

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DESSCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**ETUDE DE SOLUTIONS DES
EQUATIONS INTEGRALES DE
FREDHOLM**

Présenté par: - CHEREIT HICHAM
- LOUETRI MOHAMMED

Soutenu publiquement devant le jury composé de

M.ZAUCHE ELMEHDI	MCB	Président	Univ. d'El Oued
M. MESSAOUD GUESBA	MCA	Rapporteur	Univ. d'El Oued
M. MEFTAH SAFIA	MCA	Examineur	Univ. d'El Oued

Année universitaire 2022 – 2023.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mon superviseur " **Dr.GUESBA MESSAOUD**" sur ses précieux conseils et orientations tout au long de la réalisation de cette note. Je tiens à remercier les membres du comité qui ont accepté l'évaluation de mon travail.

Tous nos remerciements et notre appréciation au chef de notre département, le "**Dr Beloul Said**". Et tous les professeurs de Département de mathématiques, Université Echahid Hamma

Lakhdar

Dédicace

Je dédie cet humble travail à mes proches, ma famille et tous mes camarades de classe
et chers professeurs

Pour leurs encouragements et leur soutien tout au long de mon parcours universitaire

Table des matières

Introduction	v
Notations générales	vi
1 GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS INTÉ- GRALES	1
1.1 INTRODUCTION	1
1.2 CLASSIFICATIONS DES ÉQUATIONS INTEGRALES	3
1.2.1 ÉQUATIONS INTEGRALES LINEAIRES	3
1.2.2 ÉQUATIONS INTEGRALES NON LINEAIRES	5
1.2.3 ÉQUATIONS INTEGRALES SINGULIERES	7
1.2.4 ÉQUATIONS INTEGRALES MIXTES	9
1.3 Relation entre des équations differntielles linéaires et les équations intégrals de volterra	11
2 ÉQUATIONS INTEGRALES DE FREDHOLM	13
2.1 Quelques méthodes analytiques de résolutions des équations intégrales linéaires de Fredholm	13
2.2 Méthode de Fredholm	14
2.3 Méthode des Noyaux itérés (Construction de la résolvante à l'aide des noyaux itérés)	17
2.4 Méthode des noyaux dégénérés	19
2.5 La méthode des approximations successives (la méthode de Neumann série) . . .	23
3 ÉTUDE L'ÉQUATION INTEGRAL DE FRED- HOLM	27
3.1 Existence et unicité des solutions des équations intégrales de Fredholm sur le contour	27

3.2	Trouve des solutions continues pour les équations intégrales non linéaires	29
3.2.1	Existence de solutions continues de EIN	30

Introduction

Les équations intégrales jouent un rôle majeur dans plusieurs domaines scientifiques tels que : la biologie, la chimie ou la physique ...etc, ce type d'équations a été introduit par Vito-Volterra pour la première fois dans le début des années 1900. L'équation que nous appelons équation intégrale (É.I) est sous la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t, \varphi(t))dt,$$

où $h(x)$, $f(x)$ et $K(x, t)$ sont des fonctions données, la fonction $\varphi(x)$ qui figurée à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral est l'inconnu à déterminer, λ est un paramètre réel ou complexe différent de zéro, Ω est un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension finie et la fonction $K(x, t)$ est appelée noyau de l'équation intégrale.

Dans ce mémoire on étudie le sujet " Équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce ", l'objet de ce travail est de présenter des solutions pour les équations intégrales linéaires de Fredholm ou des solutions approximatives pour ces équations.

Ce travail est divisé en trois chapitres

Le premier chapitre est consacré à des un généralités sur les équations intégrales (É.I) linéaires et non linéaires et son Classifications.

Le deuxième chapitre consiste à l'étude l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce et quelques méthodes analytiques de résolution de ces équations et quelques exemples.

Le troisième chapitre contient une présentation de l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégral de Fredholm.

Notations générales

. **K(x,t)** : Noyau de l'équation intégrale.

. **ess sup** : Bords supérieurs plus petits.

. **EIN** : équation intégrale non linéaire.

Chapitre 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES

1.1 INTRODUCTION

Définition 1.1 *On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration $\int$.*

C'est en général l'équation par rapport à l'inconnue φ de la forme

$$\int_E K(x, t, \varphi(t)) dt = \lambda \varphi(x) + f(x), \quad x \in E \quad (1.1)$$

où E est un espace mesuré, $f(x)$ est une fonction mesurable donnée sur E , λ est un scalaire donné qui peut être réel ou complexe, et K est une fonction mesurable sur E^3 appelée noyau de l'équation intégrale.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction φ qui satisfait l'équation (1.1).

Remarque 1.1

i) Si on prend

$$K(x, t, \varphi(t)) = K(x, t) \varphi(t),$$

l'équation (1.1) devient linéaire, sinon elle devient équation intégrale non linéaire.

ii) Le type le plus général d'une équation intégrale est

$$h(x) \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_E K(x, t, \varphi(t)) dt.$$

La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation.

iii) Notons que l'équation peut être écrite sous forme d'opérateur

$$T\varphi = \lambda\varphi + f,$$

où l'opérateur T s'écrit comme

$$T\varphi = \int_E K(x, t, \varphi(t)) dt.$$

Lemme 1.1 Soit K une fonction de l'espace $L^2([a, b[\times]a, b[)$, alors l'opérateur T défini par

$$T\varphi = \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, \quad x \in]a, b[,$$

est bien défini, en tant qu'opérateur de $L^2([a, b[)$ dans lui-même.

Lemme 1.2 Soit $K \in L^2([a, b[\times]a, b[)$. L'opérateur intégral T de noyau K est compact de $L^2([a, b[)$ dans lui-même.

Proposition 1.1 On définit la norme du noyau $K(x, y)$ pour p et q conjugués, avec $1 \leq p, q < \infty$ par

$$\|K\|_p = \begin{cases} \left[\int_E \left(\int_E |K(x, t)|^q dt \right)^{\frac{p}{q}} dx \right]^{\frac{1}{p}} & \text{pour } 1 < p < \infty \\ \int_E \operatorname{ess\,sup}_t |K(x, t)| dx & \text{pour } p = 1 \\ \operatorname{ess\,sup}_x \int_E |K(x, t)| dt & \text{pour } p = \infty. \end{cases}$$

Si on suppose que cette norme est finie

$$\|K\|_p < \infty, \tag{1.2}$$

alors, l'opérateur intégral T de noyau $K(x, t)$ envoie $L^p(E)$ dans lui-même. De plus, on a

$$\|T\varphi\| < \|K\|_p \|\varphi\|_p.$$

Preuve

Cas où $1 < p < \infty$, l'inégalité de Hölder, nous donne

$$\int_E \left(\int_E |K(x, t)| |\varphi(t)| dt \right)^p dx \leq \int_E \left[\left(\int_E |K(x, t)|^q dt \right)^{\frac{p}{q}} \right] \|\varphi\|_p^p dx = \|K\|_p^p \|\varphi\|_p^p, \tag{1.3}$$

ce qui implique que l'opérateur $T\varphi(x) = \int_E K(x, t)\varphi(t)dt$, existe presque partout, avec

$$\|T\varphi\|_p < \|K\|_p \|\varphi\|_p.$$

Cas où $p = 1$, on a

$$\int_E \int_E |K(x, t)| |\varphi(t)| dt dx \leq \int_E \operatorname{ess\,sup}_t K(x, t) dx \int_E |\varphi(t)| dt. \quad (1.4)$$

D'où

$$\|T\varphi\|_1 < \|K\|_1 \|\varphi\|_1.$$

Cas où $p = \infty$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_x |T\varphi(x)| &= \operatorname{ess\,sup}_x \left| \int_E K(x, t) \varphi(t) dt \right| \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_t \varphi(t) \operatorname{ess\,sup}_x \int_E |K(x, t)| dt. \end{aligned}$$

D'où

$$\|T\varphi\|_\infty \leq \|K\|_\infty \|\varphi\|_\infty.$$

Remarque 1.2 Pour $p = 2$, la condition (1.2) devient

$$\int_E \int_E |K(x, t)|^2 dx dt < \infty.$$

1.2 CLASSIFICATIONS DES ÉQUATIONS INTEGRALES

1.2.1 ÉQUATIONS INTEGRALES LINEAIRES

Équation intégrale de Fredholm

Définition 1.2 On appelle équation intégrale de Fredholm une équation, à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (1.5)$$

où $f(x)$, $K(x, t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe. La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

i) Si $h(x) = 0$, l'équation (1.5) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = 0. \quad (1.6)$$

Et s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

ii) Si $h(x) = u = \text{constante} \neq 0$, l'équation (1.5) s'écrit

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) dt. \quad (1.7)$$

Et s'appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

iii) Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (1.5) est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

Remarque 1.3

i) Si $f(x) = 0$, l'équation (1.5) est dite homogène.

ii) Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.5) est dite non homogène.

