

ii) A p-hyponormal .

iii) A K-quasihyponormal .

4.2 Théorème de Fuglede-Putnam pour les opérateurs n-normal

Lemme 4.2.1[28]
Si A et B^* sont de classe n-normal alors l'opérateur Γ est de classe n-normal.

Preuve : Par hypothèse, $A^*A^n = A^nA^*, BB^{*n} = B^{*n}B$.

Depuis,$\Gamma(X) = AXB$ et $\Gamma^*(X) = A^*XB^*$ pour une paire $A, B \in B(H)$,

$$\begin{aligned}(\Gamma^*\Gamma^n - \Gamma^n\Gamma^*)X &= \Gamma^*\Gamma^nX - \Gamma^n\Gamma^*X \\ &= \Gamma^*(A^nXB^{*^n}) - \Gamma^n(A^*XB) \\ &= A^*A^nXB^{*^n}B - A^nA^*XBB^{*^n} \\ &= A^*A^nXB^{*^n}B - A^*A^nXB^{*^n}B \\ &= 0.\end{aligned}$$

L'égalité ci-dessus montre que $\Gamma \in n - normal$.

Lemme 4.2.2

Si A n-normal et A est inversible, alors A^{-1} est n-normal.

Preuve : Par hypothèse $A^*A^n = A^nA^*$, nous devons prouver que
$A^{*^{-1}}A^{n^{-1}} = A^{n^{-1}}A^{*^{-1}}$.

$$A^{*^{-1}}A^{n^{1-}} = (A^nA^*)^{-1} = (A^*A^n)^{-1} = A^{n^{-1}}A^{*^{-1}}.$$

D'où A^{-1} est classe n-normal.

Lemme 4.2.3 [17]

Soit $T \in B(H)$, T est n-normal pour tout positif entier $n \geq 4$.

Théorème 4.2.1

Soit A et B^* être dans la classe $B(H)$ tel que B^* est inversible et X un opérateur de Hilbert. Supposons que $AX = XB$ puis $A^*X = XB^*$.

Preuve : Soit Γ l'opérateur de Hilbert défini par, $\Gamma Y = AYB^{-1}$, où $Y \in B(H)$.

Par hypothèse $AetB^*$ sont de classe n-normal, d'après le lemme 4.2.2 $(B^*)^{-1}$ de classe n-normal. puisque $(B^*)^{-1} = (B^{-1})^*$, il résulte du lemme 4.2.1 que Γ est de classe n-normal. L'hypothèse $AX = XB$ implique que $\Gamma X = X$ et aussi par le lemme 4.2.3, T est n-normal pour tout $n \geq 2$, il s'ensuit que,

$$
\begin{aligned}
\| \Gamma^* X \|^2 &=< \Gamma^* X, \Gamma^* X > \\
&=< \Gamma^*\Gamma^n X, \Gamma^*\Gamma^n X > \\
&=< \Gamma\Gamma^{*n}\Gamma^*\Gamma^n X, X > \\
&=< \Gamma\Gamma^{*n+1}\Gamma^n X, X > \\
&=< \Gamma^{*n+1}\Gamma\Gamma^n X, X > \\
&=< \Gamma^{n+1} X, \Gamma^{n+1} X > \\
&= \|X\|^2.
\end{aligned}
$$

L'égalité ci-dessus donne,

$$
\begin{aligned}
\|\Gamma^* X - X\|^2 &=< \Gamma^* X - X, \Gamma^* X - X > \\
&=< \Gamma^* X, \Gamma^* X > - < \Gamma^* X, X > - < X, \Gamma^* X > + < X, X > \\
&= \|\Gamma^* X\|^2 - < X, \Gamma X > - < \Gamma X, X > + \|X\|^2 \\
&= \|X\|^2 - < X, X > - < X, X > + \|X\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Donc $\Gamma^* X = X$ donc $A^* X = X B^*$.

4.3 La solution d'équation $(A + \lambda)X - X(B + \mu) = C$

Proposition 4.3.1 [1]
$(A + \lambda)$ est un opérateur n-normal pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ si et seulement si A est opérateur normal .

