N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

La recherche de la fonction de Green pour le potentiel de saut sur un disque

Présenté par: Beggas Samia
Sahraoui Djehed

Soutenu devant le jury composé de

MEFTAH. M. T	MCB	Présidente	Univ. d' Ouargla
HABITA Khaled	MAA	Examinateur	Univ. d'El Oued
BEN ALI Brahim	MCB	Rapporteur	Univ. d'El Oued

Année universitaire 2015 – 2016

Remerciements

Nous remercions tout d'abord **Dieu** le tout puissant qui nous a données la puissance et la volonté pour achever ce travail.

Nos vifs remerciements vont également à notre encadreur **Dr. Ben Ali Brahim** qui nous a guidées durant ce semestre par ses conseils et remarques qui étaient très utiles pour réaliser ce mémoire.

Nous remercions encore, **Dr. Habita Khaled** et **Dr. Meftah. M. T** qui ont accepté d'examiner ce travail.

Nos remerciements vont également à nos familles par leurs aides morales et matérielles tout au long de notre scolarité.

Notations générales

$\langle , \rangle$	Le produit scalaire.
∂	La dérivée partielle.
$\mathcal{A}^*$	L'adjoint d'un opérateur $\mathcal{A}$.
$G(x,\xi)$	La fonction de Green.
$G^*(x,\xi)$	La fonction de Green d'un problème auto-adjoint.
W	Le wronskien.
$\triangle$	Le laplacien.
Y_l	La fonction de Neumann.
J_n	La fonction de Bessel.
K_n	La fonction de Bessel modifiée associée Y_n.
I_n	La fonction de Bessel modifiée associée J_n.
$H_n^{(1,2)}$	La fonction de Hankel.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexes.
E	Energie.
$V(r,\theta)$	Le potentiel.
q^2	La quantité du charge.

Table des matières

Introduction générale

Les mathématiques sont aujourd'hui utilisées dans plusieurs domaines des sciences contemporaines. L'application des mathématiques, et spécialement comme les équations différentielles, joue un rôle considérable en physique.

En physique, on rencontre les équations différentielles lors de la construction d'un modèle pour une situation physique donnée. Ainsi les équations aux dérivées partielles et les équations différentielles linéaires du second ordre jouent un rôle important en mécanique et en physique. Ces équations peuvent servir par exemple à résoudre les problèmes des petites oscillations mécaniques, la propagation des ondes, de la théorie du potentiel, de la fonction de Green etc...

On appelle fonction de Green en physique ce que les mathématiciens appellent solution élémentaire d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants.

Ces fonctions sont introduites par George Green en 1828 pour les besoins de l'électromagnétisme, utilisées par Neumann dans sa théorie du potentiel Newtonien et par Helmholtz en acoustique, elles sont un outil puissant en théorie quantique des champs après que Feynman les a popularisées sous le nom de propagateur dans sa formulation en intégrale de chemin de l'électrodynamique quantique.

Dans le premièr chapitre, nous présentons d'abord la théorie de l'équation différentielle ordinaire en donnant l'importance, dans cette présentation, à l'équation diffiérentielle ordinaire de seconde ordre à coefficients constants. Ensuite, nous avons développé la théorie de la construction de la fonction de Green pour une équation différentielle ordinaire comme nous allons présenter quelques exemples. Finalement, nous avons donné un apercu sur le problème auto-adjoint, ainsi que les fonctions de Bessel et leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre, nous cherchons un résultat qui concerne la dérivation de la fonction de Green relative à l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans l'espace à deux dimensions. Le système considéré dans ce travail est une particule quantique qui se déplace dans un potentiel axe-symétrie en dimension 2. Nous avons supposé que le potentiel $V(r)$ soit égal à $\frac{q^2}{r^2}$ à l'intérieur de disque (rayon a) et égal à zéro en dehors du disque. Pour calculer la fonction de Green, nous avons utilisé, la continuité de la solution et de sa dérivée au bord $(R = a)$.

Chapitre 1

Notions de base

Introduction

Dans de nombreuses applications, la dynamique d'un système peut être décrite par des équations différentielles ordinaires. Par exemple, on rencontre ces applications en mécanique, en dynamique atomique et moléculaire, en électronique des circuits intégrés, en biologie, au développement de populations, etc.... Il est bien connu que la théorie des équations différentielles est intimement liée à la théorie des opérateurs. Dans ce chapitre nous allons présenter quelques rappels sur la théorie générale des équations différentielles ordinaires d'ordre n, puis la théorie des équations différentielles ordinaires du second ordre. Nous avons mis également l'accent sur la constructon des fonctions de Green associées à ces équations différentielles. Ce chapitre constitue alors la base des applications que nous allons présenter au deuxième chapitre.

Puis on s'interesse à la fonction de Green pour les cas importants en physique relative aux opérateurs auto-adjoints, ainsi que quelques notions sur les fonctions de Bessel.

1.1 Équation différentielle linéaire homogène d'ordre n

Une équation différentielle est une équation entre une variable réelle (par exemple x), une fonction qui dépend de cette variable (par exemple y) et un certain nombre de ses dérivées successives. Lorsque la dérivée de plus haut degré de la fonction (qui apparaît réellement) est la $n^{\text{ième}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on dit que l'équation différentielle est d'ordre n.
Considérons une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ...a_{n-1} y = 0. \tag{1.1}$$

On suppose que $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ sont des constantes. Avant d'indiquer une méthode de résolution de l'équation (1.1), nous donnerons deux définitions qui nous seront utiles par la suite.

1.1.1 Définitions

1. Si l'on a pour tous les x du segment $[a, b]$ l'égalité

   $$\varphi_n(x) = A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + ... + A_{n-1}\varphi_{n-1}(x),$$

   où $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ sont des constantes non nulles, on dit que $\varphi_n(x)$ est une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_{n-1}(x)$ [6].
2. Les $n - 1$ fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_{n-1}(x)$ sont dites linéairement indépendantes si aucune d'elles ne peut être représentée comme combinaison linéaire des autres.

Remarque 1.1.1 *Il résulte de ces définitions que si les fonctions* $\varphi_1(x), \varphi_2(x)..., \varphi_n(x)$ *sont linéairement dépendantes, il existe alors des constantes* $C_1, C_2, ..., C_n$ *non toutes nulles et telles que l'on a, quel que soit* x *pris sur le segment* $[a, b]$,

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + ... + C_n\varphi_n(x) \equiv 0.$$

Passons maintenant à la solution de l'équation (1.1), on a pour cette équation le théorème suivant :

1.1.2 Théorème

Si les fonctions $y_1, y_2, ..., y_n$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.1), sa solution générale est de la forme :

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$$

où $C_1, C_2, ..., C_n$ sont des constantes arbitraires.
Si les coefficients de l'équation (1.1) sont constants, on trouve la solution générale tout comme pour l'équation du second ordre [6].

1. On forme l'équation caractéristique

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + ... + a_n = 0.$$

2. On trouve les racines de l'équation caractéristique $k_1, k_2, ..., k_n$.
3. Suivant le caractère des racines, on écrit les solutions particulières linéairement indépendantes en partant de ce qui suit :
   (a) Il correspond à toute racine réelle simple k une solution particulière e^{kx}.
   (b) Il correspond à toute couple de racines complexes conjuguées simples $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ et $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ deux solutions particulières $e^{\alpha x}cos\beta x$ et $e^{\alpha x}sin\beta x$.
   (c) Il correspond à toute racine réelle k d'ordre de multiplicité r autant de solutions particulières linéairement indépendantes

$$e^{kx}, xe^{kx}, ..., x^{r-1}e^{kx}.$$

   (d) Il correspond à tout couple de racines complexes conjuguées $k^{(1)} = \alpha + i\beta$, $k^{(2)} = \alpha - i\beta$, d'ordre de multiplicité $\mu, 2\mu$ solutions particulières :

$$e^{\alpha x}cos\beta x, xe^{\alpha x}cos\beta x, ..., x^{\mu-1}e^{\alpha x}cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}sin\beta x, xe^{\alpha x}sin\beta x, ..., x^{\mu-1}e^{\alpha x}sin\beta x.$$

   Le nombre de ces solutions est égal au degré de l'équation caractéristique (qui est aussi l'ordre de l'équation différentielle proposée). On démontre que ces solutions sont linéairement indépendantes.
4. Ayant trouvé n solutions linéairement indépendantes $y_1, y_2, ..., y_n$, on écrit la solution générale de l'équation différentielle proposée sous la forme :

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n,$$

   où $C_1, C_2, ..., C_n$ sont des constantes arbitraires.

1.2 Construction de la fonction de Green pour les équations différentielles ordinaires d'ordre n

Les fonctions de Green interviennent dans la résolution de certaines équations différentielles. Nous considérons le cas particulièrement important pour la physique, des équations différentielles d'ordre 2, et nous commençons par l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n. Soit l'équation différentielle d'ordre n

$$L[y] = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0, \tag{1.2}$$

où les fonctions $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ sont continues sur $[a, b]$, $p_0(x) \neq 0$, et les conditions aux limites

$$\begin{aligned} V_k(y) = \alpha_k y(a) + {\alpha_k}^{(1)}y'(a) + ... + \alpha_k^{(n-1)}y^{n-1}(a) + \beta_k y(b) + {\beta_k}^{(1)}y'(b) + ... \\ +\beta_k^{(n-1)}y^{n-1}(b) = 0, \qquad (k = 1, 2, ..., n), \end{aligned} \tag{1.3}$$

les formes linéaires $V_1, V_2, ..., V_n$ en $y(a), y'(a), ..., y^{n-1}(a), y(b), y'(b), ..., y^{n-1}(b)$ étant linéairement indépendantes.
Supposons que le problème aux limites homogène (1.2)-(1.3) admet la seule solution triviale $y(x) = 0$.

1.2.1 Définition de la fonction de Green

On appelle fonction de Green [3](ou fonction d'influence) du problème aux limites (1.2)-(1.3) la fonction $G(x, \xi)$ construite pour tout point ξ, $a < \xi < b$ et jouissant des 4 propriétés suivantes :

1. $G(x, \xi)$ est continue et possède des dérivées continues par rapport à x jusqu'à l'ordre (n-2) inclus pour $a \leq x \leq b$.
2. Sa (n-1)-ième dérivée par rapport à x présente au point $x = \xi$ une discontinuité de première espèce, le saut ayant la valeur $\frac{1}{p_0(\xi)}$, i.e
$$\frac{\partial^{(n-1)}G(x, \xi)}{\partial x^{(n-1)}}|_{x=\xi+0} - \frac{\partial^{(n-1)}G(x, \xi)}{\partial x^{(n-1)}}|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$
3. Dans chacun des intervalles $[a, \xi)$ et $(\xi, b]$ la fonction $G(x, \xi)$ considérée comme une fonction de x est solution de l'équation (1.2) :
$$L[G] = 0.$$
4. $G(x, \xi)$ vérifie les conditions aux limites (1.3) :
$$V_k(G) = 0 \quad (k = 1, 2, ..., n).$$

1.2.2 Théorème d'unicité

Théorème 1.2.1 *Si le problème aux limites (1.2)-(1.3) n'a pas de solution autre que la solution triviale $y(x) = 0$, l'opérateur L a une fonction de Green $G(x, \xi)$ et une seule [3].*

Preuve. Soient $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ les solutions linéairement indépendantes de l'équation $L[y] = 0$. D'après la propriété (c), sur les intervalles $[a, \xi)$ et $(\xi, b]$ la fonction cherchée $G(x, \xi)$ doit être de la forme :

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1y_1(x) + a_2y_2(x) + ... + a_ny_n(x) & \text{pour} \quad a \leq x \leq \xi \\ b_1y_1(x) + b_2y_2(x) + ... + b_ny_n(x) & \text{pour} \quad \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

avec $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ sont des fonctions de ξ. En vertu de la continuité au point $x = \xi$ de la fonction $G(x, \xi)$ et de ses premières $(n-2)$ dérivées par rapport à x, nous avons

$$[b_1 y_1(\xi) + ... + b_n y_n(\xi)] - [a_1 y_1(\xi) + ... + a_n y_n(\xi)] = 0$$

$$[b_1 y_1'(\xi) + ... + b_n y_n'(\xi)] - [a_1 y_1'(\xi) + ... + a_n y_n'(\xi)] = 0$$

$$\cdots \ \cdots$$

$$[b_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + ... + b_n y_n^{(n-2)}(\xi)] - [a_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + ... + a_n y_n^{(n-2)}(\xi)] = 0.$$

Et la condition (c) s'écrit

$$[b_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + ... + b_n y_n^{(n-1)}(\xi)] - [a_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + ... + a_n y_n^{(n-1)}(\xi)] = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

