



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Etude théorique d'un problème de
contact en thermo-piézoélectricité**

Présenté par: Ahtirib Khaoula

Labed Nedjla

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Said Amer Meziene

M.A.A

Président

Univ. El Oued

Tedjani Hadj Ammar

M.C.A

Rapporteur

Univ. El Oued

Adel Azize Azeb Ahmed

M.C.A

Examineur

Univ. El Oued

Année universitaire 2019 – 2020



Dédicaces

À ceux qui nous ont soutenus et ont été les premiers à avoir accès à l'enseignement supérieur, généreux et généreux, que Dieu leur accorde une longue vie.

À tous les membres de notre honorable famille, un par un.

À nos amis et à tous ceux qui se sont tenus à nos côtés et nous ont aidés avec tout ce qu'ils ont.

À tous ceux qui ont contribué à notre éducation.

Nous vous dédions cette humble recherche.

Khaoula et Nedjla



Remerciements

*Nous remercions **Dieu** Tout-Puissant qui nous a permis de terminer ce travail.*

*Nous adressons nos sincères remerciements et notre grande appréciation au l'encadreur de mémoire **Dr. Hadj Ammar Tedjani** pour votre aimable acceptation de la supervision de ce travail, et pour l'effort et les conseils, les orientations et les conseils qu'il a fournis.*

Nous remercions également sincèrement et apprécions les membres du comité de discussion, que nous serons honorés de discuter et d'évaluer pour ce travail.

Table des matières

Introduction	iv
Notations générales	vii
1 Préliminaires	1
1.1 Formulation mathématique d'un problème de contact	1
1.1.1 Cadre physique	1
1.1.2 Modèle mathématique	3
1.1.3 Loi de comportement piézoélectrique	4
1.1.4 Conditions aux limites	5
1.1.5 Lois de contact avec ou sans frottement	6
1.1.6 Les conditions de contact avec compliance normale et adhésion.	8
1.2 Rappels d'analyse	10
1.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert	10
1.2.2 Espaces de Sobolev	11
1.2.3 Espaces fonctionnels	13
1.2.4 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	16
1.2.5 Lemme de Gronwall	21
2 Problème de contact avec adhésion et compliance normal en thermo-	
 électro-élasticité avec mémoire longue et endommagement	23
2.1 Formulation du problème	24
2.2 Formulation variationnelle	30
2.3 Existence et unicité de la solution	39
Conclusion générale	54
Bibliographie	55

Introduction générale

Le contact entre les corps déformables est un phénomène très courante dans le industriel et dans la vie de tous les jours, le contact entre les plaquettes de frein avec roues, les pneus de roue et de route, les pistons avec jupes ou les processus complexes de formage des métaux ne sont que quelques exemples. Des progrès importants ont été réalisés récemment dans la modélisation mathématique et l'analyse des différents processus impliqués en contact entre des corps déformés. En raison de sa complexité inhérente, les phénomènes de communication conduisent à de nouveaux modèles mathématiques intéressants, c'est-à-dire un système d'équations différentielles partielles, associées aux conditions aux limites et aux conditions initiales, qui décrivent à la fin un processus de contact spécifique. Actuellement, une théorie mathématique générale de la mécanique de la contact (MTCM) apparaît. Il s'intéresse aux structures mathématiques qui sont à la base des problèmes de communication avec différentes lois constitutives, c'est-à-dire différents matériaux, différentes techniques et différentes conditions de communication ; Voir par exemple [\[47\]](#), [\[39\]](#).

La théorie mathématique émergente de la mécanique de la communication s'intéresse aux structures mathématiques qui sous-tendent les problèmes du contact généraux avec différentes lois constitutives, à savoir divers matériaux, l'ingénierie et différentes conditions du contact. où le problème du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsqu'elles subissent ces forces. outre les problèmes cités ci-dessus, il y a d'autres phénomènes réels et qui sont très importants tels que l'endommagement du matériau et l'adhésion des corps.

Le sujet de l'endommagement est extrêmement important dans les conceptions en ingénierie puisqu'il influence directement sur la vie usuelle de la structure ou la composante conçue. Il existe une littérature très riche sur ce sujet. Les modèles prenant en

considération l'influence de l'endommagement interne du matériau sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. L'analyse mathématique de problèmes unidimensionnels peut être trouvée dans [24]. Les premiers modèles de l'endommagement mécanique provenant des considérations thermodynamiques sont apparus dans [18]. De modèles généraux récents dans [21, 22, 27, 37, 43] sont issus du principe de la puissance virtuelle. Dans tous ces travaux, l'endommagement du matériau est décrit par une fonction α ayant des valeurs entre zéro et un. Lorsque $\alpha = 1$, il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, lorsque $\alpha = 0$, le matériau est complètement endommagé et lorsque $0 < \alpha < 1$, il a un d'endommagement partiel et le système a une capacité réduite. Certains problèmes en thermo-mécanique de contact avec endommagement ont été étudiés dans [6, 10, 11, 35, 36, 38, 50].

Les matériaux piézoélectriques sont extrêmement utilisés comme interrupteurs et actionneurs dans beaucoup de systèmes d'ingénierie, en radioélectronique, l'électroacoustique et la mesure des équipements. Ils sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique suite à une déformation mécanique et, inversement, une déformation mécanique est générée lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Des modèles généraux pour des matériaux électro-élastiques ayant un effet piézoélectriques peuvent être trouvés dans [9, 38, 53, 33]. Un problème de contact avec "slip-dependent" pour les matériaux électro-élastiques a été étudié dans [49], et pour les matériaux électro-élasto-viscoplastiques a été étudié dans [31].

Les matériaux présentant des propriétés piézoélectriques sont très nombreux. Le plus connu est sans doute le quartz, toujours utilisé aujourd'hui dans les montres pour générer des impulsions d'horloge. Mais ce sont des céramiques synthétiques, les PZT qui sont le plus largement utilisées aujourd'hui dans l'industrie.

Les processus d'adhésion sont importants en industrie lorsque des parties, souvent non métalliques, sont collées ensemble. Il s'agit du phénomène de contact avec adhésion entre corps déformables ou entre une surface rigide et un corps déformable, ceci a lieu quand la colle est ajoutée pour réduire ou ralentir le mouvement des surfaces. Ce phénomène a reçu récemment une très grande attention dans la littérature mathématique. L'analyse des modèles de contact avec adhésion peut être trouvée dans [4, 2, 13, 14, 16, 19, 30, 32, 45]. La nouveauté dans tous ces articles est l'introduction d'une variable interne de surface, le champ d'adhésion noté par β décrivant l'intensité

d'adhésion sur la surface de contact. Suivant [25, 26] le champ d'adhésion satisfait la restriction $0 \leq \beta \leq 1$, quand $\beta = 1$ au point de la surface de contact, l'adhésion est complète, quand $\beta = 0$ il n'y a pas d'adhésion. Quand $0 < \beta < 1$ l'adhésion est partielle. On renvoie le lecteur à une bibliographie abondante sur le sujet dans [42, 44, 46, 47].

