



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Analyse Mathématique d'un Problème de Contact avec
adhésion et frottement en Electro-élasticité**

Présenté par: Abbassi Sabrina
Lakhen Mebarka

Soutenu le: 05/06/2018, devant le jury composé de

Douib Bachir	M.A.A	Président	Univ. El Oued
Tedjani Hadj Ammar	M.C.A	Rapporteur	Univ. El Oued
Said Amer Meziene	M.A.A	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Dédicaces

Nous dédions ce travail à :

Nos chers parents

Nos frères et nos sœurs

Nos amies

Et à tous nos familles.

Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier « Allah » le tous puissant, pour nous avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.

*Comme nous tenons à remercier vivement, encadreur de mémoire **Dr.Hadj Ammar Tedjani** pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi le soutien très précieux tout au long de ce travail.*

Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.

Enfin que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail vous nos remerciements.

Table des matières

Introduction	iv
Notations générales	vii
1 Préliminaires	1
1.1 Formulation mathématique d'un problème de contact	1
1.1.1 Cadre physique	1
1.1.2 Modèle mathématique	3
1.1.3 Loi de comportement piézoélectrique	3
1.1.4 Conditions aux limites	5
1.1.5 Lois de contact avec frottement	6
1.1.6 Lois de contact avec frottement et adhésion	8
1.1.7 Formulation mathématique des problèmes de contact	10
1.2 Rappels d'analyse	11
1.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert	11
1.2.2 Espaces de Sobolev	11
1.2.3 Espaces fonctionnels	13
1.2.4 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	16
1.2.5 Lemme de Gronwall	18
2 Problème de Contact avec adhésion et frottement en électro-élasticité	20
2.1 Formulation du problème	20
2.2 Formulation variationnelle	24
2.3 Existence et unicité de la solution	31
Conclusion générale	41
Bibliographie	42

Introduction générale

Les problèmes de contact avec ou sans frottement impliquant des corps déformables ou non interviennent de multiples façons aussi bien dans le domaine industriel que dans la vie de tous les jours.

Un progrès considérable a été réalisé récemment dans la modélisation et l'analyse mathématique des différents processus impliqués dans le contact entre corps déformables et par conséquent, une Théorie Mathématique générale de la Mécanique du Contact (MTCM) est actuellement émergée. Elle est concernée par les structures mathématiques qui sont à la base des problèmes de contact avec des lois constitutives différentes, c'est à dire, différents matériaux, diverses géométries et des conditions de contact différentes ; voir par exemple [16], [17].

Une littérature technique vaste, principalement dans l'ingénierie mais aussi dans la géophysique, couvre le contact avec ou sans frottement. Dans la géophysique, la littérature se concentre sur le mouvement des plaques tectoniques, particulièrement sur les tremblements de terre. Les publications qui traitent des problèmes de contact avec frottement sont très nombreuses, voir à titre d'exemples [1], [3]. D'autres travaux ont considéré des conditions de contact du type complaisance normale avec frottement, comme dans [2], [12]. Le but est de fournir un contexte clair et rigoureux à la construction des modèles mécaniques de contact, la preuve des résultats d'existence et d'unicité et l'établissement de la régularité de la solution. Une fois l'existence, l'unicité et la régularité de solutions Sont établis, des questions importantes surgissent, comme l'analyse mathématique des solutions et comment construire des algorithmes fiables et efficaces pour leur simulations numériques.

En mécanique et en physique, l'adhésion est l'ensemble des phénomènes physico-chimiques qui se produisent lorsque l'on met en contact intime deux matériaux, dans le but de créer une résistance mécanique à la séparation. Une fois le contact établi,

l'énergie nécessaire pour éviter la séparation s'appelle énergie d'adhésion. Elle ne doit pas être confondue avec l'adhérence, qui est au contraire la force nécessaire pour réaliser cette même séparation. L'adhésion est soit directe (elle a lieu uniquement pour des matériaux très lisses et extrêmement propres (mica ou silicium par exemple), soit médiée par un matériau intermédiaire. L'importance accrue des processus d'adhésion dans les montages industriels a attiré l'attention des chercheurs ces derniers temps, ce qui enrichit les études et la littérature mathématique sur ce sujet. Pour modéliser le phénomène d'adhésion, quand l'assemblage n'est pas permanent et les matériaux composites pouvant subir un décollement sous l'effet des tensions, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact. En se basant sur les idées de M. Frémond [[7], [8]], l'idée est d'introduire une variable interne de surface appelée champ d'adhésion, qui prend ses valeurs entre zéro et un et qui décrit la densité fractionnaire des liens actifs sur la surface de contact.

Les matériaux piézoélectriques ont été découverts au début du siècle par les époux Curie. Ce sont des diélectriques particuliers qui permettent de transformer l'énergie de déformation élastique en énergie électrique, et inversement. Plus précisément, la piézoélectricité est la capacité de certains matériaux à se polariser lorsqu'ils sont contraints mécaniquement, la charge apparaissant à leur surface étant proportionnelle à la déformation engendrée. L'effet piézoélectrique inverse est l'obtention d'une déformation par application d'un champ électrique.

Les matériaux piézoélectriques sont très nombreux. Le plus connu est sans doute le quartz, toujours utilisé dans les montres pour générer des impulsions d'horloge. Mais ce sont des céramiques synthétiques, les PZT (plomb, zirconate, titanate) qui sont le plus largement utilisées aujourd'hui dans l'industrie.

De manière plus générale, l'effet direct peut être mis à profit dans la réalisation de capteurs (capteur de pression etc.) tandis que l'effet inverse permet de réaliser des actionneurs (injecteurs à commande piézoélectrique en automobile, nanomanipulateur).

L'utilisation de la piézoélectricité a explosé ces dernières années et est en pleine expansion. La capacité de ces matériaux à convertir l'énergie mécanique en énergie électrique et vice versa est une valeur inestimable pour les transducteurs acoustique, l'échographie médicale, et pour la haute précision des pompes et des moteurs. Des performances piézoélectriques élevées ont également ouvert de nouvelles possibilités de "récupération d'énergie", en utilisant le mouvement ambiant et les vibrations pour

produire de l'électricité où les piles ou autres sources d'énergie sont impraticables ou indispensables [4], [6].

Le mémoire comporte deux chapitres et est structurés de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique des problèmes à étudier. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions d'un problème de contact électro-élastique avec adhésion et frottement. Nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution en utilisant des techniques de point fixe.

Notations générales

\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels,
\mathbb{R}	l'ensemble des nombres réels,
c	Constante réelle strictement positive,
i.e	C'est à dire,
$\partial_i \psi$	La dérivée partielle de ψ par rapport à la i^{eme} composante x : $\partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$,
$\nabla \psi$	Gradient de l'application ψ : $\nabla \psi = (\partial_1 \psi, \dots, \partial_d \psi)$,
\mathbb{S}^d	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$,
$\text{Div} \psi$	Divergence de l'application, ψ : $\text{Div} \psi = \partial_1 \psi + \dots + \partial_d \psi$,
$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de X,
$\ \cdot \ _X$	la norme de X,
p.p.	Presque partout,
Ω^ℓ	Ouvert de \mathbb{R}^d , parfois domaine L'hertzien,
$\bar{\Omega}^\ell$	l'adhérence de Ω^ℓ ,
Γ^ℓ	La frontière de Ω^ℓ : $\Gamma^\ell = \partial \Omega^\ell$,
Γ_i^ℓ	Les parties de frontière Γ^ℓ , ($i = 1, 2, 3$) ,
$mes \Gamma_i^\ell$	Mesure de Lebesgue ($d - 1$) dimensionnelle de Γ_i^ℓ ,
$d\Gamma_i^\ell$	Mesure superficielle sur Γ_i^ℓ ,
ν^ℓ	la normale unitaire sortante à Γ^ℓ ,
v_ν^ℓ, v_τ^ℓ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v_ν^ℓ défini sur $\bar{\Omega}^\ell$,
$L^2(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx < +\infty$,
$\ \cdot \ _{L^2(\Omega^\ell)}$	La norme de $L^2(\Omega^\ell)$ définie par $\ u^\ell \ _{L^2(\Omega^\ell)} = (\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que, $\exists c > 0 : u^\ell < c$, p.p., sur Ω^ℓ ,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	L'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^ℓ ,
H_{Γ^ℓ}	L'espace $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell))^d$,
H'_{Γ^ℓ}	l'espace dual de H_{Γ^ℓ} .

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C([0, T]; \mathbb{H})$	L'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans \mathbb{H} ,
$C^1([0, T]; \mathbb{H})$	L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans \mathbb{H} ,
$L^p([0, T]; \mathbb{H})$	L'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans \mathbb{H} ,
$\ \cdot\ _{L^p([0, T]; \mathbb{H})}$	La norme de $L^p([0, T]; \mathbb{H})$,
$W^{k,p}([0, T]; \mathbb{H})$	L'espace de Sobolev de paramètres k et p ,
$\ \cdot\ _{W^{k,p}([0, T]; \mathbb{H})}$	La norme de $W^{k,p}([0, T]; \mathbb{H})$,
$\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$	L'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2 ,
u^ℓ	Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω^ℓ , on écrit u_i^ℓ les composantes du vecteur dans la base canonique,
σ^ℓ	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^ℓ , on écrit σ_i^ℓ les composantes du tenseur dans la base canonique,
σ_ν^ℓ	normale des contraintes à la frontière du domaine : $\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell$,
σ_τ^ℓ	le composante tangentielle du champ tensoriel σ^ℓ ,
φ^ℓ	Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
β	Vecteurs d'adhésion sur la surface de contact Γ_3 ,
D^ℓ	Valeurs des déplacements électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
$\dot{u}^\ell, \ddot{u}^\ell$	Les dérivées première et seconde de u^ℓ par rapport au temps,
$\varepsilon(u^\ell)$	Tenseur linéarisé des déformations : $\varepsilon(u^\ell)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^\ell + \partial_j u_i^\ell)$,

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on commence par définir le cadre physique, une loi de comportement d'un matériau électro-élastiques, les conditions aux limites de contact avec frottement, avec ou sans adhésion ainsi que la formulation électro-mécanique de problème à étudier. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, et les théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

1.1 Formulation mathématique d'un problème de contact

1.1.1 Cadre physique

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique et un modèle mathématique de problème utilisés dans ce mémoire. Ensuite, nous indiquerons les formulations mathématiques pour le problème de contact avec frottement et adhésion entre deux corps électro-élastiques.