Posons $C_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi) \qquad (k = 1, 2, ..., n)$.
Il vient le système des équations linéaires par rapport à $C_k(\xi)$:

$$\left\{\begin{array}{c} C_1 y_1(\xi) + C_2 y_2(\xi) + ... + C_n y_n(\xi) = 0 \\ C_1 y_1'(\xi) + C_2 y_2'(\xi) + ... + C_n y_n'(\xi) = 0 \\ \cdots \ \ \cdots \cdots \ \ \cdots \\ C_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + C_2 y_2^{(n-2)}(\xi) + ... + C_n y_n^{(n-2)}(\xi) = 0 \\ C_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + C_2 y_2^{(n-1)}(\xi) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(\xi) = \dfrac{1}{p_0(\xi)} \end{array}\right. \tag{1.4}$$

Le déterminant du système (1.4) est égal à la valeur en $x = \xi$ du wronskien $W(y_1, y_2, ..., y_n)$, il n'est donc pas nul.
Aussi le système (1.4) détermine-t-il de façon unique les fonctions $C_k(\xi) \quad (k = 1, 2, ..., n)$.
Déterminons les fonctions $a_k(\xi)$ et $b_k(\xi)$ moyennant les conditions aux limites (1.3).
Notons $V_k(y)$ sous la forme :

$$V_k(y) = A_k(y) - B_k(y) \tag{1.5}$$

où

$$A_k(y) = \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + ... + \alpha_k^{(n-1)} y^{n-1}(a)$$

$$B_k(y) = \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + ... + \beta_k^{(n-1)} y^{n-1}(b)$$

En vertu des conditions (d) nous obtenons alors

$$V_k(G) = a_1 A_k(y_1) + a_2 A_k(y_2) + ... + a_n A_k(y_n) + b_1 B_k(y_1) + b_2 B_k(y_2) + ... + b_n B_k(y_n) = 0$$

$(k = 1, 2, ..., n)$.
Compte tenu de $a_k = b_k - C_k$, nous avons

$$(b_1 - C_1) A_k(y_1) + (b_2 - C_2) A_k(y_2) + ... + (b_n - C_n) A_k(y_n) + b_1 B_k(y_1) + b_2 B_k(y_2) + ... + b_n B_k(y_n) = 0$$

$(k = 1, 2, ..., n)$.
D'où, en vertu de (1.5)

$$b_1 V_k(y_1) + b_2 V_k(y_2) + ... + b_n V_k(y_n) = C_1 A_k(y_1) + C_2 A_k(y_2) + ... + C_n A_k(y_n) \tag{1.6}$$

$$(k = 1, 2, ..., n)$$

Notons que le système (1.6) est linéaire en $b_1, b_2, ..., b_n$. Son déterminant est :

$$det \begin{pmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) & \cdots & V_1(y_n) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & \cdots & V_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n(y_1) & V_n(y_2) & \cdots & V_n(y_n) \end{pmatrix} \neq 0$$

étant donné l'hypothèse de l'indépendance linéaire des formes $V_1, V_2, ..., V_n$. Ainsi, le système d'équation (1.6) admet une solution unique en $b_1(\xi), b_2(\xi), ..., b_n(\xi)$, et comme $a_k(\xi) = b_k(\xi) - C_k(\xi)$, les quantités $a_k(\xi)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ sont également définies de façon unique. Nous venons donc de démontrer l'existence et l'unicité de la fonction de Green $G(x, \xi)$ et de fournir un procédé de sa construction. ■

Exemple 1.2.1 *Construisons la fonction de Green pour l'équation :*

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

avec les conditions aux limites

$$y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0$$

Toutes les solutions sont de la forme $y(x) = ax^2 + bx + c$, elles vérifient les conditions si $a = b = c = 0$.
Soit

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1(\xi)x^2 + b_1(\xi)x + c_1(\xi) & \text{pour } 0 \leq x \leq \xi \\ a_2(\xi)x^2 + b_2(\xi)x + c_2(\xi) & \text{pour } \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

D'après les propriétés de définition de G :

1. *$G(x, \xi)$ est continue au point $x = \xi$, on a*

$$G(\xi^-, \xi) = G(\xi^+, \xi)$$

c'est-à-dire :

$$a_1(\xi)\xi^2 + b_1(\xi)\xi + c_1(\xi) = a_2(\xi)\xi^2 + b_2(\xi)\xi + c_2(\xi)$$

$\Rightarrow$

$$(a_1(\xi) - a_2(\xi))\xi^2 + (b_1(\xi) - b_2(\xi))\xi + (c_1(\xi) - c_2(\xi) = 0 \tag{1.7}$$

2. *$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \xi)$ est discontinue au point $x = \xi$:*

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\xi^+, \xi) - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\xi^-, \xi) = 1$$

$\Rightarrow$

$$2a_2(\xi) - 2a_1(\xi) = 1$$

$\Rightarrow$

$$a_2(\xi) - a_1(\xi) = \frac{1}{2} \tag{1.8}$$

(d) *les propriétés de la fonction de Green entrainent*

$$\begin{cases} c_1(\xi) = 0 \\ b_1(\xi) = 0 \\ c_2(\xi) + a_2(\xi) + b_2(\xi) = 0 \\ 2a_2(\xi) + b_2(\xi) = 0 \end{cases}$$

Soit maintenant

$$\begin{cases} c_1(\xi) = b_1(\xi) = 0 \\ c_2(\xi) = a_2(\xi) \\ b_2(\xi) = -2a_2(\xi) \end{cases} \tag{1.9}$$

La substitution de (1.9) et (1.8) de l'équation (1.7) donne

$$\frac{1}{2}\xi^2 + 2a_2(\xi)\xi - a_2(\xi) = 0 \tag{1.10}$$

$$\Rightarrow \quad a_2(\xi) = -\frac{\xi^2}{2(2\xi-1)}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a_1(\xi) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\xi^2}{2(2\xi-1)} \\ b_2(\xi) = \dfrac{\xi^2}{(2\xi-1)} \\ c_2(\xi) = -\dfrac{\xi^2}{2(2\xi-1)} \end{cases}$$

donc

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\xi^2}{2(2\xi-1)}x^2 & \textit{pour } 0 \le x \le \xi \\ -\dfrac{\xi^2}{2(2\xi-1)}x^2 + \dfrac{\xi^2}{(2\xi-1)}x - \dfrac{\xi^2}{2(2\xi-1)} & \textit{pour } \xi \le x \le 1 \end{cases}$$

1.3 Cas des équations différentielles d'ordre 2

Soient p_0, p_1, p_2 trois fonctions continues sur $[a,b]$, [3] :

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \tag{1.11}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(b) = 0 \\ \beta_0 y(a) + \beta_1 y'(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(b) = 0. \end{cases}$$

On construit la fonction de Green de la façon suivante :
On choisit deux solutions non proportionnelles y_1 et y_2 de (1.11) et on écrit que la fonction $x \longrightarrow G(x,\xi)$ est solution de (1.11) sur $]a,\xi[$ et sur $]\xi,b[$.
Il existe donc pour chaque ξ des réels $a(\xi)$, $b(\xi)$, $c(\xi)$ et $d(\xi)$, tels que :

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a(\xi)y_1(x) + b(\xi)y_2(x) & \text{pour } x \,\epsilon\,]a,\xi[\\ c(\xi)y_1(x) + d(\xi)y_2(x) & \text{pour } x \,\epsilon\,]\xi,b[\end{cases}$$

Exemple 1.3.1 *Construisons la fonction de Green pour l'équation*

$$y'' + y = 0 \tag{1.12}$$

avec les condition aux limites

$$y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0 \tag{1.13}$$

Toute solution de (1.12) est de la forme $y(x) = acosx + bsinx$, pour que y vérifie (1.13) il faut $a = 0$ et $b = 0$, il existe donc une fonction de Green :

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1(\xi)cosx + b_1(\xi)sinx & si \quad x \in]0;\xi[\\ a_2(\xi)cosx + b_2(\xi)sinx & si \quad x \in]\xi;\frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

D'après les propriétés de définition de G :

(a) G est continue au point $x = \xi$, on a

$$G(\xi^-, \xi) = G(\xi^+, \xi)$$

c'est-à-dire :

$$a_1(\xi)cos\xi + b_1(\xi)sin\xi = a_2(\xi)cos\xi + b_2(\xi)sin\xi$$

$\Rightarrow$

$$(a_1(\xi) - a_2(\xi))cos\xi + (b_1(\xi) - b_2(\xi))sin\xi = 0 \tag{1.14}$$

(b) $\frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi)$ est discontinue au point $x = \xi$:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\xi^+, \xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi^-, \xi) = 1$$

$\Rightarrow$

$$-(a_1(\xi) - a_2(\xi))sin\xi + (b_1(\xi) - b_2(\xi))cos\xi = -1 \tag{1.15}$$

(d)

$$G(0, \xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1(\xi) = 0 \tag{1.16}$$

$$G(\frac{\pi}{2}, \xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_2(\xi) = 0 \tag{1.17}$$

La substitution de (1.16) et (1.17) dans l'équation (1.14) donne

$$-a_2(\xi)cos\xi + b_1(\xi)sin\xi = 0$$

$\Rightarrow$

$$a_2(\xi) = \frac{b_1(\xi)sin\xi}{cos\xi} \tag{1.18}$$

La substitution de (1.16) et (1.17) et (1.18) dans l'équation (1.15) donne

$$\frac{b_1(\xi)sin\xi}{cos\xi}sin\xi + b_1(\xi)cos\xi = -1$$

$$\Rightarrow \quad b_1(\xi)sin^2\xi + b_1(\xi)cos^2\xi = -cos\xi$$
$$\Rightarrow \quad b_1(\xi) = -cos\xi$$
$$\Rightarrow \quad a_2(\xi) = -sin\xi$$

donc

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -cos\xi sinx & si \quad x \in]0; \xi[\\ -sin\xi cosx & si \quad x \in]\xi; \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

1.3.1 Un cas particulier important

Construisons la fonction de Green pour l'équation différentielle du second ordre de la forme [3] :

$$\begin{gathered}(p(x)y')' + q(x)y = 0, \\ p(x) \neq 0 \quad \text{sur}[a,b], \quad p(x) \in C^1[a,b],\end{gathered} \tag{1.19}$$

avec les conditions aux limites

$$y(a) = y(b) = 0 \tag{1.20}$$

Supposons que $y_1(x)$ est une solution de l'équation (1.19) définie par les conditions initiales

$$y_1(a) = 0,\ y_1'(a) = \alpha \neq 0.$$

D'une façon générale, cette solution ne vérifie pas nécessairement la seconde condition aux limites, ce qui nous autorise à supposer que $y_1(b) \neq 0$. Les fonctions de la forme $C_1y_1(x)$ avec C_1 une constante quelconque sont évidemment solutions de (1.19) et vérifient la condition aux limites

$$y(a) = 0.$$

Trouvons de même une solution $y_2(x) \neq 0$ de (1.19) telle que

$$y_2(b) = 0.$$

Cette condition est vérifiée par toutes les solutions de la forme $C_2y_2(x)$, où C_2 est une constante. Cherchons la fonction de Green relative au problème (1.19)-(1.20) sous la forme

$$G(x,\xi) = \begin{cases} C_1y_1(x) & \text{pour} \quad a \leq x \leq \xi \\ C_2y_2(x) & \text{pour} \quad \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

D'après les propriétés de définition de G :

(a) G est continue au point $x = \xi$, on a

$$C_1y_1(\xi) = C_2y_2(\xi)$$

c'est-à dire :

$$C_2y_2(\xi) - C_1y_1(\xi) = 0$$

(b) $\frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi)$ est discontinue au point $x = \xi$:

$$C_2y_2'(\xi) - C_1y_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}.$$

donc on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -C_1y_1(\xi) + C_2y_2(\xi) = 0 \\ -C_1y_1'(\xi) + C_2y_2'(\xi) = \dfrac{1}{p(\xi)} \end{cases} \tag{1.21}$$

Le déterminant du système (1.21) est le wronskien $W[y_1(x), y_2(x)] = W(x)$ calculé en $x = \xi$ pour les solutions linéairement indépendantes $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de l'équation (1.19), donc

$$W(\xi) \neq 0$$

de sorte que C_1 et C_2 de (1.21) se définissent de la façon suivante :

$$C_1 = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, \qquad C_2 = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}$$

Alors la fonction de Green est donnée par :

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} & \text{pour} \quad a \leq x \leq \xi \\ \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{p(\xi)W(\xi)} & \text{pour} \quad \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

Remarque 1.3.1 *Le problème aux limites pour l'équation du second ordre de la forme :*

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0 \tag{1.22}$$

et les conditions aux limites

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

se ramène au problème considéré (1.19)-(1.20) :

1 *En multipliant l'équation (1.22) par $P(x)$, où $P(x) = e^{\int p_1(x)dx}$ et on prend $q(x) = P(x)p_2(x)$*

2 *En utilisant la changement linéaire de fonction suivant :*

$$Z(x) = Y(x) - \frac{B-A}{b-a}(x-a) - A$$

on ramène les conditions aux limites (1.31) aux conditions nulles (1.20) mais au lieu de (1.19) on obtient l'équation avec le second membre $L[Z] = f(x)$, où

$$f(x) = -[A + \frac{B-A}{b-a}(x-a)]q(x) - \frac{B-A}{b-a}P(x)p_1(x)$$

On construit cependant la fonction de Green relative au problème aux limites homogène

$$L[Z] = 0, Z(a) = Z(b) = 0,$$

qui coïncide complètement avec le problème (1.19)-(1.20)[3].