Preuve : Puisque $(A + \lambda)$ est n-normal pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(A + \lambda)^*(A + \lambda)^n = (A + \lambda)^n(A + \lambda)^*.$$

Par conséquent

$$(A^* + \bar{\lambda})(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k}\lambda^k) = (\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k}\lambda^k)(A + \lambda)^*.$$

Alors
$(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^* A^{n-k}\lambda^k) + (\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k}\lambda^k)\bar{\lambda} = (\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$
$A^{n-k}A^*\lambda^k) + (\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k}\lambda^k)\bar{\lambda}.$

Par conséquent

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\lambda)^k (A^* A^{n-k} + A^{n-k} A^*) = 0.$$

Du côté gauche de la derniére équation, nous obtenons le terme qui $k = n$ est 0. Par conséquent

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\lambda)^k(A^*A^{n-k} + A^{n-k}A^*) = 0.$$

Donc

$$(-1)^{n-1}n(\lambda)^{n-1}(A^*A + AA^*) + \sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\lambda)^k(A^*A^{n-k} + A^{n-k}A^*) = 0.$$

mettre $\lambda = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r > 0$ On a

$$(-1)^{n-1}n(re^{i\theta})^{n-1}(A^*A+AA^*)+\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (re^{i\theta})^k(A^*A^{n-k}+A^{n-k}A^*) = 0.$$

alors

$$(-1)^{n-1}(A^*A + AA^*) + \frac{1}{n(re^{i\theta})^{n-1}}(\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (re^{i\theta})^k(A^*A^{n-k} + A^{n-k}A^*))$$

Laisser $r \longrightarrow \infty$. Alors $A^*A + AA^* = 0$. Donc T est normal. La réciproque est triviale.

Théoréme 4.3.1

Soit l'équation $(A + \lambda)X - X(B + \mu) = C$ tel que A et B deux opérateurs nermaux dans $B(H)$, et vérfier le proposition de $(FP)_{B(H)}$.

L'équation $(A + \lambda)X - X(B + \mu) = C$ admet une solution unique si et seulment si $\begin{pmatrix} A+\lambda & 0 \\ 0 & B+\mu \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A+\lambda & C \\ 0 & B+\mu \end{pmatrix}$ est Similarité .

Preuve : Soit $P = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix}$ l'équation admet une solution X alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A+\lambda) & 0 \\ 0 & (B+\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (A+\lambda) & (A+\lambda)X - X(B+\mu) \\ 0 & (B+\mu) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (A+\lambda) & 0 \\ 0 & (B+\mu) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

par conséquent $\begin{pmatrix} (A+\lambda) & 0 \\ 0 & (B+\mu) \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} (A+\lambda) & C \\ 0 & (B+\mu) \end{pmatrix}$ sont similaires .

Supposons maintenant que les opérateurs :

$$\begin{pmatrix} (A+\lambda) & 0 \\ 0 & (B+\mu) \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} (A+\lambda) & C \\ 0 & (B+\mu) \end{pmatrix}$$

sont similaires, alors il existe un opérateur inversible $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ dan $B(H \oplus H)$ tel que

$$\begin{pmatrix} (A+\lambda) & 0 \\ 0 & (B+\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A+\lambda) & C \\ 0 & (B+\mu) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (A+\lambda)Q & (A+\lambda)R \\ (B+\mu)S & (B+\mu)T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(A+\lambda) & QC + R(B+\mu) \\ S(A+\lambda) & SC + T(B+\mu) \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne après l'identification terme par terme

$$Q(A+\lambda) = (A+\lambda)Q \quad et \quad (A+\lambda)R - R(B+\mu)B = QC.$$
$$(B+\mu)S = S(A+\lambda) \quad et \quad (B+\mu)T - T(B+\mu) = SC.$$