Un autre phénomène sera considéré dans cette mémoire, il s'agit du phénomène de contact avec l'effet thermique. Les processus de contact et de frottement s'accompagnent invariablement d'une production de la chaleur qui peut être considérable. A titre d'exemple, le freinage brusque d'une voiture peut entraîner la dissipation d'une puissance importante sous forme de chaleur. L'effet thermique dans les processus de contact affecte la composition et la rigidité des surfaces et provoque des contraintes thermiques dans les corps en contact. La façon dont la chaleur affecte les propriétés mécaniques d'une surface peut être partiellement prise en compte (en supposant que le coefficient de frottement dépend de la température, voir [41]). Les modèles mathématiques en thermodynamique ont besoin de quatre éléments : la condition de production de la chaleur, la condition décrivant l'échange de la chaleur entre le corps et la fondation, la relation constitutive et l'équation de l'énergie. Ces modèles ont été développés récemment dans [3, 20, 28, 34, 52].

La thermomécanique s'intéresse aux effets de la chaleur sur les contraintes et les déformations des corps mécaniques et vice versa, c'est l'extension de la mécanique isotherme, cette extension est due au fait que les contraintes et les déformations proviennent non seulement des forces mécaniques mais également des variations de température.

Le mémoire comporte deux chapitres et est structurés de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique de problème à étudier. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions d'un problème de contact avec adhésion et compliance normale en thermo-électro-élasticité avec mémoire longue et endommagement. Nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution en utilisant des techniques de point fixe et lemme de Gronwall.

Notations générales

\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels,
\mathbb{R}	l'ensemble des nombres réels,
c	Constante réelle strictement positive,
i.e	C'est à dire,
$\partial_i \psi$	La dérivée partielle de ψ par rapport à la i^{eme} composante x : $\partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$,
$\nabla \psi$	Gradient de l'application ψ : $\nabla \psi = (\partial_1 \psi, \dots, \partial_d \psi)$,
\mathbb{S}^d	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$,
$\text{Div} \psi$	Divergence de l'application, ψ : $\text{Div} \psi = (\partial_1 \psi + \dots + \partial_d \psi)$,
$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de X,
$\ \cdot \ _X$	la norme de X,
p.p.	Presque partout,
Ω^ℓ	Ouvert de \mathbb{R}^d , parfois domaine L'hertzien,
$\bar{\Omega}^\ell$	l'adhérence de Ω^ℓ ,
Γ^ℓ	La frontière de Ω^ℓ : $\Gamma^\ell = \partial \Omega^\ell$,
Γ_i^ℓ	Les parties de frontière Γ^ℓ , ($i = 1, 2, 3$) ,
$mes \Gamma_i^\ell$	Mesure de Lebesgue ($d - 1$) dimensionnelle de Γ_i^ℓ ,
$d\Gamma_i^\ell$	Mesure superficielle sur Γ_i^ℓ ,
ν^ℓ	la normale unitaire sortante à Γ^ℓ ,
v_ν^ℓ, v_τ^ℓ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v^ℓ défini sur $\bar{\Omega}^\ell$,
$\sigma_\nu^\ell, \sigma_\tau^\ell$	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel σ défini sur $\bar{\Omega}^\ell$,
$L^2(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx < +\infty$,
$\ \cdot \ _{L^2(\Omega^\ell)}$	La norme de $L^2(\Omega^\ell)$ définie par $\ u^\ell \ _{L^2(\Omega^\ell)} = (\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que, $\exists c > 0 : u^\ell < c$, p.p., sur Ω^ℓ ,
H^ℓ	l'espace $L^2(\Omega^\ell)^d$,

H_1^ℓ	l'espace $H^1(\Omega^\ell)^d$,
\mathcal{H}^ℓ	l'espace $L^2(\Omega^\ell)^{d \times d}$,
\mathcal{H}_1^ℓ	l'espace $\{\tau^\ell = (\tau_{ij}^\ell) \in \mathcal{H}; \operatorname{div} \tau^\ell \in H^\ell\}$,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	L'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^ℓ ,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	L'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$,
$H^1(\Omega^\ell)$	L'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω^ℓ ,
H_{Γ^ℓ}	L'espace $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell))^d$,
H'_{Γ^ℓ}	l'espace dual de H_{Γ^ℓ} .
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles,
W^ℓ	l'espace $\{\psi^\ell \in E_1^\ell \mid \psi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell\}$,
\mathcal{W}^ℓ	l'espace $\{\mathbf{D}^\ell = (D_i^\ell) \mid D_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell), D_{i,i}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\}$,
Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par	
$C(0, T; H)$	L'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
$C^1(0, T; H)$	L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$L^p(0, T; H)$	L'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H ,
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; H)}$	La norme de $L^p(0, T; H)$,
$W^{k,p}(0, T; H)$	L'espace de Sobolev de paramètres k et p ,
$\ \cdot\ _{W^{k,p}(0, T; H)}$	La norme de $W^{k,p}(0, T; H)$,
$\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3$	Les parties de $\Gamma^\ell = \overline{\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell} \cup \Gamma_3$,
$\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$	L'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2 ,
u^ℓ	Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω^ℓ , on écrit u_i^ℓ les composantes du vecteur dans la base canonique,
σ^ℓ	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^ℓ , on écrit σ_i^ℓ les composantes du tenseur dans la base canonique,
σ_ν^ℓ	normale des contraintes à la frontière du domaine : $\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell$,
σ_τ^ℓ	le composante tangentielle du champ tensoriel σ^ℓ ,
φ^ℓ	Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
β	Valeur d'adhésions sur la surface de contact Γ_3 ,
\mathbf{D}^ℓ	Valeurs des déplacements électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
$\varepsilon(u^\ell)$	Tenseur linéarisé des déformations : $\varepsilon(u^\ell)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^\ell + \partial_j u_i^\ell)$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement d'un matériaux thermo-électro-élastiques, les conditions aux limites ainsi que la formulation électro-mécanique de problème à étudier. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, et les équations et inéquations variationnelles, les lemmes de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

1.1 Formulation mathématique d'un problème de contact

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique et une modèle mathématique de problème utilisé dans ce mémoire. Ensuite, nous indiquerons la formulation mathématique pour le problème de contact avec adhésion et compliance normale entre deux corps thermo-électro-élasticité avec mémoire longue et endommagement.

1.1.1 Cadre physique

Nous considérons deux corps matériels déformables qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$ ($\ell = 1, 2; d = 2, 3$), avec une frontière régulière $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$, partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que $mes(\Gamma_1^\ell) > 0$, $mes(\Gamma_a^\ell) > 0$. On note par ν^ℓ la normale unitaire sortante à Γ^ℓ . Le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ et agissent des forces volumiques de densité f_0^ℓ et des charges électriques de densité volumiques q_0^ℓ .