1.4 Résolution du problème aux limites à l'aide de la fonction de Green

Soit l'équation différentielle non homogène

$$L[y] = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x), \tag{1.23}$$

et les conditions aux limites

$$V_1(y) = 0, V_2(y) = 0, ..., V_n(y) = 0 \tag{1.24}$$

les formes linéaires $V_1, V_2, ..., V_n$ et $y(a), y'(a), ..., y^{n-1}(a), y(b), y'(b), ..., y^{n-1}(b)$ étant linéairement indépendantes.

Théorème 1.4.1 *Si $G(x,\xi)$ est la fonction de Green du problème aux limites homogène :*

$$L[G] = 0,$$

$$V_k(G) = 0 \qquad (k = 1, 2, ..., n),$$

la solution du problème aux limites (1.23)-(1.24) est donnée par la formule [7]

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi.$$

Preuve. Montrons que $G(x,\xi)$ nous sert à déterminer la solution du problème linéaire non homogène suivant :

$$\begin{cases} (p(x)y'(x))' + h(x)y(x) = g(x) \quad a < x < b \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

Considérons le système :

$$\begin{cases} (p(x)y'(x))' + h(x)y(x) = g(x) & (1) \\ (p(x)y'(x))' + h(x)y(x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Dans l'équation (1), considérons $y(x)$ une solution de (1.25) et comme $G(x,\xi)$ vérifie l'équation homogène, on remplace $y(x) = G(x,\xi)$ dans (2) on obtient :

$$\begin{cases} (p(x)y'(x))' + h(x)y(x) = g(x) & (1) \\ (p(x)\dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial x})' + h(x)G(x,\xi) = 0 \;\; \text{pour } \xi \text{ fixé dans [a,b]} & (2) \end{cases}$$

multiplions (1) par $-G(x,\xi)$ et (2) par $y(\xi)$, et nous arrivons à :

$$-G(x,\xi)(py')' + y(p\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi})' = G(x,\xi)g(\xi)$$

qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d}{d\xi}[p(\xi)(y(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi} - G(x,\xi)y'(\xi))] = G(x,\xi)g(\xi).$$

Intégrons de a à b pour obtenir enfin :

$$[p(\xi)(y(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi} - G(x,\xi)y'(\xi))]_a^b = \int_a^b G(x,\xi)g(\xi)d\xi.$$

Compte tenu des conditions aux limites, et le fait que $G(x,\xi)$ est discontinue au point $x = \xi$, alors :

$$[p(\xi)(y(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi} - G(x,\xi)y'(\xi))]_a^b = [p(\xi)(y(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi} - G(x,\xi)y'(\xi))]_a^x$$

$$+[p(\xi)(y(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi} - G(x,\xi)y'(\xi))]_x^b$$

$$= p(x)[y(x)\frac{\partial G(x,x_-)}{\partial \xi} - G(x,x)y'(x)] - p(a)[y(a)\frac{\partial G(x,a)}{\partial \xi} - G(x,a)y'(a)]$$

$$+p(b)[y(b)\frac{\partial G(x,b)}{\partial \xi} - G(x,b)y'(v)] - p(x)[y(x)\frac{\partial G(x,x_+)}{\partial \xi} - G(x,x)y'(x)]$$

$$
\begin{aligned}
&= p(x)y(x)[\frac{\partial G(x,x_-)}{\partial \xi} - \frac{\partial G(x,x_+)}{\partial \xi}] \\
&= p(x)y(x)\frac{1}{p(x)} \\
&= y(x)
\end{aligned}
$$

donc la solution du problème linéaire (1.25) est donnée par :

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)g(\xi)d\xi.$$

■

Exemple 1.4.1 *Soit le problème aux limites non homogène*

$$y'' + y = cosx \tag{1.26}$$

avec les conditions aux limites

$$y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0. \tag{1.27}$$

On a la fonction de Green du problème aux limites homogène (1.12)-(1.13)

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -cos\xi sinx & si \quad x \in]0;\xi[\\ -sin\xi cosx & si \quad x \in]\xi;\frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

D'après le théorème (1.4.1), la solution du problème aux limites non homogène (1.26)-(1.27) est donnée par la formule

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)cos\xi d\xi.$$

$$y(x) = -\int_0^x sin\xi cosx cos\xi d\xi - \int_x^{\frac{\pi}{2}} cos\xi sinx cos\xi d\xi.$$

Alors

$$y(x) = -\frac{sinx}{4}(\pi - 2x).$$

1.5 Problèmes adjoint et auto-adjoint

Soit A un opérateur linéaire dans $\mathbb{R}^n$. L'opérateur adjoint A^* est défini par la relation $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$. Il est donné par la transposée A^T de la matrice A.
Dans le contexte des équations différentielles, considérons le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

sur $C([a,b])$ (où $[a,b]$ est un intervalle compact) et un problème aux limites donné par L, B_1, B_2, tel que

$$\langle Ly, z\rangle = \langle y, L^*z\rangle$$

pour toutes fonctions $y, z \in C^2([a,b])$ satisfaisant $B_1y = B_2y = 0$ et $B_1^*z = B_2^*z = 0$.

Lemme 1.5.1 *Soient* $\alpha_2 \in C^2([a,b]), \alpha_1 \in C^2([a,b])$ *et* $\alpha_0 \in C^0([a,b])$ *avec* $\alpha_2(x) \neq 0$ *sur* $[a,b]$. *Avec l'opérateur*

$$L^*z = (\alpha_2(x)z)'' - (\alpha_1(x)z)' + \alpha_0(x)z \tag{1.28}$$

on a l'identité

$$\langle Ly, z\rangle - \langle y, L^*z\rangle = \alpha_2(x)(y'(x)z(x) - y(x)z'(x))|_a^b + (\alpha_1(x) - \alpha_2'(x))y(x)z(x)|_a^b$$

pour toutes les fonctions $y, z \in C^2([a,b])$ *[2].*

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\langle Ly, z\rangle &= \int_a^b (\alpha_2(x)y''(x) + \alpha_1(x)y'(x) + \alpha_0(x)y(x))z(x)dx \\
&= \int_a^b \alpha_2(x)y''(x)z(x)dx + \int_a^b \alpha_1(x)y'(x)z(x)dx + \int_a^b \alpha_0(x)y(x)z(x)dx
\end{aligned} \tag{1.29}$$

On calcule les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \alpha_2(x)y''(x)z(x)dx &= y'(x)\alpha_2(x)z(x)|_a^b - \int_a^b y'(x)(\alpha_2 z)'(x)dx \\
&= y'(x)\alpha_2(x)z(x)|_a^b - y(x)(\alpha_2 z)'(x)|_a^b + \int_a^b y(x)(\alpha_2 z)''(x)dx \\
\int_a^b \alpha_1(x)y'(x)z(x)dx &= y(x)\alpha_1(x)z(x)|_a^b - \int_a^b y(x)(\alpha_1 z)'(x)dx
\end{aligned}$$

La substitution des intégrales précédentes dans l'équation (1.29) donne

$$\begin{aligned}
\langle Ly, z\rangle &= y'(x)\alpha_2(x)z(x)|_a^b - y(x)(\alpha_2 z)'(x)|_a^b + \int_a^b y(x)(\alpha_2 z)''(x)dx + y(x)\alpha_1(x)z(x)|_a^b \\
&- \int_a^b y(x)(\alpha_1 z)'(x)dx + \int_a^b \alpha_0(x)y(x))z(x)dx \\
&= y'(x)\alpha_2(x)z(x)|_a^b - y(x)(\alpha_2 z)'(x)|_a^b + y(x)\alpha_1(x)z(x)|_a^b + \int_a^b [y(x)(\alpha_2 z)''(x) \\
&- y(x)(\alpha_1 z)'(x) + \alpha_0(x)y(x)z(x)]dx \\
&= y'(x)\alpha_2(x)z(x)|_a^b - y(x)\alpha_2'(x)z(x)|_a^b - y(x)\alpha_2(x)z'(x)|_a^b + y(x)\alpha_1(x)z(x)|_a^b \\
&+ \int_a^b y(x)[(\alpha_2 z)''(x) - (\alpha_1 z)'(x) + \alpha_0(x)z(x)]dx \\
&= \alpha_2(x)(y'(x)z(x) - y(x)z'(x))|_a^b + (\alpha_1(x) - \alpha_2'(x))y(x)z(x)|_a^b + \langle y, L^*z\rangle
\end{aligned}$$

d'où le résultat

$$\langle Ly, z\rangle - \langle y, L^*z\rangle = \alpha_2(x)(y'(x)z(x) - y(x)z'(x))|_a^b + (\alpha_1(x) - \alpha_2'(x))y(x)z(x)|_a^b$$

■

Théorème 1.5.1 *Considérons le problème*

$$Ly = 0, B_1 y = 0, B_2 y = 0,$$

où L satisfait les hypothèses du lemme (1.5.1) et où les vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ définissant B_1 et B_2 sont linéairement indépendants. Alors il existe [2]

$$\begin{aligned} B_1^* &= \gamma_1 z(a) + \gamma_2 z'(a) + \gamma_3 z(b) + \gamma_4 z'(b), \\ B_2^* &= \delta_1 z(a) + \delta_2 z'(a) + \delta_3 z(b) + \delta_4 z'(b), \end{aligned} \tag{1.30}$$

les coefficients γ_i et δ_i ne sont pas uniques, mais l'espace des fonctions z qui satisfont $B_1^* = B_2^* = 0$ est unique.

Définition 1.5.1 *Si le problème L, B_1, B_2 satisfait les hypothèses du théorème (1.5.1), on appelle L^*, B_1^*, B_2^*, données par (1.28) et (1.30), le problème aux limites adjoint [2].*
Le problème est auto adjoint, si $L^* = L$ et si les conditions $B_1^* = B_2^* = 0$ sont équivalentes à $B_1 = B_2 = 0$.
En développant l'expression pour L^*z on obtient

$$L^*z = \alpha_2(x)z'' + (\alpha_2'(x) - \alpha_1(x))z' + (\alpha_2''(x) - \alpha_1'(x) + \alpha_0(x))z.$$

L'opérateur L est donc auto adjoint, si et seulement si $\alpha_2'(x) = \alpha_1(x)$, c-à-d, s'il est de la forme

$$L^*y = (\alpha_2(x)y')' + \alpha_0(x)y.$$

Proposition 1.5.1 *Sous les hypothèses du théorème (1.5.1) le problème*

$$Ly = 0, B_1 y = 0, B_2 y = 0,$$

possède une solution unique, si et seulement si le problème adjoint

$$L^*z = 0, B_1^* z = 0, B_2^* z = 0$$

possède une solution unique [2].

Preuve. Supposons que

$$Ly = 0, B_1 y = 0, B_2 y = 0,$$

possède une solution unique et notons par z une solution de

$$L^*z = 0, B_1^* z = 0, B_2^* z = 0.$$

Avec $y(x)$, solution de

$$Ly = z, B_1 y = 0, B_2 y = 0,$$

on obtient

$$||z||^2 = \langle z, z \rangle = \langle Ly, z \rangle = \langle y, L^*z \rangle = \langle y, 0 \rangle = 0.$$

Donc $z = 0$ et l'unicité de la solution du problème adjoint sont démontrées. ■

Remarque 1.5.1 *La fonction de Green d'un problème auto-adjoint est symétrique, i.e.*

$$G^*(x, \xi) = G(\xi, x). \tag{1.31}$$

La réciproque est également vraie [2].