En appliquant la propriété $(FP)_{B(H)}$ (propriété de Fuglede- Putnam) on obtient $(B+\mu)S^* = S^*(A+\lambda) \quad et \quad (A+\lambda)Q^* = Q^*(A+\lambda)$, par conséquent

$$(A+\lambda)S^*S = S^*S(A+\lambda)$$

d'où $(A+\lambda)$ commute avec S^*S et Q^*Q, donc avec la somme $S^*S + Q^*Q$.
L'inverse $(S^*S+Q^*Q)^{-1}$ commute aussi avec $(A+\lambda)$, car en général si :
$(A+\lambda)$ commute avec $(B+\mu)$, il commute avec $(B+\mu)^{-1}$. En effet

$(A+\lambda)(B+\mu) = (B+\mu)(A+\lambda)$
$\Longleftrightarrow (B+\mu)^{-1}(B+\mu)(A+\lambda)(B+\mu)^{-1} = (B+\mu)^{-1}(A+\lambda)(B+\mu)(B+\mu)^{-1}$
$\Longleftrightarrow (A+\lambda)(B+\mu)^{-1} = (B+\mu)^{-1}(A+\lambda)$

De plus on obtient.

$$\begin{aligned}(S^*S+Q^*Q)C &= Q^*((A+\lambda)R - R(B+\mu)) + S^*((B+\mu)T - T(B+\mu)) \\ &= ((A+\lambda)Q^*R + (A+\lambda)S^*T) - (Q^*R(B+\mu)T + S^*T(B+\mu)) \\ &= (A+\lambda)(Q^*R+S^*T) - (Q^*R+S^*T)(B+\mu)\end{aligned}$$

D'après lemme (4.1.1)
l'opérateur S^*S+Q^*Q est inversible, son inverse commute avec $(A+\lambda)$
Par conséquent

$$C = (A+\lambda)(S^*S+Q^*Q)^{-1}(Q^*R+S^*T) - (S^*S+Q^*Q)^{-1}(Q^*R+S^*T)(B+\mu)$$

d'où

$$X = (S^*S+Q^*Q)^{-1}(Q^*R+S^*T)$$

4.4 Solution des équations d'opérateur de temp discrètes

4.4.1 Certains types d'équations d'opérateurs

1- Equations d'opérateur de Sylvester à temps continu et discret :

$$AXB \pm X = \alpha C \tag{4.1}$$

2- Equations d'opérateur de Lyapunov en temps continu et discret :

$$A^*X - XA = \alpha C \tag{4.2}$$

$$A^*XA - X = \alpha C \tag{4.3}$$

Où A ,B et C sont des opérateurs donnés définis sur un espace de Hilbert H, X est un opérateur dans H,A^* est l'adjoint de A et α scaiaire
En général, ces équations d'opérateurs peuvent avoir une solution, infinitive ensemble de solutions ou pas de solution .
L'équation de Sylvester à temps discret peut être transformée dans l'équation de l'opérateur Sylvester à temps continu comme suit :
Multiplier l'éq (4.1) à droite par B^{-1} :

$$AXBB^{-1} \pm XB^{-1} = \alpha CB^{-1}$$
$$AX \pm XB^{-1} = \alpha CB^{-1}$$

Soit $CB^{-1} = W$, l'équation ci-dessus devient :

$$AX \pm XB^{-1} = \alpha W \tag{4.4}$$

De plus, l'équation d'opérateur de Lyapunov à temps discret peut être transformée à l'équation d'opérateur de Lyapunov en temps continu comme suit :
Multiplier l'éq (4.3) à droite par A^{-1} :

$$A^*XAA^{-1} - XA^{-1} = \alpha CA^{-1}$$

Soit $CA^{-1} = W$ l'équation ci-dessus devient :

$$A^*X - XA^{-1} = \alpha W \tag{4.5}$$

Théorème 4.4.1 (Sylvester - Rosenblum).
Soient A et B sont des opérateurs dans $B(H)$, tels que $\sigma(A) \cap (B) = \varnothing$, puis l'équation d'opérateur $AX - XB = \alpha C$ (équation d'opérateur Sylvester à temps continu) a une solution unique X, pour chaque opérateur C dans $B(H)$.