Nous supposons que f_2^ℓ et f_0^ℓ varient très lentement par rapport au temps. Les corps sont soumis à l'action de potentiel nul sur la partie Γ_a^ℓ de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2^ℓ , agissent sur la partie Γ_b^ℓ . Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact avec une fondation sur la partie Γ_3 .

Avant d'obtenir les modèles mathématiques qui correspondent au cadre physique présenté, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de cette mémoire.

Nous désignons par \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), " \cdot " et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell &= u_i^\ell \cdot v_i^\ell, & \|\mathbf{v}^\ell\| &= (\mathbf{v}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell &= \sigma_{ij}^\ell \cdot \tau_{ij}^\ell, & \|\boldsymbol{\tau}^\ell\| &= (\boldsymbol{\tau}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

Pour chaque élément $\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell$, nous notons par v_ν^ℓ et \mathbf{v}_τ^ℓ les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par

$$v_\nu^\ell = \mathbf{v}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \mathbf{v}_\tau^\ell = \mathbf{v}^\ell - v_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell. \quad (1.1)$$

Nous désignons par $\boldsymbol{\sigma}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell(x, t)$ le champ des contraintes, par $\mathbf{u}^\ell = \mathbf{u}^\ell(x, t)$ le champ des déplacements sur Ω^ℓ et par $\varepsilon(\mathbf{u}^\ell)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \bar{\Omega}^\ell$ et $t \in [0, T]$.

Pour un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ nous dénotons par σ_ν^ℓ et $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell$ les composantes normale et tangentielle à la frontière données par

$$\sigma_\nu^\ell = (\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell) \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell - \sigma_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell. \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell) \cdot \mathbf{v}^\ell = \sigma_\nu^\ell v_\nu^\ell + \boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell \cdot \mathbf{v}_\tau^\ell, \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans l'établissement de formulation variationnelle de problème mécanique de contact.

1.1.2 Modèle mathématique

Notons que le point au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u}^\ell = \frac{du^\ell}{dt} \quad \ddot{u}^\ell = \frac{d^2u^\ell}{dt^2}$$

où \dot{u}^ℓ désigne le champ des vitesses et \ddot{u}^ℓ désigne le champ des accélérations.

Les fonctions inconnues du problème sont les champs des déplacements $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, $\ell = 1, 2$. Notons la densité de la masse par $\rho^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{R}_+$ et la densité des forces volumiques par $f_0^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps est décrite par l'équation du mouvement de Cauchy :

$$\text{Div}\boldsymbol{\sigma}^\ell + f_0^\ell = \rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T]. \quad (1.4)$$

Les processus d'évolution modélés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier : par exemple dans le cas où $\dot{\mathbf{u}}^\ell = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesse $\dot{\mathbf{u}}^\ell$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell$ peut être négligé (processus quasi statiques). Dans ces deux cas l'équation du mouvement devient :

$$\text{Div}\boldsymbol{\sigma}^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T]. \quad (1.5)$$

L'équation équivaut à de relations scalaires, et mathématiquement cette équation ne suffit par à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple les d composantes \mathbf{u}_i^ℓ du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation.

A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques :

$$\text{div}\mathbf{D}^\ell = q_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (1.6)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\text{div}\mathbf{D}^\ell = \mathbf{D}_{i,i}^\ell$, et q_0^ℓ représente la densité des charges électriques volumiques sur Ω^ℓ .

1.1.3 Loi de comportement piézoélectrique

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement électro-mécanique, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ^ℓ , le tenseur des déformations infinitésimales ε^ℓ et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}^\ell$ et $\dot{\varepsilon}^\ell$. Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électro-mécaniques, car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique $D^\ell = (D_i^\ell)$ ainsi que le champ électrique $E^\ell = -\nabla\varphi^\ell$. Nous présentons par la suite les lois de comportement de matériau : matériaux électro-élasticité.

Loi de comportement des matériaux électro-élasticité.

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes σ^ℓ et le vecteur des déplacements électriques \mathbf{D}^ℓ sont reliés par la loi de comportement :

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{E}(\varphi^\ell), \\ \mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell (E^\ell(\varphi^\ell)), \\ \mathbf{E}(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell. \end{cases} \quad (1.7)$$

où $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ est l'opérateur d'élasticité non linéaire, $\mathbf{E}(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$ où $\nabla\varphi^\ell = (\varphi^\ell, i)$ représente le champ électrique, $\mathcal{E}^\ell = e_{ijk}^\ell$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul et $\mathcal{G}^\ell = \mathcal{G}_{ij}^\ell$ est le tenseur diélectrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif. Par ailleurs $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e_{ijk}^\ell)^*$ où $(e_{ijk}^\ell)^* = e_{kij}^\ell$.

Loi de comportement électro-élasticité avec mémoire longue

Dans ce cas la loi de comportement est donnée par

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(s))) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{E}(\varphi^\ell), \\ \mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell (E^\ell(\varphi^\ell)), \end{cases} \quad (1.8)$$

où $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_{ij})$ est un tenseur de relaxation. Si $\mathcal{Q} = 0$, on retrouve la loi électro-élastiques donnée par (1.7).

Loi de comportement thermo-électro-élastique avec mémoire longue et endommagement

La loi de comportement d'un matériau thermo-électro-élastique avec mémoire longue et endommagement est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \theta^\ell, \alpha^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \theta^\ell(s), \alpha^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell), \quad (1.9)$$

où \mathcal{Q}^ℓ représente une fonction constitutive non linéaire qui décrit le comportement de relaxation du matériau, nous considérons également que \mathcal{Q}^ℓ dépend de deux variables internes l'endommagement α^ℓ et la température absolue θ^ℓ .

La température θ^ℓ est défini par une équation parabolique, qui représente la conservation de l'énergie comme suit

$$\dot{\theta}^\ell - \kappa_0^\ell \Delta \theta^\ell = \Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \theta^\ell, \alpha^\ell) + \rho^\ell, \quad (1.10)$$

où Θ^ℓ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures. Ici et ci-dessous κ_0^ℓ est une constante strictement positive et ρ^ℓ une donnée, qui représente la source de chaleur du volume.