Preuve. Pour démontrer la relation (1.31), considérons deux fonctions continues $f(x)$ et $g(x)$ et définissons

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi,$$

$$z(x) = \int_a^b G^*(x,\xi)g(\xi)d\xi.$$

Par la définition de la fonction de Green, les fonctions y et z satisfont

$$Ly = f, B_1 y = B_2 y = 0$$

et

$$L^* z = g, B_1^* z = B_2^* z = 0.$$

La relation

$$\langle Ly, z\rangle = \langle y, L^* z\rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle f, z\rangle = \langle y, g\rangle$$

$\Longrightarrow$

$$\int_a^b \int_a^b G^*(x,\xi)f(x)g(\xi)d\xi dx = \int_a^b \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)g(x)d\xi dx.$$

$\Longrightarrow$

$$\int_a^b \int_a^b G^*(x,\xi)f(x)g(\xi)d\xi dx = \int_a^b \int_a^b G(\xi,x)f(x)g(\xi)dx d\xi.$$

$\Longrightarrow$

$$\int_a^b \int_a^b G^*(x,\xi)f(x)g(\xi)d\xi dx = \int_a^b \int_a^b G(\xi,x)f(x)g(\xi)d\xi dx.$$

$\Longrightarrow$

$$\int_a^b \int_a^b (G^*(x,\xi) - G(\xi,x))f(x)g(\xi)d\xi dx = 0.$$

Comme cette relation est vérifiée pour toutes fonctions continues f et g on en déduit la relation (1.31) ■

1.6 Fonction de Bessel

En mathématiques, et plus précisément en analyse, les fonctions de Bessel, découvertes par le mathématicien suisse Daniel Bernouli, portent le nom du mathématicien allemand Friedrich Bessel. Bessel développa l'analyse de ces fonctions en 1817 dans le cadre de ses études du mouvement des planètes induit par l'interaction gravitationnelle, généralisant les découvertes antérieures de Bernouli. Ces fonctions sont des solutions canoniques $Y(x)$ de l'équation différentielle de Bessel [5] :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \alpha^2\right) y = 0. \tag{1.32}$$

1.6.1 Application sur un domaine circulaire

Divers phénomènes physiques portent sur le disque

$$D = \left\{ \ f(x;y) \ \in \ \mathbb{R}^2; \ x^2 + y^2 \leq a, a \ \in \ \mathbb{R}_+ \right\} \tag{1.33}$$

comme le déplacement vertical u d'une membrane circulaire ou la propagation de la chaleur u dans un disque, sont décrits par une équation aux dérivées partielles portant sur la fonction $u(x;y;t)$; $(x;y) \ \epsilon \ D$; $t \in \mathbb{R}$ décrivant l'évolution temporelle de la fonction u

$$\frac{-1}{2}\triangle u(x,y,t) = i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} + C(x,y)u(x,y,t) \tag{1.34}$$

avec une condition sur le bord

$$\partial D = \left\{ f(x;y) \ \in \ \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = a \ \right\} \tag{1.35}$$

par exemple la condition dite de Dirichlet

$$u(x;y;t) = 0; \qquad (x;y) \in \partial D. \tag{1.36}$$

Dans l'équation (1.34), A, B sont des constantes et le laplacien $\triangle$ est l'opérateur différentiel $\triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2$ en coordonnées cartésiennes, soit

$$\triangle = r^{-1}\partial_r \left(r\partial_r\right) + r^{-2}\partial_\varphi^2 \tag{1.37}$$

en coordonnées polaires $(r; \ \varphi)$ avec $(x = rcos\varphi; \ y = rsin\varphi)$.

Les solutions de l'équation (1.34) du type $R(r) \ \Phi(\varphi) \ T(t)$, telle que

$$T(t) = \exp(-iEt/\hbar), \qquad \Phi(\varphi) = \exp(in\varphi)$$

vérifient

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{rR} + \frac{\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}{\Phi r^2} - C(r,\varphi) = -2\frac{i\hbar\frac{dT}{dt}}{T}. \tag{1.38}$$

Les variables r; φ; t étant indépendantes, les membres de l'équation précédente sont constants, et égaux à E, d'où les deux équations

$$\frac{i\hbar\frac{dT}{dt}}{T} = -2E \tag{1.39}$$

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{rR} + \frac{\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}{\Phi r^2} = -2E \Leftrightarrow r^2\left[\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{rR} + 2E\right] = -\frac{\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}{\Phi} \tag{1.40}$$

$$r^2\left[\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{r} + 2ER\right] = LR \ \Leftrightarrow \frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{r} + 2ER = \frac{LR}{r^2}, \tag{1.41}$$

pour $L = n^2$ l'équation (1.41) s'écrit

$$\frac{d^2R}{dr^2} + r^{-1}\frac{dR}{dr} + \left(2E - n^2r^{-2}\right)R = 0 \tag{1.42}$$

soit pour la fonction $y(r) = R(r/\sqrt{K})$ l'équation différentielle (1.42) s'écrit

$$y'' + t^{-1}y' + \left(1 - n^2t^{-2}\right)y = 0 \tag{1.43}$$

l'équation (1.43) est dite équation de Bessel d'ordre n. Pour n entier, la fonction de Bessel J_n est définie par une série et est solution de l'équation différentielle (1.43).

Définition 1.6.1 *Soit n entier, la série*

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k} \tag{1.44}$$

est absolument convergente pour $t \in \mathbb{C}$ et est solution de l'équation différentielle (1.43) pour $t \in \mathbb{R}$. La fonction J_n est appelée fonction de Bessel de première espèce d'ordre n.

Proposition 1.6.1 *Les fonctions de Bessel J_n ; $n \geq 1$ vérifient les relations de récurrence*

$$J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t) \tag{1.45}$$

$$J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) = 2J'_n(t) \tag{1.46}$$

de plus, $J'_0 = -J_1$.

Théorème 1.6.1 *La famille des fonctions de Bessel (J_n) $n \geq 0$ est caractérisée par l'une des deux représentations suivantes*

1. *Les J_n sont données par la fonction génératrice*

$$J(x,t) = \exp((x - 1/x)/2) = J_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(t) \left[x + \left(-x^{-1}\right)\right], \qquad t > 0 \tag{1.47}$$

2. *La fonction J_n est donnée par la série entière (1.44). De plus, la suite (J_n) $n \geq 0$ vérifie la relation de récurrence*

$$tJ_{n-1}(t) = 2nJ_n(t) - tJ_{n+1}(t) \tag{1.48}$$

La fonction J_n a comme équivalents aux bornes de l'intervalle $(0; +\infty)$

$$J_n(t) \sim_{t\to 0} \frac{t^n}{2^n n!}, \qquad J_n(t) \sim_{t\to+\infty} \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \cos\left(t - \frac{1}{2}n\pi - \frac{\pi}{4}\right) \tag{1.49}$$

Remarque 1.6.1 *Pour $t \in \mathbb{R}$ et en prenant la variable θ telle que $x = e^{i\theta}$, la relation (1.47) s'écrit comme un développement en série de Fourier*

$$e^{it\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t)\, e^{in\theta}, \qquad \theta \in \mathbb{R} \tag{1.50}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} J_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it\sin\theta - in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta - n\theta)\, d\theta \end{aligned} \tag{1.51}$$

d'après (1.51) on a

$$J_{-n}(t) = J_n(-t), \tag{1.52}$$

et

$$J_n(-t) = (-1)^n J_n(t). \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.53}$$

Lorsque n est non entier égal à ν la fonction $J_{-\nu}$ est une solution de l'équation (1.43), et linéairement indépendante à J_ν.

Proposition 1.6.2 *Soit ν un réel, l'équation différentielle (1.43)*

$$y'' + t^{-1}y' + \left(1 - \nu^2 t^{-2}\right) y = 0 \tag{1.54}$$

a deux solutions linéairement indépendantes J_ν, Y_ν. Cette seconde est appelée la fonction de Bessel de deuxième espèce. Elles sont définies par

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k} \tag{1.55}$$

$$Y_\nu(t) = \frac{J_\nu(t)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(t)}{\sin\nu\pi} \tag{1.56}$$

et leurs développements asymptotiques sont

$$J_\nu(t) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\cos\left(t - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right), \tag{1.57}$$

et

$$Y_\nu(t) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\sin\left(t - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad t \to +\infty, \tag{1.58}$$

Théorème 1.6.2 *Soit l'équation différentielle*

$$y'' + t^{-1}y' - \left(1 + \nu^2 t^{-2}\right) y = 0 \tag{1.59}$$

Les solutions de cette équation sont appelées fonctions de Bessel modifiées. La solution finie à l'origine et notée $I_\nu(t)$, et la seconde solution notée $K_\nu(t)$. Ces fonctions sont reliées par la relation

$$K_\nu(t) = \frac{\pi\left(I_{-\nu}(t) - I_\nu(t)\right)}{2\sin\nu\pi} \tag{1.60}$$

1.6.2 Propriétés

1. Les fonctions $I_\nu(t)$ et $K_\nu(t)$ vérifient les relations de récurrence (1.45), (1.46), (1.53).
2. Si nous prenons l'argument des fonctions de Bessel $J_\nu(t)$ et $H_\nu^{(1)}(t)$ imaginaire, nous obtenons

$$J_\nu(it) = i^\nu I_\nu(t),$$
$$K_\nu(t) = \frac{\pi i}{2}(i)^\nu H_\nu^{(1)}(it)$$

   où la fonction $H_\nu^{(1)}(t)$ s'appelle la fonction de Hankel ou fonction de Bessel de troisième espèce, ainsi la fonction $H_\nu^{(2)}(t)$ est la fonction de Hankel, elles sont définies par

$$H_\nu^{(1)}(t) = J_\nu(t) + iY_\nu(t), \qquad H_\nu^{(2)}(t) = J_\nu(t) - iY_\nu(t).$$

3. Les wronskiens des fonctions de Bessel précédentes sont donnés par :

$$W\left(J_\nu(t), Y_\nu(t)\right) = 2/\pi t,$$

$$W\left(I_\nu(t), K_\nu(t)\right) = 2/t,$$
$$W\left(H_\nu^{(1)}(t), H_{\nu\nu}^{(2)}(t)\right) = -4i/\pi t.$$

4. Les comportements asymptotiques, m entier positif, sont donnés par :

$$\lim_{t \to 0} I_m(t) \to \frac{x^m}{2^m \Gamma(m+1)} \tag{1.61}$$

$$\lim_{t \to 0} K_m(t) \to \left\{ \begin{array}{c} -\left[\ln\left(\frac{t}{2}\right) + \gamma\right], m = 0, \\ \frac{\Gamma(m)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^m, m \neq 0, \end{array} \right\} \tag{1.62}$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \to \infty} I_m(t) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^t \left[1 + 0\left(\frac{1}{t}\right)\right], \tag{1.63}$$

$$\lim_{x \to \infty} K_m(t) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t} \left[1 + 0\left(\frac{1}{x}\right)\right] \tag{1.64}$$

$$H_m^{(1)}(t) \to_{t \to \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp\left[i\left(t - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{1.65}$$

$$H_m^{(2)}(t) \to_{t \to \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp\left[-i\left(t - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{1.66}$$

Chapitre 2

Résolution du problème de potentiel axi-symétrique

Dans ce chapitre, nous allons calculer la fonction de Green pour le problème du potentiel (q réel, q imaginaire pure) symétrique sur un disque (rayon a), en suivant les même démarches que [1] et [4].
Soit le problème suivant :

$$(-\frac{\triangle}{2} + V(r,\theta) - E)\psi(r,\theta) = 0. \tag{2.1}$$

avec

$$V(r,\theta) = \begin{cases} \frac{q^2}{r^2} & \text{si} \quad 0 \leq r \leq a \\ 0 & \text{si} \quad r > a \end{cases}$$

et

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

donc l'équation (2.1) s'écrit

$$\begin{cases} (\frac{\triangle}{2} + E)\psi = 0 & si \;\; r > a \\ (\frac{\triangle}{2} - \frac{q^2}{r^2} + E)\psi = 0 & si \;\; 0 \leq r \leq a \end{cases}$$

2.1 Cas q réel

2.1.1 le premier cas $(r > a)$:

Soit l'équation aux dérivées partielles

$$(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2E)\psi(r,\theta) = 0. \tag{2.2}$$

Pour résoudre cette équation, on utilise la méthode de séparation du variable, et on pose

$$\psi(r,\theta) = \psi_1(r)\psi_2(\theta).$$

En remplaçant dans l'équation (2.2), on obtient :

$$(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2E)\psi_1(r)\psi_2(\theta) = 0. \tag{2.3}$$

En divisant l'équation précédante sur $\psi_1(r)\psi_2(\theta) \neq 0$, on obtient :

$$\frac{\psi_2(\theta)(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})\psi_1(r) + \frac{\psi_1(r)}{r^2}\psi_2''(\theta) + 2E\psi_1(r)\psi_2(\theta)}{\psi_1(r)\psi_2(\theta)} = 0$$

c-à-d :

$$\frac{(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})\psi_1(r)}{\psi_1(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\psi_2''(\theta)}{\psi_2(\theta)} + 2E = 0$$

ou bien

$$\frac{r^2(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})\psi_1(r)}{\psi_1(r)} + 2Er^2 + \frac{\psi''{}_2(\theta)}{\psi_2(\theta)} = 0$$