Les corollaires suivants donnent la solution unique pour l'équation d'opérateur (4.5).

Corollaire 4.4.1.

Si A et B sont des opérateurs dans $B(H)$ et B^{-1} existe tel que :

$\sigma(A) \cap \sigma(B^{-1}) = \varnothing$ alors , l'équation d'opérateur $AX - XB^{-1} = \alpha W$admet une solution unique X pour chaque opérateur $W \in B(H)$.

Proposition 4.4.1.

Si $\sigma(A) \cap \sigma(B^{-1}) = \varnothing$,alors l'opérateur $\begin{pmatrix} A & -\alpha W \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ est défini sur $H_1 \oplus H_2$ est similaire à l'opérateur $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B^{-1} \end{pmatrix}$.

Preuve : Depuis $\sigma(A) \cap \sigma(B^{-1}) = \varnothing$, par Sylvester- Théorème de Rosenblum l'équation d'opérateur $AX - XB^{-1} = \alpha W$ admet une solution unique X . De plus

$$\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -\alpha W \\ 0 & -B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B^{-1} \end{pmatrix}$ est similaire avec $\begin{pmatrix} A & -\alpha W \\ 0 & -B^{-1} \end{pmatrix}$

Corollaire 4.4.2.

Considérons l'équation $AX - XB^{-1} = \alpha W$ si $\sigma(A) \cap \sigma(-B^{-1}) = \varnothing$ donc, l'opérateur $\begin{pmatrix} A & -\alpha W \\ 0 & -B^{-1} \end{pmatrix}$ est défini sur $H_1 \oplus H_2$ est similaire avec l'opérateur $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B^{-1} \end{pmatrix}$.

Remarques 4.4.1.

1. Si la condition $\sigma(A) \cap \sigma(B^{-1}) = \varnothing$ ne parvient pas à satisfaire alors, l'équation d'opérateur $AX - XB^{-1} = \alpha W$ peut avoir aucune solution .

2. Si la condition $\sigma(A) \cap \sigma(-B^{-1}) = \varnothing$, ne parvient pas à satisfaire alors l'équation de l'opérateur $AX + XB^{-1} = \alpha W$ peut avoir aucune solution . Maintenant, le corollaire suivant donne la solution unique à l'équation d'opérateur (4.5).

Corollaire 4.4.3.

Siot A un opérateur dans $B(H)$ et A^{-1} est existe. Si $\sigma(A^*) \cap \sigma(A^{-1}) = \varnothing$

alors, équation (4.5) admet une solution unique X pour chaque opérateur W.

Proposition 4.4.2.

Considérez l'équation (4.5) si $(A^*) \cap (A^{-1}) = \varnothing$ alors, l'opérateur $\begin{pmatrix} A^* & -\alpha W \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$ est défini sur $H_1 \oplus H_2$ est similaire avec l'opérateur $\begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$.

Preuve Depuis $\sigma(A^*) \cap \sigma(A^{-1}) = \varnothing$, par Sylvester- Rosenblum théorème a une solution unique. Aussi $\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & -\alpha W \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & I \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}$ est inversible donc, $\begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$ est similaire avec $\begin{pmatrix} A^* & -\alpha W \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$.

4.5 Les solution l'équation $AX - XB = C$ dans le cas 2-normal

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

On a M et N sont 2-normal, puis ce qui :

$$A^*A^2 = A^2A^*$$
$$B^*B^2 = B^2B^*$$

Preuve

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} X_3 & X_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X_3 - X_1 & X_4 - X_2 \\ -X_3 & -X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En faisant correspondre on trouve

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = -1$$

Donc $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a A similaire avec B. Alors $\exists P$ inversible si :

$$B = P^{-1}AP$$

$P = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad alors \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

Donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.6 L'équation d'opèrateur Stein

Considérez l'équation d'opérateur

$$AX + X^*A = W \tag{4.6}$$

Où A un opérateur donné défini $B(H)$ et X est un'opérateur inconnu qui doit être déterminé, X^* est un l'adjoint de X. L' équations (4.6) est appelée l'équation d'opérateur stein ou l'équation d'opérateur linéaire Stein à temps continu .