Équation intégrale de Volterra

Définition 1.3 On appelle équation intégrale linéaire de Volterra, une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt. \quad (1.8)$$

i) Si $h(x) = 0$, l'équation (1.8) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt = 0. \quad (1.9)$$

Et s'appelle équation intégrale de Volterra de première espèce.

ii) Si $h(x) = u = \text{constante} \neq 0$, l'équation (1.8) s'écrit

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) dt. \quad (1.10)$$

Et s'appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

iii) Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (1.8) est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

Remarque 1.4

i) Si $f(x) = 0$, l'équation (1.8) est dite homogène.

ii) Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.8) est dite non homogène.

Remarque 1.5 L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau K vérifie la condition

$$K(x, t) = 0, \text{ pour } x < t.$$

Équation intégrale d'Abel

Définition 1.4 On appelle équation intégrale linéaire d'Abel une équation de la forme

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x), \quad (1.11)$$

où α est une constante, $0 < \alpha < 1$.

Équation intégrale de Wiener-Hopf

Définition 1.5 On appelle équation intégrale de Wiener-Hopf toute équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^\infty K(x, t)\varphi(t)dt. \quad (1.12)$$

Équation intégrale de Renwal

Définition 1.6 Les équations intégrales de la forme

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^x K(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad (1.13)$$

sont appelées équations intégrales de Renwal.

1.2.2 ÉQUATIONS INTEGRALES NON LINEAIRES**Équation intégrale de Fredholm**

Définition 1.7 L'équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce prend la forme suivante

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t))dt = 0. \quad (1.14)$$

Elle est appelée *équation intégrale de Fredholm de second espèce*, de la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt = u\varphi(x), \quad (1.15)$$

où $u = \text{constante} \neq 0$. Et troisième espèce de la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt = h(x)\varphi(x). \quad (1.16)$$

Équation intégrale de Volterra

Définition 1.8 *L'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce prend la forme*

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t)) dt = 0. \quad (1.17)$$

Elle est appelée *équation intégrale de Volterra de second espèce*, de la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t)) dt = u\varphi(x), \quad (1.18)$$

et troisième espèce de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (1.19)$$

Remarque 1.6

- i) Si $f(x) = 0$, l'équation est dite *homogène*.
- ii) Si $f(x) \neq 0$, l'équation est dite *non homogène*.

Équation intégrale Hammerstein

Définition 1.9 *On appelle équation intégrale de Hammerstein une équation de la forme*

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)F(t, \varphi(t)) dt = f(x). \quad (1.20)$$

Équation intégrale Hammerstein-Volterra

Définition 1.10 *On appelle équation intégrale de Hammerstein-Volterra une équation de la forme*

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)F(t, \varphi(t)) dt = f(x). \quad (1.21)$$

Équation intégrale de Lalesco

Définition 1.11 On appelle *équation intégrale de Lalesco* une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x [k_1(x, t)\varphi(t) + k_2(x, t)\varphi^2(t) + \dots + k_n(x, t)\varphi^n(t)] dt. \quad (1.22)$$

Équation intégrale d'Abel

Définition 1.12 On appelle *équation intégrale d'Abel* une équation de la forme

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} g(\varphi(t)) dt. \quad (1.23)$$

Où $0 < \alpha < 1$ et $g : [0, \infty)$ tel que $g(0) = 0$ et $g(x) > 0$.

Équation intégrale de Bratu

Définition 1.13 L'équation intégrale non linéaire de Bratu prendre la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b G(x, t) e^{\varphi(t)} dt, \quad (1.24)$$

b est un nombre positif donné et $G(x, t)$ désigne la fonction de Green

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{(b-x)(t-a)}{(b-a)}, & t \leq x \\ \frac{(b-t)(x-a)}{(b-a)}, & t \geq x \end{cases} \quad (1.25)$$

1.2.3 ÉQUATIONS INTEGRALES SINGULIERES

Définition 1.14 On dit qu'une équation intégrale est *singulière* si l'une ou les deux limites de l'intégrale sont infinies, par exemple :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^\infty \sin(xt) \varphi(t) dt,$$

ou bien le noyau devient infini au voisinage des points de l'intégrale, par exemple :

Si le noyau $K(x, t)$ de l'équation intégrale linéaire de Fredholm est de la forme

$$K(x, t) = \frac{H(x, t)}{|x-t|^\alpha} \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Avec $H(x, t)$ une fonction bornée sur $[a, b] \times [a, b]$.

Si $\alpha = 1$ dans l'exemple précédent alors $K(x, t)$ est appelé noyau de cauchy.

Proposition 1.2 *L'équation intégrale linéaire de Winer-Hopf et l'équation intégrale non linéaire d'Abel sont des équations intégrales singulières.*

Singularité de type Volterra ou Fredholm

Définition 1.15 *On considère l'équation intégrale de deuxième espèce de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x M(x, t) K(x, t) \varphi(t) dt, \quad a \leq x < \infty, \quad (1.26)$$

où $K(x, t)$ est faiblement singulier, en général

$$K(x, t) = \begin{cases} |x - t|^{-\alpha}, & 0 < \alpha < 1, \log |x - t|. \end{cases}$$

Alors

- i) L'équation (1.26) est de Volterra.
- ii) Si $x = b$, l'équation (1.26) est de Fredholm.
- iii) Le cas où $K(x, t) = |x - t|^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ s'appelle singularité algébrique.
- iiii) Le cas où $K(x, t) = \log |x - t|$, s'appelle singularité logarithmique.

Équation intégrale de Carleman

Définition 1.16 *On appelle équation intégrale de Carleman une équation de la forme*

$$p(x) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t - x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{q(t)}{t - x} dt = f(x). \quad (1.27)$$

Où p et q sont des fonctions continues [20].

singularité de type Cauchy

Définition 1.17 *Soit D un domaine borné et connexe dans un plan complexe, alors l'intégrale de Cauchy est donné par la formule*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t - x} dt = f(x). \quad (1.28)$$

Définition 1.18 On appelle *équation intégrale de Cauchy* une équation de la forme

$$a(x)\varphi(x) + b(x) \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{x-t} dt + \int_{\Gamma} K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad (1.29)$$

telle que $\Gamma = \partial D$. Soit D un domaine borné et connexe dans un plan complexe.