L'équation pour $\psi_2(\theta)$ est donnée par :

$$\frac{\psi''{}_2(\theta)}{\psi_2(\theta)} = -\omega^2$$

c-à-d :

$$\psi_2''(\theta) + \omega^2\psi_2(\theta) = 0$$

(ω réel) qui admet une solution générale de la forme

$$\psi_2(\theta) = C_2 e^{i\omega\theta}$$

alors que l'équation pour $\psi_1(r)$ est donnée par :

$$r^2(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})\psi_1(r) = \omega^2\psi_1(r) - 2Er^2\psi_1(r)$$

ou bien

$$r^2\psi_1''(r) + r\psi_1(r) + (2Er^2 - \omega^2)\psi_1(r) = 0.$$

En divisant par (r^2) on obtient :

$$\psi_1''(r) + \frac{1}{r}\psi_1'(r) + (2E - \frac{\omega^2}{r^2})\psi_1(r) = 0 \tag{2.4}$$

avec les conditions aux limites

$$\psi_1(a) = A_1; \text{et} \quad B_1 = \lim_{r\to+\infty}\psi_1(r) \ \text{ bornée}$$

Posons $(k^2 = 2E)$ et $(l = w)$

$$\psi_1''(r) + \frac{1}{r}\psi_1'(r) + (k^2 - \frac{l^2}{r^2})\psi_1(r) = 0 \tag{2.5}$$

L'équation (2.5) est l'équation de Bessel, qui admet deux solutions linéairement indépendantes notées $J_l(kr)$ et $Y_l(kr)$

le cas r et r' à l'extérieur du disque :

d'après l'équation (2.5) la fonction de Green est donnée par :

$$G^{(l,2,2)}(r,r') = \begin{cases} C(r')[Y_l(kr) - \beta(r')J_l(kr)] & \text{pour } \ a \leq r \leq r' \\ D(r')J_l(kr) & \text{pour } \ r' \leq r < \infty \end{cases}$$

d'après la continuité de la fonction de Green au point $r = r'$

$$G^{(l,2,2)}(r'_+, r') - G^{(l,2,2)}(r'_-, r') = 0$$

$\Rightarrow$

$$D(r')J_l(kr') - C(r')[Y_l(kr') - \beta(r')J_l(kr')] = 0$$

$\Rightarrow$

$$-C(r')Y_l(kr') + [D(r') + \beta(r')C(r')]J_l(kr') = 0 \tag{2.6}$$

et la discontinuité de la dérivée première par rapport r de la fonction de Green au point $r = r'$ on a

$$\frac{\partial G^{(l,2,2)}}{\partial r}(r'_+, r') - \frac{\partial G^{(l,2,2)}}{\partial r}(r'_-, r') = \frac{2}{\pi r'}$$

$\Rightarrow$

$$kD(r')J'_l(kr') - C(r')[kY'_l(kr') - k\beta(r')J'_l(kr')] = \frac{2}{\pi r'}$$

$\Rightarrow$

$$-C(r')Y'_l(kr') + [D(r') + \beta(r')C(r')]J'_l(kr') = \frac{2}{\pi k r'} \tag{2.7}$$

d'après l'équation (2.6)

$$D(r') = \frac{C(r')[Y_l(kr') - \beta(r')J_l(kr')]}{J_l(kr')} \tag{2.8}$$

en substituant (2.8) dans (2.7) on obtient :

$$-C(r')Y'_l(kr') + [\frac{C(r')[Y_l(kr') - \beta(r')J_l(kr')]}{J_l(kr')} + \beta(r')C(r')]J'_l(kr') = \frac{2}{\pi k r'}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{-C(r')Y'_l(kr')J_l(kr') + C(r')[Y_l(kr') - \beta(r')J_l(kr')]J'_l(kr') + \beta(r')C(r')J_l(kr')J'_l(kr')}{J_l(kr')} = \frac{2}{\pi k r'}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{-C(r')[Y'_l(kr')J_l(kr') - Y_l(kr')J'_l(kr')]}{J_l(kr')} = \frac{2}{\pi k r'} \tag{2.9}$$

sachant que la wronskien est donné par

$$\begin{aligned} W(J_l(kr'), Y_l(kr')) &= J_l(kr')Y'_l(kr') - Y_l(kr')J'_l(kr') \\ &= \frac{2}{\pi k r'} \end{aligned} \tag{2.10}$$

et en substituant (2.10) dans (2.9) on obtient :

$$-C(r')\frac{2}{\pi k r'} = \frac{2J_l(kr')}{\pi k r'}$$

$\Rightarrow$

$$C(r') = -J_l(kr') \tag{2.11}$$

aussi en substituant (2.11) dans(2.8) on obtient :

$$D(r') = -(Y_l(kr') - \beta(r')J_l(kr'))$$

donc

$$G^{(l,2,2)}(r,r') = \begin{cases} -[Y_l(kr) - \beta(r')J_l(kr)]J_l(kr') & \text{pour } \; a \leq r \leq r' \\ -[Y_l(kr') - \beta(r')J_l(kr')]J_l(kr) & \text{pour } \; r' \leq r < \infty \end{cases}$$

d'après la propriété de symétrie de G

$$G^{(l,2,2)}(r,r') = G^{(l,2,2)}(r',r)$$

$$-[Y_l(kr) - \beta(r')J_l(kr)]J_l(kr') = -[Y_l(kr) - \beta(r)J_l(kr)]J_l(kr')$$

alors

$$\beta(r') = \beta(r) = \beta$$

Donc

$$G^{(l,2,2)}(r,r') = \begin{cases} -[Y_l(kr) - \beta J_l(kr)]J_l(kr') & \text{pour } \; a \leq r \leq r' \\ -[Y_l(kr') - \beta J_l(kr')]J_l(kr) & \text{pour } \; r' \leq r < \infty \end{cases} \tag{2.12}$$

2.1.2 le deuxième cas $(0 < r \leq a)$:

On considère l'équation différentielle suivante :

$$r^2\psi_1'' + r\psi_1' + 2r^2(E - \frac{q^2}{r^2})\psi_1 = w^2\psi_1$$

qui est équivalente à l'équation :

$$r^2{\psi_1}'' + r{\psi_1}' + [2r^2E - 2q^2 - w^2]\psi_1 = 0 \tag{2.13}$$

qu'on divise par (r^2) pour obtenir :

$${\psi_1}'' + \frac{1}{r}{\psi_1}' + (2E - \frac{2q^2 + w^2}{r^2})\psi_1 = 0 \tag{2.14}$$

avec les conditions aux limites

$$\lim_{r\to 0}\psi_1(r) = A_2; \quad \text{et} \quad \psi_1(a) = B_2.$$

Posons $(k^2 = 2E)$ et $(l'^2 = 2q^2 + w^2)$

$${\psi_1}'' + \frac{1}{r}{\psi_1}' + (k^2 - \frac{l'^2}{r^2})\psi_1 = 0. \tag{2.15}$$

L'équation (2.15) est l'équation du Bessel, qui admet deux solutions linéairement indépendantes $J_{l'}(kr)$ et $Y_{l'}(kr)$

le cas r et r' à l'intérieur du disque :

D'après l'équation (2.15) la fonction de Green est donnée par :

$$G^{(l',1,1)}(r,r') = \begin{cases} A(r')J_{l'}(kr) & \text{pour } \ 0 < r \le r' \\ B(r')[Y_{l'}(kr) - \alpha(r')J_{l'}(kr)] & \text{pour } \ r' \le r \le a \end{cases}$$

où A, B, α sont des fonctions de r'.
La continuité de la fonction de Green au point $r = r'$ donne

$$G^{(l',1,1)}(r'_+, r') - G^{(l',1,1)}(r'_-, r') = 0$$

$\Rightarrow$

$$B(r')[Y_{l'}(kr') - \alpha(r')J_{l'}(kr')] - A(r')J_{l'}(kr') = 0$$

ensuite

$$B(r')Y_{l'}(kr') - [A(r') + \alpha(r')B(r')]J_{l'}(kr') = 0 \tag{2.16}$$

et la discontinuité de la dérivée première par rapport r de la fonction de Green au point $r = r'$ donne

$$\frac{\partial G^{(l',1,1)}}{\partial r}(r'_+, r') - \frac{\partial G^{(l',1,1)}}{\partial r}(r'_-, r') = \frac{2}{\pi r'}$$

$\Rightarrow$

$$B(r')[kY'_{l'}(kr') - k\alpha(r')J'_{l}(kr')] - kA(r')J'_{l'}(kr') = \frac{2}{\pi r'}$$

donc

$$B(r')Y'_{l'}(kr') - [A(r') + \alpha(r')B(r')]J'_{l'}(kr') = \frac{2}{\pi k r'} \tag{2.17}$$

d'après l'équation (2.16)

$$A(r') = \frac{B(r')[Y_{l'}(kr') - \alpha(r')J_{l}(kr')]}{J_{l'}(kr')} \tag{2.18}$$

en substituant (2.34) dans (2.36) on obtient :

$$B(r')Y'_{l'}(kr') - [\frac{B(r')[Y_{l'}(kr') - \alpha(r')J_{l'}(kr')]}{J_{l'}(kr')} + \alpha(r')B(r')]J'_{l'}(kr') = \frac{2}{\pi k r'} \tag{2.19}$$

$$B(r')J_{l'}(kr')Y'_{l'}(kr') - B(r')Y_{l'}(kr')J'_{l'}(kr') = \frac{2J_{l'}(kr')}{\pi k r'} \tag{2.20}$$

sachant que la wronskien est donné par

$$W(J_{l'}(kr'), Y_{l'}(kr')) = J_{l'}(kr')Y'_{l'}(kr') - Y_{l'}(kr')J'_{l'}(kr') = \frac{2}{\pi k r'} \tag{2.21}$$

et en substituant (2.37) dans (2.20) on obtient :

$$B(r')\frac{2}{\pi k r'} = \frac{2J_{l'}(kr')}{\pi k r'}$$

$\Rightarrow$

$$B(r') = J_{l'}(kr') \tag{2.22}$$

aussi en substituant (2.38) dans (2.34) on obtient :

$$A(r') = Y_{l'}(kr') - \alpha(r')J_{l'}(kr')$$

donc

$$G^{(l',1,1)}(r,r') = \begin{cases} (Y_{l'}(kr') - \alpha(r')J_{l'}(kr'))J_{l'}(kr) & \text{pour } \ 0 < r \leq r' \\ (Y_{l'}(kr) - \alpha(r')J_{l'}(kr))J_{l'}(kr') & \text{pour } \ r' \leq r \leq a \end{cases}$$

d'après la propriété de symétrie de G

$$G^{(l',1,1)}(r,r') = G^{(l',1,1)}(r',r)$$

$$[Y_{l'}(kr') - \alpha(r')J_{l'}(kr')]J_{l'}(kr) = [Y_{l'}(kr') - \alpha(r)J_{l'}(kr')]J_{l'}(kr)$$

alors

$$\alpha(r') = \alpha(r) = \alpha$$

En définitive, on obtient la fonction de Green :

$$G^{(l',1,1)}(r,r') = \begin{cases} (Y_{l'}(kr') - \alpha J_{l'}(kr'))J_{l'}(kr) & \text{pour } \ 0 < r \leq r' \\ (Y_{l'}(kr) - \alpha J_{l'}(kr))J_{l'}(kr') & \text{pour } \ r' \leq r \leq a \end{cases} \tag{2.23}$$

2.1.3 Calcul des coefficients α et β

D'après les conditions de Dirichlet-Neumann de la fonction de Green au point $r = a$

$$G^{(l',1,1)}(a,r') \mid_{r'=a} = G^{(l,2,2)}(a,r') \mid_{r'=a}$$

$\Rightarrow$

$$[Y_{l'}(ka) - \alpha J_{l'}(ka)]J_{l'}(ka) = -[Y_l(ka) - \beta J_l(ka)]J_l(ka) \tag{2.24}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial r}G^{(l',1,1)}(a,r') \mid_{r'=a} = \frac{\partial}{\partial r}G^{(l,2,2)}(a,r') \mid_{r'=a}$$

$\Rightarrow$

$$k[Y'_{l'}(ka) - \alpha J'_{l'}(ka)]J_{l'}(ka) = -k[Y'_l(ka) - \beta J'_l(ka)]J_l(ka)$$

$\Rightarrow$

$$[Y'_{l'}(ka) - \alpha J'_{l'}(ka)]J_{l'}(ka) = -[Y'_l(ka) - \beta J'_l(ka)]J_l(ka) \tag{2.25}$$

d'après les équations (2.24) et (2.25), on a :

$$\begin{cases} (Y_{l'}(ka) - \alpha J_{l'}(ka))J_{l'}(ka) = -(Y_l(ka) - \beta J_l(ka))J_l(ka) \\ (Y'_{l'}(ka) - \alpha J'_{l'}(ka))J_{l'}(ka) = -(Y'_l(ka) - \beta J'_l(ka))J_l(ka) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} -\alpha J_{l'}(ka)J_{l'}(ka) - \beta J_l(ka)J_l(ka) = -Y_l(ka)J_l(ka) - Y_{l'}(ka)J_{l'}(ka) & (a) \\ -\alpha J'_{l'}(ka)J_{l'}(ka) - \beta J'_l(ka)J_l(ka) = -Y'_l(ka)J_l(ka) - Y'_{l'}(ka)J_{l'}(ka) & (b) \end{cases}$$

