



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Thème

**Axiomes de séparation dans les espaces
topologiques**

Présenté par : **BEN BORDI Talha Elkair**
KHOLLADI Faouzi
REHOUMA Abderraouf
ZEMALI Salim

Sous la supervision de :
Mr. HABITA Khaled **MA (A) Unvi. El-oued Rapporteur**

Remerciement

La louange est à Allah, qui nous a facilité l'accomplissement de ce travail de recherche chose que ne peut être qu'avec la volonté de Dieu -à lui la toute puissance et la majesté et que la louange initiale et finale appartient à allah, Seigneur des mondes

Aussi, il nous fait plaisir que nous, au commencement de ce travail, présentons nos grands remerciements, estimations et reconnaissances à notre encadreur puissant " ***Habita khaled*** " de nous avoir encourager moralement la durée de recherche et que ce travail est le fruit de ces encouragement

Nous présentons nos veridiques remerciements à tout personne, du proche ou du loin ,qui nous adonné un coup de main, à fin de terminer ce travail de recherche
En fin, nous remercions vivement nos familles pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation

"Que la Grace et la paix soient sur notre prophet Muhammad ainsi que sur sa famille et ses compagnons".

Table des matières

Introduction	2
Notations et coventions	2
1 Généralités sur les espaces topologiques	3
1.1 Espaces topologiques	3
1.2 Ouverts, fermés, voisinages	6
1.2.1 Fermés	6
1.2.2 Voisinages	10
1.2.3 Applications ouvertes, fermées	11
1.3 Applications continues	11
1.3.1 Continuité un point	14
1.3.2 Continuité globale	15
1.4 Comparaison de topologies	18
2 Types de topologies selon les axiomes de séparation	20
2.1 La séparation T_0 (espace de Kolmogorov)	20
2.1.1 Exemples et Contre exemples	21
2.1.2 Espaces non T_0	22
2.1.3 Propriétés	22
2.2 La séparation T_1 (espace accessible, ou de Fréchet)	23
2.2.1 Propriétés	23
2.2.2 Espaces T_0 mais pas T_1	24

2.3	Espaces à limite séquentielle unique	24
2.4	Espaces faiblement séparés	25
2.5	Espaces KC	25
2.6	La séparation T_2 (espace de Hausdorff)	26
2.7	La séparation $T_{2\frac{1}{2}}$ (espace complètement de Hausdorff)	27
2.8	La séparation $T_{2\frac{3}{4}}$ (espace d'Urysohn)	29
2.9	Séparation T_3 et espaces réguliers	30
2.10	Séparation $T_{3\frac{1}{2}}$ et espaces complètement réguliers (ou de Tychonov)	31
2.11	Séparation T_4 et espaces normaux	32
2.12	Séparation T_5 et espaces complètement normaux	33
2.13	La séparation $T_{5\frac{1}{2}}$ (espace parfaitement normal)	34
3	Théorèmes reliant les types de ces espaces	35
3.1	Introduction	35
3.2	Organisation des topologies par degré de séparation	35
	Bibliographie	33

Introduction générale

Dans ce mémoire on généralise la notion des espaces métriques : les espaces topologiques.

IL est bien connu leurs rôle fondamental dans tous l'analyse fonctionnelle.

Par exemple l'espace des distributions de L. Schwartz sa topologie n'est pas définie par une distance et donc on ne peut pas l'étudier dans le cadre des espaces métriques.

Cependant plusieurs propriétés topologiques dépendent de la distribution des ensembles ouverts et le degré de richesse de cet espace en ouverts.

Le premier chapitre, on peut le voir comme un chapitre introductif nécessaire pour le thème de ce mémoire, on va exposer les notions générales des espaces topologiques (ouvert, fermé, voisinage, frontière, continuité, ... ect) et on montre leurs liens avec les espaces métriques tous ceci est suivi par des exemples et quelques théorèmes remarquables avec leurs démonstrations.

Dans le deuxième chapitre on va aborder notre sujet et on présentent les différents types de topologies selon leurs "capacité à séparer les points" et donc selon des axiomes qu'on appelle : *axiomes de séparation*.

Chaque type de ces topologies est clarifié par divers exemples et remarques qui aident à distinguer ces topologies et donnent une idée concrète de leurs structures.

Dans le troisième chapitre on présente les différents théorèmes qui lient ces topologies

Chapitre 1

Généralités sur les espaces topologiques

Dans ce chapitre, nous allons définir le concept de topologie en général, et passer en revue plusieurs moyens de se donner une topologie sur un ensemble X quelconque. Nous généralisons ensuite les notions étudiées dans les espace métriques, telles que espaces ouverte et fermée et voisinage, la frontière d'un ensemble, et les applications continues.

1.1 Espaces topologiques

On commence par une définition fondamentale.

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble et désignons par $P(X)$ l'ensemble des ses parties.*

Une topologie sur X est un sous-ensemble $\tau \subset P(X)$ (c'est-à-dire : τ est un certain ensemble de parties de X), qui vérifie :

- (1) $\emptyset, X \in \tau$
- (2) Si $\{U_i\}_{i \in I} \subset \tau$, alors $\cup_{i \in I} U_i \in \tau$.
- (3) Si $U_1, \dots, U_N \in \tau$, alors $\cap_{j=1}^N U_j \in \tau$

Les éléments de τ sont appelés les ouverts de la topologie; les conditions (1), (2) et (3) ci-dessus sont les axiomes d'une topologie. On peut donc rephraser cette définition en disant

qu'une topologie est une collection de sous-ensembles de X , appelés ouverts, qui doivent vérifier que

- (1) L'ensemble vide et X sont ouverts
- (2) Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert
- (3) Une intersection finie d'ouvert est un ouvert

On écrira parfois (X, τ) pour préciser que l'on considère l'ensemble X muni de la topologie τ .

Voici quelques exemples; les trois premiers sont plutôt formels, le quatrième est un exemple plus substantiel.

Exemple 1.1.1

(1) X un ensemble quelconque, $\tau = \{\emptyset, X\}$. On l'appelle topologie grossière; elle contient le minimum possible d'ouverts. Les axiomes de topologie sont trivialement satisfaits.

(2) X un ensemble quelconque, $\tau = P(X)$. On l'appelle topologie discrète; elle contient le minimum possible d'ouverts. Les axiomes de topologie sont évidemment satisfaits.

(3) $X = \{0, 1\}$, $\tau = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$. Ce n'est ni la topologie discrète, ni la topologie grossière. On vérifie facilement que les axiomes de topologie sont satisfaits. Cet espace est appelé espace de Sirpinski.

(4) On considère $\mathbb{R}^2$, muni de la distance euclidienne

$$x, y \in \mathbb{R}^2, d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

et on définit la boule ouvert de centre x , rayon $r > 0$ par :

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, y) < r\}$$

On définit une topologie τ en disant que $U \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert si :

$$\forall x \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset U$$

Voyons que les axiomes d'une topologie donnés dans 1.1.1 sont satisfaits :

(1) Est immédiat

(2) Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ des éléments de τ , pour tout $x \in \cup_{i \in I} U_i$, il existe i_0 tel que $x \in U_{i_0}$.

Comme U_{i_0} est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_{i_0}$, donc $x \in B(x, r) \subset U_{i_0} \subset \cup_{i \in I} U_i$. Ceci montre bien que $\cup_{i \in I} U_i \in \tau$.

(3) Soient $U_1, \dots, U_N \in \tau$, si $x \in \cap_{j=1}^N U_j$, pour tout $j = 1, \dots, N$ il existe $r_j > 0$ tel que $x \in B(x, r_j) \subset U_j$. On pose $r = \{r_1, \dots, r_N\} > 0$, et alors $x \in B(x, r) \subset U_j$. $\forall j = 1, \dots, N$, donc $x \in B(x, r) \subset \cap_{j=1}^N U_j$. Ceci montre bien que $\cap_{j=1}^N U_j \in \tau$.

(5) L'exemple précédent se généralise sans autres à $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$: on définit la distance euclidienne par

$$x, y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

et la boule ouverte de centre x et rayon $r > 0$ par

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\}$$

La topologie correspondante sur $\mathbb{R}^n$ est définie en disant que $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert si

$$\forall x \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset U$$

(6) Topologie induite sur un sous-ensemble. Soit (X, τ_X) un espace topologique et $A \subset X$ un sous-ensemble.

On définit une topologie τ_A sur A en posant :

$$\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau_X\}$$

Autrement dit, on prend comme ouvert de A les intersections d'ouvert de X avec A .

1.2 Ouverts, fermés, voisinages

En plus des ouverts, il y a d'autres sous-ensembles qui jouent un rôle pour un espace topologique, les fermés et les voisinages des points, à l'aide desquels on peut aussi exprimer la continuité d'une application. En fait il y a plusieurs façons équivalentes de se donner une topologie : en se donnant la famille des ouverts, comme on l'a fait déjà, ou bien en se donnant des fermés, ou encore les voisinages de chaque point.

1.2.1 Fermés

Définition 1.2.1 (*Sous-ensembles fermés*). Soit (X, τ) un espace topologique. On dit que $A \subset X$ est fermé si $X \setminus A$ est ouvert.

Exemple 1.2.1 Soit (X, d) une espace métrique, et considérons la topologie associée à cette métrique. Alors, si $x \in X$, le sous-ensemble de X réduit au point x , que l'on note $\{x\}$, est fermé. En effet, si $x' \in X \setminus \{x\}$, cela veut dire que $x' \neq x$ et alors $B_d(x, d(x, x')) \subset X \setminus \{x\}$, ce qui montre que $X \setminus \{x\}$ est ouvert, donc $\{x\}$ est fermé.

Proposition 1.2.1 (*Propriétés fondamentales des fermés*). Soit (X, τ) un espace topologique.

- (1) $\emptyset$ et X sont fermés
- (2) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ est une famille de fermés, alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ est un fermé
- (3) Si $A_1, \dots, A_N \in X$ sont fermés, alors $\bigcup_{h=1, \dots, N} A_h$ est fermé

La preuve consiste à passer aux complémentaires et utiliser les points correspondants de la définition 1.1.1. La notion d'adhérence (on dit aussi fermeture) permet de mieux comprendre la notion de fermé.

Définition 1.2.2 (*Adhérence d'un sous-ensemble*)

Soit (X, τ) un espace topologique et $A \subset X$. On définit l'adhérence ou fermeture $\bar{A}$ de A par :

$$\bar{A} = \{x \in X \mid \text{si } U \in \tau \text{ et } x \in U \text{ alors } U \cap A \neq \emptyset\}$$

Autrement dit, x est dans l'adhérence de A si tout ouvert U qui contient x rencontre A . Evidemment, $A \subset \bar{A}$. Si on prend par exemple $A = [0, 1[\subset \mathbb{R}$, $\bar{A} = [0, 1]$.

Proposition 1.2.2 (*Propriétés de l'adhérence*).

Soit (X, τ) un espace topologique et $A \subset X$.

- (1) $\bar{A}$ est fermé
- (2) A est fermé $\iff A = \bar{A}$.
- (3) Si $A \subset B$, alors $\bar{A} \subset \bar{B}$.
- (4) $\bar{A}$ est le plus petit fermé qui contient A : $\bar{A}$ est fermé et si $F \subset X$ est fermé et $F \supset A$, alors $F \supset \bar{A}$.
- (5) $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$

Preuve:

(1) Si $U \subset X$ est ouvert et $U \cap \bar{A} \neq \emptyset$, alors $U \cap A \neq \emptyset$; en effet, si $x \in U \cap \bar{A}$, il suit de la définition de $\bar{A}$ que $U \cap A \neq \emptyset$. Si $x \in X \setminus \bar{A}$, cela veut dire qu'il existe un ouvert U_x tel que $U_x \cap A = \emptyset$, $x \in U_x$; mais alors $U_x \cap \bar{A} \neq \emptyset$, et donc $x \in U_x \subset X \setminus \bar{A}$, ce qui fait que $X \setminus \bar{A} = \bigcup_{x \in X \setminus \bar{A}} U_x$ est réunion d'ouverts, donc ouvert.

(2) Si A est fermé alors $U = X \setminus A$ est ouvert, et $U \cap A \neq \emptyset$; donc si $x \in U$, $x \notin \bar{A}$, et il en suit que $A = \bar{A}$.