Nous considérons deux corps matériels déformables qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$ ($\ell = 1, 2; d = 2, 3$), avec une frontière régulière $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$, partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3^\ell$, correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0, \text{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$. On note par ν^ℓ la normale unitaire sortante à Γ^ℓ . Le corps Ω^ℓ est encasté sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ et agissent des forces volumiques de densité f_0^ℓ et des charges électriques de densité volumiques q_0^ℓ .

Nous supposons que f_2^ℓ et f_0^ℓ varient très lentement par rapport au temps. Les corps sont soumis à l'action de potentiel nul sur la partie Γ_3 et ils sont en contact avec frottement avec ou sans adhésion avec un obstacle sur la partie Γ_3 . Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question.

Avant d'obtenir les modèles mathématiques qui correspondent aux cadres physiques présentés, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de ce mémoire.

Nous désignons par \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), " \cdot " et $|\cdot|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell &= u_i^\ell \cdot v_i^\ell, & \|\mathbf{v}^\ell\| &= (\mathbf{v}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell &= \sigma_i^\ell \cdot \tau_i^\ell, & \|\boldsymbol{\tau}^\ell\| &= (\boldsymbol{\tau}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

Pour chaque élément $\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell$, nous notons par v_ν^ℓ et \mathbf{v}_τ^ℓ les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par

$$v_\nu^\ell = \mathbf{v}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \mathbf{v}_\tau^\ell = \mathbf{v}^\ell - v_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell. \quad (1.1)$$

Nous désignons par $\boldsymbol{\sigma}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell(x, t)$ le champ des contraintes, par $\mathbf{u}^\ell = \mathbf{u}^\ell(x, t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(\mathbf{u}^\ell)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \bar{\Omega}^\ell$ et $t \in [0, T]$.

Pour un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ nous dénotons par σ_ν^ℓ et $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell$ les composantes normale et tangentielle à la frontière données par

$$\sigma_\nu^\ell = (\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell) \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell - \sigma_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell. \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell) \cdot \mathbf{v}^\ell = \sigma_\nu^\ell v_\nu^\ell + \boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell \cdot \mathbf{v}_\tau^\ell, \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans l'établissement des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

1.1.2 Modèle mathématique

Notons que le point au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u}^\ell = \frac{du^\ell}{dt}, \ddot{u}^\ell = \frac{d^2u^\ell}{dt^2}.$$

où \dot{u}^ℓ désigne le champ des vitesses et \ddot{u}^ℓ désigne le champ des accélérations.

Les fonctions inconnues du problème sont les champs des déplacements $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, $\ell = 1, 2$. Notons la densité de la masse $\rho^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{R}_+$ et la densité des forces volumiques $f_0^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ l'évolution du corps est décrite par l'équation du mouvement de Cauchy :

$$\text{Div}\boldsymbol{\sigma}^\ell + f_0^\ell = \rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (1.4)$$

Les processus d'évolution modélés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier : par exemple dans le cas où $\dot{\mathbf{u}}^\ell = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesse $\dot{\mathbf{u}}^\ell$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell$ peut être négligé (processus quasi statiques). Dans ces deux cas l'équation du mouvement devient :

$$\text{Div}\boldsymbol{\sigma}^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T]. \quad (1.5)$$

L'équation équivaut à d relation scalaires, et mathématiquement cette équation ne suffit par à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple les d composantes \mathbf{u}_i^ℓ du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation.

A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir le champ de déplacement électrique les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques :

$$\text{div}\mathbf{D}^\ell = q_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (1.6)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\text{div}\mathbf{D}^\ell = \mathbf{D}_{i,i}^\ell$, et q_0^ℓ représente la densité des charges électriques volumiques sur Ω^ℓ .

1.1.3 Loi de comportement piézoélectrique

Nous considérons deux corps piézoélectriques qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$ ($\ell = 1, 2$; $d = 2, 3$) avec une surface frontière régulière et de Lipschitz Γ^ℓ sub-

divisée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3^\ell$ d'une part et de deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , telles que $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, $\text{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$, et $\Gamma_3^\ell \subset \Gamma_b^\ell$. Soit $T > 0$ nous étudions l'évolution du corps due à l'application de force de volume et de tractions de surfaces dans l'intervalle de temps $[0, T]$.

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement.

Dans la description des phénomènes purement électro-mécanique, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$, le tenseur des déformations infinitésimales \mathcal{E}^ℓ et leurs dérivées temporelles $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^\ell$ et $\dot{\mathcal{E}}^\ell$. Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électromécaniques, car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique $\mathbf{D}^\ell = \mathbf{D}_i^\ell$ ainsi que le champ électrique $\mathbf{E}(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$. Nous présentons par la suite les lois de comportement de matériau : matériaux électro-élastique.

Loi de comportement des matériaux électro-élastiques.

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ et le vecteur des déplacements électriques \mathbf{D}^ℓ sont reliés par la loi de comportement :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{F}^\ell_\varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{E}(\varphi^\ell), \\ \mathbf{D}^\ell = \mathcal{B}^\ell \mathbf{E}(\varphi^\ell) + \mathcal{E}^\ell_\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \\ \mathbf{E}(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell, \end{cases} \quad (1.7)$$

où $\mathcal{F}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ est l'opérateur d'élasticité non linéaire, $\mathbf{E}(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$ où $\nabla\varphi^\ell = (\varphi^\ell, i)$ représente le champ électrique, $\mathcal{E}^\ell = e_{ijk}^\ell$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul et $\mathcal{B}^\ell = \mathcal{B}_{ij}^\ell$ est le tenseur diélectrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif. Par ailleurs $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e_{ijk}^\ell)^*$ où $(e_{ijk}^\ell)^* = e_{kij}^\ell$, dénote le transposé du tenseur \mathcal{E}^ℓ tel que :

$$\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{v}^\ell, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathbb{S}^d, \mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^d. \quad (1.8)$$

1.1.4 Conditions aux limites

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ^ℓ .

La condition aux limites de déplacement

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1^\ell \times [0, T]$, le champ des déplacements \mathbf{u}^ℓ est par conséquent nul :

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T]. \quad (1.9)$$

La condition aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité f_2^ℓ agit sur $\Gamma_2^\ell \times [0, T]$ et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell$ satisfait :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T]. \quad (1.10)$$

Les conditions aux limites électriques.

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations :

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (1.11)$$

$$\mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T]. \quad (1.12)$$

Conditions continue aux limites de contact.

On définit le déplacement normal par

$$[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2,$$

et le déplacement tangent par

$$[\mathbf{u}_\tau] = \mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2.$$

La continuité des contraintes sur l'inter faces Γ_3 se traduit par :

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.13)$$

1.1.5 Lois de contact avec frottement

Par condition de contact nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes. Par loi de frottement nous comprenons une relation entre la contrainte tangentielle σ_τ^ℓ et le déplacement tangentiel \mathbf{u}_τ^ℓ ou la vitesse tangentielle $\dot{\mathbf{u}}_\tau^\ell$. Notons ici que σ_τ^ℓ s'appelle aussi force de frottement.

Les égalités et les inégalités qui suivent sont considérées vraies presque partout sur $\Gamma_3 \times [0, T]$.

Contact avec compliance normale.

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue a priori. La contrainte normale σ_ν^ℓ satisfait la condition dite de compliance normale

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu] - g^\ell), \end{cases} \quad (1.14)$$

où $[u_\nu]$ est le déplacement normal, g^ℓ représente l'interstice entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale. Cette condition indique que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $[u_\nu] - g^\ell$. Précisons que dans les chapitres 2 du mémoire nous considérons le cas où le corps repose sur la fondation, c'est-à-dire, l'interstice est nul, $g^\ell = 0$. Comme exemple de la fonction p_ν nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \quad (1.15)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases} \quad (1.16)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.14) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle

dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

Maintenant, nous présentons les lois de frottement intervenant dans ce mémoire.

Loi de frottement de type Coulomb.

C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit :

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu|\sigma_\nu|, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow [\mathbf{u}_\tau] = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda[\mathbf{u}_\tau], \end{cases} \quad (1.17)$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement. C'est une version statique de la loi de Coulomb qui intervient dans la description du contact frottant de problème étudiés dans le chapitre 2 du mémoire.

Maintenant, nous remplaçons le seuil de frottement σ_ν de la loi (1.17), par la condition de compliance normale (1.14), de façon à obtenir les conditions suivantes.

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu p_\nu([u_\nu] - g^\ell), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu p_\nu([u_\nu] - g^\ell) \Rightarrow [\mathbf{u}_\tau] = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu p_\nu([u_\nu] - g^\ell) \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda[\mathbf{u}_\tau]. \end{cases} \quad (1.18)$$

Dans le chapitre 2 nous utilisons la loi (1.18) avec le cas particulier g^ℓ , i.e. lorsque l'interstice est nul, ce choix ne représente guère une restriction du point de vue mécanique, mais il est imposé pour raison de simplification des calculs.

Une version quasi statique de la loi de frottement de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p_\tau([u_\nu] - g^\ell), \\ [\mathbf{u}_\tau] \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau([u_\nu] - g^\ell) \frac{[\mathbf{u}_\tau]}{\|[\mathbf{u}_\tau]\|}, \end{cases} \quad (1.19)$$

où p_τ est une fonction positive. Dans (1.19), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $p_\tau([u_\nu] - g^\ell)$. De plus, quand le seuil de frottement est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Cette condition de frottement a été utilisée dans différents papiers.

1.1.6 Lois de contact avec frottement et adhésion

On va décrire la condition de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, on introduit une variable interne d'état définie sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, et quand $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plus détails sur ce section, on renvoie par exemple [9]. On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion :

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.20)$$

où σ_ν est le déplacement normal, γ_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par :

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s \leq L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Ici $L > 0$ est longueur caractéristique des liens. La condition (1.20) indique que chaque corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u]$, où le deuxième terme de l'égalité est la contribution de l'adhésion à la tension de surface. Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.20) a été déjà utilisée dans [8], [16].

Quand le champ d'adhésion β est nul, (1.20) devient :

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.22)$$

qui représente la condition de compliance normale.

Ensuite, nous supposons que la composante tangentielle satisfait la condition sui-

vante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \leq \mu p_\nu([u_\nu]), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [\mathbf{u}_\tau] = 0 \quad \text{on } \Gamma_3 \times (0, T), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = -\lambda [\mathbf{u}_\tau] \end{array} \right. \quad (1.23)$$

où γ_τ est un coefficient positif et μ est le coefficient de frottement, supposé être positif.

$\mathbf{R}_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ est l'opérateur de troncature défini par

$$\mathbf{R}_\tau(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } \|\mathbf{v}\| \leq L, \\ L \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} & \text{si } \|\mathbf{v}\| > L. \end{cases} \quad (1.24)$$

Notons que les conditions de frottement similaires à ceux dans (1.23) ont été considérées dans [15] dans le cas particulier $\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = [\mathbf{u}_\tau]$ et $R_\nu([u_\nu]) = -[u_\nu]$, pour L très grand.