L'endommagement α^ℓ est une variable internes d'état définie dans $\Omega^\ell \times [0, T]$, avec $0 \leq \alpha^\ell \leq 1$: L'évolution du champ d'endommagement utilisée au deuxième chapitre est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation :

$$\dot{\alpha}^\ell - \kappa^\ell \Delta \alpha^\ell + \partial \psi_{K^\ell}(\alpha^\ell) \ni \phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \theta^\ell, \alpha^\ell), \quad (1.11)$$

où κ^ℓ est une constante positive, ϕ^ℓ est la fonction source de l'endommagement, $\partial \psi_{K^\ell}$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice ψ_{K^ℓ} et K^ℓ est l'ensemble des endommagements admissibles défini par

$$K^\ell = \{\alpha \in H^1(\Omega^\ell); 0 \leq \alpha \leq 1, \quad p.p. \text{ dans } \Omega^\ell\}. \quad (1.12)$$

Nous utilisons la loi de comportement des matériaux thermo-électro-élasticité avec mémoire longue et endommagement dans le chapitre 2 de ce mémoire.

Nous passons maintenant le conditions aux limites utilisées dans le chapitre 2

1.1.4 Conditions aux limites

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ^ℓ .

La condition aux limites de déplacement

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1^\ell \times [0, T]$, le champ des déplacements \mathbf{u}^ℓ est par conséquent nul :

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T]. \quad (1.13)$$

La condition aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité f_2^ℓ agit sur $\Gamma_2^\ell \times [0, T]$ et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell$ satisfait :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T]. \quad (1.14)$$

Les conditions aux limites électriques.

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations :

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (1.15)$$

$$\mathbf{D}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T]. \quad (1.16)$$

Conditions continues aux limites de contact.

On définit le déplacement normal par

$$[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2,$$

et le déplacement tangent par

$$[\mathbf{u}_\tau] = \mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2.$$

La continuité des contraintes sur l'interfaces Γ_3 se traduit par :

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.17)$$

1.1.5 Lois de contact avec ou sans frottement

- Contact sans frottement

Dans un contact parfait, où sans frottement, l'action mécanique transmissible par obstacle entre deux solides ne peut être en tout point que normale au contact (perpendiculaire au plan tangent commun du contact). Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0,$$

qui signifie que la contrainte tangentielle est nulle. Si ce n'est pas le cas, on dit que le mouvement tangentielle se produit avec frottement ce qui nous oblige à introduire une loi de frottement qui prend en considération la composante tangentielle avec les autres variables du système.

- Contact avec frottement

Contact avec compliance normale

Dans ce cas, les corps est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν^ℓ satisfait la condition dite de compliance normale

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu] - g), \end{cases} \quad (1.18)$$

où $[u_\nu]$ est le déplacement normal, g représente l'interstice entre les corps et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale. Cette condition indique que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $[u_\nu] - g$. Précisons que dans le chapitre 2 du mémoire nous considérons le cas entre deux corps, c'est-à-dire, l'interstice est nul, $g = 0$. Comme exemple de la fonction p_ν nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \quad (1.19)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases} \quad (1.20)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact [\(1.18\)](#) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

Loi de frottement de type Coulomb

C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer sous la forme :

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu |\sigma_\nu|, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu |\sigma_\nu| \Rightarrow [\mathbf{u}_\tau] = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu |\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda [\mathbf{u}_\tau], \end{cases} \quad (1.21)$$

où σ_τ est la contrainte tangentielle, $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement et \mathbf{u}_τ représente le déplacement tangentielle.

Loi de frottement sec de type Coulomb avec adhésion

Une version quasistatique de la loi de frottement sec de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \leq \mu p_\nu([u_\nu]), \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [\mathbf{u}_\tau] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = -\lambda [\mathbf{u}_\tau] \end{array} \right. \quad (1.22)$$

où γ_τ est un coefficient positif et μ est le coefficient de frottement, supposé être positif. $\mathbf{R}_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ est l'opérateur de troncature défini par

$$\mathbf{R}_\tau(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } \|\mathbf{v}\| \leq L, \\ L \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} & \text{si } \|\mathbf{v}\| > L. \end{cases} \quad (1.23)$$

Ici $L > 0$ est la longueur caractéristique des liens. Notons que les conditions de frottement similaires à ceux dans (1.22) ont été considérées dans [42] dans le cas particulier $\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = [\mathbf{u}_\tau]$, pour L très grand.

1.1.6 Les conditions de contact avec compliance normale et adhésion.

On va décrire la condition de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, on introduit une variable interne d'état définie sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, et quand $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plus détails sur ce section, on renvoie par exemple [23].

On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion :

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.24)$$

où σ_ν est le déplacement normal, γ_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par :

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Ici $L > 0$ est longueur caractéristique des liens. La condition (1.24) indique que chaque corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u]$, où le deuxième terme de l'égalité est la contribution de l'adhésion à la tension de surface.

Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.24) a été déjà utilisée dans [26, 51].

Quand le champ d'adhésion β est nul, (1.24) devient :

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.26)$$

qui représente la condition de compliance normale.

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{\beta} = \mathbf{H}_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_\nu([u_\nu]), \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])) \quad \text{sur } \Gamma_3^\ell \times [0, T], \quad (1.27)$$

\mathbf{H}_{ad} est une fonction générale qui s'annule quand le premier de ses variables s'annule. Un exemple d'une telle fonction, utilisée dans [13].

On considère la possibilité d'une diminution de l'efficacité de collage quand les cycles de collage et de décollage continuent. Par conséquent, le processus est supposé dépendre de l'histoire d'adhésion qu'on note par :

$$\xi_\beta(x, t) = \int_0^t \beta(x, s) ds \quad \text{sur } \Gamma_3^\ell \times [0, T]. \quad (1.28)$$

On donne quelques exemples de ce genre de fonctions

$$\mathbf{H}_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_1, R_2) = -\beta_+ \gamma_n R_1^2,$$

où γ_n est le coefficient de vitesse normale et $\beta_+ = \max(0, \beta)$. Nous notons que dans ce cas, seule la déconnexion est autorisée. Une équation de taux différentielle pour l'évolution du champ de collage est

$$\mathbf{H}_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_1, R_2) = -(\beta(\gamma_n R_1^2 - \gamma_t |R_2|^2 + \gamma_t) - \varepsilon_a)_+,$$

ici, γ_t est le coefficient de vitesse tangentielle, qui peut également être interprété comme le coefficient de rigidité tangentielle de l'interface lorsque l'adhérence est terminée ($\beta = 1$).