La réciproque résulte de (1).

(3) Si $x \in \bar{A}$ et $x \in U$, $U \subset X$ ouvert, alors $U \cap \bar{B} \supset U \cap A \neq \emptyset$, et donc $x \in \bar{B}$.

(4) Si $F \subset X$ est fermé et $A \subset F$, alors d'après ce qui précède $\bar{A} \subset \bar{F} = F$.

(5) $\bar{A}$ est fermé d'après (1), donc $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ d'après (2).

C'est à cause de la propriétés (4) ci-dessus, que l'on appelle $\bar{A}$ la fermeture de A .

A l'aide de la notion de limite d'une suite dans un espace métrique, qui limite la notion analogue dans $\mathbb{R}^n$, on peut donner une caractéristion utile de l'adhérence dans ces espaces.

Définition 1.2.3 (*Limite d'une suite*).

Soit (X, d) un espace métrique et $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ une suite dans X et $a \in X$. On dit que la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers a , ou bien qu'elle possède a pour limite, noté $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ si :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } (n \geq N_\epsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon)$$

Proposition 1.2.3 (*Adhérence dans les espace métrique*). Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Alors

$$\bar{A} = \{x \in X \mid \text{il existe une suite } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x\}$$

Preuve : Si $x \in \bar{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap A$ et il calir que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$. Si $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ et $r > 0$, $B(a, r) \supset \{a_n \mid n \geq N_r\}$ et donc $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$.

la continuité peut s'exprimer en termes de fermés :

Proposition 1.2.4 Soient (X, τ_X) et (Y, τ_Y) . deux espace topologique et $f : X \rightarrow Y$ une application. On a :

$$f : X \rightarrow Y \text{ est continue} \iff \forall F \subset Y \text{ fermé de } Y, f^{-1}(F) \subset X \text{ est fermé (dans } X)$$

Preuve: Si $F \subset Y$ est fermé, $Y \setminus F$ est ouvert, et il résulte que $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ est ouvert et donc $f^{-1}(F)$ est fermé.

Exemple 1.2.2 Le sous-ensemble $\{0\} \subset \mathbb{R}$ est fermé d'après 1.2.1. Donc, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, $f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ est fermé. Si on reprend la fonction

$$f(a_1, a_2, b_1, b_2) = a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que l'ensemble des paires de vecteurs $a, b \in \mathbb{R}^2$ qui sont linéairement dépendants est un fermé.

Il suit alors de la proposition 1.2.4 que si on a deux suites de vecteurs $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$ telles que a_n et b_n sont linéairement dépendants (c'est -à-dire $f(a_n, b_n) = 0$), alors si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, on a encore que a et b sont linéairement dépendants.

On peut définir de manière symétrique à l'adhérence, l'intérieur d'un sous-ensemble A d'un espace topologique X par

$$\text{int}(A) = \{x \in A \mid \exists U_x \subset A, U_x \text{ ouvert et } x \in U_x\}$$

Il suit de cette définition que $\text{int}(A)$ est le complémentaire de l'adhérence du complémentaire de A . On a des propriétés symétriques de celles de 1.2.2 : $\text{int}(U)$ est ouvert, A est ouvert si et seulement si $A = \text{int}(A)$, $\text{int}(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A , et $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$.

Frontière d'un sous-ensemble

Définition 1.2.4 Soit X un espace topologique et $A \subset X$. On définit la frontière, ou bord, de A ainsi :

$$\text{Fr}(A) = \{x \in X \mid \forall U_x \subset A, U_x \text{ ouvert t.q. } x \in U_x, U_x \cap A \neq \emptyset \text{ et } U_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$$

On utilise aussi les notations ∂A ou $\dot{A}$ pour désigner la frontière (ou bord) de A .

(1) Soit $X = \mathbb{R}^2$ et $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Alors

$$\partial B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

(2) Prenons encore $X = \mathbb{R}^2$, mais $A = \bar{B}(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. On a encore

$$\partial \bar{B}(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

(3) Si $X = \mathbb{R}^2$ et $A = B(0, 1) \cup \{(2, 0)\}$:

$$\partial A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(2, 0)\}$$

Proposition 1.2.5 Soit X un espace topologique et $A \subset X$.

$$(1) \partial A = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$$

(2) ∂A est fermé dans X

$$(3) \bar{A} = \partial A \cup \text{int}(A)$$

Preuve: (1) Résulte immédiatement de la définition de ∂A et (2) est une conséquence de (1).

Pour (3), remarquons que $\bar{A} \supset \partial A$ et $\bar{A} \supset A \supset \text{int}(A)$, donc $\bar{A} \supset \partial A \cup \text{int}(A)$. D'autre part, si $x \in \bar{A}$ et U_x est un ouvert contenant x , alors $U_x \cap A$, et si $x \notin \text{int}(A)$, nécessairement $U_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, donc $x \in \partial A$; il en suit que $\bar{A} \subset \partial A \cup \text{int}(A)$, et donc finalement $\bar{A} = \partial A \cup \text{int}(A)$.

1.2.2 Voisinages

Définition 1.2.5 Soit (X, τ) un espace topologique, $x \in X$. On dit que $V \subset X$ est un voisinage de x s'il existe un ouvert U_x tel que $x \in U_x \subset V$. On note V_x l'ensemble des voisinage de x .

Proposition 1.2.6 (Propriétés fondamentales des voisinage).

- (1) Si $V \in V_x$ et $V' \supset V$, alors $V' \in V_x$.
- (2) Si $V_1, \dots, V_N \in V_x$, alors $V_1 \cap \dots \cap V_N \in V_x$.
- (3) Si $V \in V_x$, il existe $U \subset V$, $U \supset x$, tel que $U \in V_{x'}, \forall x' \in U$.

Preuve: (1) Si $V \in V_x$, $\exists U$ ouvert, $x \in U \subset V$, et donc $x \in U \subset V \subset V'$, ce qui fait que $V' \in V_x$.

(2) Si $V_1, \dots, V_N \in V_x$, il existe U_h , $h = 1, \dots, N$ tels que $x \in U_h \subset V_h$, $h = 1, \dots, N$, et donc $U_1 \cap \dots \cap U_N \subset V_1 \cap \dots \cap V_N$ et comme $U_1 \cap \dots \cap U_N$ est un ouvert, cela montre que $V_1 \cap \dots \cap V_N \in V_x$.

(3) Si $V \in V_x$, on sait qu'il existe U ouvert tel que $x \in U \subset V$. Du fait que U est ouvert, $U \in V_{x'}, \forall x' \in U$.

Remarquons que dire que $U \subset X$ est ouvert revient à dire que $U \in V_x, \forall x \in U$; cela permet de retrouver la famille des ouverts à partir de la famille des voisinage $V_x, x \in X$.

A l'aide des voisinage, on peut caractériser la continuité d'une application en un point :

Remarque 1.2.1 On note souvent $V(x)$ l'ensemble des voisinages de x .

1.2.3 Applications ouvertes, fermées

On a vu dans qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si pour tout ouvert V de Y , $f^{-1}(V)$ est ouvert dans X , et dans 1.2.4 un résultat analogue pour les fermés. On a vu aussi dans l'exemple qu'en général l'image directe d'un ouvert par une application continue n'est pas un ouvert.

Il en est même pour les fermés; par exemple, si $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dénote l'application $p_1(x_1, x_2) = x_1$, si on prend le fermé $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \cdot x_2 - 1 = 0\}$, $p_1(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, qui n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.6 (*Applications ouvertes, fermées*). Soient X et Y des espaces topologique. On dit que l'application $f : X \rightarrow Y$ est ouvert si

$$\forall U \subset X \text{ ouvert, } f(U) \text{ est ouvert dans } Y$$

On dit que f est fermée si

$$\forall U \subset X \text{ fermé, } f(U) \text{ est fermé dans } Y$$

1.3 Applications continues

La notion d'application continue entre espaces topologiques joue un rôle central en topologie. Nous définirons d'abord la continuité d'une application en un point, et la continuité globale.

Définition 1.3.1 Soient (X, τ_X) et (Y, τ_Y) deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application et $x \in X$, $y = f(x)$. On dit que f est continue au point x si :

$$\forall V \in \tau_Y, V \ni y, \exists U \in \tau_X, x \in U \text{ et } f(U) \subset V$$

Autrement dit, pour tout ouvert V de Y contenant y , on peut trouver un ouvert U de X contenant x , dont l'image par f est contenue dans V .

On dit que f est continue (tout court) si elle est continue pour tout $x \in X$.

Montrons que dans le cas des espace métrique, en particulier $\mathbb{R}^n$ avec la métrique euclidienne, on retrouve la définition classique de continuité.

Exemple 1.3.1 (1) *On retrouve évidemment toutes les fonctions continues au sens classique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ou de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, telles que $x \rightarrow x^2$, $\sin(x)$, $(x, y) \rightarrow x^2 + y^2$.*

(2) Si X est muni de la topologie discrète, toute application $f : X \rightarrow Y$ est continue.

(3) Si Y est muni de la topologie grossière, toute application $f : X \rightarrow Y$ est continue.

(4) Une application constante $f : X \rightarrow Y$ est toujours continue : si $f(X) = \{y_0\}$, $f^{-1}(V)$ est soit X , si $y_0 \in V$, soit vide, si $y_0 \notin V$.

(5) La continuité d'une application dépend des topologies des topologie que l'on considère. Par exemple, soit $X = \{0, 1\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}\}$, L'application identité $id : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_1)$ est évidemment continue, alors que la même application, mais avec des topologies différentes $id : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ n'est pas continue au point 1, car $id^{-1}(\{1\}) = \{1\}$. qui n'est pas ouvert pour τ_1 ; par contre, elle est continue au point 0.

Remarque 1.3.1 *Il faut faire attention à l'ambiguïté de la notation f^{-1} , où $f : X \rightarrow Y$ est une application. D'une part, sans aucune hypothèse sur f , on peut définir une application, que l'on note f^{-1} , qui va des parties de Y dans les parties de X , et qui à $B \subset Y$ associe son image inverse par f :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

D'autre part, si l'on suppose que f est bijective, son inverse est une vraie application de Y dans X , que l'on note aussi $f^{-1} : X \rightarrow Y$. Notons que si $B \subset Y$, l'image de B par f^{-1} , notée $f^{-1}(B)$, coïncide avec l'image inverse par f de B , notée aussi $f^{-1}(B)$.

La continuité globale d'une application revient à dire qu'elle respecte les topologies par image inverse, c'est-à-dire :

Proposition 1.3.1 Soient X et Y des espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. Alors

$$f \text{ est continue} \iff \forall V \in \tau_Y, f^{-1}(V) \in \tau_X$$

Preuve : Si $f : X \rightarrow Y$ est continue et $V \subset Y$ est ouvert, soit $U = f^{-1}(V)$ et $x \in U$.

Puisque f est continue au point x , il existe U_x ouvert dans X , $U_x \in x$, tel que $f^{-1}(U_x) \subset V$,

ce qui implique que $U_x \subset f^{-1}(V) = U$. Alors $f^{-1}(V) = U = \bigcup_{x \in U} U_x$ est une réunion

d'ouverts, donc ouvert.

Réciproquement, soit $x \in X$ et $V \in f(x)$ un ouvert de Y ; alors par hypothèse $U = f^{-1}(V)$ est un ouvert de X , et $x \in U$, $f(U) \subset V$, f est donc continue au point x au sens de 1.3.1.

Remarque 1.3.2 (1) Il suit de cette proposition que si $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ est continue et que l'on remplace τ_X , et τ_Y par des topologies τ'_X, τ'_Y , avec τ'_X plus fine que τ_X et τ'_Y moins fine que τ_Y , soit en symboles $\tau'_X \supset \tau_X$ et $\tau'_Y \subset \tau_Y$, alors $f : (X, \tau'_X) \rightarrow (Y, \tau'_Y)$ est encore continue.