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu([u_\nu])^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.25)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.26)$$

Où γ_ν, γ_τ et ϵ_a sont coefficients d'adhérence positifs, et $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$, le déplacement tangent relatif de corps Ω^1 par rapport l'autre corps Ω^2 sur la zone de contact, et β_0 l'adhésion initiale, tel que :

$$0 \leq \beta_0 \leq 1, \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (1.27)$$

Sous les conditions (1.25)-(1.27), on a la remarque suivante :

Remarque 1.1.1 : Nous remarquons que sous les trois conditions précédentes le champ d'adhésion vérifie la restriction $0 \leq \beta \leq 1$. En effet, puisque $\dot{\beta} \leq 0$ donc $\beta \leq \beta_0 \leq 1$. En outre, si $\beta = 0$ quand $t = t_0$, donc $\dot{\beta} = 0$ pour tout $t \geq t_0$, et d'où $\beta = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Alors, nous concluons que $0 \leq \beta \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. $x \in \Gamma_3$.

1.2 Rappels d'analyse

1.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\|u\|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \quad (1.28)$$

et on rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (1.29)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme défini par (1.28). Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}}{\|v\|_H},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

Théorème 1.2.1 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) : Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

De plus

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H.$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

1.2.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles

sans réponse jusque là.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega) \ i = 1, \dots, d\}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \text{ et on écrit } \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 1.2.2 (Rellich)

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 1.2.3 (trace de Sobolev)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 1.2.1 L'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représente l'espace de fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle dT . L'application δ s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 1.2.2 On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

Définition 1.2.1 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_{\alpha} \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_{\alpha} = D^{\alpha} u\},$$

Remarque 1.2.3 Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} (\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 1.2.4 Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\|\cdot\|$, sont des espaces de Banach. De plus, les espaces $H^k(\Omega)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le [5].

1.2.3 Espaces fonctionnels

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques \mathbf{u}^ℓ et $\boldsymbol{\sigma}^\ell$:

$$\begin{cases} H^\ell = \{\mathbf{u}^\ell = (u_i^\ell) \mid u_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = (L^2(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}^\ell = \{\boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma_{ij}^\ell) \mid \sigma_{ij}^\ell = \sigma_{ji}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = (L_s^2(\Omega^\ell))^{d \times d}, \\ H_1^\ell = \{\mathbf{u}^\ell = (u_i^\ell) \mid u_i^\ell \in H^1(\Omega^\ell)\} = (H^1(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}_1^\ell = \{\boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}^\ell \mid \sigma_{ij,j}^\ell \in H^\ell\}. \end{cases} \quad (1.30)$$

Les espaces H^ℓ , \mathcal{H}^ℓ , H_1^ℓ et \mathcal{H}_1^ℓ sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires suivants :

$$\begin{cases} (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u_i^\ell v_i^\ell dx, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma_{ij}^\ell \tau_{ij}^\ell dx, \\ (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H_1^\ell} = (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} + (\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}_1^\ell} = (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \text{Div} \boldsymbol{\tau}^\ell)_{H^\ell}, \end{cases} \quad (1.31)$$

respectivement, où $\varepsilon : H_1^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ et $\text{Div} : \mathcal{H}_1^\ell \rightarrow H^\ell$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(\mathbf{u}^\ell) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell)), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\ell + u_{j,i}^\ell), \quad \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma_{ij,j}^\ell).$$

Les normes sur les espaces H^ℓ , \mathcal{H}^ℓ , H_1^ℓ et \mathcal{H}_1^ℓ sont notées par $\|\cdot\|_{H^\ell}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}$, $\|\cdot\|_{H_1^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\ell}$, respectivement.

Puisque la frontière Γ^ℓ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur $\boldsymbol{\nu}^\ell$ à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $\boldsymbol{v}^\ell \in H_1^\ell$ nous utilisons la notation \boldsymbol{v}^ℓ pour désigner la trace $\gamma\boldsymbol{v}^\ell$ de \boldsymbol{v}^ℓ sur Γ^ℓ . Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1^\ell \rightarrow L^2(\Gamma^\ell)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective.

Désignons par H'_{Γ^ℓ} le dual de H_{Γ^ℓ} , et (\cdot, \cdot) le produit de dualité entre H'_{Γ^ℓ} et H_{Γ^ℓ} . Pour tout $\boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, il existe un élément $\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \in H'_{\Gamma^\ell}$ tel que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \gamma\boldsymbol{v}^\ell) = (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\boldsymbol{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div}\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{v}^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \boldsymbol{v}^\ell \in H_1^\ell. \quad (1.32)$$

En outre, si $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \gamma\boldsymbol{v}^\ell) = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \boldsymbol{v}^\ell da \quad \forall \boldsymbol{v}^\ell \in H_1^\ell. \quad (1.33)$$

Donc, pour $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\boldsymbol{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div}\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \boldsymbol{v}^\ell da \quad \forall \boldsymbol{v}^\ell \in H_1^\ell, \quad (1.34)$$

où da est un élément de mesure de surface.

Nous définissons le sous-espace fermé de H_1^ℓ

$$\mathbf{V}^\ell = \{\boldsymbol{v}^\ell \in H_1^\ell \mid \boldsymbol{v}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell\}. \quad (1.35)$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur \mathbf{V}^ℓ ; alors, il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_1^ℓ telle que

$$\|\varepsilon(\boldsymbol{v}^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq c_k \|\boldsymbol{v}^\ell\|_{H_1^\ell} \quad \forall \boldsymbol{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \quad (1.36)$$

Nous considérons sur l'espace \mathbf{V}^ℓ , le produit scalaire donné par

$$(\boldsymbol{u}^\ell, \boldsymbol{v}^\ell)_{\mathbf{V}^\ell} = (\varepsilon(\boldsymbol{u}^\ell), \varepsilon(\boldsymbol{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \boldsymbol{u}^\ell, \boldsymbol{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell, \quad (1.37)$$

et soit $\|\cdot\|_{\mathbf{V}^\ell}$ la norme associée, i.e.

$$\|\boldsymbol{v}^\ell\|_{\mathbf{V}^\ell} = \|\varepsilon(\boldsymbol{v}^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \boldsymbol{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \quad (1.38)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathbf{V}^\ell}$ sont des normes équivalentes sur \mathbf{V}^ℓ et ainsi $(\mathbf{V}^\ell, \|\cdot\|_{\mathbf{V}^\ell})$ est un espace de Hilbert. De plus, en utilisant le Théorème de

trace de Sobolev, (1.34) et (1.35), il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ et Γ_3 telle que :

$$\| \mathbf{v}^\ell \|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \| \mathbf{v}^\ell \|_{V^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \quad (1.39)$$

Pour une fonction scalaire β , qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{Q} = \{ \beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \leq \beta(t) \leq 1 \text{ sur } \Gamma_3 \}. \quad (1.40)$$

On introduit également les espaces suivants :

$$W^\ell = \{ \xi^\ell \in H^1(\Omega^\ell) \mid \xi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell \},$$

$$\mathcal{W}^\ell = \{ \mathbf{D}^\ell = (D_i^\ell) \mid D_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell), D_{i,i}^\ell \in L^2(\Omega^\ell) \},$$

où $\text{div} \mathbf{D}^\ell = (D_{i,i}^\ell)$. Ces espaces W^ℓ et \mathcal{W}^ℓ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\varphi^\ell, \xi^\ell)_{W^\ell} = (\nabla \varphi^\ell, \nabla \xi^\ell)_{H^\ell}, \quad (\mathbf{D}^\ell, \mathbf{E}^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = (\mathbf{D}^\ell, \mathbf{E}^\ell)_{H^\ell} + (\text{div} \mathbf{D}^\ell, \text{div} \mathbf{E}^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad (1.41)$$

soient $\| \cdot \|_{W^\ell}$ et $\| \cdot \|_{\mathcal{W}^\ell}$ les normes associées ; c'est-à-dire

$$\| \xi^\ell \|_{W^\ell} = \| \nabla \xi^\ell \|_{H^\ell}, \quad \| \mathbf{D}^\ell \|_{\mathcal{W}^\ell}^2 = \| \mathbf{D}^\ell \|_{H^\ell}^2 + \| \text{div} \mathbf{D}^\ell \|_{L^2(\Omega^\ell)}^2. \quad (1.42)$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_a^ℓ telle que

$$\| \nabla \xi^\ell \|_{H^\ell} \geq c \| \xi^\ell \|_{H^1(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi^\ell \in W^\ell. \quad (1.43)$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré peut être trouvée dans [14].

Il s'ensuit de (1.43) que $\| \cdot \|_{H^1(\Omega^\ell)}$ et $\| \cdot \|_{W^\ell}$ sont des normes équivalentes sur W^ℓ et donc $(W^\ell, \| \cdot \|_{W^\ell})$ est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante \tilde{c}_0^ℓ dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_a^ℓ et Γ_3 , telle que

$$\| \xi^\ell \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0^\ell \| \xi^\ell \|_{W^\ell}, \quad \forall \xi^\ell \in W^\ell. \quad (1.44)$$

Afin de simplifier les notations, nous définissons les espaces produits :

$$V = V^1 \times V^2, \quad H = H^1 \times H^2, \quad H_1 = H_1^1 \times H_1^2,$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2, \quad W = W^1 \times W^2, \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2,$$

les espaces V, W, \mathcal{W} sont des espaces de Hilbert réel dotés des produits scalaires canoniques notée $(\cdot, \cdot)_V, (\cdot, \cdot)_W, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}}$. Les normes associés seront désignés par $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W, \|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, respectivement.

Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C([0, T], X)$ et $C^1([0, T], X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ avec valeur sur X , respectivement, avec les normes :

$$\|f\|_{C([0, T], X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X,$$

$$\|f\|_{C^1([0, T], X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|\dot{f}(t)\|_X.$$

Nous notons par $C_c([0, T], X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $[0, T]$ à valeurs dans X .

Définition 1.2.2 Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c([0, T], X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

1.2.4 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

I-Opérateur fortement monotone

Nous donnons quelques définitions et propriétés sur les opérateurs non linéaire et les formes bilinéaires dans un espaces de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$

Définition 1.2.3 Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non-linéaire. L'opérateur A est dit

(1) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X; \quad (1.45)$$

(2) fortement monotone si il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X; \quad (1.46)$$

(3) Lipschitz si il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (1.47)$$

et la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Pour tout } \eta \in X, j(\eta, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i. sur } X, \\ (b) \text{ il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ j(u_1, v_1) - j(u_1, v_2) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X. \end{array} \right. \quad (1.48)$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème

$$(Au, u - v)_X + j(u, v) + j(u, u) \geq (f, u - v)_X \quad \forall v \in X \quad (1.49)$$

est donnée par le résultat suivant.