1.2.4 ÉQUATIONS INTEGRALES MIXTES

Équation intégrale de Fredholm-Volterra

Définition 1.19 On appelle *équation intégrale de Fredholm-Volterra* une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x,t) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y,t)dy + \lambda \int_0^t K(t,s)\varphi(x,s)ds = f(x,t), t \in [0,T], T < \infty. \quad (1.30)$$

La fonction h détermine le type de l'équation intégrale

Équation intégrale de Volterra-Fredholm

Définition 1.20 On appelle *équation intégrale de Volterra- Fredholm* une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x,t) + \int_0^t \int_a^b K(x,t)F(t,s)\varphi(y,s)dyds = f(x,t), \quad t \in [0,T], \quad T < \infty. \quad (1.31)$$

Équation intégrale non linéaire de Hammerstein- Volterra

Définition 1.21 On appelle *équation intégrale non linéaire de Hammerstein- Volterra* une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x,t) = f(x,t + \int_a^b K(x,y)\Psi(y,\varphi(y,t))dy \int_0^t F(t,s)\varphi(x,s)ds), \quad t \in [0,T], \quad T < \infty. \quad (1.32)$$

On appelle *équation intégrale de Fredholm* une équation, à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt, \quad (1.33)$$

où $f(x)$, $K(x,t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe.

La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

i) Si $h(x) = 0$, l'équation (1.33) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0, \quad (1.34)$$

et s'appelle *équation intégrale de Fredholm de première espèce*.

ii) Si $h(x) = u = \text{constante} \neq 0$, l'équation (1.33) s'écrit

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)dt, \quad (1.35)$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

iii) Si $h(x) \neq 0$ la formule (1.33) est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

Remarque 1.7

i) Si $f(x) = 0$, l'équation (1.33) est dite homogène.

ii) Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.33) est dite non homogène.

Équation intégrale de volterra

Définition 1.22 On appelle équation intégrale linéaire de Volterra, une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt. \quad (1.36)$$

i) Si $h(x) = 0$, l'équation (1.36) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt = 0. \quad (1.37)$$

Et s'appelle équation intégrale de volterra de première espèce.

ii) Si $h(x) = u = \text{constante} \neq 0$ l'équation (1.36) s'écrit

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)dt. \quad (1.38)$$

Et s'appelle équation intégrale de volterra de seconde espèce.

iii) Si $h(x) \neq 0$ la formule (1.36) est appelée équation intégrale de volterra de troisième espèce.

Remarque 1.8

i) Si $f(x) = 0$, l'équation (1.36) est dite homogène.

ii) Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.36) est dite non homogène.

Remarque 1.9 L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau K vérifie la condition

$$K(x, t) = 0, \text{ pour } x < t.$$

1.3 Relation entre des équations différentielles linéaires et les équations intégrales de volterra

Soit

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = F(x).$$

A coefficient continus $a_i(x)$ $i = 1, 2, 3, \dots, n$, avec les condition $y(0) = C_0, y'(0) = C_1$.

Sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = F(x), \\ y(0) = C_0, y'(0) = C_1. \end{cases} \quad (1.39)$$

On pose

$$y'' = \varphi(x) \implies y' = \int_0^x \varphi(t) dt + C_1,$$

donc

$$y = \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt + C_1 x + C_0,$$

nous avons utilisé le forme de Leibniz suivant

$$\underbrace{\int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x}_{n \text{ fois}} f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t) dt,$$

en remplaçant dans l'équation (1.39), on obtient

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t)dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)dt + C_1(x)a_2(x) + C_0 a_2(x) = F(x).$$

$$\text{donc } \varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\varphi(t)dt = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_2 a_2.$$

Posont

$$K(x, t) = a_1(x) + a_2(x)(x-t) \quad f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_2 a_2 \varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt.$$

Exemple 1.1

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.40)$$

On pose

$$y'' = \varphi(x) \implies y' = \int_0^x \varphi(t) dt + C_1,$$

donc

$$y = \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt + 1,$$

en remplaçant dans l'équation (1.40), on obtient

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t) dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt + 1 = 0,$$

donc

$$\varphi(x) + \int_0^x (2x-t)\varphi(t) dt + 1 = 0.$$

Chapitre 2

ÉQUATIONS INTEGRALES DE FREDHOLM

2.1 Quelques méthodes analytiques de résolutions des équations intégrales linéaires de Fredholm

On considère l'équation intégrale de Fredholm du second espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N,$$

où Ω est un ensemble compact inclut dans $\mathbb{R}^N$, on associe l'espace $C(\Omega)$ le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx,$$

et la norme uniforme

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Le théorème de la série géométrique de Neumann

Théorème 2.1 *Soit V un espace de Banach, L un opérateur linéaire borné, $L \in \mathcal{L}(V)$ et I l'opérateur identique. Supposons que*

$$\|L\| < 1,$$

alors l'opérateur $(I - L)$ est inversible dans V et $(I - L)^{-1}$ est borné de plus

$$\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|}. \quad (2.1)$$

Preuve

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$M_n = \sum_{i=0}^n L^i \quad n \geq 0,$$

on a

$$\|M_{n+p} - M_n\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} L^i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|L^i\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|L\|^i,$$

d'où

$$\|M_{n+p} - M_n\| \leq \frac{\|L\|^n + 1}{1 - \|L\|},$$

et

$$\sup_{p \geq 1} \|M_{n+p} - M_n\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

donc la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $L(V)$, donc il existe $M \in L(V)$ tel que :

$$\|M_n - M\| \longrightarrow 0,$$

On remarque aussi

$$(I - L) M_n = M_n (I - L) = I - L^{n+1},$$

si $n \longrightarrow \infty$, on obtient

$$(I - L) M = M (I - L) = I,$$

ici $M = (I - M)^{-1} M = (I - L)^{-1}$ est la somme de la série de Neumann $\sum L^i$, il reste à montrer (2.1) puisque,

$$\|M_n\| = \left\| \sum_{i=0}^n L^i \right\| \leq \sum_{i=0}^n \|L^i\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|},$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n\| \leq \|M\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|},$$

$$\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|}.$$

Résultat

Sous les hypothèses du théorème (2.1) pour tout $f \in V$ l'équation $(I - L)^{-1} \varphi = f$ admet une solution unique dans V telle que :

$$\varphi = (I - L)^{-1} f, \quad f \in V.$$

2.2 Méthode de Fredholm

La solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (2.2)$$

est donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad (2.3)$$

ou la fonction $R(x, t, \lambda)$ est dite résolvant de Fredholm de l'équation (2.2) est définie par l'égalité

$$R(x, t, \lambda) = \frac{D(x, t, \lambda)}{D(\lambda)}, \quad (2.4)$$

sous la condition $D(\lambda) \neq 0$. Ici $D(x, t, \lambda)$ et $D(\lambda)$ sont des séries de puissances de λ

$$D(x, t, \lambda) = k(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} B_n(x, t) \lambda^n, \quad (2.5)$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} C_n \lambda^n, \quad (2.6)$$

avec les coefficients ainsi définies

$$B_n = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{bmatrix} K(x, t) & K(x, t_1) & K(x, t_2) & \dots & K(x, t_n) \\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K(t_n, t) & K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \dots & K(t_n, t_n) \end{bmatrix} dt_1 \dots dt_n, \quad (2.7)$$

et $B_0(x, t) = K(x, t)$

$$C_n = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{bmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & K(t_1, t_3) & \dots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & K(t_2, t_3) & \dots & K(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & K(t_n, t_3) & \dots & K(t_n, t_n) \end{bmatrix} dt_1 \dots dt_n. \quad (2.8)$$

Les fonction $D(\lambda)$ et $D(x, t, \lambda)$ sont respectivement le déterminant de Fredholm et le mineur du déterminant de Fredholm.

Remarque 2.1

i) Si le noyau $K(x, t)$ est borné ou si l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt < \infty,$$

les séries (2.5) et (2.6) convergent.

Quelque soit λ et sont donc des fonctions analytiques entières de λ .

ii) La résolvante

$$R(x, t, \lambda) = \frac{D(x, t, \lambda)}{D(\lambda)},$$

est une fonctions analytiques de λ , sauf les λ qui sont zéros de $D(\lambda)$ ces derniers sont poles de la résolvante $R(x, t, \lambda)$.