Un autre exemple, dans lequel \mathbf{H}_{ad} dépend de ses trois variables, est

$$\mathbf{H}_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_1, R_2) = -\gamma_n \beta_+ R_1^2 - \gamma_t \beta_+ |R_2|^2 + \gamma_r \frac{\beta_+(1-\beta)}{1+\xi_\beta^2},$$

où γ_r est le coefficient tangentielle de collage. Cependant, la liaison ne peut pas dépasser $\beta = 1$ et, de plus, la réassociation devient plus faible au fur et à mesure du processus, ce qui est représenté par le facteur $1 + \xi_\beta^2$ dans le dénominateur, et β_0 l'adhésion initiale, tel que :

$$0 \leq \beta_0 \leq 1, \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (1.29)$$

Sous les conditions (1.27)-(1.29), on a la remarque suivante :

Remarque 1.1.1 : *Nous remarquons que sous les trois conditions précédentes le champ d'adhésion vérifie la restriction $0 \leq \beta \leq 1$. En effet, puisque $\dot{\beta} \leq 0$ donc $\beta \leq \beta_0 \leq 1$. En outre, si $\beta = 0$ quand $t = t_0$, donc $\dot{\beta} = 0$ pour tout $t \geq t_0$, et d'où $\beta = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Alors, nous concluons que $0 \leq \beta \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. $x \in \Gamma_3$.*

1.2 Rappels d'analyse

1.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\| \cdot \|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\| u \|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \quad (1.30)$$

et on rappelle que $\| \cdot \|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)_H| \leq \| u \|_H \| v \|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (1.31)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme défini par (1.30). Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$\| \eta \|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}}{\| v \|_H},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

Théorème 1.2.1 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) : Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

De plus

$$\| \phi \|_{H'} = \| f \|_H.$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

1.2.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque là.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur les espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega) \ i = 1, \dots, d \right\}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée :

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \text{ et on écrit } \| u \|_{H^1(\Omega)}^2 = \| u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 1.2.2 (Rellich)

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 1.2.3 (trace de Sobolev)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 1.2.1 L'espaces $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représenté l'espaces de fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle $d\Gamma$. L'application δ s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définir pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 1.2.2 On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compacte.

Définition 1.2.1 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_{\alpha} \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_{\alpha} = D^{\alpha}u \right\}.$$

Remarque 1.2.3 Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^{\alpha}u$ et v_{α} .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha}u \|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha}u \|_{L^{\infty}(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 1.2.4 Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\| \cdot \|$, sont des espaces de Banach. De plus, les espaces $H^k(\Omega)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le [\[12\]](#).

1.2.3 Espaces fonctionnels

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques \mathbf{u}^ℓ et $\boldsymbol{\sigma}^\ell$:

$$\left\{ \begin{array}{l} H^\ell = \left\{ \mathbf{u}^\ell = (u_i^\ell) \mid u_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell) \right\} = (L^2(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}^\ell = \left\{ \boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma_{ij}^\ell) \mid \sigma_{ij}^\ell = \sigma_{ji}^\ell \in L^2(\Omega^\ell) \right\} = (L_s^2(\Omega^\ell))^{d \times d}, \\ H_1^\ell = \left\{ \mathbf{u}^\ell = (u_i^\ell) \mid u_i^\ell \in H^1(\Omega^\ell) \right\} = (H^1(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}_1^\ell = \left\{ \boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}^\ell \mid \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \in H^\ell \right\}. \end{array} \right. \quad (1.32)$$

Les espaces H^ℓ , \mathcal{H}^ℓ , H_1^ℓ et \mathcal{H}_1^ℓ sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u_i^\ell v_i^\ell dx, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma_{ij}^\ell \tau_{ij}^\ell dx, \\ (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H_1^\ell} = (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} + (\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}_1^\ell} = (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \operatorname{Div} \boldsymbol{\tau}^\ell)_{H^\ell}, \end{array} \right. \quad (1.33)$$

respectivement, où $\varepsilon : H_1^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ et $\operatorname{Div} : \mathcal{H}_1^\ell \rightarrow H^\ell$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(\mathbf{u}^\ell) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell)), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\ell + u_{j,i}^\ell), \quad \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma_{ij,j}^\ell).$$

Les normes sur les espaces H^ℓ , \mathcal{H}^ℓ , H_1^ℓ et \mathcal{H}_1^ℓ sont notées par $\|\cdot\|_{H^\ell}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}$, $\|\cdot\|_{H_1^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\ell}$, respectivement.

Puisque la frontière Γ^ℓ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur $\boldsymbol{\nu}^\ell$ à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell$ nous utilisons la notation \mathbf{v}^ℓ pour désigner la trace $\gamma \mathbf{v}^\ell$ de \mathbf{v}^ℓ sur Γ^ℓ . Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1^\ell \rightarrow L^2(\Gamma^\ell)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective.

Désignons par H'_{Γ^ℓ} le dual de H_{Γ^ℓ} , et (\cdot, \cdot) le produit de dualité entre H'_{Γ^ℓ} et H_{Γ^ℓ} . Pour tout $\boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, il existe un élément $\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \in H'_{\Gamma^\ell}$ tel que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \gamma \mathbf{v}^\ell) = (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell. \quad (1.34)$$

En outre, si $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \gamma \mathbf{v}^\ell) = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell. \quad (1.35)$$

Donc, pour $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell, \quad (1.36)$$

où da est un élément de mesure de surface.

Nous définissons le sous-espace fermé de H_1^ℓ

$$\mathbf{V}^\ell = \{\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell \mid \mathbf{v}^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\ell\}. \quad (1.37)$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur \mathbf{V}^ℓ , alors, il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_1^ℓ telle que

$$\|\varepsilon(\mathbf{v}^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq c_k \|\mathbf{v}^\ell\|_{H_1^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \quad (1.38)$$

Nous considérons sur l'espace \mathbf{V}^ℓ , le produit scalaire donné par

$$(\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{\mathbf{V}^\ell} = (\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell, \quad (1.39)$$

et soit $\|\cdot\|_{\mathbf{V}^\ell}$ la norme associée, i.e.

$$\|\mathbf{v}^\ell\|_{\mathbf{V}^\ell} = \|\varepsilon(\mathbf{v}^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \quad (1.40)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathbf{V}^\ell}$ sont des normes équivalentes sur \mathbf{V}^ℓ et ainsi $(\mathbf{V}^\ell, \|\cdot\|_{\mathbf{V}^\ell})$ est un espace de Hilbert. En outre, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ et Γ_3 telle que :

$$\|\mathbf{v}^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|\mathbf{v}^\ell\|_{\mathbf{V}^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell \quad (1.41)$$

Pour une fonction scalaire ς , qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{Z} = \{\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \leq \beta(t) \leq 1, \text{ sur } \Gamma_3\}. \quad (1.42)$$