Théorème 1.2.5 *Supposons que les hypothèses (1.46), (1.47) et (1.48) sont satisfaites. Alors $\alpha < m$, pour tout $f \in X$, il existe une solution unique $u \in X$ au problème (1.49).*

Théorème 1.2.6 (Théorème de point fixe de Banach) *Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in]0, 1[$ telle que*

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq c \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$; i.e, possède un point fixe unique dans K .

Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}) \quad m \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe.

Théorème 1.2.7 *Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda^m : K \rightarrow K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .*

Définition 1.2.4 *Une forme bilinéaire $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que :*

$$\|b(u, v)\|_X \leq M \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 1.2.5 *Une forme bilinéaire $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que :*

$$b(u, u) \geq m \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Théorème 1.2.8 (Théorème du Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive.

Soit $l : H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in H$ qui satisfait :

$$b(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H. \quad (1.50)$$

De plus, si $b(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :

$$\frac{1}{2}b(u, u) - \langle u, u \rangle_X \leq \frac{1}{2}b(v, v) - \langle v, v \rangle_X, \quad \forall v \in X. \quad (1.51)$$

II- Équation différentielle ordinaire

Théorème 1.2.9 (Cauchy-Lipschitz) : Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$, qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in [0, T]; \\ (b) \text{ il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que} \\ F(\cdot, x) \in L^p([0, T]; X) \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}([0, T]; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \text{ p.p. } t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

1.2.5 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici le lemme du type Gronwall qui intervient dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 1.2.1 Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds\right) \exp\left(\int_0^t n(s) ds\right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s) ds \leq e^{at} \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $a = 0$, $n = 1$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 1.2.1 Soient $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq \int_0^t m(s) ds + \int_0^t \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors, il existe $c > 0$ tel que

$$\psi(t) \leq \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Le Corollaire [1.2.1](#) est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution.

Chapitre 2

Problème de Contact avec adhésion et frottement en électro-élasticité

Dans ce chapitre, on étudie un problème élastique de contact avec adhésion et frottement pour des matériaux élastiques. Notre intérêt est de décrire un processus quasi statique dans lequel le contact, l'adhésion et le frottement sont couplés, et de montrer que le modèle résultant se ramène à un problème mathématique bien posé.

Chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section, nous présentons le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans la deuxième section, nous décrivons la formulation variationnelle du problème mécanique.

Enfin, dans la troisième section, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème mécanique.

Les techniques employées sont basées sur les résultats des équations variationnelles et la théorie des opérateurs monotones, suivi par les arguments du point fixe les inéquations.

2.1 Formulation du problème

Problème \mathcal{P} . pour $\ell = 1, 2$, trouver un champ des déplacements $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, un potentiel électrique $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ de déplacement électrique $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{F}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{E}(\varphi^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.1)$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{B}^\ell \mathbf{E}(\varphi^\ell) + \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.2)$$

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}^\ell = q_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T], \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = \mathbf{f}_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T], \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu]) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \leq \mu p_\nu([u_\nu]) \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [\mathbf{u}_\tau] = 0 \quad \text{on } \Gamma_3 \times [0, T], \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = -\lambda [\mathbf{u}_\tau] \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu([u_\nu])^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.9)$$

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (2.10)$$

$$\mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T], \quad (2.11)$$

$$\mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.12)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.13)$$

Les équations (2.1) et (2.2) représentent la loi constitutive électro-élastique, elles font parution dans (1.7). \mathcal{E}^ℓ représente l'opérateur piézoélectrique, $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est sa transposition, \mathcal{B}^ℓ désigne la permittivité électrique opérateur et $\mathbf{D}^\ell = (D_1^\ell, \dots, D_d^\ell)$ est le vecteur de déplacement électrique. Ensuite, les équations (2.3) et (2.4) sont les équations d'équilibre écrites pour les champs de contrainte et de déplacement électrique, introduits respectivement dans (1.5) et (1.6). Les conditions (2.5) et (2.6) sont les conditions de déplacement-traction. La condition (2.7) décrit le contact avec compliance normale et adhésion où γ_ν est un coefficient d'adhérence. Et les conditions (2.8) sont les conditions de frottement et d'adhésion, où les opérateurs de troncation sont donnés par (1.21) et (1.24). L'équation (2.9) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion, avec la condition initiale (2.13) où β_0 est un champ d'adhésion donné, tandis que

(2.10) et (2.11) représentent les conditions aux limites électriques sur Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , respectivement, que nous avons définies dans (1.11) et (1.12). Notons que nous avons imposé la condition (2.12) pour des raisons physiques.

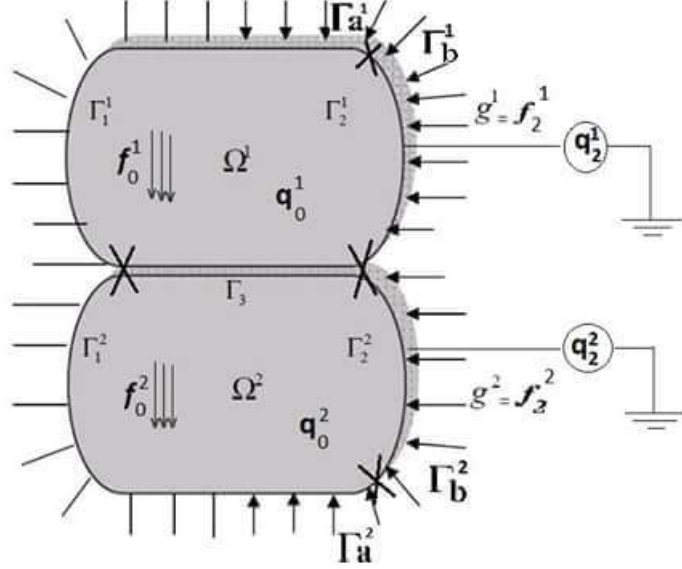


Fig.1. contact entre deux corps en électro-élasticité avec adhésion et frottement

On considère maintenant les hypothèses suivantes :

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{F}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (a) \text{ il existe } L_{\mathcal{F}^\ell} > 0 \text{ telle que} \\
 \| \mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon_2) \| \leq L_{\mathcal{F}^\ell} \| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\
 (b) \text{ il existe } m_{\mathcal{F}^\ell} > 0 \text{ telle que} \\
 (\mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{F}^\ell} \| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \|^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\
 (c) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\
 (d) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{F}^\ell(x, 0) \in \mathcal{H}^\ell.
 \end{array} \right. \tag{2.14}$$

L'opérateur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait les hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (a) \mathcal{E}^\ell(x, \tau) = (e_{ijk}^\ell(x) \tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\
 (b) e_{ijk}^\ell = e_{ikj}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j, k \leq d.
 \end{array} \right. \tag{2.15}$$

L'opérateur de permittivité $\mathcal{B}^\ell = b_{ij}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait les hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{B}^\ell(x, \mathbf{E}) = (b_{ij}^\ell(x)E_j) \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (b) b_{ij}^\ell = b_{ji}^\ell, b_{ij}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j \leq d, \\ (c) \text{ Il existe } m_{\mathcal{B}^\ell} > 0 \text{ tel que } b_{ij}^\ell(x)E_iE_j \geq m_{\mathcal{B}^\ell} \|\mathbf{E}\|^2 \\ \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_\nu > 0 \text{ tels que } |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b) (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto p_\nu(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \\ (d) p_\nu(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

La fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_\tau > 0 \text{ tels que } |p_\tau(x, r_1) - p_\tau(x, r_2)| \leq L_\tau (|r_1 - r_2|) \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b) \text{ il existe } m_\tau > 0 \text{ tels que } |p_\tau(x, r)| \leq m_\tau \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto p_\tau(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \\ (d) \text{ l'application } x \longmapsto p_\tau(x, r) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (2.18)$$

On suppose que les forces volumiques f_0^ℓ et les tractions surfaciques f_2^ℓ , et les charges électriques volumique sont q_0^ℓ et surfaciques q_2^ℓ ont les régularités :

$$f_0^\ell \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega^\ell)^d), \quad f_2^\ell \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \quad (2.19)$$

$$q_0^\ell \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega^\ell)), \quad q_2^\ell \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)), \quad (2.20)$$

$$q_2^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_3, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.21)$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν, γ_τ et ϵ_a satisfont les conditions

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \epsilon_a \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad (2.22)$$

tandis que le coefficient de frottement μ vérifie

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (2.23)$$

Finalement, on suppose que le champ initial d'adhésion satisfait :

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (2.24)$$

Nous énonçons maintenant quelques définitions qu'on utilise dans la suite de ce chapitre.

D'abord, l'application d'inclusion de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. On définit la fonction $f = (f^1, f^2) : [0, T] \rightarrow V$ par

$$(f(t), \mathbf{v})_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T], \quad (2.25)$$

et la fonction $q = (q^1, q^2) : [0, T] \rightarrow W$ par

$$(q(t), \psi)_W = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t) \cdot \psi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t) \cdot \psi^\ell da, \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T]. \quad (2.26)$$

Les conditions (2.19) et (2.20) impliquent

$$f \in W^{1,\infty}([0, T]; V), \quad q \in W^{1,\infty}([0, T]; W). \quad (2.27)$$

On définit la fonctionnelle d'adhésion comme suit $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \cdot [v_\nu] + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) \cdot [\mathbf{v}_\tau]) da. \quad (2.28)$$

La fonctionnelle de compliance normale $j_{nc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu]) \cdot [v_\nu] da, \quad (2.29)$$

et la fonctionnelle de frottement $j_{fr} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{v}_\tau\| da. \quad (2.30)$$

La condition (2.17) entraîne que les intégrales dans (2.29) et (2.30) sont bien définies.