Exemple 2.1 A l'aide des déterminants de Fredholm trouver la résolvante du noyau

$K(x, t) = xe^t$, $a = 0$, $b = 1$, on a $B_0(x, t) = k(x, t) = xe^t$,
ensuite,

$$B_1(x, t) = \int_0^1 \begin{bmatrix} K(x, t) & K(x, t_1) \\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) \end{bmatrix} dt_1 = \int_0^1 \begin{bmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} \end{bmatrix} dt_1 = 0$$

$$B_2(x, t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} K(x, t) & K(x, t_1) & K(x, t_2) \\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) \\ K(t_2, t) & K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) \end{bmatrix} dt_1 dt_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^t & t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{bmatrix} dt_1 dt_2 = 0$$

puis les déterminants sous $\int$ sont nuls, il est évident que tous les $B_n(x, t)$ suivants sont nuls eux aussi, trouvons les coefficients C_n

$$C_1 = \int_0^1 K(t_1, t_1) dt_1 = \int_0^1 t_1 e^{t_1} dt_1 = 1,$$

$$C_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0.$$

Evidement, tous les C_n suivants sont nuls, dans notre cas, nous avons conformément aux formules (2.5), (2.6)

$$D(x, t, \lambda) = K(x, t) = xe^t \quad D(\lambda) = 1 - \lambda$$

$$R(x, t, \lambda) = \frac{D(x, t, \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{xe^t}{1 - \lambda}, \quad \lambda \neq 1$$

appliquons le résultat obtenu à l'équation intégral

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xe^t \varphi(t) dt = f(x), \quad \lambda \neq 1$$

d'après la formule (2.8),

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{x e^t}{1 - \lambda} f(t) dt,$$

en particulier, nous obtenons pour $f(x) = x e^{-x}$

$$\varphi(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1 - \lambda} x \quad \lambda \neq 1,$$

Le calcul des coefficients $B_n(x, t)$ et C_n des séries (2.5) et (2.6) par les formules (2.7) et (2.8) n'est possible que dans des cas rares, mais ces formules entraînent les relations de récurrence suivant

$$B_n(x, t) = C_n K(x, t) - n \int_a^b K(x, s) B_{n-1}(s, t) ds, \quad (2.9)$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(s, s) ds. \quad (2.10)$$

Sachant que $C_0 = 1$ et $B_0(x, t) = k(x, t)$, les formules (2.10) et (2.9) permettent de trouver de proche en proche C_1 , $B_1(x, t)$, $B_2(x, t)$, C_3 , et ainsi de suite.

2.3 Méthode des Noyaux itérés (Construction de la résolvante à l'aide des noyaux itérés)

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (2.11)$$

on pose

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x) \lambda^n, \quad (2.12)$$

avec $\Psi_n(x)$ définis par les formules

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= \int_a^b K(x, t) f(t) dt, \\ \Psi_2(x) &= \int_a^b K(x, t) \Psi_1(t) dt = \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt, \\ \Psi_3(x) &= \int_a^b K(x, t) \Psi_2(t) dt = \int_a^b K_3(x, t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Ici

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, z) K(z, t) dz,$$

$$K_3(x, t) = \int_a^b K(x, t) K_2(z, t) dz,$$

et en général

$$K_n(x, t) = \int_a^b K(x, t) K_{n-1}(z, t) dz, \quad (2.13)$$

$n = 2, 3, 4, \dots$ et $k(x, t) = K_1(x, t)$. Les fonction $K_n(x, t)$ définies par les formule (2.13) s'appellent noyau itérés, elles vérifient la relaion

$$K_n(x, t) = \int_a^b K_m(x, s) K_{n-m}(s, t) ds, \quad (2.14)$$

où m est un entier naturel quelconque inférieur à n . La résolvante de l'équation intégrale (2.11) est définie en fonction des noyaux itérés de la facon suivante

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) \lambda^{n-1}, \quad (2.15)$$

le seconde membre est la série de Neumann du noyau $K(x, t)$.

Cette série converge pour

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \quad (2.16)$$

avec

$$B = \left(\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

la solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce (2.11) s'exprime par

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda) f(t) dt. \quad (2.17)$$

La borne (2.16) est essentielle pour la convergence de la série (2.15), mais l'équation (2.11) également admettre une solution pour $|\lambda| > \frac{1}{B}$.

Exemple 2.2 Trouver les itérés du noyau $K(x, t) = x - t$, si $a = 0$ et $b = 1$.

Utilisant les formules (2.13), on obtient de proche en proche

$$K_1(x, t) = x - t,$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 (x - s)(s - t) ds = \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3},$$

$$K_3(x, t) = \int_0^1 (x - s) \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right) ds = -\frac{x-t}{12},$$

$$K_4(x, t) = \frac{1}{12} \int_0^1 (x-s)(s-t) ds = -\frac{1}{12} K_2(x, t) = -\frac{1}{12} \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right),$$

$$K_5(x, t) = -\frac{1}{12} \int_0^1 (x-s) \left(\frac{s+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right) ds = -\frac{1}{12} K_3(x, t) = \frac{x-t}{12^2},$$

$$K_6(x, t) = \frac{1}{12} \int_0^1 (x-s)(s-t) ds = \frac{K_2(x, t)}{12^2} = -\frac{1}{12} \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right).$$

Il en résulte que les noyaux itérés sont de la forme

i) pour $n = 2k - 1$

$$K_{2k-1}(x, t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}} (x - t)$$

ii) pour $n = 2k$

$$K_{2k}(x, t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}} \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right),$$

où $k = 1, 2, \dots$

2.4 Méthode des noyaux dégénérés

Le noyaux $K(x, t)$ d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce est dit dégénéré s'il est la somme d'un nombre fini de produits de fonctions de x seul par des fonctions de t seul, i.e, il est de la forme

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t), \quad (2.18)$$

les fonctions $a_k(x)$ et $b_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) seront supposées continues dans le carré fondamental $a \leq x, t \leq b$ et linéairement indépendantes. L'équation intégrale noyau dégénéré (2.18)

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t) \right] \varphi(t) dt = f(x), \quad (2.19)$$

se résout comme suit, récrivon (2.19)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) \int_a^b b_k(t) \varphi(t) dt, \quad (2.20)$$

et introduisons les notations

$$\int_a^b b_k(t)\varphi(t)dt = C_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.21)$$

L'égalité (2.20) devient

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x), \quad (2.22)$$

avec C_k des constantes inconnues (puisque la fonction $\varphi(x)$ est inconnue).

Ainsi, la résolution d'une équation intégrale noyau dégénéré se ramène. La recherche des constantes C_k ($k = 1, 2, \dots, n$) après avoir porté (2.22) dans l'équation intégrale (2.19) et effectué des calculs simples nous obtenons

$$\sum_{m=1}^n \left\{ C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(t) \right] dt \right\} a_m(x) = 0.$$

Les fonctions $a_m(x)$, ($m = 1, 2, \dots, n$) étant linéairement indépendantes, il en résulte que

$$C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(t) \right] dt = 0,$$

où

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^n C_k \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt = \int_a^b b_m(t) f(t) dt \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

Afin d'alléger l'écriture, introduisons les notations

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt, \quad f_m = \int_a^b b_m(t) f(t) dt.$$

Nous obtenons

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^n a_{km} C_k = f_m \quad (m = 1, 2, \dots, n),$$

où, sous forme développée

$$\begin{cases} (1 - \lambda C_{11})a_1 - \lambda C_{12}a_2 - \dots - \lambda C_{1n}a_n = f_1 \\ -\lambda C_{21}a_1 + (1 - \lambda C_{22})a_2 - \dots - \lambda C_{2n}a_n = f_2 \\ \vdots \\ -\lambda C_{n1}a_1 - \dots - (1 - \lambda C_{nn})a_n = f_n \end{cases} \quad (2.23)$$

pour trouver les a_k , nous avons donc un système de n équations linéaires à inconnues, dont le déterminant est