(2) En général, l'image directe d'un ouvert par une application continue n'est pas un ouvert. Par exemple, prenons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; alors $f(]-1, 1[) = [0, 1[$, qui n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.3.2 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. L'ensemble $U = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\}$ est ouvert, car si $y \neq 0$, la boule $B(y, |y|)$, qui est égale à $]0, 2y[$ si $y > 0$, et sinon à $]-2y, 0[$, est contenue dans U . Il en suit que l'ensemble $U = f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ est ouvert. Par exemple, soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(a_1, a_2, b_1, b_2) = a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Le fait que $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) \neq 0\}$ est ouvert a pour conséquence que si $a = (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ sont deux vecteurs linéairement indépendants, ce qui équivaut à dire que, alors les paires de vecteurs proches de (a, b) le sont aussi.

Voici quelques propriétés générales des applications continues.

Proposition 1.3.2 Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des applications continues.

(1) La composition $g \circ f : X \rightarrow Z$ est continue.

(2) Soit $A \subset X$; si on munit A de la topologie induite par celle de X , la restriction $f|_A$ de f à A est continue.

(3) Soit $B \subset Y$ tel que $f(X) \subset B$. Si on munit B de la topologie induite, $f : X \rightarrow B$ est continue.

Preuve : (1) Si $W \in \tau_Z$, $g^{-1}(W) \in \tau_Y$ car g est continue, donc $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ est dans τ_X car f est continue.

(2) Si $V \in \tau_Y$, $(f|_A)^{-1}(V) = (f)^{-1}(V) \cap A$, et $(f)^{-1}(V)$ est ouvert dans X car f est continue et alors $(f)^{-1}(V) \cap A$ est ouvert dans A par définition de la topologie induite.

(3) Il suffit de remarquer que, puisque $f(X) \subset B$, si $V \in \tau_Y$, $f^{-1}(V) = f^{-1}(B \cap V)$.

1.3.1 Continuité en un point

Une fonction f est continue en a quand elle admet $f(a)$ comme limite en a .

Définition 1.3.2 Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a . On dit que f est :

1. Continue en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Soit :

$$\forall \epsilon > 0, \forall \eta > 0, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

2. Continue à gauche en a si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Soit :

$$\forall \epsilon > 0, \forall \eta > 0, 0 \leq a - x \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

3. Continue à droite en a si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Soit :

$$\forall \epsilon > 0, \forall \eta > 0, 0 \leq x - a \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

Proposition 1.3.3 *La fonction f qui à x associe $\frac{1}{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.*

Démonstration : Soit a un réel non nul. Soit $\epsilon > 0$. Notons

$$\eta = \min\{\epsilon a^2/2, |a|/2\}$$

Si $|x - a| \leq \eta$, alors $|x| \geq |a|/2$ donc :

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x - a|}{|x||a|} \leq \frac{|x - a|}{a^2/2}$$

Donc $|x - a| \leq \eta$, $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$. Les fonctions constantes, ainsi que la fonction identité $x \mapsto x$ sont évidemment continues en tout point de $\mathbb{R}$.

1.3.2 Continuité globale

Définition 1.3.3 *Soit E et F deux espaces topologiques et $f : E \rightarrow F$. On dit que f est continue sur E si et seulement si f est continue en tout point de E .*

f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E .

f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de f fermé tout de F est un fermé de E .

Remarque 1.3.3 Supposons f continue. Soit O un ouvert de F . Si $f^{-1}(O)$ est vide alors c'est un ouvert. Sinon, soit x un point quelconque de $f^{-1}(O)$. Comme O est un ouvert qui contient $f(x)$, c'est un voisinage de $f(x)$. Par continuité de f en x , il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $f(V) \subset O$. On en déduit que $V \subset f^{-1}(O)$ et donc $f^{-1}(O)$ est un voisinage de chacun de ses points.

Réciproquement, soit $x \in E$, on montre la continuité de f en x . Soit O un voisinage ouvert de $f(x)$ (rappelons que les ouverts contenant a forment un SFV de a). Alors $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E contenant x , c'est donc un voisinage de x . Or $f(f^{-1}(O)) \subset O$, donc f est continue en x .

Comme $f^{-1}(F \setminus O) = E \setminus f^{-1}(O)$, on en déduit facilement la proposition pour les fermés.

Soient E, F et G trois espaces topologiques, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions et $a \in E$. Si f est continue sur E et g est continue sur F alors $g \circ f$ est continue sur E .

Là encore, la proposition suivante est évidente et souvent utilisée.

Soient E et F deux espaces topologiques, $f : E \rightarrow F$ une fonction, $E' \subset E$ et $f(E') \subset F$. Si f est continue sur E , alors $\bar{f} : E' \rightarrow F'$ définie par $\bar{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in E'$ est aussi continue sur E' (où E' et F' sont munis des topologies induites par celles de E et F).

1) Si E est un espace topologique, $F = \mathbb{R}$ et f est continue sur E . Alors $\{x \in E / f(x) \geq \alpha\}$ et $\{x \in E / f(x) = \alpha\}$ sont des fermés de E , $\{x \in E / f(x) > \alpha\}$ est un ouvert de E .

2) $f : x \in \mathbb{R}^* \rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $[1, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$. $f^{-1}([1, +\infty[) =]0, 1]$ est bien un fermé de $\mathbb{R}^*$ (mais pas de $\mathbb{R}$, mais cela ne contredit pas la théorie car f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$).

Remarque 1.3.4 Attention, l'image directe d'un ouvert par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert (de même pour les fermés). Par exemple on a $\sin(]-10, 13]) = [-1, 1]$ alors que le sinus est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite ouverte si et seulement si l'image de tout ouvert de E est un ouvert de F .

Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite fermée si et seulement si l'image de tout fermé de E est un fermé de F .

Soit E_1 et E_2 deux espaces topologiques et $E = E_1 \times E_2$ muni de la topologie produit. Soit $\pi_1 : E_1 \times E_2 \rightarrow E_1$ la fonction définie par $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$. Pour tout ouvert O de E_1 , $\pi_1^{-1}(O) = O \times E_2$ est un ouvert (élémentaire) de $E_1 \times E_2$, donc π_1 est continue.

Montrons que π_1 est ouverte: Soit O un ouvert de $E_1 \times E_2$, alors $O = \cup_{i \in I} \Omega_i$ où les Ω_i sont des ouverts élémentaires, i.e. de la forme $U_i \times V_i$ où U_i est un ouvert de E_1 . On en déduit que $\pi_1(O) = \cup_{i \in I} \pi_1(\Omega_i) = \cup_{i \in I} \pi_1(U_i \times V_i) = \cup_{i \in I} U_i$ et donc $\pi_1(O)$ est un ouvert de E_1 comme réunion d'ouverts de E_1 . π_1 est donc bien ouvert.

Rappelons les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\cup_i B_i) &= \cup_i f^{-1}(B_i) & f^{-1}(\cap_i B_i) &= \cap_i f^{-1}(B_i) \\ f(\cup_i B_i) &= \cup_i f(B_i) & f(\cap_i B_i) &= \cap_i f(B_i) \end{aligned}$$

$f : E \rightarrow F$ est un homéomorphisme si et seulement si est continue, bijective et f^{-1} est continue. On dit que E et F sont homéomorphes si et seulement si il existe un homéomorphisme de E sur F .

Si $f : E \rightarrow F$ est un homéomorphisme et $g : F \rightarrow G$ est un homéomorphisme alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est un homéomorphisme.

Soit (E, θ_E) et (F, θ_F) deux espaces topologiques. Si $f : E \rightarrow F$ est un homéomorphisme, alors $f(\theta_E) = \{f(U), U \in \theta_E\} = \theta_F$ (i.e. l'image de tout ouvert de E est un ouvert de F et tout ouvert de F est l'image d'un ouvert de E).

De même, f réalise une bijection entre les fermés de E et les fermés de F .

Preuve. Si $U \in \theta_E$ et $g = f^{-1}$, alors $f(U) = g^{-1}(U)$ est un ouvert de F car g continu et donc $f(\theta_E) \subset \theta_F$. Si $V \in \theta_F$ alors $U = f^{-1}(V) \in \theta_E$ (car f est continue) et $f(U) = V$ donc $f(\theta_E) \supset \theta_F$.

Si E et F sont deux espaces topologiques et si $f : E \rightarrow F$ est un homéomorphisme, alors pour tout $A \subset E$, la fonction $g = f|_A$ est un homéomorphisme de A sur $f(A)$ munis des topologies induites par celles de E et F . ■

Preuve. g est bien une bijection de A sur $f(A)$ et g et g^{-1} sont continue comme restrictions de fonctions continues.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $\mathbb{R},]a, +\infty[,]-\infty, b[$ et $]a, b[$ munis de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

$f(x) = x + a - a'$ est un homéomorphisme de $]a', +\infty[$ sur $]a, +\infty[$

$f(x) = -x$ est un homéomorphisme de $]0, +\infty[\text{ sur }]-\infty, 0[$

$f(x) = a' + (b' - a') \frac{x-a}{b-a}$ est un homéomorphisme de $]a, b[\text{ sur }]a', b'[$

$f(x) = 1/x$ est un homéomorphisme de $]0, 1[\text{ sur }]1, +\infty[$

$f(x) = \arctan(x)$ est un homéomorphisme de $] -\pi/2, \pi/2[\text{ sur } \mathbb{R}$. ■

Une fonction f peut-être continue et bijective sans que f^{-1} soit continue. Par exemple

$$[0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

$$x \rightarrow e^{ix}$$

Est un bijective continue mais f^{-1} n'est pas continue (car si $x_n = e^{i(2\pi - \frac{1}{n})}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = 1$ et $f^{-1}(x_n) = 2\pi - \frac{1}{n}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x_n) = 2\pi \neq 0 = f^{-1}(1)$).

1.4 Comparaison de topologies

Définition 1.4.1 Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur un ensemble X .

On dit que τ_2 est plus fine que τ_1 (ou bien que τ_1 est moins fine que τ_2) et on note $\tau_1 \subseteq \tau_2$ si l'application identité $id_X : (X, \tau_2) \rightarrow (X, \tau_1)$ est continue.

Si de plus $\tau_1 \neq \tau_2$, on dit que τ_2 est strictement plus fine que τ_1 (ou bien que τ_1 est strictement moins fine que τ_2).

La relation binaire $\subseteq$ définit une relation d'ordre partiel sur l'ensemble de toutes les topologies possibles sur X .

Exemple 1.4.1 La topologie la plus fine sur X est la topologie discrète; dans cette topologie, tous les sous-ensembles sont ouverts. La topologie la plus faible sur X est la topologie grossière; cette topologie admet uniquement l'ensemble vide et l'ensemble tout entier comme ouverts. Dans les espaces de fonctions et les espaces de mesures, il existe un grand nombre de topologies possibles. Par exemple, l'espace des fonctions continues définies sur l'intervalle unité $[0, 1]$ peut être doté de la topologie de la convergence simple ou de topologie de la convergence uniforme: la seconde est plus fine que la première.

Proposition 1.4.1 Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur un ensemble X . Les propositions suivantes sont équivalentes: $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

L'application identité $\text{id}_X : (X, \tau_2) \rightarrow (X, \tau_1)$ est continue.

L'application identité $\text{id}_X : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ est une application ouverte (ou, de manière équivalente, une application fermée).

Pour tout $x \in X$, tout voisinage de x pour τ_1 est un voisinage de x pour τ_2 .

Pour toute partie A de X , l'adhérence de A pour τ_2 est contenue dans l'adhérence de A pour τ_1 .

Toute partie de X fermée pour τ_1 est fermée pour τ_2 .

Toute partie de X ouverte pour τ_1 est ouverte pour τ_2 .

Chapitre 2

Types de topologies selon les axiomes de séparation

Nous avons étudié dans le précédent concept d'espace de topologie sans imposer de restrictions sur les éléments de cet espace, mais dans le but d'obtenir des résultats plus vastes et on doit mettre des conditions ou hypothèses sur les espaces topologiques en séparant les deux points, ou deux, ou un point et définir l'espace de topologie par des ouverts dans cette section, nous allons examiner les espaces T_0 , T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , T_5 , $T_{3\frac{1}{2}}$ et étudier un grand nombre de propriétés de ces espaces.

Ainsi il sera possible d'obtenir des meilleurs résultats et des caractéristiques plus puissantes qui vont nous aider à démontrer la plupart des théories d'espaces topologiques.