En multipliant l'équation (a) par $J'_l(ka)$ et l'équation (b) par $J_l(ka)$, on trouve

$$\begin{cases} (-\alpha J_{l'}(ka)J_{l'}(ka) - \beta J_l(ka)J_l(ka))J'_l(ka) = (-Y_l(ka)J_l(ka) - Y_{l'}(ka)J_{l'}(ka))J'_l(ka) \\ (-\alpha J'_{l'}(ka)J_{l'}(ka) - \beta J'_l(ka)J_l(ka))J_l(ka) = (-Y'_l(ka)J_l(ka) - Y'_{l'}(ka)J_{l'}(ka))J_l(ka) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} -\alpha J_{l'}(ka)J_{l'}(ka)J_l'(ka) - \beta J_l(ka)J_l(a)J_l'(ka) = -Y_l(ka)J_l(ka)J_l'(ka) - Y_{l'}(ka)J_{l'}(ka)J_l'(ka) \\ -\alpha J_{l'}'(ka)J_{l'}(ka)J_l(ka) - \beta J_l'(ka)J_l(a)J_l(ka) = -Y_l'(ka)J_l(ka)J_l(ka) - Y_{l'}'(ka)J_{l'}(ka)J_l(ka) \end{cases}$$

on multiplie la deuxième équation par (-1), on a

$$\begin{cases} -\alpha J_{l'}(ka)J_{l'}(ka)J_l'(ka) - \beta J_l(ka)J_l(a)J_l'(ka) = -Y_l(ka)J_l(ka)J_l'(ka) - Y_{l'}(ka)J_{l'}(ka)J_l'(ka) \\ \alpha J_{l'}'(ka)J_{l'}(ka)J_l(ka) + \beta J_l'(ka)J_l(a)J_l(ka) = Y_l'(ka)J_l(ka)J_l(ka) + Y_{l'}'(ka)J_{l'}(ka)J_l(ka) \end{cases}$$

on additionne les deux équations :

$$\alpha(J_{l'}'(ka)J_{l'}(ka)J_l(ka) - J_{l'}(ka)J_{l'}(ka)J_l'(ka)) = Y_l'(ka)J_l(ka)J_l(ka) + Y_{l'}'(ka)J_{l'}(ka)J_l(ka)$$

$$-Y_l(ka)J_l(k)J_l'(ka) - Y_{l'}(ka)J_{l'}(ka)J_l'(ka)$$

$$\alpha = \frac{Y_l'(ka)J_l(ka)J_l(ka) + Y_{l'}'(ka)J_{l'}(ka)J_l(ka) - Y_l(ka)J_l(ka)J_l'(ka) - Y_{l'}(ka)J_{l'}(ka)J_l'(ka)}{J_{l'}'(ka)J_{l'}(ka)J_l(ka) - J_{l'}(ka)J_{l'}(ka)J_l'(ka)}$$

$$\alpha = \frac{(Y_l'(ka)J_l(ka) - Y_l(ka)J_l'(ka))J_l(ka) - (Y_{l'}(ka)J_l'(ka) - Y_{l'}'(ka)J_l(ka))J_{l'}(ka)}{J_{l'}'(ka)J_{l'}(ka)J_l(ka) - J_{l'}(ka)J_{l'}(ka)J_l'(ka)}$$

d'où

$$\alpha = \frac{2J_l(ka) + \pi a J_{l'}(ka)[kJ_l(ka)Y_{l'}'(ka) - kY_{l'}(ka)J_l'(ka)]}{\pi a J_{l'}(ka)[kJ_l(ka)J_{l'}'(ka) - kJ_{l'}(ka)J_l'(ka)]}$$

de même manière on trouve

$$\beta = \frac{kJ_{l'}(ka)[J_{l'}(ka)Y_{l'}'(ka) - Y_{l'}(ka)J_{l'}'(ka)] + J_l(ka)[kJ_{l'}(ka)Y_l'(ka) - kY_l(ka)J_{l'}'(ka)]}{J_l(ka)[kJ_{l'}(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_{l'}'(ka)]}$$

d'où

$$\beta = \frac{2J_{l'}(ka) + \pi a J_l(ka)[kJ_{l'}(ka)Y_l'(ka) - kY_l(ka)J_{l'}'(ka)]}{\pi a J_l(ka)[kJ_{l'}(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_{l'}'(ka)]}$$

enfin, la substitution des expressions de α et β dans les systèmes (2.23) et (2.12) respectivement, et en notant

$$G_l^{(l',1,1)}(r,r') = G^{(l',1,1)}(r,r')$$

et

$$G_{l'}^{(l,2,2)}(r,r') = G^{(l,2,2)}(r,r')$$

on trouve :

$$G_l^{(l',1,1)}(r,r') = \begin{cases} \begin{array}{l} Y_{l'}(kr')J_{l'}(kr) \\ -\dfrac{2J_l(ka) + \pi a J_{l'}(ka)[kJ_l(ka)Y_{l'}'(ka) - kY_{l'}(ka)J_l'(ka)]}{\pi a J_{l'}(ka)[kJ_l(ka)J_{l'}'(ka) - kJ_{l'}(ka)J_l'(ka)]} J_{l'}(kr')J_{l'}(kr), \quad 0 < r \le r' \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} Y_{l'}(kr)J_{l'}(kr') \\ -\dfrac{2J_l(ka) + \pi a J_{l'}(ka)[kJ_l(ka)Y_{l'}'(ka) - kY_{l'}(ka)J_l'(ka)]}{\pi a J_{l'}(ka)[kJ_l(ka)J_{l'}'(ka) - kJ_{l'}(ka)J_l'(ka)]} J_{l'}(kr)J_{l'}(kr'), \quad r' \le r \le a \end{array} \end{cases}$$

et

$$G_{l'}^{(l,2,2)}(r,r') = \begin{cases} \begin{array}{l} -Y_l(kr)J_l(kr') \\ +\dfrac{2J_l'(ka) + \pi a J_l(ka)[kJ_{l'}(ka)Y_l'(ka) - kY_l(ka)J_{l'}'(ka)]}{\pi a J_l(ka)[kJ_{l'}(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_{l'}'(ka)]} J_l(kr)J_l(kr'), \quad a \le r \le r' \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} -Y_l(kr')J_l(kr) \\ +\dfrac{2J_{l'}(ka) + \pi a J_l(ka)[kJ_{l'}(ka)Y_l'(ka) - kY_l(ka)J_{l'}'(ka)]}{\pi a J_l(ka)[kJ_{l'}(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_{l'}'(ka)]} J_l(kr')J_l(kr), \quad r' \le r < \infty \end{array} \end{cases}$$

2.1.4 le cas $0 < r' \leq a \leq r < \infty$:

$$G_{l'}^{(l,2,1)}(r,r') = h(kr)z(kr')$$

où

$$h(kr) = [Y_l(kr) - \lambda J_l(kr)]$$

et

$$z(kr') = J_{l'}(kr')$$

donc

$$G_{l'}^{(l,2,1)}(r,r') = [Y_l(kr) - \lambda J_l(kr)]J_{l'}(kr')$$

d'après le condition de Dirichlet de la fonction de Green au point $r = a$

$$G_{l'}^{(l,2,1)}(a,r') \mid_{r'=a} = G_{l}^{(l',1,1)}(a,r') \mid_{r'=a}$$

$\Rightarrow$

$$(Y_l(ka) - \lambda J_l(ka))J_{l'}(ka) = (Y_{l'}(ka) - \frac{2J_l(ka) + \pi a J_{l'}(ka)(kJ_l(ka)Y'_{l'}(ka) - kY_{l'}(ka)J'_l(ka))}{\pi a(kJ_l(ka)J'_{l'}(ka) - kJ_{l'}(ka)J'_l(ka))})J_{l'}(ka)$$

$\Rightarrow$

$$Y_l(ka) - \lambda J_l(ka) = Y_{l'}(ka) - \frac{2J_l(ka) + \pi a J_{l'}(ka)(kJ_l(ka)Y'_{l'}(ka) - kY_{l'}(ka)J'_l(ka))}{\pi a(kJ_l(ka)J'_{l'}(ka) - kJ_{l'}(ka)J'_l(ka))}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} - \frac{Y_{l'}(ka)}{J_l(ka)} + \frac{2J_l(ka) + \pi a J_{l'}(ka)(kJ_l(ka)Y'_{l'}(ka) - kY_{l'}(ka)J'_l(ka))}{\pi a J_l(ka)(kJ_l(ka)J'_{l'}(ka) - kJ_{l'}(ka)J'_l(ka))} \\
&= \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} + \frac{-Y_{l'}(ka)\pi a(kJ_l(ka)J'_{l'}(ka) + kJ_{l'}(ka)J'_l(ka))}{\pi a J_l(ka)(kJ_l(ka)J'_{l'}(ka) - kJ_{l'}(ka)J'_l(ka))} \\
&+ \frac{2J_l(ka) + \pi a J_{l'}(ka)(kJ_l(ka)Y'_{l'}(ka) - kY_{l'}(ka)J'_l(ka))}{\pi a J_l(ka)(kJ_l(ka)J'_{l'}(ka) - kJ_{l'}(ka)J'_l(ka))} \\
&= \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} + \frac{-\pi ak(Y_{l'}(ka)J_l(ka)J'_{l'}(ka) + Y_{l'}(ka)J_{l'}(ka)J'_l(ka))}{\pi a J_l(ka)(kJ_l(ka)J'_{l'}(ka) - kJ_{l'}(ka)J'_l(ka))} \\
&+ \frac{2J_l(ka) + \pi ak(J_{l'}(ka)J_l(ka)Y'_{l'}(ka) - J_{l'}(ka)Y_{l'}(ka)J'_l(ka))}{\pi a J_l(ka)(kJ_l(ka)J'_{l'}(ka) - kJ_{l'}(ka)J'_l(ka))} \\
&= \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} + \frac{-\pi akY_{l'}(ka)J_l(ka)J'_{l'}(ka) + \pi akJ_{l'}(ka)J_l(ka)Y'_{l'}(ka) + 2J_l(ka)}{\pi a J_l(ka)(kJ_l(ka)J'_{l'}(ka) - kJ_{l'}(ka)J'_l(ka))} \\
&= \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} + \frac{\pi akJ_l(ka)(J_{l'}(ka)Y'_{l'}(ka) - Y_{l'}(ka)J'_{l'}(ka)) + 2J_l(ka)}{\pi a J_l(ka)(kJ_l(ka)J'_{l'}(ka) - kJ_{l'}(ka)J'_l(ka))} \\
&= \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} + \frac{\pi akJ_l(ka)W(J_l(kr'), Y_l(kr')) + 2J_l(ka)}{\pi a J_l(ka)(kJ_l(ka)J'_{l'}(ka) - kJ_{l'}(ka)J'_l(ka))} \\
&= \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} + \frac{\pi akJ_l(ka)\dfrac{2}{\pi ka} + 2J_l(ka)}{\pi a J_l(ka)(kJ_l(ka)J'_{l'}(ka) - kJ_{l'}(ka)J'_l(ka))}
\end{aligned}$$

alors

$$\lambda = \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} + \frac{4}{\pi a(kJ_l(ka)J'_{l'}(ka) - kJ_{l'}(ka)J'_l(ka))}$$

donc

$$G_{l'}^{(l,2,1)}(r,r') = [Y_l(kr) - (\frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} + \frac{4}{\pi a(kJ_l(ka)J'_{l'}(ka) - kJ_{l'}(ka)J'_l(ka))})J_l(kr)]J_{l'}(kr')$$