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{1n} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & -1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.24)$$

si $\Delta(\lambda) \neq 0$ le système $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ admet une solution unique (2.23), obtenue moyennant les formules des Cramer $C_k =$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{1k-1} - f_1 - \lambda a_{1k+1} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{1n} & -\lambda a_{2k-1} - f_2 - \lambda a_{2k+1} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{nk-1} - f_n - \lambda a_{nk+1} & \dots & -1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

($k = 1, 2, \dots, n$) l'équation intégral (2.19) a pour solution une fonction $\varphi(x)$ définie par l'égalité

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x),$$

avec les coefficients C_k ($k = 1, 2, \dots, n$) donnés par les formule (2.25)

Exemple 2.3 Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos(t) + t^2 \sin(x) + \cos(x) \sin(t)) \varphi(t) dt = x, \quad (2.26)$$

mettons cette équation sous la forme

$$\varphi(x) = x + \lambda x \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) \varphi(t) dt + \lambda \sin(x) \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t) dt + \lambda \cos(x) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) \varphi(t) dt,$$

et introduisons les notations

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) \varphi(t) dt, \quad C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t) dt, \quad C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) \varphi(t) dt, \quad (2.27)$$

où C_1, C_2, C_3 , sont les constantes inconnues. L'équation (2.26) a alors la forme

$$\varphi(x) = C_1 \lambda x + C_2 \lambda \sin(x) + C_3 \lambda \cos(x) + x. \quad (2.28)$$

Portons (2.28) dans les égalités (2.27), il vient

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin(t) + C_3 \lambda \cos(t) + t) \cos(t) dt,$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin(t) + C_3 \lambda \cos(t) + t) t^2 dt,$$

$$C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin(t) + C_3 \lambda \cos(t) + t) \sin(t) dt,$$

où

$$\begin{aligned} C_1 \left(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(t) dt \right) - C_2 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) \cos(t) dt - C_3 \int_{-\pi}^{\pi} -\pi \cos^2(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(t) dt, \\ -C_1 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt + C_2 \left(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(t) dt \right) - C_3 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt, \\ -C_1 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) dt - C_2 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t) dt + C_3 \left(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) \sin(t) dt \right) &= \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) dt. \end{aligned}$$

En calculant les intégrales, nous obtenons le système d'équations algébriques en C_1, C_2, C_3

$$\begin{cases} C_1 - \lambda \pi C_3 = 0, \\ C_1 + \lambda \pi C_3 = 0, \\ -2\lambda \pi C_1 - \lambda \pi C_2 + C_3 = 2\pi. \end{cases} \quad (2.29)$$

Le déterminant du système est

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi \lambda \\ 0 & 1 & 4\pi \lambda \\ -2\pi \lambda & -\lambda \pi & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda^2 \pi^2 \neq 0.$$

Le système (2.29) admet solution unique

$$C_1 = \frac{2\lambda \pi^2}{1 + \lambda^2 \pi^2}, \quad C_2 = \frac{8\lambda \pi^2}{1 + \lambda^2 \pi^2}, \quad C_3 = \frac{2\pi}{1 + \lambda^2 \pi^2}.$$

En portant dans (2.28) les valeurs obtenues C_1, C_2, C_3 nous aboutissons à la solution de l'équation intégrale donnée

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda \pi}{1 + \lambda^2 \pi^2} (\lambda \pi x - 4\lambda \pi \sin(x) + \cos(x)) + x.$$

2.5 La méthode des approximations successives (la méthode de Neumann série)

Méthode d'approximation successive qui à été appliquée avec succès aux équations intégrales de Volterra de deuxième espèce, s'applique plus facilement aux équations intégrales de Fredholm du second type

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt. \quad (2.30)$$

On pose $\varphi_0(x) = f(x)$, notez que l'approximation zéro peut être n'importe quelle fonction à valeur réelle sélectionnée $\varphi_0(x)$, $a \leq x \leq b$.

Ainsi, la première approximation $U_1(x)$ de la solution de $\varphi(x)$ est défini par

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_0(x, t) dt. \quad (2.31)$$

Deuxième approximation $\varphi_2(x)$ de la solution $\varphi(x)$ peut être obtenu en remplaçant $\varphi_0(x)$ dans l'équation (2.31) par ce qui a été précédemment obtenu $\varphi_1(x)$, on trouve donc

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_1(x, t) dt. \quad (2.32)$$

Ce processus peut être poursuivi de la même manière pour obtenir n approximation, en d'autres termes, différentes approximations peuvent être mises dans un tableau de fréquence donné par

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \text{toute fonction à valeur réelle sélective} \\ \varphi_n(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_{n-1}(x, t) dt, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Même si nous pouvons sélectionner n'importe quelle fonction à valeur réelle pour l'approximation zéro $\varphi_0(x)$, les fonctions les plus couramment sélectionnées pour $\varphi_0(x)$ sont $\varphi_0(x) = 0, 1, \text{ ou } x$. Nous avons remarqué qu'avec la sélection de $\varphi_0(x) = 0$, la première approximation $\varphi_1(x) = f(x)$. La solution finale $\varphi(x)$ est obtenu par

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x), \quad (2.34)$$

de sorte que la solution résultante $\varphi(x)$ est indépendant du choix de $\varphi_0(x)$. C'est ce qu'on appelle la méthode de Picard. La série de Neumann est obtenue si l'on pose $\varphi_0(x) = f(x)$ tel que

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_0(t) dt, \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt, \\ &= f(x) + \lambda \psi_1(x), \end{aligned}$$

où

$$\psi_1 = \int_a^b K(x, t) f(x) dt.$$

La deuxième approximation $\varphi_2(x)$ peut être obtenu

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_1(t) dt, \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(x) + \lambda \psi_1(t) dt, \\ &= f(x) + \lambda \psi_1(x) + \lambda^2 \psi_2(x), \end{aligned}$$

où

$$\psi_2(x) = \int_a^b K(x, t) \psi_1(t) dt.$$

En suivant ce chemin, la solution $\varphi(x)$ peut être obtenue

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + \lambda \psi_1(x) + \lambda^2 \psi_2(x) + \dots + \lambda^n \psi_n(x) + \dots \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \psi_n(x), \end{aligned} \tag{2.35}$$

où

$$\psi_n(x) = \int_a^b K(x, t) \psi_{n-1}(t) dt, \quad n \geq 1$$

Méthode des séries de Neumann :

$$\varphi(x) = f(x) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \lambda^k \psi_k(x)$$

Exemple 2.4 Résoudre l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^1 x \varphi(t) dt,$$

en utilisant la méthode des approximations successives.

Considérons que l'approximation zéro est $\varphi_0(x) = 1$, et alors la première approximation peut être calculée comme

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 1 + \int_0^1 x \varphi_0(t) dt \\ &= 1 + \int_0^1 x dt \\ &= 1 + x. \end{aligned}$$

La deuxième approximation $\varphi_2(x)$ est

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= 1 + \int_0^1 x\varphi_1(t)dt \\ &= 1 + \int_0^1 x(1+t)dt \\ &= 1 + x\left(1 + \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

De même, la troisième approximation est

$$\begin{aligned}\varphi_3(x) &= 1 + \int_0^1 x\varphi_2(t)dt \\ &= 1 + x \int_0^1 \left(1 + \frac{3t}{2}\right)dt \\ &= 1 + x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\varphi(x) = 1 + x \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right],$$

donc

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} x \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + x\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1} \\ &= 1 + 2x.\end{aligned}$$

Exemple 2.5 Utilisez l'approximation successive pour résoudre l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t \varphi(t) dt.$$

Considérons que l'approximation zéro est $\varphi_0(x) = 1$.