On introduit également les espaces suivants :

$$E_0^\ell = L^2(\Omega^\ell), \quad E_1^\ell = H^1(\Omega^\ell), \quad W^\ell = \{\psi^\ell \in E_1^\ell \mid \psi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell\},$$

$$\mathcal{W}^\ell = \{\mathbf{D}^\ell = (D_i^\ell) \mid D_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell), \text{div} \mathbf{D}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\},$$

où $\text{div} \mathbf{D}^\ell = (D_{i,i}^\ell)$. Ces espaces W^ℓ et \mathcal{W}^ℓ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\varphi^\ell, \xi^\ell)_{W^\ell} = (\nabla \varphi^\ell, \nabla \xi^\ell)_{H^\ell}, \quad (\mathbf{D}^\ell, \mathbf{E}^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = (\mathbf{D}^\ell, \mathbf{E}^\ell)_{H^\ell} + (\text{div} \mathbf{D}^\ell, \text{div} \mathbf{E}^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad (1.43)$$

soient $\|\cdot\|_{W^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^\ell}$ les normes associées ; c'est-à-dire

$$\|\phi^\ell\|_{W^\ell} = \|\nabla\phi^\ell\|_{H^\ell}, \quad \|\mathbf{D}^\ell\|_{\mathcal{W}^\ell}^2 = \|\mathbf{D}^\ell\|_{H^\ell}^2 + \|\operatorname{div}\mathbf{D}^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)}^2. \quad (1.44)$$

Puisque $\operatorname{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante $c_F > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_a^ℓ telle que

$$\|\nabla\psi^\ell\|_{W^\ell} \geq c_F \|\psi^\ell\|_{H^1(\Omega^\ell)}, \quad \forall \psi^\ell \in W^\ell. \quad (1.45)$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré peut être trouvée dans [40].

Sur l'espace W nous considérons le produit scalaire donné par

$$(\varphi^\ell, \psi^\ell)_{W^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \nabla\varphi^\ell \cdot \nabla\psi^\ell dx, \quad (1.46)$$

Il s'ensuit de (1.45) que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega^\ell)}$ et $\|\cdot\|_{W^\ell}$ sont des normes équivalentes sur W^ℓ et donc $(W^\ell, \|\cdot\|_{W^\ell})$ est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante \tilde{c}_0^ℓ dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_a^ℓ et Γ_3 , telle que

$$\|\xi^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0^\ell \|\xi^\ell\|_{W^\ell}, \quad \forall \xi^\ell \in W^\ell. \quad (1.47)$$

Afin de simplifier les notations, nous définissons les espaces produits :

$$V = V^1 \times V^2, \quad H = H^1 \times H^2$$

$$H_1 = H_1^1 \times H_1^2, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2$$

$$E_0 = E_0^1 \times E_0^2, \quad E_1 = E_1^1 \times E_1^2, \quad W = W^1 \times W^2, \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2,$$

les espaces V, E_1, W et \mathcal{W} sont des espaces de Hilbert réel dotés des produits scalaires canoniques notée $(\cdot, \cdot)_V, (\cdot, \cdot)_{E_1}, (\cdot, \cdot)_W$ et $(\cdot, \cdot)_\mathcal{W}$. Les normes associées seront désignées par $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_{E_1}, \|\cdot\|_W$ et $\|\cdot\|_\mathcal{W}$, respectivement.

Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel, nous utilisons la classique notation pour les espaces $L^p(0, T; X), W^{k,p}(0, T; X)$, où $1 \leq p \leq \infty, k \geq 1$. Nous notons par $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ avec valeur sur X , respectivement, avec les normes :

$$\|f\|_{C(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X,$$

$$\|f\|_{C^1(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|\dot{f}(t)\|_X.$$

Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $[0, T]$ à valeurs dans X .

Définition 1.2.2 Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

1.2.4 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques.

I-Opérateur fortement monotone

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs frottements monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert X munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associé $\|\cdot\|_X$.

Définition 1.2.3 Soient $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire, l'opérateur A est dit :

1. monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0, \forall u, v \in X,$$

2. fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2, \forall u, v \in X,$$

3. Lipschitz s'il existe $L > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq L\|u - v\|_X, \forall u, v \in X,$$

4. hémicontinu si

$$\forall u, v \in X, \text{ l'application } t \rightarrow A(u + tv) : \mathbb{R} \rightarrow X' \text{ est continue.}$$

Théorème 1.2.5 (Théorème de point fixe de Banach)

Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in]0, 1[$ telle que

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq c \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e, possède un point fixe unique dans K .

Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}) \quad m \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe.

Théorème 1.2.6 Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda^m : K \rightarrow K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .

Définition 1.2.4 Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 1.2.5 Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que :

$$a(u, u) \geq m \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Théorème 1.2.7 (Théorème du Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive.

Soit $l : H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in H$ qui satisfait :

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H. \quad (1.48)$$

De plus, si $a(.,.)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle u, u \rangle_X \leq \frac{1}{2}a(v, v) - \langle v, v \rangle_X, \quad \forall v \in X. \quad (1.49)$$

II- Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que X est un espace de Hilbert et K un sous ensemble de l'espace X .

Définition 1.2.6 On appelle fonction indicatrice de K , la fonction Ψ_K définie par

$$\Psi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K. \end{cases}$$

Définition 1.2.7 Soit une fonction $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ et u un élément de l'espace X tel que $j(u) \neq \pm\infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u , noté $\partial j(u)$ est l'ensemble défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + (u', v - u), \forall v \in K\}. \quad (1.50)$$

Le crochet (\cdot, \cdot) désignant la dualité entre X' et X .

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de la fonction j en u . La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X .

Nous pouvons caractériser le sous-différentiel $\partial \Psi_K$ d'une fonction indicatrice Ψ_K d'un ensemble convexe non vide.

$$\partial \Psi_K = \{u' \in X' \mid (u', v - u) \leq 0, \forall v \in K\}. \quad (1.51)$$

III- Inéquations quasi-variationnelles elliptiques d'évolution

La modélisation de plusieurs classes de problèmes physiques conduit aux inégalités variationnelles elliptiques ou d'évolution, dans lesquelles la fonctionnelle non différentiable dépend de la solution elle-même. Ces dernières sont appelées. Nous donnons par la suite un résultat d'existence et d'unicité pour ce type de problèmes.

Pour cela, nous considérons un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et de la norme associée $\|\cdot\|_H$ et soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire, $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et $f \in X$. Compte tenu de ces données, nous considérons l'inégalité quasivariationnelle suivante.

$$u \in X, \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X. \quad (1.52)$$

Pour résoudre cette inéquation, nous supposons que $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_A > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|Au_1 - Au_2\|_X \leq L_A \|u_1 - u_2\|_X, \quad \forall u_1, u_2 \in X, \\ (b) \text{ Il existe } m_A > 0 \text{ tel que} \\ \quad (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m_A \|u_1 - u_2\|_X^2, \quad \forall u_1, u_2 \in X. \end{array} \right. \quad (1.53)$$

et la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Pour tout } j(u, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i. sur } X \\ (b) \text{ Il existe } m_j > 0 \text{ tel que} \\ \quad j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \\ \quad \leq m_j \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in X \end{array} \right. \quad (1.54)$$

Aussi, nous supposons que

$$f \in X \quad (1.55)$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème (1.52) est donnée par le résultat suivant.