2.1 La séparation T_0 (espace de Kolmogorov)

Définition 2.1.1 Soit (X, τ) un espace topologique. On dit qu'il est T_0 si on a la condition suivante:

$$\forall x, y \in X, \quad x \neq y \implies \exists U \in \tau : (x \in U \text{ et } y \notin U) \text{ ou } (y \in U \text{ et } x \notin U)$$

En d'autres termes, pour deux points différents dans X il existe un ouvert U contenant l'un d'eux et ne contenant pas l'autre.

L'espace intermittent (X, D) est un espace T_0 où chaque $x, y \in X$, $x \neq y$ un ensemble ouvert $\{x\}$ donc $x \in \{x\}$, $y \notin \{x\}$. Alors que l'espace faible (X, I) ne est pas l'espace T_0 où il ya un seul est X et contient tous les éléments.

Exemple 2.1.1 Supposons que $X = \{a, b, c, d\}$ et τ une topologie sur X où $\tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Il est facile de remarquer que (X, τ) est T_0 parce que:

$$\begin{aligned} a &\neq b, \exists \{b\} \in \tau, b \in \{b\}, a \notin \{b\}, \\ b &\neq c, \exists \{b\} \in \tau, b \in \{b\}, c \notin \{b\}, \\ c &\neq d, \exists \{b, c\} \in \tau, c \in \{b, c\}, d \notin \{b, c\}, \\ d &\neq a, \exists \{b, c\} \in \tau, a \in \{a, b\}, d \notin \{a, b\}, \\ a &\neq c, \exists \{a, b\} \in \tau, a \in \{a, b\}, c \notin \{a, b\}, \\ b &\neq d, \exists \{b\} \in \tau, b \in \{b\}, a \notin \{b\}, \end{aligned}$$

Il ya deux points et est différent pour chaque jeu ouvert contenant l'un d'eux ne contient pas l'autre, alors (X, τ) un espace de T_0 .

Exemple 2.1.2 Supposons que $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$. Topologie sur τ est facile de remarquer que (X, τ) ne est pas l'espace T_0 où $c \neq d$ avec il n'y avait pas ouvert contient une ne contient pas l'autre, où le seul groupe ouvert est X et contiennent à la fois.

Est suppléments d'espace clos (X, C) espace T_0 .

Exemple 2.1.3 Supposons que $x, y \in X$, $x \neq y$ de la définition de la topologie C de $C = \{\emptyset, U \subseteq X : U^C \text{ finite}\}$

Nous constatons que $\{x\}$ groupe fini et donc $U = X - \{x\} \in C$ est un groupe est pas ouverte x toute $x \notin U$ et contrôle $y \in U$ si l'espace T_0 .

2.1.1 Exemples et Contre exemples

Presque tous les espaces topologiques normalement étudiés en mathématiques sont T_0 . En particulier, tous les séparé (T_2) sont des espaces T_1 et T_0 .

Les espaces qui ne sont pas T_0

Un ensemble avec plus d'un élément, avec la topologie triviale. Aucun point se distinguent.

L'ensemble R^2 où les ensembles ouverts sont le produit cartésien d'un ensemble ouvert de R et R lui-même, ce est à dire, la topologie produit de R avec la topologie habituelle et R avec la topologie triviale; points (a, b) et (a, c) ne se distinguent pas.

L'espace de toutes les fonctions mesurables f de la ligne réelle R au plan complexe C tels que l'intégrale de Lebesgue de $|f(x)| \leq 2$ sur toute la ligne réelle est fini. Deux fonctions qui sont égales presque partout sont indiscerna

2.1.2 Espaces non T_0

- Un espace muni de la topologie grossière n'est pas T_0 , dès qu'il contient plus d'un élément. Plus généralement, la topologie d'Alexandrov d'un préordre n'est pas T_0 , sauf si ce préordre est un ordre.

- Un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, muni d'une semi-norme qui n'est pas une norme, n'est pas T_0 .

2.1.3 Propriétés

Le quotient d'un espace topologique quelconque par la relation d'équivalence précédente, appelé quotient de Kolmogorov, est toujours un espace de Kolmogorov.

Un produit d'espaces non vides est de Kolmogorov si et seulement si chaque facteur l'est.

Tout sous-espace d'un espace de Kolmogorov est encore de Kolmogorov.

Tout espace de Kolmogorov X est homéomorphe à un sous-espace du produit $Q^{C(X,Q)}$, où Q est l'intervalle $[0, 1]$ muni de la topologie stricte à gauche et $C(X, Q)$ est l'ensemble des applications continues de X dans Q^1 . Il se plonge aussi naturellement dans le produit $S^{C(X,S)} \simeq ST$, où S est la paire $\{0, 1\}$ munie de la topologie de Sierpiński et $C(X, S)$ est l'ensemble des applications continues de X dans S , équipotent à l'ensemble T des ouverts de X .

2.2 La séparation T_1 (espace accessible, ou de Fréchet)

Définition 2.2.1 *Il est dit que l'espace de topologie (X, τ) comme un espace T_1 si pour tout $x, y \in X$ où $x \neq y$ il existe deux ouverts U, V de sorte que $x \notin V, y \in V, y \notin U, x \in U$, à savoir :*

$$X \text{ est } T_1\text{-espace} \Leftrightarrow (x, y \in X, x \neq y)(\exists U, V \in \tau)(x \in U, y \notin U)(x \notin V, y \in V)$$

De cette définition, il est clair que l'espace T_1 est un espace T_0 .

En d'autres termes, $T_1 \Rightarrow T_0$, mais l'inverse ne est pas nécessairement vrai en général et qu'il soit clair que suivant l'exemple:

Exemple 2.2.1 *Supposons que $X = \{a, b\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ van (X, τ) espace T_0 , mais pas d'espace T_1 parce que X le seul groupe qui contient a et contiennent également b .*

Exemple 2.2.2 *Supposons que $X = \{a, b\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a\}\}$. est (X, τ) espace T_1 . Il est clair que (X, τ) espace T_1 parce qu'il ya $\{a\}, \{b\} \in \tau$ de sorte que $a \in \{a\}, b \notin \{a\}, a \notin \{b\}, b \in \{b\}$.*

2.2.1 Propriétés

Soit E un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

E est un espace T_1 .

E est un espace T_0 et un espace R_0 .

Pour tout x de E , $\{x\}$ est fermé (tous les singletons de E sont fermés).

Tout singleton est l'intersection de ses voisinages.

Toute partie de E est l'intersection de ses voisinages (ou encore : des ouverts qui la contiennent).

Tout sous-ensemble fini de E est fermé.

Tout sous-ensemble cofini de E est ouvert.

L'ultrafiltre principal en x converge seulement vers x , pour tout point x .

Pour tout point x de E et tout sous-ensemble S de E , x est un point limite de S si et seulement si c'est un point d'accumulation de S .

2.2.2 Espaces T_0 mais pas T_1

Un espace T_1 est un espace dans lequel pour tous éléments distincts x et y , il existe un voisinage de x qui ne contient pas y et un voisinage de y qui ne contient pas x , ou encore dans lequel tous les singletons sont fermés.

- La topologie droite d'un ordre est T_0 . Elle n'est T_1 que si elle est discrète, c'est-à-dire si cet ordre est l'égalité. Par exemple, sur un ensemble pointé (X, p) :

- La topologie dont les ouverts sont $\emptyset$ et les parties contenant p est T_0 , mais pas T_1 si X a d'autres éléments que p ($\{p\}$ n'est alors pas fermé). Si X a deux éléments, il s'agit de l'espace de Sierpiński.

- De même pour la topologie dont les fermés sont ces mêmes parties ($\{p\}$ est alors le seul singleton fermé).

- La topologie de Zariski sur un spectre d'anneau commutatif est toujours T_0 mais généralement pas T_1 . Les points non fermés correspondent aux idéaux premiers non maximaux. Ils sont importants pour comprendre les schémas.

bles. Voir aussi ci-dessous.

2.3 Espaces à limite séquentielle unique

Définition 2.3.1 *Un « espace à unique limite séquentielle » (traduction libre du nom en anglais sous lequel cette notion est plus connue : space with unique sequential limit ou US-space) est un espace X dans lequel chaque suite convergente n'a qu'une limite, ou encore, tel que la diagonale est séquentiellement fermée dans $X \times X$.*

Tout espace à unique limite séquentielle est T_1 mais la réciproque est fausse.

2.4 Espaces faiblement séparés

Définition 2.4.1 *Un espace topologique X est faiblement séparé, ou faiblement Hausdorff, ou t^2 lorsque pour tout espace compact K et toute application continue f de K dans X , l'image de K par f est fermée dans X .*

Tout espace faiblement séparé est T_1 (mais pas nécessairement à unique limite séquentielle). Pour montrer que tout singleton est fermé, il suffit en effet de considérer un compact K et l'application f constante de K dans ce singleton.

2.5 Espaces KC

Définition 2.5.1 *Un espace KC est un espace dans lequel tout quasi-compact est fermé (une notion voisine est celle d'espace compactement engendré).*

Tout espace KC est faiblement séparé. En effet, l'image d'un compact par une application continue est quasi-compacte.

Tout espace KC est à unique limite séquentielle mais la réciproque est fausse.

Démonstration

Cependant, dans un espace séquentiel à unique limite séquentielle, toute partie dénombrablement compacte est fermée, donc l'espace est KC .

Sur un espace donné, une topologie quasi-compacte est maximale pour cette propriété si et seulement si elle est KC et une topologie KC est minimale pour cette propriété si et seulement si elle est quasi-compacte, si bien que les topologies quasi-compactes maximales et KC minimales sont les mêmes.



2.6 La séparation T_2 (espace de Hausdorff)

Définition 2.6.1 *Il est dit que l'espace (X, τ) est un espace T_2 si et seulement si deux points distincts dans deux groupes différents de voisinages ouverts, l'un contenant le premier point et l'autre le deuxième point que :*

$$X \text{ est } T_2\text{-espace} \Leftrightarrow \forall x, y \in X, x \neq y, \exists U, V \in \tau, x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$$

Il est clair que chaque espace T_2 est un espace T_1 que tout $T_2 \Rightarrow T_1$, mais l'inverse ne est pas nécessairement vrai en général.

Chaque espace discret est l'espace T_2 mais l'espace faible qui contient plus d'un point n'a pas l'espace T_2 .

Exemple 2.6.1 *Nous montrons que tout espace métrique X est séparé.*

Soit $a, b \in X$ être points distincts; donc par $[M_4]$ $d(a, b) = \epsilon > 0$. Considérons les sphères ouvertes $G = S(a, \frac{1}{3}\epsilon)$ et $H = S(b, \frac{1}{3}\epsilon)$. Centrées à a et b respectivement. Nous affirmons que G et H sont disjointes. Car si $p \in G \cap H$. Puis $d(a, p) < \frac{1}{3}\epsilon$ et $d(p, b) < \frac{1}{3}\epsilon$; donc par l'inégalité du triangle,

$$d(a, b) \leq d(a, p) + d(p, b) < \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \frac{2}{3}\epsilon$$

Mais cela contredit le fait que $d(a, b) = \epsilon$. Donc G et H sont disjointes donc a et b appartiennent respectivement aux sphères ouvertes disjointes G et H . En conséquence X est séparé la notion d'une séquence a été généralisée à celle d'un filet (moore - séquence forgeron).

Proposition 2.6.1 *Les résultats suivants sont certaines propriétés techniques concernant les cartes (continues et autres) de et vers des espaces de Hausdorff.*

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction continue et supposons Y est séparé. Puis le graphe de f , $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$, est un sous-ensemble fermé de $X \times Y$.

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction et soit $\ker(f) = \{(x, x') \mid f(x) = f(x')\}$ être son noyau considéré comme un sous-espace de $X \times X$.

- Si f est continue et Y est séparé donc $\ker(f)$ est fermé.
- Si f est une surjection ouvert et $\ker(f)$ est fermé alors Y est séparé.
- Si f est une surjection ouvert continu (soit une carte de quotient ouvert) alors Y est séparé si et seulement si $\ker(f)$ est fermé.

Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont applications continues et Y est séparé, puis l'équation $(f, g) = \{x | f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X . il s'ensuit que si Y est séparé et f et g d'égale sur un ensemble dense de X alors $f = g$. En d'autres termes, les fonctions continues dans des espaces de Hausdorff est déterminée par les valeurs de sous-ensembles denses.