Alors, la première approximation est

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \sin x + \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \\ &= 2 \sin x.\end{aligned}$$

La deuxième approximation est

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= \sin x + \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t \cos t dt \\ &= 2 \sin x,\end{aligned}$$

on reconnaît facilement que la suite des solutions peut être écrit sans calcul

$$\varphi_1(x) = 2 \sin x,$$

$$\varphi_2(x) = 2 \sin x,$$

$$\varphi_3(x) = 2 \sin x,$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$\varphi_n(x) = 2 \sin x,$$

la solution finale est

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = 2 \sin x,$$

c'est la solution requise.

Chapitre 3

ÉTUDE L'ÉQUATION INTEGRAL DE FREDHOLM

3.1 Existence et unicité des solutions des équations intégrales de Fredholm sur le contour

$$\varphi(t_0) - \int_L K(t, t_0) \varphi(t) dt = f(t_0), \quad (3.1)$$

où L est une courbe fermée dans le plan complexe, ne se coupe pas et est donnée pour une équation

$$t = t(s), \quad a \leq s \leq b$$

avec la fonction $t(s)$ est continument dérivable et sa dérivée est pour tout différente de zéro.

Notant que, dans les applications des ces équations à différents problèmes, les relations suivantes sont connues pour jouer un rôle fondamental.

L'équation homogène

$$\varphi(t_0) - \int_L K(t, t_0) \varphi(t) dt = 0, \quad (3.2)$$

n'a qu'un nombre fini de solutions linéairement indépendantes.

L'équation homogène adjointe

$$\psi(t_0) - \int_L K^*(t, t_0) \varphi(t) dt = 0, \quad (3.3)$$

ou le même nombre de solutions linéairement indépendantes [16]. L'équation non homogène (3.1) est résoluble pour tout second membre f si et seulement si l'équation homogène adjointe (3.3) ou l'équation homogène (3.1) n'a pas de solution différent de zéro [5].

- La soluabilité de l'équation non homogène (3.1) est donnée par la nécessaire et conditions suffisantes

$$\int_L f(t)\varphi_k(t)dt = 0, \quad (3.4)$$

où les fonctions $k(t)$ forment un système de solutions linéairement indépendantes des solutions de l'équation homogènes (3.1), l'opérateur intégral S défini par

$$S\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt, \quad (3.5)$$

est bornné dans tous les espaces de Holder $C^\alpha(L)$, $0 < \alpha < 1$, chaque fois que la fonction $\varphi(t)$ vérifie la condition de Holder sur la courbe L

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq M|t - t_0|^\alpha, 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.6)$$

Soit $a(t)$ fonction dans $C^\alpha(L)$

$$(aS - Sa)\varphi = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{a(t_0) - a(t)}{t - t_0} \varphi(t) dt, \quad (3.7)$$

est compact de $C^\alpha(L)$ en $C^\alpha(L)$.

En effet, puisque la fonction $a(t)$ dans $C^\alpha(L)$, puis le noyau $\frac{a(t_0) - a(t)}{t - t_0}$.

Corollaire 3.1 *La propriété de la comacité est appréciée par l'opérateur plus général*

$$\frac{p(t, t_0) - q(t, t_0)}{t - t_0} \varphi(t) dt,$$

si les fonctions $p(t, t_0)$ et $q(t, t_0)$, sont de classe Holder dans les deux variables.

En particulier l'opérateur du commutateur $(aT - Ta)\varphi$, où l'opérateur T est donné par

$$T\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{K(t, t_0)}{t - t_0} \varphi(t) dt,$$

est également compact de $C^\alpha(L)$ dans $C^\alpha(L)$.

Principaux résultats

Soit $K(t, t_0)$ une fonction dans $C^\alpha(L)$ satisfait la condition de Hôlder pour les deux variables, puis l'équation (3.1)

$$\varphi(t_0) - \int_L K(t, t_0)\varphi(t)dt = f(t_0),$$

admet une solution unique dans l'espace $C^\alpha(L)$ pour tout deuxième nombre $f(t)$ dans $C^\alpha(L)$

3.2 Trouve des solutions continues pour les équations intégrales non linéaires

Les équations intégrales non linéaires (EIN) ont été étudiées par de nombreux auteurs dans la littérature. Dans cette note, nous intéressons à l'étude de l'existence de solutions continues à l'équation intégrale non linéaire de Fredholm,

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t, \varphi(t))dt, \quad -\infty < a \leq x \leq b < +\infty \quad (3.8)$$

où $f(\cdot) \in C([a, b])$. Habituellement, la preuve de l'existence d'une solution de (3.8), commence par certaines conditions sur la fonction $k(x, t, \varphi)$, ainsi que les limites d'intégration a, b et la fonction $f(\cdot)$. Sur la base de ces conditions, un espace de Banach est choisi de telle manière que le problème d'existence est converti en un problème de point fixe pour un opérateur sur cet espace de Banach. Dans la première partie de ce travail, nous étudions deux cas d'Éq (3.8). Dans le premier cas, on utilise des conditions sur la fonction $k(x, t, \varphi)$ et nous exigeons que $k(x, t, \varphi)$ être borné. Ensuite, nous utilisons le théorème du point fixe de Schaefer [11] et prouvons l'existence d'une solution appartenant à $C([a, b])$.

Dans le second cas, on remplace la condition forte qui $k(x, t, \varphi)$ est bornée par une condition plus faible. Démontrer l'existence d'une solution continue de (3.8) dans ce cas, nous introduisons une nouvelle norme sur l'espace $C([a, b])$ et utiliser le théorème du point fixe de Schauder. Dans la deuxième partie de ce travail, nous étudions l'équation de Volterra non linéaire suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t, \varphi(t))dt, \quad -\infty < a \leq t < +\infty \quad (3.9)$$

où $f(\cdot) \in C([a, b])$. L'outil principal dans la preuve de l'existence d'une solution de (3.9) est le principe de Leray-Schauder combiné avec l'inégalité de Gronwall. De plus, nous prouvons l'unicité de la solution de (3.9) en montrant qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que T^n soit une contraction sur une boule fermée de $C([a, b])$ contenant les solutions possibles de (3.9). Cette note est organisée comme suit. Nous donnons quelques préliminaires sur les opérateurs complètement continus sur les espaces de Banach, les théorèmes du point fixe de Schaefer et Schauder et les théorèmes de Leray-principe Schauder. Ces préliminaires sont utilisés dans les preuves des différents résultats d'existence. De plus, nous prouvons l'existence de solutions continues de (3.8). Nous étudions l'existence et unicité de la solution de l'équation de Volterra non linéaire (3.9).

3.2.1 Existence de solutions continues de EIN

Pour prouver l'existence des résultats de ce travail, nous avons besoin des définitions et des théorèmes suivants.

L'outil principal dans la preuve d'existence d'une solution de (3.8) est le théorème du point fixe de Schaefer. Depuis ce théorème est basé sur le concept d'opérateurs complètement continus sur un espace de Banach, nous avons besoin la définition suivante d'opérateurs complètement continus.

Définition 3.1 Soit X un espace de Banach, un opérateur $T : X \longrightarrow X$ est dit totalement borné si pour tout sous-ensemble borné S de X , $T(S)$ est compacte.

De plus, T est dit totalement continu sur X s'il est continu et totalement borné sur X .

Puisque notre aire de Banach est $C([a, b])$, la version suivante du théorème d'Ascoli-Arzelà est très utile.

Théorème 3.1 Soit X un espace de Hausdorff compact, si F est un sous ensemble équicontinu et borné ponctuellement de $C(X)$, alors F est totalement borné.

A ce stade, nous sommes prêts à énoncer le théorème de point fixe de Schaefer suivant qui sera utilisé pour prouver un résultat d'existence pour le premier cas de (3.8).