Théorème 1.2.8 *Supposons que les hypothèses (1.53) et (1.54) et (1.55) sont satisfaites, et si $m_j < m_A$. Alors :*

1. *Il existe une unique solution $u \in X$ du problème (1.52).*
2. *Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (1.52) correspondant aux données $f_1, f_2 \in X$ alors il existe $c > 0$ tel que*

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq c \|f_1 - f_2\|_X. \quad (1.56)$$

Ce résultat d'existence, d'unicité et de régularité a été prouvé dans [48] p.51.

IV- Équation différentielle ordinaire

Théorème 1.2.9 (Cauchy-Lipschitz) : *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$, qui satisfait les propriétés suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ (b) \text{ Il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que} \\ F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

Définition 1.2.8 *S'il est l'inclusion de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et V est dense dans H , le triplet*

$$V \subset H \subset V'$$

s'appelle le triplet de Gelfand, où V' l'espace dual de V .

V- Équation aux dérivées partielles d'évolution

Théorème 1.2.10 Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur hemicontinu et monotone qui satisfait :

$$(Av, v)_{V' \times V} \geq w \|v\|_V^2 + \lambda, \quad \forall v \in V, \quad (1.57)$$

$$\|Av\|_{V'} \leq C_1(\|v\|_V + 1), \quad \forall v \in V. \quad (1.58)$$

Pour des constantes $w > 0$, $C_1 > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etant donnée $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$, alors il existe une fonction unique u satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \text{ p.p.t } \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

VI- Inéquation variationnelle d'évolution

Théorème 1.2.11 Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand, K est un sous-ensemble fermé non vide et convexe de V , et soit $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur linéaire, symétrique et continue qui satisfait

$$\text{il existe } C_2 > 0 \text{ et } C_3 \quad (Av, v)_{V' \times V'} + C_2 \|v\|_H^2 \geq C_3 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \quad (1.59)$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; V')$, il existe une unique fonction u qui satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C^2(0, T; H) \cap W^{1,2}(0, T; V'), \quad (1.60)$$

$$u(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.61)$$

$$(\dot{u}(t), v - u(t))_{V' \times V} + (Au(t), v - u(t))_{V' \times V} \geq (f(t), v - u(t))_{V' \times V} \quad v \in K, \text{ p.p.t } \in [0, T]. \quad (1.62)$$

$$u(0) = u_0. \quad (1.63)$$

Si $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; H)$, alors il existe une unique fonction u satisfait (1.61)–(1.63) et vérifie

$$u \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^2(0, T; V). \quad (1.64)$$

Les démonstrations de deux théorèmes 1.2.10–1.2.11 précédentes peuvent être trouvées par exemple dans [7, 8].

1.2.5 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 1.2.1 Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$.

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

pour le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 1.2.1 Soit $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Le corollaire [1.2.1](#) est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. En supposant qu'il existe deux solutions, en notant par ψ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ψ sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ψ .

Lemme 1.2.2 Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0 \forall t \in [0, T]$, $a \geq 0$. Soit également $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que :

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t)dt + \int_0^s n(t)\phi^2(t)dt, \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t) ds \right) e^{\int_0^s n(t) dt}, \quad \forall s \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $n = 0$, le Lemme [1.2.2](#) devient :

Corollaire 1.2.2 Soit $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0 \forall t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$.

Soit également $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que :

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t) dt, \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq a + \int_0^s m(t) dt, \quad \forall s \in [0, T].$$

Chapitre 2

Problème de contact avec adhésion et compliance normal en thermo-électro-élasticité avec mémoire longue et endommagement

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de contact entre deux corps thermo-électro-élastique avec mémoire longue et endommagement, le contact est modélisé par les conditions de compliance normale couplées avec l'adhésion. Notre intérêt est de décrire un processus quasistatique dans lequel le contact, et démontrer que le modèle résultant se ramène à un problème mathématique bien posé.

Chapitre est divisé en trois sections : Dans la première section nous posons et décrire du problème mécanique puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans la deuxième section, nous décrivons la formulation variationnelle du problème mécanique, et dans la troisième section, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème mécanique.

Les techniques employées dans les démonstrations sont basées sur les résultats des équations variationnelles et la théorie des opérateurs monotones, suivi par les arguments du point fixe les inéquations.

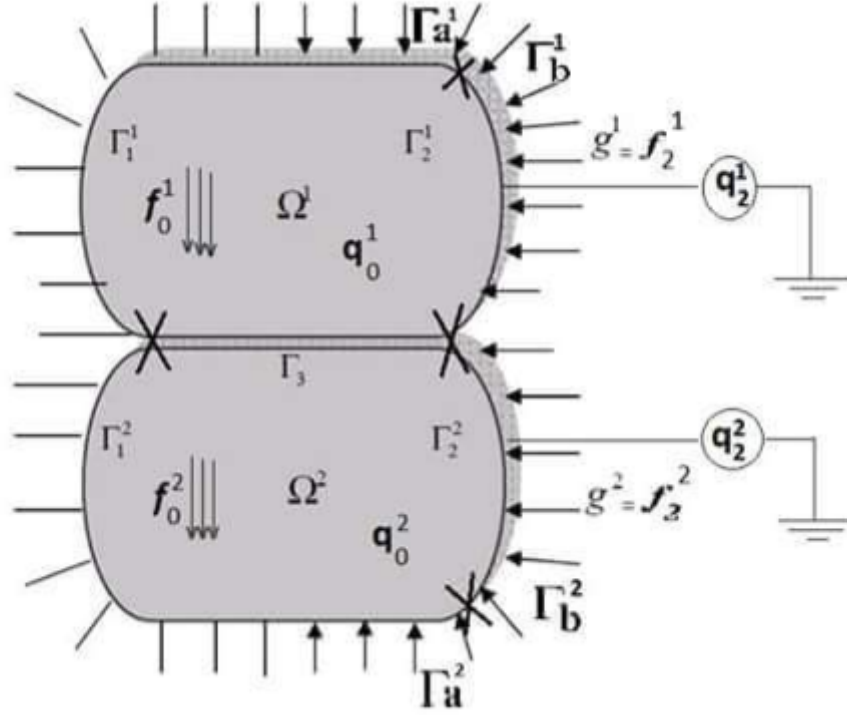


Fig.1 : contact entre deux corps thermo-piézoélectricité.

2.1 Formulation du problème

Dans cette section, nous considérons le problème du contact en thermo-électro-élastic. Nous introduisons une notation, listons les hypothèses sur les données du problème et dérivons la formulation variationnelle du modèle.