Soit $f : X \rightarrow Y$ une surjection fermée tel que $f^{-1}(y)$ est compact pour tout $y \in Y$. Ensuite, si X est séparé de sorte est Y .

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application de quotient avec X un espace séparé compact. Puis les assertions suivantes sont équivalentes

- Y est séparé.
- f est une application fermée.
- $\ker(f)$ est fermée .

2.7 La séparation $T_{2\frac{1}{2}}$ (espace complètement de Hausdorff)

Définition 2.7.1 *Un espace topologique est un espace $T_{2\frac{1}{2}}$ lorsque deux points distincts admettent des voisinages dont les adhérences sont disjointes. Ou encore, deux points distincts admettent des voisinages fermés disjointes.*



Un espace T_2 qui n'est pas $T_{2\frac{1}{2}}$.

Tout espace $T_{2\frac{1}{2}}$ est séparé mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant. On considère l'ensemble E du plan constitué de l'intérieur du disque de centre O de rayon 1 et des deux points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. Une base de voisinages d'un point intérieur au disque est formée des disques centrés en ce point. Une base de voisinages du point $(1, 0)$ est constituée des réunions de ce point et d'une bande semi-circulaire (ouverte au sens usuel) adjacente à ce point et limitée par des segments $[(0, 1), (0, 1 - h)]$ et $[(0, -1), (0, -1 + h)]$. De même pour $(-1, 0)$. Dans le dessin ci-contre, on a représenté en couleur un voisinage d'un point intérieur au disque, et un voisinage de chacun des points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. Si ces deux derniers voisinages sont ouverts, ils sont disjoints, mais leurs adhérences s'intersectent selon une partie des segments communs qui les limitent. L'espace E est donc séparé mais pas $T_{2\frac{1}{2}}$.

Exemple 2.7.1 *Supposons que X est un espace topologique. Soient x et y soient points dans X .*

Nous disons que x et y peuvent être séparés par quartiers fermés se il existe un voisinage U fermé de x et un voisinage V fermé de y tels que U et V sont disjoints ($U \cap V = \emptyset$). (Notez qu'un «voisinage fermé de x » est un ensemble fermé qui contient un ensemble ouvert contenant x).

Nous disons que x et y peuvent être séparés par une fonction se il existe une fonction continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ (l'intervalle unité) avec $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$.

Un espace Urysohn, ou l'espace $T_{2\frac{1}{2}}$, est un espace dans lequel des deux points distincts peuvent être séparés par quartiers fermés.

Un espace complètement séparé, ou un espace fonctionnellement séparé, est un espace dans lequel deux points distincts peuvent être séparés par une fonction continue.

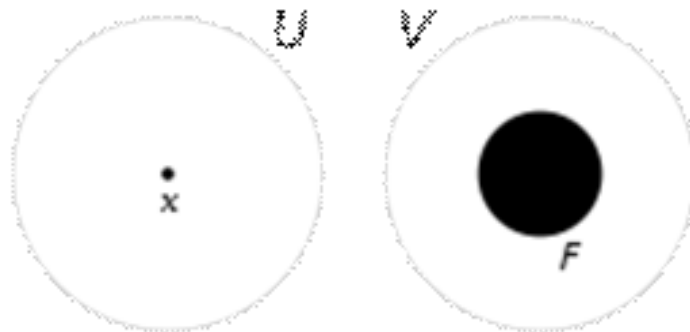
La topologie d'extension cocountable est la topologie sur la droite réelle générée par l'union de la topologie euclidienne habituelle et la Topologie codénombrable. Ensembles sont ouverts dans cette topologie si et seulement se ils sont de la forme $U \setminus A$ où U est ouvert dans la topologie euclidienne et A est dénombrable. Cet espace est complètement séparé et Urysohn, mais pas régulière (et donc pas Tychonoff).

Il ya des exemples d'espaces obscurs qui sont séparé mais pas Urysohn, et des espaces qui sont Urysohn mais pas complètement Hausdorff ou régulière Hausdorff. Pour plus de détails voir Steen et Seebach.

2.8 La séparation $T_{2\frac{3}{4}}$ (espace d'Urysohn)

Définition 2.8.1 *Un espace topologique X est appelé espace d'Urysohn lorsque pour tous points distincts x et y de X , il existe une fonction continue f de X dans le segment $[0, 1]$ telle que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. Un espace d'Urysohn est $T_{2\frac{3}{4}}$.*

Un espace est d'Urysohn si et seulement si l'application canonique vers son compactifié de Stone-Čech est injective.



2.9 Séparation T_3 et espaces réguliers

Définition 2.9.1 *Il est dit que l'espace de la topologie (X, τ) comme un espace régulier se il est trouvé un groupe fermé F et tout point p ne appartient pas au groupe F deux groupes sont ouverts U, V de sorte que $p \in U, F \subset V, U \cap V = \emptyset$ en d'autres termes:*

$$X \text{ est } \tau\text{-régulier} \Leftrightarrow \forall F \text{ } \tau\text{-fermé } \forall p \notin F, \exists U, V \in \tau, p \in U, F \subset V, U \cap V = \emptyset$$

Définition 2.9.2

Le dit espace (X, τ) que l'espace T_3 se il était un habitué et de l'espace T_1 cela signifie que:

$$T_3 = T_1 + \text{régulier}$$

Exemple 2.9.1 *Il ne existe aucun lien entre les espaces réguliers et des espaces T_1 et cela est évident à partir de l'exemple suivant:*

Soit $X = \{a, b, c\}$ et que τ topologie ID sur X l'image:

$\tau = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{a\}\}$ les ensembles fermés à X sont:

$\mathfrak{S} = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{a\}\}$ et ce

$$b \notin \{a\}, \exists \{a\}, \{b, c\} \in \tau, b \in \{b, c\}, \{a\} \subseteq \{a\}$$

$$\{a\} \cap \{b, c\} = \emptyset$$

$$c \notin \{a\}, \exists \{a\}, \{b, c\} \in \tau, c \in \{b, c\}, \{a\} \subseteq \{a\}$$

$$\{a\} \cap \{b, c\} = \emptyset$$

$$a \notin \{b, c\}, \exists \{a\}, \{b, c\} \in \tau, a \in \{a\}, \{b, c\} \subseteq \{b, c\}$$

$$\{a\} \cap \{b, c\} = \emptyset$$

Et donc (X, τ) espace régulier, mais ce ne est pas un espace T_1 et non l'espace T_2 .

résultat

Chaque espace discret (X, D) est un espace régulier.

Chaque espace faible (X, I) où X contient plus d'un point est un espace régulier et ne est pas T_0 ou T_1 ou T_2 .

Un espace topologique X vérifie T_3 lorsque pour tout point x de X et pour tout fermé F de X ne contenant pas x , il existe deux ouverts disjoints dont l'un contient x et l'autre contient F .

Tout espace vérifiant T_3 et T_0 est séparé. Un tel espace est dit régulier. Il vérifie $T_{2\frac{1}{2}}$, mais pas toujours $T_{2\frac{3}{4}}$. Inversement, la K-topologie sur $\mathbb{R}$ vérifie $T_{2\frac{3}{4}}$ mais pas T_3 .

Exemple 2.9.2 *Considérons la topologie $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ sur le plateau $X = \{a, b, c\}$. Respecter que les parties fermées de X sont également $X, \emptyset, \{a\}$ et $\{b, c\}$ et que (X, τ) ne satisfait $[R]$. d'autre part (X, τ) ne est pas un T_1 l'espace car il ya des ensembles finis. par exemple $\{b\}$. Qui ne sont pas fermées.*

2.10 Séparation $T_{3\frac{1}{2}}$ et espaces complètement réguliers (ou de Tychonov)

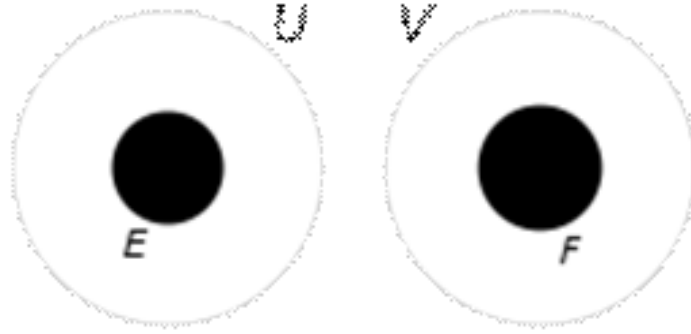
Définition 2.10.1 *Il est dit que l'espace de topologie (X, τ) de l'espace complètement régulier si pour tout $x \in X, F \in \mathfrak{S}_x$ de sorte que $x \notin F$ ne sont pas de fonction associée $f : X \rightarrow [0, 1]$ de sorte que $f(x) = 0, f(F) = 1$.*

Il est dit que l'espace de la topologie (X, τ) ou **l'espace Tychonoff** ou espace $T_{3\frac{1}{2}}$ si parfaitement régulière, ainsi que l'espace T_1 .

Définition 2.10.2 *Un espace topologique X vérifie $T_{2\frac{1}{2}}$ si pour tout point x de X et pour tout fermé F de X ne contenant pas x , il existe une fonction continue de X dans le segment $[0, 1]$ valant 0 en x et 1 sur F . Ceci équivaut à : X est uniformisable.*

Tout espace vérifiant $T_{2\frac{1}{2}}$ et T_0 est séparé. Un tel espace est qualifié de complètement régulier (on dit aussi : espace de Tychonov). Un espace complètement régulier est donc non seulement régulier mais aussi d'Urysohn.

Un espace est complètement régulier si et seulement s'il se plonge dans un espace compact.



2.11 Séparation T_4 et espaces normaux

L'espace est un espace appelé T_4 si un espace naturel et l'espace T_1

Signifie également que:

$$T_4 \equiv T_1 + \text{Normal}$$

Définition 2.11.1

Espace de topologie appelé (X, τ) de l'espace normal si et seulement si chaque trouvé deux os croisés non fermés et X deux groupes sont ouverts et non traversé., L'un d'eux contenant l'un des deux groupes fermés. Tandis que le second contient l'autre groupe de. Cela signifie que si F_1, F_2 fermée dans les deux groupes X où $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, et si $U, V \in \tau$ donc $F_1 \subseteq U$, $F_2 \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$.

Exemple 2.11.1 En supposant que $X = \{a, b, c\}$ et τ topologie ID sur X où.

$$\tau = \{X, \emptyset, \{b, a\}, \{a\}, \{b\}\}$$

Facile à noter que (X, τ) car l'espace normalement fermé en ensembles X sont:

$X, \emptyset, \{b, c\}, \{c\}, \{b, c\}$

Pour trouver deux pas fermés et doivent être l'un d'eux est $\emptyset$ et non $\emptyset = F_1$ y Il ya donc deux groupes sont entièrement ouverte $X, \emptyset$ où $F_2 \subseteq X, \emptyset = F_1 \subseteq \emptyset$.

D'autre part (X, τ) où il ne est pas un groupe uniforme fermé $\{b, c\}$, $a \notin \{b, c\}$ et il n'y a pas deux groupes sont ouverts et non traversé sorte que l'un d'eux a un point a et l'autre contenant le groupe fermé $\{b, c\}$. Aussi (X, τ) ne est pas l'espace T_1 parce que le groupe $\{a\}$ ne est pas fermé.

Exemple 2.11.2

Soit X être un T_4 l'espace. Puis X est aussi un T_1 espace régulier, ce est à dire. T_3 L'espace. Car supposons F est une partie fermée de X et $p \in X$ ne appartient pas à F . par $[T_1]$, $\{p\}$ est fermée; et, depuis F et $\{p\}$ sont disjoints, par $[N]$, il existe des ensembles disjoints ouvertes G et H de telle sorte que $F \subset G$ et $p \in \{p\} \subset H$.

Maintenant un espace métrique est à la fois normal et espace T_1 l'espace, ce est à dire. un T_4 l'espace.

2.12 Séparation T_5 et espaces complètement normaux

Définition 2.12.1 On dit que l'espace de la topologie (X, τ) est un espace complètement normal si pour deux groupes distincts A, B de X il ya deux ouvert U, V de sorte que $A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset$.