Théorème 3.2 Soit X un espace de Banach et soit $T : X \longrightarrow X$ un opérateur complètement continu, ensuite soit :

- i) L'équation de l'opérateur $x = x\lambda Tx$ a une solution pour $\lambda = 1$.
- ii) L'ensemble $\varepsilon = \{x \in X; x = \lambda Tx, \lambda \in]0, 1[\}$ est sans limite.

Comme on le verra dans le paragraphe suivant, l'existence d'une solution du second cas de (3.8) peut être obtenue par l'utilisation du théorème du point fixe de Schauder.

Ce théorème est donné comme suit.

Théorème 3.3 Soit K un sous-ensemble fermé, convexe et borné d'un espace de Banach X . Si $T \in C(K, K)$, alors T a au moins un point fixe.

L'existence d'une solution de (3.9) se fait par l'utilisation du principe de Leray-Schauder donné par le théorème suivant

Théorème 3.4 Soit $(X, |\cdot|)$ un espace de Banach et supposons que $T \in C(X, X)$. Supposons que toute solution x de $x = \lambda Tx$, $0 \leq \lambda \leq 1$, satisfait la borne a priori $|x| \leq M$ pour une constante $M > 0$, alors T a un point fixe.

Résultats d'existence pour (EIN)

Notre premier résultat d'existence est donné par le théorème suivant

Théorème 3.5 *Considérez l'équation intégrale non linéaire de Fredholm*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt, \quad -\infty < a \leq b < +\infty, \quad (3.10)$$

où $f(\cdot) \in C([a, b])$. Supposons que la fonction $K(x, t, \varphi)$ vérifie les conditions suivantes

$$\sup \left(|K(x, t, \varphi)|, \left| \frac{\partial K}{\partial x}(x, t, \varphi) \right| \right) \leq V_1(x)V_2(t)\phi(|\varphi|), \quad \left| \frac{\partial K}{\partial \varphi}(x, t, \varphi) \right| \leq V_1(x)V_2(t)\psi(|\varphi|) \quad (3.11)$$

où $V_1(\cdot) \in C([a, b])$, $V_1(\cdot) \in L^1[a, b]$, $\phi(\cdot)$ est positif et borné sur $[0; +\infty[$, et $\psi(\cdot)$ est positif et continu sur $[0; +\infty[$. Dans les conditions ci-dessus, l'éq (3.10) admet une solution dans $C([a, b])$.

Preuve

On définit d'abord l'opérateur T sur $C([a, b])$ par

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt.$$

la démonstration du théorème se décompose en deux étapes,

Première étape

Dans cette étape, nous prouvons que $T : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ est continue. Nous montrons d'abord que $T\varphi \in C([a, b])$, chaque fois que $\varphi(\cdot) \in C([a, b])$. Soit $(x_n)_n$ être une suite dans $C([a, b])$ convergeant vers x

$$|T\varphi(x_n) - T\varphi(x)| \leq |f(x_n) - f(x)| + \int_a^b |K(x_n, t, \varphi(t)) - K(x, t, \varphi(t))| dt, \quad (3.12)$$

et

$$|K(x_n, t, \varphi(t)) - K(x, t, \varphi(t))| \leq |K(x_n, t, \varphi(t))| + |K(x, t, \varphi(t))| \leq [V_1(x_n) + V_1(x)] V_2(t) \phi(|\varphi(t)|)$$

$$\leq 2\|V_1\|_\infty V_2(t) \sup_{u \geq 0} |\phi(u)| = 2\|V_1\|_\infty V_2(t) M_\phi \in L^1([a, b]),$$

puis en utilisant la continuité de $K(x, t, \varphi)$ et en appliquant le théorème de convergence dominée à (3.12), on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |T\varphi(x_n) - T\varphi(x)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_n) - f(x)| + \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} |K(x_n, t, \varphi(t)) - K(x, t, \varphi(t))| dt = 0.$$

Et donc $T\varphi(.) \in C([a, b])$ Prouvons ensuite que l'opérateur T est continu sur $C([a, b])$ soit $(\varphi_n)_n \in C([a, b])$ une suite convergeant uniformément vers $\varphi(.)$ puisque $C([a, b])$ est complet, donc $\varphi(.) \in C([a, b])$. Suivante, $\forall t \in C([a, b])$,

$$\begin{aligned} |T\varphi_n(x) - T\varphi(x)| &\leq \int_a^b |K(x, t, T\varphi_n(t)) - K(x, t, T\varphi(t))| dt \\ &\leq \int_a^b |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \left\| \frac{\partial k}{\partial \varphi}(x, t, \theta_t \varphi_n(t) + (1 - \theta_t)\varphi) \right\| dt, \quad 0 < \theta_t < 1, \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \|V_1\|_\infty \int_a^b V_2(t) \psi(|\theta_t \varphi_n(t) + (1 - \theta_t)\varphi|) dt. \end{aligned}$$

Puisque $\varphi_n(.)$ converge uniformément vers $\varphi(.) \in C([a, b])$, alors $\forall t \in [a, b]$, $|\theta_t \varphi_n(t) + (1 - \theta_t)\varphi|$ est contenu dans un ensemble compact Y de $[0; +\infty[$ de plus, puisque $\psi(.)$ est continue sur $[0; +\infty[$, alors il existe une constante M_ψ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in [0, 1]$ nous avons,

$$\psi(|\theta_t \varphi_n(t) + (1 - \theta_t)\varphi|) \leq M_\psi.$$

En combinant les deux inégalités précédentes, on conclut que

$$\|T\varphi_n - T\varphi\| \leq \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \|V_1\|_\infty \|V_2\|_1 M_\psi,$$

ou de manière équivalente, l'opérateur T est continu sur l'espace de Banach $C([a, b])$.

Deuxième étape

Dans cette étape, nous prouvons que T admet un point fixe dans $C([a, b])$ en appliquant le théorème du point fixe de Schaefer. Nous montrons d'abord que T est totalement borné, par le théorème d'Ascoli-Arzelà, nous n'avons qu'à prouver $F = \{T\varphi_n; n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue et bornée pour toute suite uniformément bornée $(x_n)_n$ de $C([a, b])$, depuis

$$|T\varphi_n(x) - T\varphi_n(\tau)| = |f(x) - f(\tau) + \int_a^b K(x, t, \varphi_n(t)) - K(\tau, t, \varphi_n(t))| dt$$

$$\leq |f(x) - f(\tau)| + \int_a^b |x - \tau| \left\| \frac{\partial k}{\partial x}(x + \theta_x(\tau - x), t, \varphi_n(t)) \right\| dt, \quad 0 < \theta_x < 1$$

$$\leq |f(x) - f(\tau)| + |x - \tau| \|V_1\|_\infty \|V_2\|_1 M'_\psi,$$

alors F est équicontinue de plus, il est clair que F est bornée si $(x_n)_n$ est bornée. Donc F est totalement bornée et, par conséquent, T est totalement bornée sur $C([a, b])$. Comme nous avons déjà montré que T est continue, nous concluons que T est complètement continue sur $C([a, b])$. Enfin, définissons l'ensemble ε par $\varepsilon = \{x \in C([a, b]), \exists \lambda \in]0; 1[; x = \lambda Tx\}$ on montre que ε est borné Soit $u(.) \in \varepsilon$.

Alors, $\forall x \in [a; b]$, nous avons

$$\begin{aligned} |U(x)| &= |\lambda TU(x)| \leq |f|_\infty + \int_a^b |K(x, t, U(t))| dt \\ &\leq |f|_\infty + \|V_1\|_\infty \|V_2\|_1 \sup_{z \geq 0} |U(z)| \\ &\leq |f|_\infty + \|V_1\|_\infty \|V_2\|_1 M_\phi. \end{aligned}$$

L'ensemble ε est donc borné. Enfin, en appliquant le théorème du point fixe de Schaefer, on conclut que T a un point fixe dans $C([a, b])$ ou, de manière équivalente, (3.10) a une solution continue sur $[a; b]$.