2.1.5 le cas $0 < r \leq a \leq r' < \infty$:

$$G_l^{(l',1,2)}(r,r') = K(kr)T(kr')$$

où

$$K(kr) = [Y_{l'}(kr) - \eta J_{l'}(kr)]$$

et

$$T(kr') = J_{l'}(kr')$$

d'après la condition de Dirichlet de la fonction de Green au point $r = a$

$$G_l^{(l',1,2)}(a,r') \mid_{r'=a} = G_{l'}^{(l,2,2)}(a,r') \mid_{r'=a}$$

$\Rightarrow$

$$(Y_{l'}(ka) - \eta J_{l'}(ka))J_l(ka) = (-Y_l(ka) + \frac{2J_{l'}(ka) + \pi a J_l(ka)(kJ_{l'}(ka)Y_l'(ka) - kY_l(ka)J_{l'}'(ka))}{\pi a(kJ_{l'}(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_{l'}'(ka))})J_l(ka)$$

d'où

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{Y_{l'}(ka)}{J_{l'}(ka)} + \frac{Y_l(ka)}{J_{l'}(ka)} - \frac{2J_{l'}(ka) + \pi a J_l(ka)(kJ_{l'}(ka)Y_l'(ka) - kY_l(ka)J_{l'}'(ka))}{\pi a J_{l'}(ka)(kJ_{l'}(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_{l'}'(ka))} \\ &= \frac{Y_{l'}(ka)}{J_{l'}(ka)} + \frac{4}{\pi a(kJ_{l'}(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_{l'}'(ka))}\end{aligned}$$

donc en définitive, on obtient la fonction de Green :

$$G_l^{(l',1,2)}(r,r') = [Y_{l'}(kr) - (\frac{Y_{l'}(ka)}{J_{l'}(ka)} + \frac{4}{\pi a(kJ_{l'}(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_{l'}'(ka))})J_{l'}(kr)]J_l(kr')$$

2.2 Cas $q = iq'$

On considère l'équation suivante :

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' + (k^2 - \frac{2q^2 + \omega^2}{r^2})\psi_1 = 0 \tag{2.26}$$

avec $q = iq'$ et $q^2 = -q'^2$, $q' \in \mathbb{R}$ alors, on peut écrire l'équation (2.26) comme

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' + (k^2 - \frac{-2q'^2 + \omega^2}{r^2})\psi_1 = 0$$

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' + (k^2 - \frac{\omega^2 - 2q'^2}{r^2})\psi_1 = 0 \tag{2.27}$$

2.2.1 Si $\omega^2 - 2q'^2 > 0$:

Posons $l_1^2 = \omega^2 - 2q'^2$

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' + (k^2 - \frac{l_1^2}{r^2})\psi_1 = 0$$

d'après l'équation précédente la fonction de Green est donnée par :

le cas r et r' à l'intérieur du disque :

$$G^{(l_1,1,1)}(r,r') = \begin{cases} (Y_{l_1}(kr') - \alpha_1 J_{l_1}(kr'))J_{l_1}(kr) & \text{pour } 0 < r \leq r' \\ (Y_{l_1}(kr) - \alpha_1 J_{l_1}(kr))J_{l_1}(kr') & \text{pour } r' \leq r \leq a \end{cases} \tag{2.28}$$

le cas r et r' à l'extérieur du disque :

Dans ce cas, on a la même fonction de Green du cas précédent :

$$G^{(l,2,2)}(r,r') = \begin{cases} -[Y_l(kr) - \beta_1 J_l(kr)]J_l(kr') & \text{pour} \quad a \leq r \leq r' \\ -[Y_l(kr') - \beta_1 J_l(kr')]J_l(kr) & \text{pour} \quad r' \leq r < \infty \end{cases} \tag{2.29}$$

Calcul des coefficients α_1 et β_1

D'après les conditions de Dirichlet-Neumann de la fonction de Green au point $r = a$

$$G^{(l_1,1,1)}(a,r') \mid_{r'=a} = G^{(l,2,2)}(a,r') \mid_{r'=a}$$

$\Rightarrow$

$$[Y_{l_1}(ka) - \alpha_1 J_{l_1}(ka)]J_{l_1}(ka) = -[Y_l(ka) - \beta_1 J_l(ka)]J_l(ka) \tag{2.30}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial r} G^{(l_1,1,1)}(a,r') \mid_{r'=a} = \frac{\partial}{\partial r} G^{(l,2,2)}(a,r') \mid_{r'=a}$$

$\Rightarrow$

$$k[Y'_{l_1}(ka) - \alpha_1 J'_{l_1}(ka)]J_{l_1}(ka) = -k[Y'_l(ka) - \beta_1 J'_l(ka)]J_l(ka)$$

$\Rightarrow$

$$[Y'_{l_1}(ka) - \alpha_1 J'_{l_1}(ka)]J_{l_1}(ka) = -[Y'_l(ka) - \beta_1 J'_l(ka)]J_l(ka) \tag{2.31}$$

d'après les équations (2.30) et (2.31), on a :

$$\begin{cases} (Y_{l_1}(ka) - \alpha_1 J_{l_1}(ka))J_{l_1}(ka) = -[Y_l(ka) - \beta_1 J_l(ka)]J_l(ka) \\ (Y'_{l_1}(ka) - \alpha_1 J'_{l_1}(ka))J_{l_1}(ka) = -[Y'_l(ka) - \beta_1 J'_l(ka)]J_l(ka) \end{cases}$$

après certains calculs on trouve

$$\alpha_1 = \frac{2J_l(ka) + \pi a J_{l_1}(ka)[kJ_l(ka)Y'_{l_1}(ka) - kY_{l_1}(ka)J'_l(ka)]}{\pi a J_{l_1}(ka)[kJ_l(ka)J'_{l_1}(ka) - kJ_{l_1}(ka)J'_l(ka)]}$$

de même manière on trouve

$$\beta_1 = \frac{2J_{l_1}(ka) + aJ_l(ka)[kJ_{l_1}(ka)Y'_l(ka) - kY_l(ka)J'_{l_1}(ka)]}{aJ_l(ka)(kJ_{l_1}(ka)J'_l(ka) - kJ_l(ka)J'_{l_1}(ka))}$$

alors, la substitution des expressions de α_1 et β_1 dans les systèmes (2.28) et (2.29) respectivement, et en notant :

$$G_l^{(l_1,1,1)}(r,r') = G^{(l_1,1,1)}(r,r')$$

et

$$G_{l_1}^{(l,2,2)}(r,r') = G^{(l,2,2)}(r,r')$$

on trouve

$$G_l^{(l_1,1,1)}(r,r') = \begin{cases} J_{l_1}(kr)[Y_{l_1}(kr') \\ -\dfrac{2J_l(ka) + \pi a J_{l_1}(ka)[kJ_l(ka)Y'_{l_1}(ka) - kY_{l_1}(ka)J'_l(ka)]}{\pi a J_{l_1}(ka)[kJ_l(ka)J'_{l_1}(ka) - kJ_{l_1}(ka)J'_l(ka)]} J_{l_1}(kr')], \quad 0 < r \leq r' \\ \\ J_{l_1}(kr')[Y_{l_1}(kr) \\ -\dfrac{2J_l(ka) + \pi a J_{l_1}(ka)[kJ_l(ka)Y'_{l_1}(ka) - kY_{l_1}(ka)J'_l(ka)]}{\pi a J_{l_1}(ka)[kJ_l(ka)J'_{l_1}(ka) - kJ_{l_1}(ka)J'_l(ka)]} J_{l_1}(kr)], \quad r' \leq r \leq a \end{cases}$$

et

$$G_{l_1}^{(l,2,2)}(r,r') = \begin{cases} J_l(kr')[-Y_l(kr) \\ +\dfrac{2J_{l_1}(ka)+\pi a J_l(ka)[kJ_{l_1}(ka)Y_l'(ka)-kY_l(ka)J_{l_1}'(ka)]}{\pi a J_l(ka)(kJ_{l_1}(ka)J_l'(ka)-kJ_l(ka)J_{l_1}'(ka))}J_l(kr)], & a \le r \le r' \\ J_l(kr)[-Y_l(kr') \\ +\dfrac{2J_{l_1}(ka)+\pi a J_l(ka)[kJ_{l_1}(ka)Y_l'(ka)-kY_l(ka)J_{l_1}'(ka)]}{\pi a J_l(ka)(kJ_{l_1}(ka)J_l'(ka)-kJ_l(ka)J_{l_1}'(ka))}J_l(kr')], & r' \le r < \infty \end{cases}$$

le cas $0 < r' \le a \le r < \infty$:

$$G_{l_1}^{(l,2,1)}(r,r') = h_1(kr)z_1(kr')$$

où

$$h_1(kr) = [Y_l(kr) - \lambda_1 J_l(kr)]$$

et

$$z_1(kr') = J_{l_1}(kr')$$

donc

$$G_{l_1}^{(l,2,1)}(r,r') = [Y_l(kr) - \lambda_1 J_l(kr)]J_{l_1}(kr')$$

d'après la condition de Dirichlet de la fonction de Green au point $r = a$

$$G_{l_1}^{(l,2,1)}(a,r') \mid_{r'=a} = G_l^{(l_1,1,1)}(a,r') \mid_{r'=a}$$

$\Rightarrow$

$$[Y_l(ka) - \lambda_1 J_l(ka)]J_{l_1}(ka) = [Y_{l_1}(ka) - \frac{2J_l(ka)+\pi a J_{l_1}(ka)[kJ_l(ka)Y_{l_1}'(ka)-kY_{l_1}(ka)J_l'(ka)]}{\pi a[kJ_l(ka)J_{l_1}'(ka)-kJ_{l_1}(ka)J_l'(ka)]}]J_{l_1}(ka)$$

$\Rightarrow$

$$Y_l(ka) - \lambda_1 J_l(ka) = Y_{l_1}(ka) - \frac{2J_l(ka)+\pi a J_{l_1}(ka)[kJ_l(ka)Y_{l_1}'(ka)-kY_{l_1}(ka)J_l'(ka)]}{\pi a[kJ_l(ka)J_{l_1}'(ka)-kJ_{l_1}(ka)J_l'(ka)]}$$

d'où

$$\lambda_1 = \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} + \frac{4}{\pi a[kJ_l(ka)J_{l_1}'(ka)-kJ_{l_1}(ka)J_l'(ka)]}$$

donc

$$G_{l_1}^{(l,2,1)}(r,r') = [Y_l(kr) - (\frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} + \frac{4}{\pi a[kJ_l(ka)J_{l_1}'(ka)-kJ_{l_1}(ka)J_l'(ka)]}J_l(kr)]J_{l_1}(kr')$$

le cas $0 < r \le a \le r' < \infty$:

$$G_l^{(l_1,1,2)}(r,r') = K_1(kr)T_1(kr')$$

où

$$K_1(kr) = [Y_{l_1}(kr) - \eta_1 J_{l_1}(kr)]$$

et

$$T(kr') = J_l(kr')$$

d'après la condition de Dirichlet de la fonction de Green au point $r = a$

$$G_l^{(l_1,1,2)}(a,r') \mid_{r'=a} = G_{l_1}^{(l,2,2)}(a,r') \mid_{r'=a}$$

$\Rightarrow$

$$(Y_{l_1}(ka) - \eta J_{l_1}(ka))J_l(ka) = (-Y_l(ka) + \frac{2J_{l_1}(ka) + \pi a J_l(ka)(kJ_{l_1}(ka)Y_l'(ka) - kY_l(ka)J_{l_1}'(ka))}{\pi a(kJ_{l_1}(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_{l_1}'(ka))})J_l(ka)$$

d'où

$$\eta_1 = \frac{Y_{l_1}(ka)}{J_{l_1}(ka)} + \frac{Y_l(ka)}{J_{l_1}(ka)} - \frac{2J_{l_1}(ka) + \pi a J_l(ka)(kJ_{l_1}(ka)Y_l'(ka) - kY_l(ka)J_{l_1}'(ka))}{\pi a J_{l_1}(ka)(kJ_{l_1}(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_{l_1}'(ka))}$$

$$= \frac{Y_{l'}(ka)}{J_{l'}(ka)} + \frac{4}{\pi a(kJ_{l'}(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_{l'}'(ka))}$$

donc la fonction de Green s'écrit sous la forme :

$$G_l^{(l_1,1,2)}(r,r') = [Y_{l_1}(kr) - (\frac{Y_{l_1}(ka)}{J_{l_1}(ka)} + \frac{4}{\pi a(kJ_{l_1}(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_{l_1}'(ka))})J_{l_1}(kr)]J_l(kr')$$

2.2.2 Si $\omega^2 - 2q'^2 = 0$

Maintenant, on remplace $\omega^2 - 2q'^2$ dans l'équation (2.27) par zéro d'où :