2.2 Formulation variationnelle

A l'aide des formules de Green on voit directement que si \mathbf{u}, φ et β sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (2.3), (2.5), (2.7) et (2.8) avec (2.28), (2.29) et (2.30) pour tout $t \in [0, T]$ on déduit que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell(\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))dx + \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))dx &= \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da \\ &+ \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da + \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

La formule de Green pour $\ell = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^1} \boldsymbol{\sigma}^1(\varepsilon(\mathbf{v}^1) - \varepsilon(\mathbf{u}^1(t)))dx + \int_{\Omega^1} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t))dx &= \int_{\Gamma_1^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t))da + \\ \int_{\Gamma_2^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t))da + \int_{\Gamma_3^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^1 \in V^1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^2} \boldsymbol{\sigma}^2(\varepsilon(\mathbf{v}^2) - \varepsilon(\mathbf{u}^2(t)))dx + \int_{\Omega^2} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t))dx &= \int_{\Gamma_1^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t))da + \\ \int_{\Gamma_2^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t))da + \int_{\Gamma_3^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^2 \in V^2, \end{aligned} \quad (2.32)$$

à addition (2.31) et (2.32)

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell(\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))dx = \\ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

d'après (2.3), et (2.5)-(2.6) on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell(\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da + \\ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da + \\ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da +$$

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell,$$

d'après (2.25)

$$(f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da.$$

En suite :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} = (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell.$$

On calcule $\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da = ?$:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t)) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^1 (\mathbf{v}_\nu^1 - \mathbf{u}_\nu^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^2 (\mathbf{v}_\nu^2 - \mathbf{u}_\nu^2(t)) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 (\mathbf{v}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 (\mathbf{v}_\tau^2 - \mathbf{u}_\tau^2(t)) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu ([\mathbf{v}_\nu - \mathbf{u}_\nu(t)]) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da \\ &= \int_{\Gamma_3} (-p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da, \end{aligned}$$

alors :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da = \int_{\Gamma_3} (-p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da. \quad (2.33)$$

Nous supposons que $\Gamma_3 = \Gamma_3^+ \cup \Gamma_3^-$,

où $\Gamma_3^+ = \{x \in \Gamma_3 \mid [\mathbf{u}_\tau] = 0\}$ et $\Gamma_3^- = \{x \in \Gamma_3 \mid [\mathbf{u}_\tau] \neq 0\}$.

Maintenant, en utilisant (2.8).

Pour $[\mathbf{u}_\tau]$:

si $[\mathbf{u}_\tau] = 0$

$$\int_{\Gamma_3^+} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau(t)]) da = - \int_{\Gamma_3^+} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{u}_\tau\| da,$$

si $[\mathbf{u}_\tau] \neq 0$ a

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau(t)]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \lambda [\mathbf{u}_\tau] [\mathbf{u}_\tau(t)] da,$$

nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau(t)]) da &= -\lambda \int_{\Gamma_3^-} \|\mathbf{[u}_\tau]\|^2 da, \\
 &= - \int_{\Gamma_3^-} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \|\mathbf{[u}_\tau]\| da, \\
 &= - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{[u}_\tau]\| da,
 \end{aligned}$$

alors :

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau(t)]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{[u}_\tau]\| da. \quad (2.34)$$

Pour $[\mathbf{v}_\tau]$:

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \lambda [\mathbf{u}_\tau] [\mathbf{v}_\tau] da,$$

donc

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau]) da \geq -\lambda \int_{\Gamma_3^-} \|\mathbf{[u}_\tau]\| \|\mathbf{[v}_\tau]\| da \geq - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{[v}_\tau]\|, \quad (2.35)$$

nous utilisons (2.35) et le égalité (2.34) pour trouver

$$\int_{\Gamma_3} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da \geq - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\|\mathbf{[v}_\tau]\| - \|\mathbf{[u}_\tau]\|) da. \quad (2.36)$$

Maintenant, nous utilisons (2.33) et (2.36) pour trouver

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} &\geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{\mathcal{V}} - \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu]) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da \\
 &\quad + \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\|\mathbf{[v}_\tau]\| - \|\mathbf{[u}_\tau]\|) da \\
 &\quad - \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da.
 \end{aligned}$$

D'après (2.28)-(2.29) et (2.30), on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} &+ j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \\
 &+ j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{\mathcal{V}}, \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

et de (2.1), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))$$

$$+ j_{nc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \quad (2.38)$$

En utilise la formule de Green pour les inconnues électrique du problème ainsi que les conditions (2.10), (2.4) et la définition (2.26) on a :

$$(\mathbf{D}^\ell, \nabla \psi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (Div \mathbf{D}^\ell, \psi^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da, \quad \forall \psi^\ell \in H_1^\ell, \quad (2.39)$$

$$\int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \psi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} Div \mathbf{D}^\ell \cdot \psi^\ell dx = \int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da + \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da, \quad \forall \psi^\ell \in H_1^\ell. \quad (2.40)$$

La formule de Green pour $\ell = 1$

$$\int_{\Omega^1} \mathbf{D}^1 \cdot \nabla \psi^1 dx + \int_{\Omega^1} Div \mathbf{D}^1 \cdot \psi^1 dx = \int_{\Gamma_a^1} \mathbf{D}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \psi^1 da + \int_{\Gamma_b^1} \mathbf{D}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \psi^1 da, \quad \forall \psi^1 \in H_1^1. \quad (2.41)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} \mathbf{D}^2 \cdot \nabla \psi^2 dx + \int_{\Omega^2} Div \mathbf{D}^2 \cdot \psi^2 dx = \int_{\Gamma_a^2} \mathbf{D}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \psi^2 da + \int_{\Gamma_b^2} \mathbf{D}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \psi^2 da, \quad \forall \psi^2 \in H_1^2. \quad (2.42)$$

Pour $\ell = 1, 2$, on a d'après (2.10) :

$$\int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da = 0,$$

à addition (2.41) et (2.42) on a :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \psi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} Div \mathbf{D}^\ell \cdot \psi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da.$$

On a d'après (2.4) et (2.11) :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \psi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \psi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \psi^\ell da,$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \psi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \psi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \psi^\ell da = 0.$$

On a d'après (2.26) :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \psi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \psi^\ell da = (q(t), \psi)_W.$$

Donc :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} + (q(t), \psi)_W = 0.$$

De (2.2), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T]. \quad (2.43)$$

De (2.38), (2.13) et (2.9), (2.43), on obtient la formulation variationnelle du problème \mathcal{P} .

Problème \mathcal{PV} . Trouver le champ de déplacements $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) : [0, T] \rightarrow V$, le potentiel électrique $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) : [0, T] \rightarrow W$, et le champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$, tels que :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \\ & + j_{nc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell(t), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W, t \in [0; T], \quad (2.45)$$

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu([u_\nu])^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\|^2) - \epsilon_a)_+, \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad (2.46)$$

$$\beta(0) = \beta_0. \quad (2.47)$$

Dans le reste de cette section, nous présentons quelques inégalités comprenant les fonctionnelles j_{ad} , j_{nc} et j_{fr} qui seront utilisées dans les sections suivantes. Ci-dessous dans cette section, β, β_1, β_2 dénotent les éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tel que $0 \leq \beta, \beta_1, \beta_2 \leq 1$ p.p. sur Γ_3 , $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}^\ell$ et \mathbf{v}^ℓ représentent des éléments de V^ℓ , et c est une constante générique positive qui peut dépendre de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, p_\nu, \gamma_\nu, \gamma_\tau$ et L , dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite aux fonctions diverses sur $x^\ell \in \Omega^\ell \cup \Gamma_3$.

D'abord nous faisons remarquer que les fonctionnelles j_{ad} et j_{nc} sont linéaires par rapport au dernier argument et donc

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad j_{nc}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -j_{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (2.48)$$

Ensuite, en utilisant (2.28) et les inégalités, $|R_\nu([u_{1\nu}])| \leq L$, $\|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \leq L$, $|\beta_1| \leq 1$, $|\beta_2| \leq 1$, nous déduisons que

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\| da. \quad (2.49)$$

En combinant cette inégalité avec (1.39), nous obtenons

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq c \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V. \quad (2.50)$$

En choisissant $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ dans (2.50), nous trouvons

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq 0. \quad (2.51)$$

Des manipulations semblables, basées sur la Lipschitzialité des opérateurs R_ν et \mathbf{R}_τ , montrent que

$$|j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V. \quad (2.52)$$

Aussi, nous prenons $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$ et $\mathbf{u}_2 = 0$ dans (2.51), ensuite nous utilisons les égalités $R_\nu(0) = 0$, $\mathbf{R}_\tau(0) = 0$ et (2.50) pour obtenir

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0. \quad (2.53)$$

Maintenant, nous utilisons (2.29) pour voir que

$$|j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])| |[v_\nu]| da, \quad (2.54)$$

ensuite (2.17)(a) et (1.39) impliquent

$$|j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq c_0^2 L_\nu \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V. \quad (2.55)$$

Nous utilisons encore une fois (2.29), pour obtenir

$$j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \int_{\Gamma_3} (p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}]))([u_{1\nu}] - [u_{2\nu}]) da, \quad (2.56)$$

et alors, (2.17)(b) implique

$$j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \geq 0. \quad (2.57)$$

Aussi, nous prenons $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$ et $\mathbf{u}_2 = 0$ dans l'inégalité (2.57) et nous utilisons (2.17)(c) et (2.48) pour obtenir

$$j_{nc}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0. \quad (2.58)$$

Maintenant, nous utilisons (2.30) pour trouver

$$j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq \int_{\Gamma_3} \mu |p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])| \|\mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}_{2\tau}\| da. \quad (2.59)$$

Moyennant l'hypothèse (2.17)(a) et gardant en tête (1.39), nous obtenons

$$j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq L_\nu c_0^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V. \quad (2.60)$$

Les inégalités (2.50)–(2.60) combinées avec les égalités (2.48) vont être utilisées dans des places diverses dans le reste du chapitre.

2.3 Existence et unicité de la solution

Notre intérêt principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel **Problème $\mathcal{P}V$** .

Théorème 2.3.1 *Supposons que (2.14) – (2.19), (2.22) – (2.24), (2.15) – (2.26) et (1.8) sont vérifiées. Alors, il existe $\mu_0 > 0$ dépendant uniquement de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, \mathcal{F}^\ell, \mathcal{B}^\ell$ et p_ν telle que, si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq \mu_0$, alors le Problème $\mathcal{P}V$ possède une solution unique $(\mathbf{u}, \varphi, \beta)$. En outre, la solution satisfait*

$$\mathbf{u} \in W^{1,\infty}([0, T]; V), \quad (2.61)$$

$$\varphi \in W^{1,\infty}([0, T]; W), \quad (2.62)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}. \quad (2.63)$$

Un "quintuple" de fonctions $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \beta, \mathbf{D})$ qui satisfait (2.1), (2.2), (2.13)–(2.38) est appelée solution faible du problème de contact \mathcal{P} . Nous concluons par le Théorème 2.3.1 que, sous les hypothèses exposées, le Problème \mathcal{P} possède une solution unique faible.