De cette définition, il est clair que tout l'espace est complètement l'espace naturel et normal car aucun deux ensembles sont fermés et non-tibias sont séparés.

Définition 2.12.2 Il est dit que l'espace de la topologie (X, τ) est un espace T_5 si l'espace est tout à fait normal et l'espace T_1 cela signifie que:

$$T_5 = T_1 + \text{espaces complètement normaux}$$

Démonstration

Un espace séparé vérifiant T_5 est qualifié de complètement normal.

Un espace est donc complètement normal si et seulement si tous ses sous-espaces sont normaux.

2.13 La séparation $T_{\frac{1}{2}}$ (espace parfaitement normal)

Définition 2.13.1 *Un espace séparé X est dit parfaitement normal si tout fermé de X est le lieu d'annulation (en) d'une application continue f de X dans $\mathbb{R}$.*

Tout espace métrisable est parfaitement normal (prendre pour f la fonction distance au fermé).

Tout sous-espace d'un espace parfaitement normal est encore parfaitement normal.

Un espace parfaitement normal est normal (et par suite complètement normal, d'après la stabilité précédente pour les sous-espaces). Mieux : pour tous fermés disjoints E et F d'un tel espace X , e et f étant des fonctions continues qui s'annulent exactement sur ces fermés, la fonction est continue, et vaut 0 exactement sur E et 1 exactement sur F .

Tout espace parfaitement normal est un espace G , c'est-à-dire dans lequel tout fermé est un sous-ensemble G (une intersection dénombrable d'ouverts), en l'occurrence mais la réciproque est fautive : la K -topologie est un espace G qui n'est pas parfaitement normal ni même normal.

La définition originale (due à Čech est équivalente) : un espace est parfaitement normal si c'est un espace normal.

Chapitre 3

Théorèmes reliant les types de ces espaces

3.1 Introduction

On présente dans ce chapitre les différents types d'espaces topologiques, vu en second chapitre, en les organisant selon leurs degré de séparation à l'aide de quelques théorèmes donnés avec ces démonstrations.

3.2 Organisation des topologies par degré de séparation

Théorème 3.2.1 *Espace métrique* $\Rightarrow \mathbf{T}_4 \Rightarrow \mathbf{T}_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathbf{T}_2 \Rightarrow \mathbf{T}_2 \Rightarrow \mathbf{T}_1 \Rightarrow \mathbf{T}_0$

Preuve. $\mathbf{T}_2 \Rightarrow \mathbf{T}_1 \Rightarrow \mathbf{T}_0$ est banal. $\mathbf{T}_3 \Rightarrow \mathbf{T}_2$ Par la définition, et la partie (1) de la proposition précédente.

$\mathbf{T}_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathbf{T}_3$ Compte tenu de x, F ; a laissé $f : X \rightarrow [0, 1]$ s.t $f(X) = 0, f(F) = 1$ comme dans la définition de $\mathbf{T}_3$. Ensemble $U = f^{-1}([0, 1/2])$ et $V = f^{-1}((1/2, 1])$. Régler et qui sont ouvert en $[0, 1]$. Alors, U, V séparer x, F dans X .

Espace métrique $\Rightarrow \mathbf{T}_4$: Laisser F, G est rapproché l'espace X s.t métrique. $F \cap G = \emptyset$ pour $x \in F$. a laissé

$$d_x = \inf_{y \in G} \{d(x, y)\}.$$

Réclamation : $d_x \neq \emptyset$.

Preuve :

Si $d_x = 0$ alors $\forall n, \exists y_n \in G. d(x, y_n) < \frac{1}{n}$

Donc $y_n \rightarrow x$. Donc $x \in G$.

(Exercice : G a fermé $.y_n \in G, (y_n) \rightarrow x \Rightarrow x \in G$)

$\Rightarrow \Leftarrow$

Laisser $Y = \cup_{x \in F} N_{d_x/2}(x)$ qui est ouvert avec $F \subset U$

Réclamation : $\bar{U} \cap G = \emptyset$

Preuve :

Laisser $y \in \bar{U} \cap G$

Alors il existe au moins la séquence $(u_n) \rightarrow y$ avec $u_n \in U$

$\forall n$ Trouver $x_n \in F$. s.t $u_n \in N_{d_x/2}(x)$

$$d_x \leq d(x_n, y) \leq d(x_n, u_n) + d(u_n, y) \leq d_{x_n}/2 + d(u_n, y)$$

Donc $d_{x_n}/2 \leq d(u_n, y)$.

$$(u_n) \rightarrow y \Rightarrow d(u_n, y) \rightarrow 0 \Rightarrow d_{x_n}/2 \rightarrow 0$$

Donc $d(x_n, y) \leq d_{x_n}/2 + d(u_n, y) \Rightarrow d(x_n, y) \rightarrow 0 \Rightarrow (x_n) \rightarrow y$

Si $y \in F$

$\Rightarrow \Leftarrow$

Donc $\bar{U} \cap G = \emptyset$

Si laisser $V = (\bar{U})^c \supset G$

$\mathbf{T}_4 \Rightarrow \mathbf{T}_{3\frac{1}{2}}$ ■

Théorème 3.2.2 [7] *Un espace topologique X est un T_1 espace si et seulement si chaque sous-ensemble de singleton de X est fermé.*

Preuve. Supposer X est un T_1 l'espace et $p \in X$. Nous montrons que $\{p\}$ est ouvert, a laissé $x \in \{p\}^c$. Alors $x \neq p$ et si par $[T_1]$.

$$\exists G_x : \text{ouvert tel que } x \in G_x, p \notin G_x.$$

Donc $x \in G_x \subset \{p\}^c$, et donc $\{p\}^c = \cup \{G_x = x \in \{p\}^c\}$. En conséquence $\{p\}^c$, Une union de séries ouvertes, est ouvert et $\{p\}$ est fermé. Ré-

ciproquement, supposer $\{p\}$ est fermé pour chaque $p \in X$, a laissé $a, b \in X$ avec $a \neq b$. Maintenant $a \neq b \Rightarrow b \in \{a\}^c$; donc $\{a\}^c$ est une série ouverte qui contient b mais ne contenant pas a . De même $\{b\}^c$ est une série ouverte qui contient a mais ne contenant pas b . En conséquence, X est un T_1 espace. ■

Théorème 3.2.3 [*7*] *spectacles que la propriété d'être un T_1 l'espace est héréditaire, c'est-à-dire chaque sous-espace soit T_1 l'espace est aussi un T_1 l'espace.*

Preuve. Soit (X, τ) soyez un T_1 l'espace et permet (Y, τ_Y) d'être un sous-espace de (X, τ) . Nous le montrons

chaque sous-ensemble de singleton $\{p\}$ de Y est un τ_Y le jeu fermé ou, équivalamment, cela $Y \setminus \{p\}$ est τ_Y ouvert. Since (X, τ) est un T_1 l'espace $Y \setminus \{p\}$ est τ ouvert. Mais

$$p \in Y \subset X \Rightarrow Y \cap (X \setminus \{p\}) = Y \setminus p$$

D'ou part la définition de sous-espace, $Y \setminus p$ est un jeu τ_Y ouvert. ainsi (X, τ_y) est aussi un T_1 l'espace. ■

Théorème 3.2.4 *Spectacles cela a sous-ensemble fini de un T_1 espace X n'a aucun point d'accumulation.*

Preuve. Supposer $A \subset X$ a n les éléments, disent $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Since A est fini il est fermé et contient donc tous ses points d'accumulation. Mais $\{a_2, \dots, a_n\}$ est aussi fini et dorénavant fermé. En conséquence, le complément $\{a_2, \dots, a_n\}^c$ de $\{a_2, \dots, a_n\}$ est ouvert, contient a_1 et ne contient aucun point de A différent de a_1 . Dorénavant a_1 n'est pas un point d'accumulation de A . De même nul autre point de A est un point d'accumulation de A et ainsi A n'a aucun point d'accumulation. ■

Théorème 3.2.5 *Spectacles que chaque fini T_1 espace X est un espace séparé.*

Preuve. Chaque sous-ensemble de X est fini et donc fermé. Dorénavant chaque sous-ensemble de X est aussi ouvert, c'est-à-dire X est un espace séparé. ■

Théorème 3.2.6 : Soit X un T_1 l'espace. Alors les assertions suivantes sont équivalent:

- (i) $p \in X$ est un point d'accumulation de A .
- (ii) Chaque ouvert contenant p contient un nombre infini de points de A .

Preuve. : Par la définition d'un point d'accumulation d'une série, (ii) $\Rightarrow$ (i) donc nous avons seulement besoin de prouver ce (i) $\Rightarrow$ (ii).

poser que G est une série ouverte qui contient p et contenant seulement le nombre fini de points de A différent de p ;

$$B = (G \setminus \{p\}) \cap A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

Dire maintenant B , Un sous-ensemble fini d'un T_1 l'espace, est fermé et si B^c est ouvert. Régler $H = G \cap B^c$. Alors H est ouvert, $p \in H$ et H ne contient pas de point de A différent de p . Donc p n'est pas un point d'accumulation de A et si (i) $\Rightarrow$ (ii). ■

Théorème 3.2.7 Soit X un T_1 et laisser l'espace B_p une base locale $p \in X$. Montrer que si $q \in X$ est distincte de p ; puis certains membre de B_p ne contient pas q .

Preuve. Depuis $q \neq p$ et X est satisfaisant $[T_1]$, Il existe au moins un jeu ouvert $G \subset X$ entretien p mais pas entretien q . maintenant B_p est une base locale à p ; ainsi G est un superensemble de certains $B \in B_p$ et B aussi ne contient pas q . ■

Théorème 3.2.8 Permettent à X d'être un T_1 l'espace qui satisfait le premier axiome de countability. Montrer que si $p \in X$ est un point d'accumulation de $A \in X$ alors là existe un ordre de termes distincts dans A convergence à p .

Preuve. Laisser $B = B_p$ soyez une base locale nichée à p . Jeu $B_{i_1} = B_1$. Depuis p est un point de limite de A , B_{i_1} contient un point $a_1 \in A$ différent de p par le problème précédent,

$$\exists B_{i_2} \in B, \quad \text{tel que} \quad a_1 \notin B_{i_2}$$

De la même façon B_{i_2} contient un point $a_2 \in A$ différent de p et, depuis $a_1 \notin B_{i_2}$ différent de a_1 . Again par le problème précédent,

$$\exists B_{i_3} \in B, \quad \text{tel que} \quad a_2 \notin B_{i_3}$$

en outre

$$a_2 \in B_{i_2}, a_2 \notin B_{i_3} \Rightarrow B_{i_2} \supset B_{i_3}$$

En continuant de cette façon on obtient a de $\{B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \dots\}$ et un ordre B des termes distincts A avec $a_1 \in B_{i_1}, a_2 \notin B_{i_2}, \dots$. Mais $\{B_{i_n}\}$ est aussi une locale imbriquée à p dorénavant $\langle a_n \rangle$ converge à p . ■

Espaces de Hausdorff

Théorème 3.2.9 [7] *Montrons que la propriété d'être un espace de Hausdorff est héréditaire, c'est-à-dire chaque sous-espace d'un espace hausdorff est aussi hausdorff.*

Preuve. Laisser (X, τ) soyez un espace hausdorff et laisser (Y, τ_y) être un sous-espace de (X, τ) . en outre laissent $a, b \in Y \subset X$ avec $a \neq b$ selon l'hypothèse (X, τ) est hausdorff; d'où

$$\exists G, H \in \tau \text{ tel que } a \in G, b \in H \wedge G \cap H = \emptyset$$

Par définition un sous-espace $Y \cap G$ et $Y \cap H$ sont τ_y ouvertes des jeux en outre

$$a \in G, a \in Y \Rightarrow a \in Y \cap G$$

$$b \in H, b \in Y \Rightarrow b \in Y \cap H$$

$$G \cap H = \emptyset \Rightarrow (Y \cap G) \cap (Y \cap H) = Y \cap (G \cap H) = Y \cap \emptyset = \emptyset$$