Corollaire 4.6.1.

L' équations $AX + X^*A = W$, et vérfier le proposition de $(FP)_{B(H)}$.

Admet un solution X si et seulement si, il existe un opérateur P tel que :

$$P^* \begin{pmatrix} W & A \\ A & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve : Si X la solution de l'équation $AX + X^*A = W$ on pose :
$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{pmatrix}, P^* = \begin{pmatrix} I & -X^* \\ 0 & I \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} I & -X^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & A \\ A & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W - AX - X^*A & A \\ A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$
donc $AX + X^*A = W$. Si $P = \begin{pmatrix} S & R \\ T & Q \end{pmatrix}$ donc $P^* = \begin{pmatrix} S^* & T^* \\ R^* & Q^* \end{pmatrix}$ on applique le propieté de $(FP)_{B(H)}$ (propriété de Fuglede- Putnam) pour obténir la solution X .

Conclusion

Dans ce travail nous avons étudié les opérateurs de type n-normal et leurs applications sur l'équations d'opérateurs dans les espaces de hilbert . Donc aprés tous nous validans ces rédsultats :

Soit H un espace de Hilbert, séparable de dimension infini et soit $B(H)$ I'algébre des opérateurs linéaires bornés sur H.

1. Pour $T \in B(H)$ définissons les opérateurs normaux : T commute avec son adjoint :

$$T^*T = TT^*$$

2. Pour $T \in B(H)$ les opérateurs n-normaux satisfait T^n commute avec son adjoint :

$$T^nT^* = T^*T^n$$

3. T est un opérateur n-normal si et selement si T^n est normal .

4. Quelques classes d'opérateurs n-normaux :

   - les opérateurs n-quasi normaux : $T^nT^*T = T^*T^{n+1}$

   - les opérateurs n-hyponormaux : $T^nT^* \leq T^*T^n$

5. T est un opérateur (n,k)-normal si et selement $T^n(T^k)^* = (T^k)^*T^n$

6. l'équation d'opérateurs $(A+\lambda)X-X(B+\mu) = C$ où A et B deux opérateurs

normaux dans $B(H)$ admet une solution unique si et seulement si

$$\begin{pmatrix} A+\lambda & 0 \\ 0 & B+\mu \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} A+\lambda & 0 \\ C & B+\mu \end{pmatrix}$$

sont deux opérateurs similaires.

Perspectives

Ce travail donne des perspectives en termes d'améliorations et d'approfondissements.

1. Si l'opérateur A est(n, k) normal hyponormal, paranormal et la pair (A, B) vérifie la propriété de $(FP)_{B(H)}$, quelles sont les conditions pour que l'équation $AX - XB = C$ admet une solution ?.
2. Peut-on généraliser sur l'équation $AXB - CXD = E$.
3. Pour la nature de solution l'equation $AX + XA^* = C$ admet une solution auto adjoint. Quelles seront les conditions pour que la solution soit normal ou hyponormal, et même équation conditions pour l'équation $AXB - CXD = E$.

Bibliographie

[1] S.A. Alzuraiqi , A.B. Patel, On n-Normal Operators, General Mathematics Notes, Vol. 1, No.2, December 2010, 6L-73.

[2] W. Arendt, F. Rabiger, A.Sourour Spectral Properties of the operator equation $AX - XB = Y$, Quart. J. Math. Oxford, 45 :2(1994), 133 -149.

[3] W. Arveson, A Short Course on Spectral Theory(Graduate terts in mathermatics,209)2002, Springer-Verlag New York.

[4] G. Aubrun, Théorie des Opérateurs Ml Mathdmatiques, Uniuersitd de la Rédunion.

[5] S.J. Bernau, The Spectral Theorem For Normal Operators. 15May, 1964, journal london math. soc, 40(1965), 478 - 486.