Pour préciser la régularité de la solution faible, nous notons que les relations constitutives (2.1) et (2.2), les hypothèses (2.14), (2.15) et (2.25) et les régularités (2.61), (2.62) montrent que $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathcal{H})$, $\mathbf{D} \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathcal{W})$, il s'ensuit maintenant des régularités (2.19) et (2.20) que $\text{Div} \boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}([0, T]; H)$ et $\text{div} \mathbf{D} \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega))$, qui montre que

$$\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathcal{H}_1), \quad (2.64)$$

$$\mathbf{D} \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathcal{W}_1). \quad (2.65)$$

Nous concluons que la solution faible $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \beta, \mathbf{D})$ du problème piézoélectrique de contact avec adhésion et frottement \mathcal{P} possède la régularité (2.61), (2.62), (2.63)–(2.65).

Démonstration du Théorème 2.3.1

La démonstration du Théorème 2.3.1 sera effectuée dans plusieurs étapes. A cet effet, nous assumons dans la suite que (2.14)–(2.19), (2.22)–(2.24) sont satisfaites.

Soit \mathcal{Z} l'ensemble fermé de l'espace $C([0, T]; L^2(\Gamma_3))$ défini par

$$\mathcal{Z} = \{\beta \in C([0, T]; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q} \mid \beta(0) = \beta_0\}, \quad (2.66)$$

et soit $\beta \in \mathcal{Z}$ donné.

Étape i : nous fixons $\beta \in \mathcal{Z}$ et nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème \mathcal{PV}^β . Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u}_\beta = (\mathbf{u}_\beta^1, \mathbf{u}_\beta^2) : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$ un potentiel électrique $\varphi_\beta = (\varphi_\beta^1, \varphi_\beta^2) : [0, T] \rightarrow \mathbf{W}$ tels que pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}_\beta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_\beta^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}_\beta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) \\ & + j_{nc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t))_{\mathbf{V}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_\beta^\ell(t), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \psi)_{\mathbf{W}}, \quad \forall \psi \in \mathbf{W}, t \in [0, T]. \quad (2.68)$$

Pour l'étude de ce problème on a le résultat suivant.

Lemme 2.3.1 *Il existe $\tilde{\mu}_0 > 0$ qui dépend de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, \mathcal{F}^\ell, \mathcal{B}^\ell$ et p_ν telle que, si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq \tilde{\mu}_0$, alors le Problème \mathcal{PV}^β possède une solution unique. En outre, la solution satisfait $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta) \in C([0, T]; \mathbf{V} \times \mathbf{W})$.*

Démonstration. Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir l'opérateur $A_\beta(t) : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ comme suit :

$$\begin{aligned} (A_\beta(t)\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) + j_{nc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}), \\ & \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Soit $t \in [0, T]$ et $\beta \in \mathcal{Z}$ fixés et soit $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}$. Nous utilisons (2.69) et le égalité (2.48) pour trouver

$$\begin{aligned} (A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_{\mathbf{V}} &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} - \\ & j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) - j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2). \end{aligned}$$

Moyennant maintenant (2.14)(b) et les inégalités (2.51) et (2.57), on trouve

$$\begin{aligned} (A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_{\mathbf{V}} &\geq \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\geq \sum_{\ell=1}^2 m_{\mathcal{F}^\ell} \|\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell\|_{\mathbf{V}^\ell}^2 \geq \min(m_{\mathcal{F}^1}, m_{\mathcal{F}^2}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{V}}^2, \end{aligned}$$

donc

$$(A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_{\mathbf{V}} \geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{V}}^2, \quad (2.70)$$

où $m_{\mathcal{F}} = \min(m_{\mathcal{F}^1}, m_{\mathcal{F}^2})$.

Soit $\mathbf{v} \in V$; en utilisant (2.69) nous avons

$$\begin{aligned} (A_{\beta}(t)\mathbf{u}_1 - A_{\beta}(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^{\ell}\varepsilon(\mathbf{u}_1^{\ell}) - \mathcal{F}^{\ell}\varepsilon(\mathbf{u}_2^{\ell}), \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell}))_{\mathcal{H}^{\ell}} + \\ & j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) + j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

Combinons le égalité précédente avec (2.14)(a) et les inégalités (2.52)-(2.55), on a

$$\begin{aligned} (A_{\beta}(t)\mathbf{u}_1 - A_{\beta}(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V &\leq \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^{\ell}\varepsilon(\mathbf{u}_1^{\ell}) - \mathcal{F}^{\ell}\varepsilon(\mathbf{u}_2^{\ell}), \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell}))_{\mathcal{H}^{\ell}} + c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V \\ &+ L_{\nu}c_0^2 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \\ &\leq \max(L_{\mathcal{F}^1}, L_{\mathcal{F}^2}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V + c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V \\ &+ L_{\nu}c_0^2 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \\ &\leq (\max(L_{\mathcal{F}^1}, L_{\mathcal{F}^2}) + L_{\nu}c_0^2 + c) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \\ &\leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \end{aligned}$$

d'où

$$(A_{\beta}(t)\mathbf{u}_1 - A_{\beta}(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V \leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V.$$

Mettons ensuite $\mathbf{v} = A_{\beta}(t)\mathbf{u}_1 - A_{\beta}(t)\mathbf{u}_2$ dans l'inégalité précédente pour obtenir

$$\|A_{\beta}(t)\mathbf{u}_1 - A_{\beta}(t)\mathbf{u}_2\|_V \leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V. \quad (2.71)$$

Pour résoudre (2.67)-(2.68), nous considérons l'espace produit de Hilbert $V \times W$ muni du produit scalaire

$$(x, y)_X = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V + (\varphi, \psi)_W$$

$$\forall x = (\mathbf{u}, \varphi) = ((\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2), (\varphi^1, \varphi^2)), y = (\mathbf{v}, \psi) = ((\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2), (\psi^1, \psi^2)) \in X,$$

et la norme associée $\|\cdot\|_X$. Nous définissons l'opérateur $\tilde{A}_{\beta(t)} : X \rightarrow X$, la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et l'élément $\mathbf{f}(t) = (\mathbf{f}^1(t), \mathbf{f}^2(t)) \in X$ par les égalités :

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{\beta(t)}x, y)_X &= (A_{\beta}(t)\mathbf{u}, \mathbf{v})_V + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^{\ell}\nabla\varphi^{\ell}, \nabla\psi^{\ell})_{H^{\ell}} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^{\ell})^*\nabla\varphi^{\ell}, \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell}))_{\mathcal{H}^{\ell}} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^{\ell}\varepsilon(\mathbf{u}^{\ell}), \nabla\psi^{\ell})_{H^{\ell}}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \psi) \in X,$$

$$j(x, y) = j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \psi) \in X, \quad (2.73)$$

$$\mathbf{f}(t) = (f(t), q(t)), \quad (2.74)$$

pour tout $t \in [0, T]$, où $A_\beta(t)$ est donné par (2.69). Il est simple de vérifier que le couple $x_\beta = (\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta)$ est une solution du problème (2.67)–(2.68) avec la régularité $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta) \in C([0, T]; V \times W)$ si est seulement si $x_\beta \in C([0, T]; X)$ et

$$(\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y - x_\beta(t))_X + j(x_\beta(t), y) - j(x_\beta(t), x_\beta(t)) \geq (\mathbf{f}(t), y - x_\beta(t))_X \quad \forall y \in X, t \in [0, T]. \quad (2.75)$$

Nous obtenons l'inégalité précédent en suivant ce qui suit, en utilisant (2.69) et (2.72) pour trouver

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y)_X &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) + j_{nc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_\beta^\ell, \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_\beta^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y - x_\beta(t))_X &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) \\ &\quad + j_{nc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_\beta^\ell, \nabla \psi^\ell - \nabla \varphi_\beta^\ell)_{H^\ell} \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_\beta^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell), \nabla \psi^\ell - \nabla \varphi_\beta^\ell)_{H^\ell}, \end{aligned}$$

combinons cette dernière égalité avec (2.67) et (2.68) pour obtenir

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y - x_\beta(t))_X &\geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t))_V - j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) \\ &\quad + j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t)) + (q(t), \psi - \varphi)_W. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (2.73) et (2.74) nous obtenons

$$(\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y - x_\beta(t))_X + j_{fr}(x_\beta(t), y) - j_{fr}(x_\beta(t), x_\beta(t)) \geq (\mathbf{f}(t), y - x_\beta(t))_X.$$

Nous définissons la forme bilinéaire $b : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$b(\varphi, \psi) = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \varphi, \psi \in W. \quad (2.76)$$

De (2.76), (2.16), (1.43) et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$b(\varphi, \psi) = b(\psi, \varphi), |b(\varphi, \psi)| \leq c \|\varphi\|_W \|\psi\|_W, b(\varphi, \varphi) \geq c \|\varphi\|_W^2 \text{ pour tout } \varphi, \psi \in W,$$

c'est-à-dire que la forme bilinéaire b est continue, symétrique et coercive sur W .

Cependant, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, on peut définir une forme linéaire continue $l_\beta : W \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$l_\beta(\psi) = (q(t), \psi)_W + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T].$$

On applique le théorème de Lax-Milgram pour déduire qu'il existe un élément unique $\varphi_\beta(t) \in W$ tel que

$$\begin{aligned} b(\varphi_\beta(t), \psi) &= l_\beta(\psi) \\ &= (q(t), \psi)_W + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \psi \in W. \end{aligned} \quad (2.77)$$