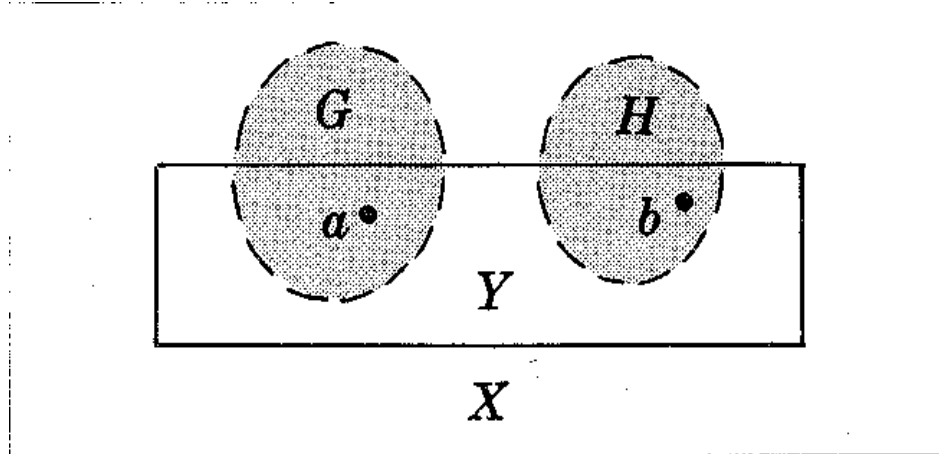
(Comme indiqué dans le schéma ci-dessous). en conséquence (Y, τ_y) est aussi un espace de hausdorff. ■

Théorème 3.2.10 *Laissent τ soyez le topology sur la ligne réelle $\mathbf{R}$ produit par les intervalles fermés ouverts $[a, b]$ montrez-le $(\mathbf{R}, \tau)$ est hausdorff.*

Preuve. Laisser $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a \neq b$ dire $a > b$ choisir $G = \langle a - 1, a \rangle$ et $H = \langle a, b \rangle$ alors

$$G, H \in \tau, a \in G, b \in H \text{ et } G \cap H = \emptyset$$

Dorénavant $(\mathbf{R}, \tau)$ est hausdorff. ■



Théorème 3.2.11 *Laisser X d'être un espace Hausdorff. Alors chaque ordre convergent dans X a limite unique.*

Preuve. Supposez $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ converge à a et b et supposer un $a \neq b$. Puisque X est Hausdorff, Il existe au moins ouvrez-vous met G et H tel cela

$$a \in G, b \in H, G \cap H = \emptyset$$

Selon l'hypothèse, $\langle a_n \rangle$ converge à a ; dorénavant.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n > n_0$ implique $a \in G$.

C'est-à-dire. G contient tous sauf un nombre fini des termes de l'ordre. Mais G et H sont disjoints; dorénavant H peut seulement contenir ces termes de l'ordre qui n'appartiennent pas à G et il y a seulement un nombre fini d'entre eux-ci. En conséquence, $\langle a_n \rangle$ ne peut pas converger à b . Mais cela viole l'hypothèse; dorénavant $a = b$. ■

Théorème 3.2.12 [3] *Laisser X d'être un premier espace comptable. que la chose suivante sont équivalents : (i) X est Hausdorff. (ii) Chaque ordre convergent a une limite unique.*

Preuve. Par le problème précédent, $(i) \Rightarrow (ii)$; dorénavant nous avons besoin seulement de cet montrer $(ii) \Rightarrow (i)$. supposez que X n'est pas Hausdorff alors $\exists a, b \in X, a \neq b$, avec la propriété que chaque jeu ouvert contenant le fait d'avoir une intersection non-empty avec evrey ouvre le jeu contenant b .

Laissez maintenant $\{G_n\}$ et $\{H_n\}$ être niché les bases locales à a et être respectivement; alors $G_n \cap H_n \neq \emptyset$ pour chaque $n \in N$ et donc

$$\exists \langle a_1, a_2, \dots \rangle, a_1 \in G_1 \cap H_1, a_2 \in G_2 \cap H_2, \dots$$

en conséquence, $\langle a_n \rangle$ converge à la fois a et b ; autrement dit, $(ii) \Rightarrow (i)$. ■

Espace normaux et le lemme d'urysoshn

Théorème 3.2.13 *Laisser X être un espace topologique. alors les conditions suivantes sont équivalentes : (i) X est normal. (ii) si H est un superensemble ouvert d'un jeu fermé F , donc là existe un jeu ouvert G tel que $F \subset G \subset \bar{G} \subset H$.*

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$ Laissez $F \subset H$, avec F fermé et H ouvert; alors H^c est fermé et $F \cap H^c = \emptyset$. Mais X est normale; d'où

$$\exists \text{ ouvert met } G, G^* \text{ tel que } F \subset G, H^c \subset G^* \text{ et } G \cap G^* = \emptyset$$

Mais

$$G \cap G^* = \emptyset \Rightarrow G \subset G^{*c} \text{ et } H^c \subset G^* \Rightarrow G^{*c} \subset H$$

En outre, G^{*c} est fermé; $F \subset G \subset \bar{G} \subset G^{*c} \subset H$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Permettez à F_1 et à F_2 d'être des jeux fermés disjoints; alors $F_1 \subset F_2^c$ et F_2^c est ouvert.

Par (ii) $\exists$ un jeu ouvert G tel cela $F_1 \subset G \subset \bar{G} \subset F_2^c$

Mais

$$\bar{G} \subset F_2^c \Rightarrow F_2 \subset G^c \text{ et } G \subset \bar{G} \Rightarrow G \cap \bar{G}^c = \emptyset$$

En outre, $\bar{G}^c$ est ouvert. Ainsi $F_1 \subset G$ et $F_2 \subset \bar{G}^c$ avec $G, \bar{G}^c$ les jeux ouverts disjoints, dorénavant X est normal. ■

Théorème 3.2.14 *Permettre à B d'être une base pour un T_1 -espace normal X . Montrez-le pour chaque $G_i \in B$ et n'importe quel point $p \in G_i$, là existe un membre $G_i \in B$ tel cela $p \in \bar{G}_i \subset G_i$.*

Preuve. Puisque X est un T_1 -espace, $\{p\}$ est fermé : dorénavant G_i est un superjeu ouvert du jeu fermé $\{p\}$.

$\exists G$ ouvert, tel cela $\{p\} \subset G \subset \bar{G}_i \subset G_i$.

Depuis $p \in G$ il y a un membre G_j ; de la base B tel cela $p \in G_j \subset G$. Ainsi $p \in G_j \subset \bar{G}$. Mais $\bar{G} \subset G_i$; d'où $p \in \bar{G} \subset G_i$. ■

Théorème 3.2.15 *Laisse D soyez l'ensemble dyadic les fractions (les fractions dont les dénominateurs sont des pouvoirs de 2) dans l'intervalle d'unité $[0, 1]$ c'est-à-dire,*

$$D = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \dots, \frac{15}{16}, \dots \right\}$$

Montrez-le D est dense dans $[0, 1]$.

Preuve. Montrer que $\bar{D} = [0, 1]$ il est suffisant de montrer que n'importe quel intervalle ouvert $(a - \delta, a + \delta)$ centré à n'importe quel point $a \in [0, 1]$ continent le point de D . Remarquent que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ là existe dorénavant un pouvoir $q = 2^{n_0}$ tel cela $0 < \frac{1}{q} < \delta$. Considérez les intervalles

$$\left[0, \frac{1}{q} \right], \left[\frac{1}{q}, \frac{2}{q} \right], \left[\frac{2}{q}, \frac{3}{q} \right], \dots, \left[\frac{q-2}{q}, \frac{q-1}{q} \right], \left[\frac{q-1}{q}, 1 \right]$$

Depuis $[0, 1]$ est l'union des susdits intervalles, un d'entre eux, dire $\left[\frac{m}{q}, \frac{m+1}{q} \right]$ contient un, i.e. $\frac{m}{q} \leq a \leq \frac{m+1}{q}$.mais $\frac{1}{q} \leq \delta$; d'où

$$a - \delta < \frac{m}{q} \leq a < a + \delta$$

Autrement dit, l'intervalle ouvert $(a - \delta, a + \delta)$. Contient le point $\frac{m}{q}$ qui appartient à D . Ainsi D est dense dans $[0, 1]$. ■

Théorème 3.2.16 (Le Lemme d'Urysohn) : *Laisser F_1 et F_2 soyez disjoints les sous-ensembles fermés d'un espace normal X . Alors là existe une fonction continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ tel cela $f[F_1] = \{0\}$ et $f[F_2] = \{1\}$.*

Preuve. Selon l'hypothèse, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ d'où $F_1 \subset F_2^c$. Particulièrement depuis F_2 est un jeu fermé, F_2^c est un superensemble ouvert du jeu fermé F_1 . Là existe un jeu ouvert $G_{\frac{1}{2}}$ tel cela

$$F_1 \subset G_{\frac{1}{2}} \subset \bar{G}_{\frac{1}{2}} \subset F_2^c$$

Observez-le $G_{\frac{1}{2}}$ est un superensemble ouvert du jeu fermé F_1 et F_2^c est un superensemble ouvert du jeu fermé $\bar{G}_{\frac{1}{2}}$. Dorénavant, là existe des jeux ouverts $G_{\frac{1}{4}}$ et $G_{\frac{3}{4}}$ tel cela

$$F_1 \subset G_{\frac{1}{4}} \subset \bar{G}_{\frac{1}{4}} \subset G_{\frac{1}{2}} \subset \bar{G}_{\frac{1}{2}} \subset G_{\frac{3}{4}} \subset \bar{G}_{\frac{3}{4}} \subset F_2^c$$

Nous continuons dans cette manière et obtenons pour chacun $t \in D$, où D est l'ensemble dyadic les fractions dans $[0, 1]$, un jeu ouvert G_t avec la propriété cela si $t_1, t_2 \in D$ et $t_1 < t_2$ alors $\bar{G}_{t_1} \subset G_{t_2}$.

Définissez la fonction f sur X comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{t : x \in G_t\} & x \notin F_2 \\ 1 & x \in F_2 \end{cases}$$

Observez-le, pour chaque $x \in X$, $0 \leq f(x) = 1$ c'est-à-dire f cartes X dans $[0, 1]$. Observent aussi cela $F_1 \subset G_t$ pour tous $t \in D$ d'où $f[F_1] = \{0\}$. De plus, par définition, $f[F_2] = \{1\}$ Par conséquent la seule chose est partie pour nous pour s'avérer est que f est continue.

Maintenant f est continu si les inverses des jeux $[0, a)$ et $(b, 1]$. Sont des sous-ensembles ouverts de X . Nous le réclamons

$$f^{-1}[[0, a)) = \cup\{G_t : t < a\}$$

$$f^{-1}[(b, 1]] = \cup\{\bar{G}_t^c : t > b\}$$

Alors chacun est l'union de jeux ouverts et est donc ouvert.