[6] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et applications, masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[7] J.A. Brooke, P.Busch, D.B.Pearson, Commutativity up to a factor of bounded operators in complex Hilbert space, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.boucle fermée /58/2017(2002), 109 - 118.

[8] J.B. Conway, A Course in Operator Theory, (1999) .

[9] J.B. Conway, A Course in functional Analysis, Springer,1990(2^{nd} edition).

[10] S. Dawood Muhsin, A. Mohammed Khalaf, On The Class of $(K, N)^*$ Quasi-N-Normal Operators on Hilbert Space,Journal of Science,2017, Vol.58, No.4B,pp :2172- 2176.

[11] H.Abood. Eiman, Mustafa A. Al-loz, On some generalization of normal operators on Hilbert space lraqi Journal of Science, 2015, Vol 56, No. 2C,1786 - 1794.

[12] H. Flanders , H .K. Wimmer, On the matrin equation $AX - XB = C$ and $AX - YB = C$, SIAM.J.Appl. Math. 32(1977),707 - 710.

[13] I. Gohberg, A. Goldberg Marinus. Kaashoek, Basic Classes of Linear Operators, 2003 *Birkhäuser* Verlag.

[14] M. Guesba, Traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts, thése de doctorat, Univ.Mohamed Boudiaf-M'sila 2017.

[15] L. Hariz Bekkar, A. Mansour, Solvability of sylvester operator equation with bounded subnormal operatour in Hilbert spaces,Korean J. Math.27(2019), No.2,515-523.

[16] M. Ito, Generalization of the results on powers of p-hyponormtal operatotrs, J. J. Inequal. Appl. Vol. 6(2001), 1 - 15.

[17] A.A.S. Jibril, On n-Power normal operators, The Arabian Journal for Science and Engineering, 33(2008), 247–251.

[18] A. Mansour and L. Hariz Bekkar, H. Gaaya, A Priori estimate for the solution of sylvester equation, Vol 10, No.7,29 may 2015, 1921-2347

[19] S. Mecheri, On the class of n-opwer quasi-normal operators on Hilbert space,Vol 3,2(2011), 213 - 228.

[20] S. Mecheri, A. Mansour, On the operator equation $AXB - XD = E$, Lobachevskii journal of mathematics 30 (NTA3), 224 (2009).

[21] S. Mecheri, K. Tanahashi and A. Uchiyama, Fuglede-Putnam theorem for p-hyponormal or class Y operators, Bull. Korean Math. Soc., 43(2006), 747–753.

[22] Muneo Ch$\bar{o}^a$, Biljana Nadevska^b Spectral Properties of n -Normal Operators, Department of Mathematics, Kanagawa Univaersity, Hiratsuka, (2018).

[23] C.R. Putnam, On Normal Operators in Hilbert Space, Amer. J. Math.73 (1951) 357 -362.

[24] C.R. Putnam, Commutation Properties of Hilbert Space operators and related Topics, Spntger-Verlag, Berlin . Heldelberg 1967.

[25] A. Schweinsberg, The operator equation $AX - XB = C$ with normal A and B, Pac. J. Math.102(1982).

[26] S. Senthil, P. Thangaraju and D.C. Kumar, n-Normal and n-Quasi-normal Composite Muttiplication Operator on L^2- Spaces, Journal of Scientific Rescarch ζ Reports, 8(4) : 1- 9,2015 ; Article no : 2320 - 0227.

[27] N. Sivakumar, V. Bavithra, On the class of (K, N) Quasi-n-Normal operators on Hilbert space, intenational journal of aduance researchideas and innoaations in technology, 2016.

[28] J. Steliairene and P. Viayaiakshmi, Fuglede-Putnam theorern, and quasi-nilpotent part of n-normal operators, Tamkang jornal of mathematics, Volume 46, 2015.

[29] V.S. Sunder, Operators on Hilbert space, May 14, 2014. INDIA.

[30] B. $\ddot{U}$nalrn Uzun, A Note on the Operator Equation $AX - XB = Y$, International Mathematical Forum, 5,2010, 3211 - 3220.