L'opérateur $\tilde{A}_{\beta(t)}$ est fortement monotone et de Lipschitz sur X . En effet, en utilisant (2.70), (2.71), (1.43) et (2.15)–(2.16) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, soient $x_1 = (\mathbf{u}_1, \varphi_1)$, $x_2 = (\mathbf{u}_2, \varphi_2) \in X$, pour tout $y = (\mathbf{v}, \psi)$, on a

$$\begin{aligned} |(\tilde{A}_{\beta(t)}x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)}x_2, y)_X| &= |(A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell(\nabla \varphi_1^\ell - \nabla \varphi_2^\ell), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^*(\nabla \varphi_1^\ell - \nabla \varphi_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell}|, \\ &\leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V + c \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla \varphi_1^\ell - \nabla \varphi_2^\ell\|_{H^\ell} \|\nabla \psi^\ell\|_{H^\ell} \\ &\quad + c \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla \varphi_1^\ell - \nabla \varphi_2^\ell\|_{H^\ell} \|\mathbf{v}^\ell\|_{V^\ell} + c \sum_{\ell=1}^2 \|\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell\|_{V^\ell} \|\nabla \psi^\ell\|_{H^\ell}, \\ &\leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V + c \sum_{\ell=1}^2 \|\varphi_1^\ell - \varphi_2^\ell\|_{W^\ell} \|\psi^\ell\|_{W^\ell} \\ &\quad + c \sum_{\ell=1}^2 \|\varphi_1^\ell - \varphi_2^\ell\|_{W^\ell} \|\mathbf{v}^\ell\|_{V^\ell} + c \sum_{\ell=1}^2 \|\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell\|_{V^\ell} \|\psi^\ell\|_{W^\ell}, \\ &\leq c(\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\psi\|_W + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\mathbf{v}\|_V \\ &\quad + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\psi\|_W), \\ &\leq c \|x_1 - x_2\|_X \|y\|_X, \end{aligned}$$

et en prenant $y = \tilde{A}_{\beta(t)}x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)}x_2$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\|\tilde{A}_{\beta(t)}x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)}x_2\|_X \leq c \|x_1 - x_2\|_X, \quad (2.78)$$

qui prouve que $\tilde{A}_{\beta(t)}$ est Lipschitz. En outre, pour tout $x_1 = (\mathbf{u}_1, \varphi_1), x_2 = (\mathbf{u}_2, \varphi_2) \in X$, nous avons

$$\begin{aligned}
 (\tilde{A}_{\beta(t)}x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)}x_2, x_1 - x_2)_X &= (A_{\beta(t)}\mathbf{u}_1 - A_{\beta(t)}\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \\
 &+ \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell(\nabla\varphi_1^\ell - \nabla\varphi_2^\ell), \nabla\varphi_1^\ell - \nabla\varphi_2^\ell)_{H^\ell} \\
 &+ \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^*(\nabla\varphi_1^\ell - \nabla\varphi_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\
 &- \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell\varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{E}^\ell\varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \nabla\varphi_1^\ell - \nabla\varphi_2^\ell)_{H^\ell} \\
 &\geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 + \sum_{\ell=1}^2 m_{\mathcal{B}^\ell} \|\nabla\varphi_1^\ell - \nabla\varphi_2^\ell\|_{H^\ell}^2 \\
 &\geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 + \sum_{\ell=1}^2 m_{\mathcal{B}^\ell} \|\varphi_1^\ell - \varphi_2^\ell\|_{W^\ell}^2 \\
 &\geq \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) (\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2) \\
 &\geq \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) \|x_1 - x_2\|_X^2,
 \end{aligned}$$

où $m_{\mathcal{B}} = \min(m_{\mathcal{B}^1}, m_{\mathcal{B}^2})$. Alors

$$(\tilde{A}_{\beta(t)}x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)}x_2, x_1 - x_2)_X \geq \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) \|x_1 - x_2\|_X^2 \quad \forall x_1, x_2 \in X. \quad (2.79)$$

Aussi, en utilisant (2.73) and (2.60), nous pouvons vérifier aisément que, pour $x \in X$ donné, la fonctionnelle $j(x, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe est semi continue inférieurement et satisfait

$$j(x_1, y_1) - j(x_1, y_2) + j(x_2, y_2) - j(x_2, y_1) \leq$$

$$c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|x_1 - x_2\|_X \|y_1 - y_2\|_X \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in X. \quad (2.80)$$

Finalement, notons que (2.74) et (2.27) montrent que $\mathbf{f} \in W^{1,\infty}(0, T; X)$. Soit

$$\tilde{\mu}_0 = \frac{\min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}})}{c_0^2 L_\nu}, \quad (2.81)$$

et remarquons que $\tilde{\mu}_0$ dépend de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, \mathcal{F}^\ell, \mathcal{B}^\ell$ et p_ν . Supposons que $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \tilde{\mu}_0$. Alors

$$c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}), \quad (2.82)$$

et, en appliquant le résultat d'existence et d'unicité sur les inégalités quasi-variationnelles (Théorème 1.2.5), il s'ensuit l'existence d'un élément unique $x_\beta(t) = (\mathbf{u}_\beta(t), \varphi_\beta(t)) \in X$,

qui vérifie (2.75).

Maintenant, nous montrons que

$$(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta) \in C([0, T]; V) \times C([0, T]; W).$$

Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ et on considère les notations $\mathbf{u}_\beta(t_i) = \mathbf{u}_i, \varphi_\beta(t_i) = \varphi_i, \beta(t_i) = \beta_i, q(t_i) = q_i, \mathbf{f}(t_i) = \mathbf{f}_i$ et $x_\beta(t_i) = (\mathbf{u}_\beta(t_i), \varphi_\beta(t_i)) = x_i$ pour $i = 1, 2$.

Nous utilisons (2.75), pour $t = t_1$

$$(\tilde{A}_{\beta(t)} x_1, x_2 - x_1)_X + j(x_1, x_2) - j(x_1, x_1) \geq (\mathbf{f}_1, x_2 - x_1)_X,$$

pour $t = t_2$

$$(\tilde{A}_{\beta(t)} x_2, x_1 - x_2)_X + j(x_2, x_1) - j(x_2, x_2) \geq (\mathbf{f}_2, x_1 - x_2)_X,$$

alors

$$(\tilde{A}_{\beta(t)} x_1, x_1 - x_2)_X - j(x_1, x_2) + j(x_1, x_1) \leq (\mathbf{f}_1, x_1 - x_2)_X, \quad (2.83)$$

et

$$-(\tilde{A}_{\beta(t)} x_2, x_1 - x_2)_X - j(x_2, x_1) + j(x_2, x_2) \leq -(\mathbf{f}_2, x_1 - x_2)_X, \quad (2.84)$$

à addition (2.83) et (2.84) on a :

$$(\tilde{A}_{\beta(t)} x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)} x_2, x_1 - x_2)_X \leq (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, x_1 - x_2)_X + j(x_1, x_2) - j(x_1, x_1) + j(x_2, x_1) - j(x_2, x_2).$$

Combinons maintenant l'inéquation précédente avec les inégalités (2.79), (2.80) et (2.73) pour trouver

$$\min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) \|x_1 - x_2\|_X^2 \leq c \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_X \|x_1 - x_2\|_X + c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|x_1 - x_2\|_X^2,$$

ce qui mène à l'inégalité suivante

$$\|x_1 - x_2\|_X \leq \frac{c}{\min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) - c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}} \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_X. \quad (2.85)$$

Rappelons que $\mathbf{f} \in W^{1,\infty}([0, T]; X)$ et sous l'hypothèse de petitesse (2.82), il vient de (2.85) que l'application $t \mapsto x_\beta : [0, T] \rightarrow X$ est continue. C'est à dire

$$\mathbf{u}_\beta \in C([0, T]; V) \quad \text{et} \quad \varphi_\beta \in C([0, T]; W). \quad (2.86)$$

Ce qui termine la preuve du lemme 2.3.1

Étape ii : Nous supposons dans ce qui suit que $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \tilde{\mu}_0$ et, pour une fonction donnée $\beta \in \mathcal{Z}$, nous dénotons par $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta)$ la solution du problème $\mathcal{P}V^\beta$ obtenue dans

le Lemme [2.3.1](#) et nous considérons le problème de Cauchy suivant.

Problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$. Trouver un champ d'adhésion $\theta_\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\theta}_\beta(t) = -(\theta_\beta(t)(\gamma_\nu(R_\nu([u_{\beta\nu}(t)]))^2 + \gamma_\tau\|\mathbf{R}_\tau([u_{\beta\tau}(t)])\|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{p.p } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.87)$$

$$\theta_\beta(0) = \beta_0. \quad (2.88)$$

Nous obtenons le résultat suivant.

Lemme 2.3.2 *Il existe une solution unique au Problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$ qui vérifie*

$$\theta_\beta \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}.$$

Démonstration. Nous considérons l'application $F_\beta : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ défini par

$$F_\beta(t, \theta) = -(\theta_\beta(t)(\gamma_\nu(R_\nu([u_{\beta\nu}(t)]))^2 + \gamma_\tau\|\mathbf{R}_\tau([u_{\beta\tau}(t)])\|^2) - \epsilon_a)_+.$$

Soit $t \in [0, T]$ et $\theta \in L^2(\Gamma_3)$. Il s'ensuit d'après les propriétés des opérateurs de troncation R_ν et \mathbf{R}_τ que F_β est de Lipschitz par rapport à la seconde variable, uniformément en temps. De plus, pour tout $\theta \in L^2(\Gamma_3)$ l'application $t \mapsto F_\beta(t, \theta)$ appartient à $L^\infty([0, T]; L^2(\Gamma_3))$. Moyennant maintenant le Théorème [1.2.9](#), nous obtenons l'existence d'une fonction unique $\theta_\beta \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3))$ qui résout le problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$. Notons que la restriction $0 \leq \beta \leq 1$ est incluse implicitement dans le problème variationnel $\mathcal{P}V$.

En effet, la condition [\(2.24\)](#) nous garantit que $\beta(t) \leq \beta_0$ et donc l'hypothèse [\(2.17\)](#) montre que $\beta(t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, p.p. sur Γ_3 . D'un autre côté, si $\beta(t_0) = 0$ à $t = t_0$, alors il s'ensuit de [\(2.23\)](#) et [\(2.24\)](#) que $\dot{\beta}(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et donc, $\beta(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. sur Γ_3 . Nous concluons que $0 \leq \beta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. sur Γ_3 . Il résulte de la définition de l'ensemble \mathcal{Q} , que $\theta_\beta \in \mathcal{Q}$, ce qui conclut la preuve du lemme. Il s'ensuit du Lemme [2.3.2](#), que pour tout $\beta \in \mathcal{Z}$ la solution θ_β du problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$ appartient à \mathcal{Z} , voir [\(2.66\)](#).

Étape iii : Nous pouvons considérer l'opérateur $\mathbf{\Lambda} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ donné par

$$\mathbf{\Lambda}\beta = \theta_\beta. \quad (2.89)$$

Dans la dernière étape, nous allons prouver le résultat suivant.