Nous avons d'abord prouver (1). Laissez $x \in f^{-1}[[0, a))$. Puis $f(x) \in [0, a)$, $0 \leq f(x) < a$, depuis D est dense dans $[0, 1]$, il existe $t_x \in D$ de telle sorte que $f(x) < t_x < a$. En d'autres termes.

$$f(x) = \inf\{t : x \in G_t\} < t_x < a$$

En conséquence $x \in G_{t_x}$ où $t_x < a$. Donc $x \in \cup\{G_t : t < a\}$. Nous venons de montrer que chaque élément $f^{-1}[[0, a))$ aussi appartient à $\cup\{G_t : t < a\}$, i.e.

$$f^{-1}[[0, a)) \subset \cup\{G_t : t < a\}$$

D'autre part, $y \in \cup\{G_t : t < a\}$ puis $\exists t_y \in D$ de telle sorte que $t_y < a$ et $y \in G_{t_y}$ donc

$$f(y) = \inf\{t : y \in G_t\} \leq t_y < a$$

Où y appartient aussi à $f^{-1}[[0, a]]$ en d'autres termes,

$$\cup\{G_t : t < a\} \subset f^{-1}[[0, a]]$$

Les deux résultats ci-dessus impliquent (1). Nous prouvons aujourd'hui (2). Soit $x \in f^{-1}[\langle b, 1]]$ puis $f(x) \in \langle b, 1], b \leq f(x) \leq 1$, puisque D est dense dans $[0, 1]$, il existe $t_1, t_2 \in D$ tel que $b < t_1 < t_2 < f(x)$. Tel que qui en d'autres termes,

$$f(x) = \inf\{t : x \in G_t\} > t_2$$

Donc $x \in G_{t_2}$ observer que $t_1 < t_2$ implique $\bar{G}_{t_1} \subset G_{t_2}$, donc x ne lui appartient pas $\bar{G}_{t_1}$ soit accord en plus $x \in \bar{G}_{t_1}^c$ où $t_1 > b$ d'où par conséquent $x \in \cup\{\bar{G}_{t_1}^c : t_1 > b\}$

$$f^{-1}[\langle b, 1]] \subset \cup\{\bar{G}_{t_1}^c : t > b\}$$

De l'autre main, laisser $y \in \cup\{\bar{G}_{t_1}^c : t > b\}$ alors il existe $t_y \in D$ de telle sorte que $t_y > b$ et $y \in \bar{G}_{t_1}^c$ donc y a pas appartenir à $\bar{G}_{t_1}^c$. Mais $t < t_y$ implique $G_t \subset G_{t_y} \subset \bar{G}_{t_1}^c$. Donc $y \notin G_t$, pour chaque t moins de t_y donc

$$f(y) = \inf\{t : y \in G_t\} \geq t_y > a$$

Par conséquent, en d'autres termes,

$$\cup\{\bar{G}_{t_1}^c : t > b\} \subset f^{-1}[\langle b, 1]]$$

Les deux résultats ci-dessus impliquent (2) où f est continue et le lemme de Urysohn est prouvé. ■

Théorème 3.2.17 [7] : *Chaque seconde T_1 normale dénombrable -espace X est metrisable. (en fait, X est homéomorphe à un sous-ensemble du cube hilbert I de R^∞).*

Preuve. Si X est fini, alors X est un espace discret et donc X est homéomorphe à un sous-ensemble de H avec un nombre de points équivalent. Si X est un infini, alors X contrains une base dénombrable $B = (G_1, G_2, G_3, \dots)$ où aucun des membres de B est X lui-même.

Par un problème précédent, pour chaque G_i en B il existe un G_j dans B tel que $\bar{G}_j \subset G_i$. La classe de toutes ces paires $\langle G_j, G_i \rangle$, où $\bar{G}_j \subset G_i$ est dénombrable; donc nous pouvons les

désigner par $P_1, P_2, \dots$ où $P_n = \langle G_{J_n}, G_{in} \rangle$ observent que $\bar{G}_{J_n} \subset G_{in}$ implique que $\bar{G}_{J_n}$ et $G_{J_n}^c$ sont disjointes fermé parties de X . Ainsi par lemme de Urysohn il Existe une fonction $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ telle que $f[\bar{G}_{J_n}] = \{0\}$. et $f[G_{J_n}^c] = \{1\}$.

Maintenant définir une fonction $f : X \rightarrow I$ un suit :

$$f(x) = \left\langle \frac{f_1(x)}{2}, \frac{f_2(x)}{2^2}, \frac{f_3(x)}{2^3}, \dots \right\rangle$$

Observer que, pour tout $n \in N, 0 \leq f(x) \leq 1$ implique $\left| \frac{f_n(x)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{n}$ donc $f(x)$ est un point dans le hilbert cube I .

Nous démontrons maintenant que f est continue. soit $\epsilon > 0$. observer que f est continue au $p \in X$ si il existe un voisinage ouvert G de p de telle sorte que $x \in G$ implique $\|f(x) - f(p)\| < \epsilon$ ou de manière équivalente $(\|f(x) - f(p)\|)^2 < \epsilon^2$. rappeler que:

$$\|f(x) - f(p)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(p)|^2}{2^{2n}}$$

En outre, étant donné que les valeurs de f_n se trouvent dans $[0, 1]$, $\frac{|f_n(x) - f_n(p)|^2}{2^{2n}} \leq \frac{1}{2^{2n}}$. Noter que $\sum \frac{1}{2^{2n}}$ converge; par conséquent, il existe un $n_0 = n_0(\epsilon)$, qui est indépendant de x et p , de telle sorte que

$$\|f(x) - f(p)\|^2 = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|f_n(x) - f_n(p)|^2}{2^{2n}} + \frac{\epsilon^2}{2}$$

Maintenant chaque fonction $f : X \rightarrow [0, 1]$ est continue; donc il existe un voisinage ouvert G_n de p de telle sorte que $x \in G_n$ implique $(\|f(x) - f(p)\|)^2 < \frac{\epsilon^2}{2^{n_0}}$. Soit $G = G_1 \cap \dots \cap G_{n_0}$. Depuis G est une intersection finie de voisinage ouvert de p , G est aussi un voisinage ouvert de p , en outre si $x \in G$

$$\|f(x) - f(p)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(p)|^2}{2^{2n}} < n_0 \left(\frac{\epsilon^2}{2^{n_0}} \right) + \frac{\epsilon^2}{2}$$

Donc f est continue.

Maintenant, nous allons y représentent la gamme des f .ie $Y = f^{-1}[X] \subset I$. Nous voulons prouver que $f^{-1} : Y \rightarrow X$ est également en continue. Remarquons que la continuité de Y est équivalent à la continuité; où f^{-1} est continue à $f(p) \in Y$ si pour toute suite $\langle f(y_n) \rangle$ convergeant vers $f(p)$, la séquence $\langle y_n \rangle$ converge vers p .

Supposons que f^{-1} est pas continue, à savoir suppose $\langle y_n \rangle$ ne converge pas p . Alors il existe un voisinage ouvert G de p de telle sorte que G ne contient pas un nombre infini de termes de $\langle y_n \rangle$. Donc nous pouvons choisir une sous-séquence $\langle x_n \rangle$ de $\langle y_n \rangle$ de telle sorte que tout ce que les termes de $\langle x_n \rangle$ se situent en dehors de G . Depuis $p \in G$ il existe un élément G_i dans la base B de telle sorte que $p \in G_i \subset G$. Par ailleurs, par un problème précédent, il existe une paire $P_m = \langle G_j, G_i \rangle$ tels que $p \in \bar{G}_j \subset G_i \subset G$. Respecter que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin G$; d'où $x_n \notin G_i^c$. en conséquence $f_m(p) = 0$ et $f_m(x_n) = 1$. Puis $|f_m(x_n) - f_m(p)|^2 \geq 1$ et

$$\|f(x_n) - f(p)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k(x_n) - f_k(p)|^2}{2^{2k}} \geq \frac{1}{2^{2m}}$$

En d'autres termes, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\|f(x_n) - f(p)\| > \frac{1}{2^m}$. Par conséquent la séquence $\langle f(x_n) \rangle$ ne converge pas $f(p)$. Mais cela contredit le fait chaque séquence de $\langle f(y_n) \rangle$ doivent également converger vers $f(p)$. Par conséquent f est un homéomorphisme et X est homéomorphe à un sous-ensemble du cube de Hilbert. en conséquence, X est métrisable. ■

espaces réguliers et complètement réguliers

Théorème 3.2.18 [7] *Un espace X complètement régulier est aussi régulier.*

Preuve. Soit F une partie fermée de X et supposons $p \in X$ ne fait pas partie F . Par hypothèse, X est tout à fait régulier; donc il existe une fonction continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ de telle sorte que $f(p) = 0$ et $f(F) = 1$ mais $\mathbb{R}$ et de son sous-espace $[0, 1]$ sont l'espace séparé; il ya donc ouverte disjoints G et H contenant respectivement 0 et 1. accordingly, leurs inverses $f^{-1}(F)$ et $f^{-1}(F)$ sont disjoints, ouvert et contiennent p et F respectivement. en d'autres termes, X est aussi régulier. ■

Théorème 3.2.19 *La classe $C(X, \mathbb{R})$ de toutes les fonctions continues à valeurs réelles sur un tout à fait régulier T_1 sépare l'espace X points.*

Preuve. Soient a et b soit des points distinct dans X . Depuis x est un T_1 espace $\{b\}$ est un ensemble fermé. aussi parce que a et b sont distinct, $a \notin \{b\}$, Par hypothèse, X est tout à fait régulier; donc il existe une valeur réelle f fonction continue f sur X tel que $f(a) = 0$ et $f(\{b\}) = 1$ en conséquence, $f(a) \neq f(b)$. ■

Théorème 3.2.20 Soit (Y, τ_y) un sous-espace de (X, τ) et laisser $p \in Y$ et $A \subset Y \subset X$. Montrer que si p ne fait pas partie du τ_y la fermeture de A . Puis $p \in \bar{A}$, τ la fermeture de A .

Preuve. Maintenant par une propriété du sous-espace.

τ_y La fermeture de $A = Y \cap \bar{A}$.

Mais $p \in Y$ et $p \notin \tau_y$ la fermeture de A ; donc $p \notin \bar{A}$. Observer que, en particulier, si F est un τ_y fermé sous-ensemble de Y et $p \notin F$, puis $p \notin \bar{F}$. ■

Théorème 3.2.21 [7] Montrons que si la propriété étant un espace régulier est héréditaire, à savoir tous les sous-espace d'un espace régulier est régulière.

Preuve. Laisser (X, τ) un espace régulier et laisser (Y, τ_y) un sous-espace des (X, τ) . En outre, laisser $p \in Y$ et de laisser F être un τ_y fermé sous-ensemble de Y de telle sorte que $p \notin F$. Maintenant par le problème 19, $p \notin \bar{F}$ la fermeture τ de F . En hypothèse, (X, τ) est régulière; d'où

$$\exists G, H \in \tau \text{ tel que } \bar{F} \subset G, p \in H \wedge G \cap H = \emptyset$$

Mais $Y \cap G$ et $Y \cap H$ sont τ_y parties ouvertes de Y , et

$$F \subset Y, F \subset \bar{F} \Rightarrow F \subset Y \cap G$$

$$p \in Y, p \in H \Rightarrow p \in Y \cap H$$

$$G \cap H = \emptyset \Rightarrow (Y \cap G) \cap (Y \cap H) = \emptyset$$

En conséquence (Y, τ_y) est également régulière. ■

Bibliographie

- [1] **Mickael Henle**; *A Combinatorial Introduction to Topology*, Dover, 1994.
- [2] **Richard Zekri**; *Coure de topologie master 1*, 9 septembre 2010.
- [3] **Stephen Willard**; *General Topology*, Dover, 2012.
- [4] **Jesper M.Moller**; *General Topology*, Matematisk institut Université sparken 5, DK_2100 , Kobenhavn.
- [5] **Dragas Iftimie**; *Introduction à la Topologie*, licence de Mathématiques Université de Rennes 1.
- [6] **Erwonn Aubry**; *Rappels de topologie pour le licence*.
- [7] **Seymour Lipschutz PH_D**; *Theory and problems of general topology*, Now york, San francisco, 1965.
- [8] **Felice Ronga**; *Topologie et géométrie*, Genève, MMVI ap.J.-C.
- [9] **Fr d tic Paulin**; *Topolgie, analyse et calcul différentiel*, cours de troisième année de licence, cole Normale supérieure, 2008_2009.

ملخص.

في هذه المذكرة درسنا الفضاءات الطوبولوجية حسب درجة انفصالها.
في الفصل الأول عرضنا و فصلنا المفاهيم العامة للفضاءات الطوبولوجية.
في الفصل الثاني درسنا مسلمات الفصل التي تصنف هذه الفضاءات مع كثير من الأمثلة التوضيحية.
وفي الأخير عرضنا النظريات التي تربط مختلف هذه الفضاءات مع براهينها.

Résumé.

Dans ce mémoire on a étudié les espaces topologiques selon leurs degré de séparabilité.

Dans le premier chapitre on a exposé et détaillé les notions générales des espaces topologiques.

Dans le second chapitre on a étudié les axiomes de séparations qui classifient ces espaces avec de nombreux exemples illustratifs.

Finalement on a présenté les théorèmes qui relient ces différents espaces avec leurs démonstrations.

Abstract.

In this memory topological spaces was studied according to their degree of separability.

In the first chapter presented and detailed the basic concepts of topological spaces.

In the second chapter we studied the axioms of separations which classify these spaces with numerous illustrative examples.

Finally we presented the theorems that connect these spaces with their demonstrations.