La condition (3.11) avec $\phi(\cdot)$ borné est une limitation du théorème (3.5). Néanmoins, en utilisant une nouvelle norme pratique $\|\cdot\|_\mu$ et le théorème du point fixe de Schauder, on peut étendre le résultat du théorème précédent à des équations intégrales non linéaires plus générales sous des conditions. C'est l'objet du théorème suivant

Théorème 3.6 *Considérez l'équation intégrale non linéaire*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt, \quad -\infty < a \leq x \leq b < +\infty. \quad (3.13)$$

Supposons que $f(\cdot)$ est bornée et que $k(x, t, \varphi)$ satisfait les conditions suivantes

$$|K(x, t, \varphi)| \leq V_1(x)V_2(t)\phi(\varphi), \quad \left| \frac{\partial k}{\partial \varphi}(x, t, \varphi) \right| \leq V_1(x)V_2\psi(|\varphi|), \quad (3.14)$$

où $V_1(\cdot)$ est une fonction positive mesurable et bornée, $\phi(\cdot)$ est une fonction positive et mesurable vérifiant la condition

$$\sup_{z \geq 0} \frac{\phi(z)}{z} = L < +\infty, \quad (3.15)$$

et $\psi(\cdot)$ est une fonction positive et continue sur $[0, +\infty[$. De plus, supposons qu'il existe une fonction continue et strictement positive $\mu(\cdot)$ satisfaisant la condition suivante

$$\|V_1 \cdot \mu\|_\infty \left\| \frac{V_2}{\mu} \right\| < \frac{1}{L}. \quad (3.16)$$

Dans ces conditions, l'équation intégrale non linéaire (3.13) a une solution dans $C([a, b])$

Résumé

Dans cette note, nous avons mentionné les types d'équations intégrales, linéaires et non linéaires, et nous avons étudié l'équation intégrale de Fredholm, l'existence et l'unicité de sa solution, ainsi que les méthodes pour la résoudre.

Bibliographie

- [1] Adomian G., Solving Frontier Problem : The Decomposition Method, Kluwer : Dordrecht, **(1994)**.
- [2] Adomian G., Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press : San Diego, CA, **(1986)**.
- [3] Adomian G. A., review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equation, Math. Comput. Modelling, 13(7), pp. 17-43, **(1992)**.
- [4] Adomian G., and Rach. R, Noise terms in decomposition series solution, Computers Math. Appl.24(11), pp. 61-64, **(1992)**.
- [5] Atkinson K. E., "The numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind" SIAM J. 4, 337-348, **(1967)**
- [6] Burton T.A, and Mackey G., Continuity, compactness, fixed points and integral equations, Electron. J.Qual. Theory Differ. Equ. 14, **(2002)**.
- [7] Cherruault Y., Saccomandi G., and Some B., New results for convergence of Adomian's method applied to integral equations, Mathl. Comput. Modelling 16(2), pp. 85-93, **(1993)**.
- [8] Cherruault Y., and Adomian G., Decomposition methods : A new proof of convergence, Mathl. Comput. Modelling 18(12), pp. 103-106, **(1993)**.
- [9] Corduneanu C., Abstract Volterra equations and weak topologies, in delay differential equations and dynamical systems, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, **(1990)**.
- [10] Corduneanu C., Integral Equations and Applications, Cambridge University Press, New York, **(1990)**.
- [11] GUESBA M., Mémoire Magister sur quelques Équations intégrales non linéaires, Université Kasdi Merbah Ouargla Institut Des Sciences et Technologie, **(2012)**
- [12] Karoui A., Existence and approximate solutions of some nonlinear integral equations, Archiv. Inequal. Appl.(in press).
- [13] Lovitt W.V., Linear Integral Equations, Dover : New York, **(1950)**.

- [14] Lighthill M.J., Fourier Analysis and Generalised Functions, Cambridge University Press : Cambridge, **(1964)**.
- [15] Lovitt W.V., Linear Integral Equations, Dover Publications Inc : New York, **(1950)**.
- [16] Nadir M., and Lakehali B., "An approximation of singular integrals FENDERGISI (EDERGI) 2(2), 236-240, **(2007)**.
- [17] Okecha G.E., "Evaluating Singular Integrals Of Cauchy Type Using A Modified Gaussian Rule". Int. J. of Computer Mathematics, 19, 85 - 92, **(1986)**.
- [18] Piaggio H.T.H., An Elementary Treatise on Differential Equations and their Applications, G. Bell and Sons, Ltd. London, **(1920)**.
- [19] Smart D.R., Fixed Point Theorems, Cambridge University Press, New York, **(1980)**.
- [20] Rahman M., Applied Differential Equations for Scientists and Engineers, Vol. 1 : Ordinary Differential Equations, WIT Press : Southampton, **(1994)**.
- [21] Rahman M., Mathematical Methods with Applications, WIT Press : Southampton, UK, **(2000)**.
- [22] Tricomi F.G., Integral Equations, Interscience : New York, **(1957)**.
- [23] Terbeche M., Constantin, Sacaliuc and Galina, Vornicescu, Solution of some singular integral equation, Bull. Sci. math. 126 p379, **(2002)**.
- [24] Wazwaz A.M., A First Course in Integral Equations, World Scientific : Singapore, **(1997)**.
- [25] Wylie C.R., and Barrett L.C., Advanced Engineering Mathematics, McGrawHill : New

ملخص

يهدف هذا البحث إلى دراسة وتصنيف مفاهيم المعادلات التكاملية التي يعتبر حلها ذا أهمية في العديد من التطبيقات العلمية، اعتمادًا على نوع النواة التي يعتمد عليها الحل ودراسة بعض الأساليب التحليلية لحل معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني ، يتم تطبيق بعض الأساليب التحليلية لإيجاد الحل الصحيح ، لأن الطرق التحليلية التي نحصل من خلالها على الحل التحليلي ، تم التركيز على الحلول التحليلية لمعادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني نظرًا لنطاقها العلمي الواسع

الكلمات المفتاحية:

معادلات فريدهولم التكاملية، معادلات فريدهولم التكاملية غير الخطية، معادلات فريدهولم التكاملية المتجانسة، معادلات فريدهولم التكاملية غير المتجانسة.

résumé

Cette recherche vise à étudier et classer les concepts d'équations intégrales dont la solution est d'importance dans de nombreuses applications scientifiques.

En fonction du type de noyau dont dépend la solution et de l'étude de certaines méthodes analytiques pour résoudre l'équation intégrale de Friedholm du second type, certaines méthodes analytiques sont appliquées pour trouver la solution correcte, car les méthodes analytiques ont prouvé leur existence et leur unicité. de la solution.

Méthodes analytiques par lesquelles nous obtenons la solution analytique, l'accent a été mis sur les solutions

analytiques de l'équation intégrale de Fredholm du second type en raison de sa large portée scientifique.

Mots clés :

Équations intégrales de Fredholm, équations intégrales de Fredholm non linéaires, équations intégrales de Fredholm homogènes, équations intégrales de Fredholm non homogènes.

Abstract

This research aims to study and classify the concepts of integral equations whose solution is of importance in many scientific applications.

Depending on the type of kernel on which the solution depends and the study of some analytical methods to solve the Fredholm integral equation of the second type, some analytical methods are applied to find the correct solution, because the analytical methods have proven their existence and their uniqueness. of the solution.

Analytical methods by which we obtain the analytical solution, emphasis has been placed on the analytical solutions of the Fredholm integral equation of the second kind due to its wide scientific scope

Keywords:

Nonlinear Fredholm Integral equations, Nonlinear Fredholm integral equations, Homogeneous Fredholm integral equations, Non-homogeneous Fredholm integral equations.