Lemme 2.3.3 *Il existe un unique élément $\beta^* \in \mathcal{Z}$ tel que $\mathbf{\Lambda}\beta^* = \beta^*$.*

Démonstration. Supposons que β_1, β_2 , sont deux fonctions dans \mathcal{Z} . Nous utilisons les notations $\mathbf{u}_{\beta_i} = \mathbf{u}_i$, $\varphi_{\beta_i} = \varphi_i$ et $\theta_{\beta_i} = \theta_i$ les fonctions obtenues dans les Lemmes

(2.3.1) et (2.3.2) respectivement, pour $\beta = \beta_i$, $i = 1, 2$. Soit $t \in [0, T]$, nous utilisons des arguments semblables à ceux utilisés dans la preuve de (2.85) et l'inégalité (2.67) pour déduire que

$$\| \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t) \|_{\mathbf{V}} \leq c \| \beta_1(t) - \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)}. \quad (2.90)$$

Nous intégrons maintenant (2.87) avec l'état initial (2.88) pour obtenir :

$$\theta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t (\theta_i(s)(\gamma_\nu(R_\nu([u_{i\nu}(s)]))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([u_{i\tau}(s)])\|^2) - \epsilon_a)_+ ds.$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c \int_0^t \| \theta_1(s)(R_\nu([u_{1\nu}(s)]))^2 - \theta_2(s)(R_\nu([u_{2\nu}(s)]))^2 \|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \\ &\int_0^t \| \theta_1(s)\|\mathbf{R}_\tau([u_{1\tau}(s)])\|^2 - \theta_2(s)\|\mathbf{R}_\tau([u_{2\tau}(s)])\|^2 \|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de R_ν et \mathbf{R}_τ et écrivant $\theta_1 = \theta_1 - \theta_2 + \theta_2$ et après quelques opérations élémentaires, on trouve

$$\| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \theta_1(s) - \theta_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)} ds + c \int_0^t \| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds.$$

Moyennant une version des lemmes de Gronwall Corollaire (1.2.1), il s'ensuit que

$$\| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds,$$

et, en utilisant (1.39), nous obtenons

$$\| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \|_{\mathbf{V}} ds, \quad (2.91)$$

puis nous introduisons (2.89) dans l'estimation (2.91) pour trouver

$$\| \mathbf{\Lambda}\beta_1(t) - \mathbf{\Lambda}\beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \|_{\mathbf{V}} ds. \quad (2.92)$$

Nous combinons maintenant (2.90) avec (2.92) pour déduire

$$\| \mathbf{\Lambda}\beta_1(t) - \mathbf{\Lambda}\beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \beta_1(s) - \beta_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)} ds,$$

la réitération de cette dernière inégalité n fois nous permette d'écrire

$$\| \mathbf{\Lambda}^n \beta_1(t) - \mathbf{\Lambda}^n \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c^n \times \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} \| \beta_1 - \beta_2 \|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))} ds_n \cdots ds_1,$$

où $\mathbf{\Lambda}^n$ désigne le $n^{\text{ième}}$ puissance de l'opérateur $\mathbf{\Lambda}$. La dernière inégalité implique que

$$\| \mathbf{\Lambda}^n \beta_1 - \mathbf{\Lambda}^n \beta_2 \|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))} \leq \frac{c^n T^n}{n!} \| \beta_1 - \beta_2 \|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))}. \quad (2.93)$$

Pour n suffisamment grand, $\mathbf{\Lambda}^n$ est une contraction sur le sous-espace fermé \mathcal{Z} de l'espace de Banach $C([0, T]; L^2(\Gamma_3))$. Donc, d'après le théorème du point fixe (1.2.7), $\mathbf{\Lambda}^n$ admet un point fixe unique et par conséquent $\mathbf{\Lambda}$ admet un point fixe unique $\beta^* \in \mathcal{Z}$.

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du Théorème (2.3.1).

Démonstration.

Existence. Soit $\beta^* \in \mathcal{Z}$ le point fixe de $\mathbf{\Lambda}$ et soit $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_{\beta^*}, \varphi^* = \varphi_{\beta^*}$ où $(\mathbf{u}_{\beta^*}, \varphi_{\beta^*})$ est la solution du Problème $\mathcal{P}\mathbf{V}^\beta$ pour $\beta = \beta^*$. En utilisant les estimations (2.85), on déduit que.

$$\|x^*(t_1) - x^*(t_2)\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{c}{\min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) - c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}} \|\mathbf{f}(t_1) - \mathbf{f}(t_2)\|_{\mathbf{X}}. \quad (2.94)$$

pour tout $t_1, t_2 \in [0, T]$. Et puisque $\theta_{\beta^*} = \beta^*$ et d'après le lemme (2.3.2) nous déduisons que $\beta^* \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3))$. De la régularité de $\mathbf{f} = (f, q)$ donnée par (2.20)-(2.19) et l'estimation (2.94), nous obtenons $x^* \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathbf{X})$ i.e $\mathbf{u}^* \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathbf{V})$, $\varphi^* \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathbf{W})$. Nous concluons de (2.67), (2.68), (2.87) et (2.88), que $(\mathbf{u}^*, \varphi^*, \beta^*)$ est une solution du problème $\mathcal{P}\mathbf{V}$ et satisfait (2.61), (2.62), (2.63).

Unicité. L'unicité est une conséquence de l'unicité des problèmes $\mathcal{P}\mathbf{V}^\beta$ et $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$. Soit $(\mathbf{u}, \varphi, \beta)$ est une solution du problème $\mathcal{P}\mathbf{V}$ (2.44)-(2.47) ayant la régularité (2.61)-(2.63).

En utilisant les arguments à la remarque (1.1.1), on obtient $\beta \in \mathcal{Z}$, d'après (2.44) et (2.45), nous trouvons que (\mathbf{u}, φ) est une solution du problème $\mathcal{P}\mathbf{V}^\beta$, et du lemme (2.3.1), nous avons $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta)$ est une solution unique du problème $\mathcal{P}\mathbf{V}^\beta$. Donc

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\beta \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi_\beta. \quad (2.95)$$

Nous remplaçons $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\beta$ dans (2.46), on trouve que β est une solution du Problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$ et d'après le lemme (2.3.2), le problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$ admet une unique solution notée par θ_β , d'où

$$\beta = \theta_\beta. \quad (2.96)$$

Nous utilisons maintenant (2.96) et la définition de $\mathbf{\Lambda}$, on obtient $\mathbf{\Lambda}\beta = \beta$, c'est-à-dire β est le point fixe de $\mathbf{\Lambda}$ et comme β^* est l'unique point fixe de $\mathbf{\Lambda}$, on conclut

$$\beta = \beta^*. \quad (2.97)$$

L'unicité du théorème (2.3.1) est maintenant une conséquence des égalités (2.95) et (2.97).

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de contact avec adhésion et frottement entre deux corps en électro-élasticité.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème. Comme la frontière des corps et donné de problème ont de bonne régularité.

Donc, la solution du problème électro-mécanique et du problème variationnelle est la même.

On a montré l'existence et l'unicité de la solution des problèmes précédents par l'utilisation des arguments suivants : équation variationnelle dépendant du temps, équation variationnelle d'évolution, équation différentielle et point fixe.

Bibliographie

- [1] A. Amassad, M. Shillor, M. Sofonea, *A quasistatic contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Math. Meth. Appl. Sci, 22 (1999), 267-284.
- [2] L.E. Andersson, *A quasistatic frictional problem with normal compliance*, Nonlinear Analysis TMA 16 (1991), 407-428.
- [3] L.E. Andersson, *A global existence result for a quasistatic contact problem with friction*, Advances in Mathematical Sciences and Applications 5 (1995), 249-286.
- [4] R.C. Batra and J.S. Yang, *Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity*, J. of Elasticity, 38 (1995), 209-218.
- [5] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, 1987.
- [6] G. Duvaut and J.L. Lions, *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Springer-Verlag, Berlin (1976).
- [7] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*. C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 295 (1982), 913–916.
- [8] M. Frémond, *Adhérence des solides*, J. Mécanique Théorique et Appliquée, 6 (1987), 383-407.
- [9] M. Frémond, *Contact with adhesion. Dans Topics in nonsmooth mechanics (Edité par J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos, et G. Strang)*, Birkhauser Verlag, Basel (1988), 177-221.
- [10] T.Hadj ammar, B. Benabderrahmane and S. Drabla, *Mixed Önite element approximation for a contact problem in electro-elasticity*, Kuwait J. Sci, 42 (2015), 31-54.
- [11] T.Hadj ammar and B. Benabderrahmane, *Variational analysis of a contact problem with friction between two deformable bodies*, Stud. Univ. Babe, s-Bolyai Math. 57 (2012), No. 3, 427-444.
- [12] A. Klarbring, A. Mikelic, M. Shillor, *Frictional contact problems with normal compliance*, Int. J. Engng. Sci, 26 (1988), 811-832.

- [13] Z. Lerguet, *Analyse de Quelques Problèmes de Contact avec Frottement et Adhésion*. Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2008).
- [14] J. Nečas, *Les méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*, Masson, Paris (1967).
- [15] M. Raous, L. Cangémi, M. Cocou, *A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact*, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, 177 (1999), 383-399.
- [16] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics 276, Chapman- Hall/CRC Press, New York 2006.
- [17] M. Shillor, M. Sofonea, J.J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, Lect. Notes Phys. 655, 2004, Springer, Berlin Heidelberg.
- [18] Z. Zellagui, *Analyse Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact en Mécanique des Solides Déformables*, Thèse de Doctorat, Université de Sétif 1, Sétif, 2012.

Résumé

L'objet de ce mémoire est l'étude de problèmes en Mécanique de Contact avec frottement de Coulomb et adhésion pour des lois constitutives électro-élastiques. Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité d'une solution pour les problèmes étudiés. La mémoire structurée en deux parties. La première partie est consacrée à rappeler les différents modèles mécaniques de contact étudiés ainsi que quelques outils mathématiques nécessaires dans la mémoire. La deuxième partie est destinée à l'étude théorique des problèmes de contact électro-élastiques avec adhésion et frottement.

Mots-Clés : électro-élastiques, adhésion, frottement de Coulomb, inéquation d'évolution, inéquation quasi-variationnelle, solution faible, point fixe.

Abstract

The purpose of this work is the study of some problems in Contact Mechanics with Coulomb's friction and adhesion for electro-elastic constitutive laws. The results obtained concern the existence and uniqueness of weak solutions for the studied problems. The memory is structured into two parts. The first part is dedicated to recall different mechanical models of contact, as well as some necessary mathematical tools.

The second part is destined to the theoretical study of electro-elastic problems with adhesion and friction.

Key-words: electro-elasticity, adhesion, Coulomb's friction, evolutionary variational inequality, quasi-variational inequality, weak solution, fixed point.

ملخص

هدف هذه المذكرة هو دراسة مسألة تواصل باحتكاك كولومب والتلاصق في ميكانيك التماس لقوانين كهرومطاطية. النتائج المتحصل عليها تخص وجود و وحدانية الحل للمسألة المدروسة. المذكرة مكونة من جزأين. الجزء الأول مخصص للتذكير بمختلف النماذج الميكانيكية المدروسة و كذلك بعض الوسائل الرياضية الضرورية في هذه المذكرة. الجزء الثاني موجه لدراسة مسائل التماس الكهرومطاطية بالتصاق واحتكاك.

الكلمات المفتاحية : كهرومطاطية، التصاق، احتكاك كولومب، متباينة شبه تغيرية، متباينة تطور، الحل الضعيف، نقطة ثابتة.