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' + k^2\psi_1 = 0$$

les deux solutions linéairement indépendantes de cette équation de Bessel sont $J_0(kr)$ et $Y_0(kr)$. Pour calculer la fonction de Green, nous allons utiliser la même méthode précédente :

le cas r et r' à l'intérieur du disque :

$$G_l^{(0,1,1)}(r,r') = \begin{cases} \begin{array}{c} J_0(kr)[Y_0(kr') \\ -\frac{2J_l(ka) + \pi a J_0(ka)[kJ_l(ka)Y_0'(ka) - kY_0(ka)J_l'(ka)]}{\pi a J_0(ka)[kJ_l(ka)J_0'(ka) - kJ_0(ka)J_l'(ka)]} J_0(kr')], \quad 0 < r \leq r' \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} J_0(kr')[Y_0(kr) \\ -\frac{2J_l(ka) + \pi a J_0(ka)[kJ_l(ka)Y_0'(ka) - kY_0(ka)J_l'(ka)]}{\pi a J_0(ka)[kJ_l(ka)J_0'(ka) - kJ_0(ka)J_l'(ka)]} J_0(kr)], \quad r' \leq r \leq a \end{array} \end{cases}$$

le cas r et r' à l'extérieur du disque :

$$G_0^{(l,2,2)}(r,r') = \begin{cases} \begin{array}{c} J_l(kr')[-Y_l(kr) \\ +\frac{2J_0(ka) + \pi a J_l(ka)[kJ_0(ka)Y_l'(ka) - kY_l(ka)J_0'(ka)]}{\pi a J_l(ka)(kJ_0(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_0'(ka))} J_l(kr)], \quad a \leq r \leq r' \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} J_l(kr)[-Y_l(kr') \\ +\frac{2J_0(ka) + \pi a J_l(ka)[kJ_0(ka)Y_l'(ka) - kY_l(ka)J_0'(ka)]}{\pi a J_l(ka)(kJ_0(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_0'(ka))} J_l(kr')], \quad r' \leq r < \infty \end{array} \end{cases}$$

le cas $0 < r' \leq a \leq r < \infty$ **:**

$$G_0^{(l,2,1)}(r,r') = [Y_l(kr) - (\frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} + \frac{4}{\pi a[kJ_l(ka)J_0'(ka) - kJ_0(ka)J_l'(ka)]})J_l(kr)]J_0(kr')$$

le cas :$0 < r \leq a \leq r' < \infty$

$$G_l^{(0,1,2)}(r,r') = [Y_0(kr) - (\frac{Y_0(ka)}{J_0(ka)} + \frac{4}{\pi a(kJ_0(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_0'(ka))})J_0(kr)]J_l(kr')$$

2.2.3 Si $w^2 - 2q'^2 < 0$

$\underline{E > 0 \text{ :}}$

Posons $l_2^2 = -l_3^2$ où $l_3^2 = 2q'^2 - w^2 > 0$ et $l_2 = il_3$, on a :

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' + (k^2 - \frac{l_2^2}{r^2})\psi_1 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\psi_1'' + \frac{1}{r}\psi_1' + (k^2 - \frac{(il_3)^2}{r^2})\psi_1 = 0 \tag{2.32}$$

Cette équation de Bessel admet deux solutions linéairement indépendantes notées $J_{il_3}(rk)$ et $Y_{il_3}(rk)$.
D'après l'équation (2.32), la fonction de Green est donnée par :

le cas r **et** r' **à l'intérieur du disque :**

$$G_l^{(il_3,1,1)}(r,r') = \begin{cases} J_{l_1}(kr)[Y_{il_3}(kr') \\ -\dfrac{2J_l(ka) + \pi a J_{il_3}(ka)[kJ_l(ka)Y_{il_3}'(ka) - kY_{il_3}(ka)J_l'(ka)]}{\pi a J_{il_3}(ka)[kJ_l(ka)J_{il_3}'(ka) - kJ_{il_3}(ka)J_l'(ka)]}J_{il_3}(kr')], & 0 < r \leq r' \\ J_{il_3}(kr')[Y_{il_3}(kr) \\ -\dfrac{2J_l(ka) + \pi a J_{il_3}(ka)[kJ_l(ka)Y_{il_3}'(ka) - kY_{il_3}(ka)J_l'(ka)]}{\pi a J_{il_3}(ka)[kJ_l(ka)J_{il_3}'(ka) - kJ_{il_3}(ka)J_l'(ka)]}J_{il_3}(kr)], & r' \leq r \leq a \end{cases}$$

le cas r **et** r' **à l'extérieur du disque :**

$$G_{il_3}^{(l,2,2)}(r,r') = \begin{cases} J_l(kr')[-Y_l(kr) \\ +\dfrac{2J_{il_3}(ka) + \pi a J_l(ka)[kJ_{il_3}(ka)Y_l'(ka) - kY_l(ka)J_{il_3}'(ka)]}{\pi a J_l(ka)(kJ_{il_3}(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_{il_3}'(ka))}J_l(kr)], & a \leq r \leq r' \\ J_l(kr)[-Y_l(kr') \\ +\dfrac{2J_{il_3}(ka) + \pi a J_l(ka)[kJ_{il_3}(ka)Y_l'(ka) - kY_l(ka)J_{il_3}'(ka)]}{\pi a J_l(ka)(kJ_{il_3}(ka)J_l'(ka) - kJ_l(ka)J_{il_3}'(ka))}J_l(kr')], & r' \leq r < \infty \end{cases}$$

le cas $0 < r' \leq a \leq r < \infty$:

$$G_{il_3}^{(l,2,1)}(r,r') = [Y_l(kr) - (\frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} + \frac{4}{\pi a[kJ_l(ka)J'_{il_3}(ka) - kJ_{il_3}(ka)J'_l(ka)]})J_l(kr)]J_{il_3}(kr')$$

le cas $0 < r \leq a \leq r' < \infty$:

$$G_l^{(il_3,1,2)}(r,r') = [Y_{il_3}(kr) - (\frac{Y_{il_3}(ka)}{J_{il_3}(ka)} + \frac{4}{\pi a(kJ_{il_3}(ka)J'_l(ka) - kJ_l(ka)J'_{il_3}(ka))})J_{il_3}(kr)]J_l(kr')$$

$\underline{E < 0}$

le cas r et r' à l'extérieur du disque :

l'équation de Bessel n'admet pas de solution d'où la fonction de Green dans cette cas est nulle i.e

$$G^{(l,2,2)}(r,r') = 0$$

le cas r et r' à l'intérieur du disque :

$$G_{il_4}^{(l,1,1)}(r,r') = \begin{cases} A(r')I_{il_4}(k'r) & 0 < r' \leq r \\ B(r')(K_{il_4}(k'r) - \alpha(r')I_{il_4}(k'r)), & r' \leq r \leq a \end{cases}$$

la continuité de la fonction de Green au point $r = r'$ donne

$$G_{il_4}^{(l,1,1)}(r'_+,r') - G_{il_4}^{(l,1,1)}(r'_-,r') = 0 \tag{2.33}$$

d'après certains calcule, on trouve

$$A(r') = \frac{B(r')[K_{il_4}(k'r') - \alpha(r')I_{il_4}(k'r')]}{I_{il_4}(k'r')} \tag{2.34}$$

et la discontinuité de la dérivée première par rapport r de la fonction de Green au point $r = r'$ on a

$$\frac{\partial G_{il_4}^{(l,1,1)}}{\partial r}(r'_+,r') - \frac{\partial_{il_4}^{(l,1,1)}}{\partial r}(r'_-,r') = \frac{2}{\pi r'} \tag{2.35}$$

c-à-d

$$B(r')K'_{il_4}(k'r') - [A(r') + \alpha(r')B(r')]I'_{il_4}(k'r') = \frac{2}{\pi k'r'} \tag{2.36}$$

et sachant que la wronskien est donné par

$$W(I_{il_4}(k'r'), K_{l'}(k'r')) = I_{il_4}(k'r')K'_{il_4}(k'r') - K_{il_4}(k'r')I'_{il_4}(k'r') = \frac{2}{k'r'} \tag{2.37}$$

en substituant (2.37) et (2.34) dans (2.36) on obtient :

$$B(r') = \frac{I_{il_4}(k'r')}{\pi} \tag{2.38}$$

aussi en substituant (2.38) dans (2.34) on obtient :

$$A(r') = \frac{1}{\pi} K_{il_4}(k'r') - \alpha(r') I_{il_4}(k'r') \tag{2.39}$$

donc

$$G_{il_4}^{(l,1,1)}(r,r') = \frac{1}{\pi} \begin{cases} (K_{il_4}(k'r') - \alpha(r') I_{il_4}(k'r')) I_{il_4}(k'r), & 0 < r' \leq r \\ (K_{il_4}(k'r) - \alpha(r') I_{il_4}(k'r)) I_{il_4}(k'r'), & r' \leq r \leq a \end{cases}$$

pour déterminer le constant α en utilise le condition de Dirichlet au point $r = r' = a$ i.e

$$(K_{il_4}(k'a) - \alpha(k', a) I_{il_4}(k'a)) I_{il_4}(k'a) = 0$$

puisque $I_{il_4}(k'a) \neq 0$, donc

$$\alpha(k', a) = \frac{K_{il_4}(k'a)}{I_{il_4}(k'a)}$$

d'où

$$G_{il_4}^{(l,1,1)}(r,r') = \frac{1}{\pi} \begin{cases} (K_{il_4}(k'r') - \frac{K_{il_4}(k'a)}{I_{il_4}(k'a)} I_{il_4}(k'r')) I_{il_4}(k'r) & 0 < r' \leq r \\ \\ (K_{il_4}(k'r) - \frac{K_{il_4}(k'a)}{I_{il_4}(k'a)} I_{il_4}(k'r)) I_{il_4}(k'r') & r' \leq r \leq a \end{cases}$$

Conclusion générale

Dans notre travail, nous avons abordé le calcul explicite de la fonction de Green pour un problème concret de la mécanique quantique : le problème du potentiel à deux dimensions (sur un disque). Les conditions aux limites utilsées sont celles qu'on rencontre en mécanique quantique dans les problèmes de diffusion et aussi pour les états liés. En mécanique quantique, si le potentiel présente un saut dans l'espace, la solution de l'équation de Schrödinger et de sa dérivée sont continues sur la limite (le bord) du domaine.

Ainsi nous avons calculé les différents types de fonctions de Green dans les diverses régions de l'espace et les différentes constantes de couplage du potentiel c-à-d pour q real ou q imaginaire pure. Nous comptons que ces résultats peuvent faire l'objet d'une publication à soumettre à un journal international. Comme perspective, nous allons aussi prolonger cette méthode à l'étude des autres problèmes pour des potentiels multi-sauts, autre forme, etc...

Bibliographie

[1] B. Benali, B. Boudjedaa, M. T. Meftah, *Acta Physica Polonica A Vol.124.No.1, 636-640(2013).*

[2] E. Hairer, *Calcul différentiel et équations différentielles, Genève 24, Juin 1999.*

[3] M. Krasnov, A. Kisselev, G. Makarenko, *Équations Intégrales - Traduction française Editions Mir 1977, Moscou.*

[4] S. Kukla, U. Siedlecka, I. Zamorska, *Sci. Res. Inst. Math. Computer Sci.11 (1), 53-62 (2012).*

[5] Murray R. Spiegel, Ph. D, *Theory and Problems of Fourier Analysis with Application to Boundary Value Problems, Editions McGraw-Hill, America, 1974.*

[6] N. Piskounov, *Calcule différentiel et intégral tome 2- Traduction française Editions Mir 1980. Moscou.*

[7] H. Reinhard, *Équations aux dérivées partielles-Bordas,Paris, 1991.*

Résumé

Dans notre travail, nous avons présenté plusieurs résultats relatifs au calcul de la fonction de Green pour le problème du potentiel de saut, avec des conditions aux limites, qui ont des interprétations précises en physique quantique. Ainsi notre travail consacré aux équations différentielles de second ordre dans lequel nous présentons : Le calcul de la fonction de Green pour le potentiel de deux dimensions (Disque) $V(r,\theta)$ égales à q^2/r^2 à l'intérieur du disque (rayon a) et égale à zéro en dehors du disque, ainsi en utilisant la continuité de la fonction de Green et de sa dérivée première au bord (r =a).

Mots clés : fonction de Green, le potentiel, équations différentielle, fonction de Bessel.

Abstract

In our work, we presented several results relating to the calculation of the Green function for jumping potential problem with the boundary conditions. It is interpreted in quantum physics. Thus, our work is devoted to solve differential equations of second order for which we present : the Green function for a potential in two-dimensions (Disc) $V(r,\theta)$ equal to q^2/r^2 inside the disc and zero outside using the continuity of the Green's function and its first derivative at the edge (R = a).

Key words : Green's function, the potential, differential equations, Bessel functions.

الملخص

في هذا العمل قدمنا عدة نتائج متعلقة بحساب دالة قرين لمسائل جهد القفزة وبشروط حدية والتي لها تفسيرات في فيزيا الكم. من جهة أخرى هذا العمل مجسد في المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية، حيث بحثنا على دالة غرين لحساب الجهد $V(r,\theta)$ في فضاء ذو بعدين (قرص) المساوي q^2/r^2 داخل القرص (نصف قطره محدد مسبقا ب a) ، ويساوي 0 خارج القرص، واستعملنا استمرارية دالة غرين و مشتقتها الأولى عند الحافة ($r = a$).

كلمات مفتاحيه : دالة غرين، الجهد، معادلات تفاضلية، دوال بيسل.