Problème \mathcal{P} . pour $\ell = 1, 2$, trouver les champs des déplacements $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, les champs d'endommagements $\alpha^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, les champs des températures $\theta^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \theta^\ell, \alpha^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(s)), \theta^\ell(s), \alpha^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell), \quad (2.1)$$

$$\text{dans } \Omega^\ell \times [0, T],$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell)) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.2)$$

$$\dot{\alpha}^\ell - \kappa^\ell \Delta \alpha^\ell + \partial \psi_{K^\ell}(\alpha^\ell) \ni \phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \theta^\ell, \alpha^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.3)$$

$$\dot{\theta}^\ell - \kappa_0^\ell \Delta \theta^\ell = \Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \theta^\ell, \alpha^\ell) + \rho^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.4)$$

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}^\ell - q_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T], \quad (2.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T], \quad (2.8)$$

$$\dot{\beta} = \mathbf{H}_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_\nu([u_\nu]), \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])) \quad \text{sur } \Gamma_3^\ell \times [0, T], \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu \\ \sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \leq \mu p_\nu([u_\nu]) \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [\mathbf{u}_\tau] = 0 \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = -\lambda [\mathbf{u}_\tau] \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \alpha^\ell}{\partial \nu^\ell} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times [0, T], \quad (2.12)$$

$$\kappa_0^\ell \frac{\partial^\ell \theta^\ell}{\partial \nu^\ell} + \lambda_0^\ell \theta^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times [0, T], \quad (2.13)$$

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (2.14)$$

$$\mathbf{D}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T], \quad (2.15)$$

$$\mathbf{D}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.16)$$

$$\mathbf{u}^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell, \quad \theta^\ell(0) = \theta_0^\ell, \quad \alpha^\ell(0) = \alpha_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell, \quad (2.17)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.18)$$

Les équations (2.1) et (2.2) représentent la loi constitutive thermo-électro-élastique avec mémoire longue et endommagement, \mathcal{A}^ℓ représente l'opérateur de d'élasticité avec endommagement, où θ^ℓ représente la température absolue, $\varepsilon(\mathbf{u}^\ell)$ représentent la contrainte et le tenseur de déformation linéarisé, $E^\ell(\varphi^\ell) = -\nabla \varphi^\ell$ est le champ électrique, \mathcal{E}^ℓ représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre, et $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est son transposé du tenseur \mathcal{E}^ℓ . L'évolution du champ d'endommagement est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation (2.3). L'équation (2.4) représente la conservation de l'énergie où Θ^ℓ est une fonction constitutive non linéaire qui

représente la température générée par le travail des forces internes et ρ^ℓ est une source de chaleur volumique donnée. Les équations (2.5) et (2.6) sont les équations d'équilibre écrites pour les champs de contrainte et de déplacement électrique où "Div" et "div" dénotent l'opérateur de divergence pour les tenseurs et les vecteurs, respectivement. Ensuite, les équations (2.7) et (2.8) représentent les conditions aux limites de déplacement et de traction. L'équation (2.9) décrit l'évolution du champ d'adhésion est supposée dépendre généralement de β , $[u_\nu]$ et $[u_\tau]$, où nous désignons par u_ν et u_τ les composantes normale et tangentielle. La condition (2.10) décrit le contact avec compliance normale et adhésion sur Γ_3 , où γ_ν est un coefficient d'adhésion. Et Les conditions (2.11) sont les conditions de frottement et d'adhésion, où les opérateurs de troncation sont donnés par (1.22) et (1.26). La relation (2.12) représente les condition aux limite de Neumann homogène où $\frac{\partial \alpha^\ell}{\partial \nu^\ell}$ est la dérivée normale de α^ℓ . La relation (2.13) représentent une condition aux limites de Fourier pour la température sur Γ^ℓ . les équations (2.14) et (2.15) représentent les conditions aux limites électriques. Enfin les fonctions $\mathbf{u}_0, \theta_0, \alpha_0$ et β_0 dans (2.17) - (2.18) sont les conditions initiales.

On considère maintenant les hypothèse suivantes :

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ telle que :} \\
 \quad |\mathcal{A}^\ell(x, \xi_1, r_1, d_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \xi_2, r_2, d_2)| \leq L_{\mathcal{A}^\ell} (|\xi_1 - \xi_2| + |r_1 - r_2| + |d_1 - d_2|), \\
 \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, r_1, r_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\
 (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ tel que :} \\
 \quad (\mathcal{A}^\ell(x, \xi_1, r, d) - \mathcal{A}^\ell(x, \xi_2, r, d)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq m_{\mathcal{A}^\ell} \|\xi_1 - \xi_2\|^2, \\
 \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, r, d \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\
 (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}^\ell(x, \xi, r, d) \text{ est mesurable dans } \Omega^\ell, \forall \xi \in \mathbb{S}^d, r, d \in \mathbb{R}. \\
 (d) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}^\ell(x, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}^\ell.
 \end{array} \right. \tag{2.19}$$

La fonction de relaxation $\mathcal{Q}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{Q}^\ell} > 0 \text{ telle que :} \\ \quad |\mathcal{Q}^\ell(x, t, \xi_1, r_1, d_1) - \mathcal{Q}^\ell(x, t, \xi_2, r_2, d_2)| \leq L_{\mathcal{Q}^\ell} (|\xi_1 - \xi_2| + |r_1 - r_2| + |d_1 - d_2|), \\ \quad \forall t \in (0, T), \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \quad r_1, r_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R} \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{Q}^\ell(x, t, \xi, r, d) \text{ est mesurable dans } \Omega^\ell, \text{ pour tout } t \in (0, T), \\ \quad \xi \in \mathbb{S}^d, \quad r, d \in \mathbb{R}, \\ (c) \text{ L'application } t \mapsto \mathcal{Q}^\ell(x, t, \xi, r, d) \text{ est continu dans } (0, T), \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{S}^d, \\ \quad \forall r, d \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (d) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{Q}^\ell(x, t, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}^\ell, \quad \forall t \in (0, T). \end{array} \right. \quad (2.20)$$

La fonction énergétique $\Theta^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\Theta^\ell} > 0 \text{ telle que :} \\ \quad |\Theta^\ell(x, \eta_1, \xi_1, \alpha_1, d_1) - \Theta^\ell(x, \eta_2, \xi_2, \alpha_2, d_2)| \leq L_{\Theta^\ell} (|\eta_1 - \eta_2| + |\xi_1 - \xi_2| + |\alpha_1 - \alpha_2| \\ \quad + |d_1 - d_2|), \quad \forall \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \quad \alpha_1, \alpha_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \Theta^\ell(x, \eta, \xi, \alpha, d) \text{ est mesurable sur } \Omega^\ell, \text{ pour tout } \eta, \xi \in \mathbb{S}^d \\ \quad \text{et } \alpha, d \in \mathbb{R}, \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \Theta^\ell(x, 0, 0, 0, 0) \in L^2(\Omega^\ell) \\ (d) \Theta^\ell(x, \eta, \xi, \alpha, d) \text{ est bornée pour tous } \eta, \xi \in \mathbb{S}^d, \quad \alpha, d \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (2.21)$$

La fonction source d'endommagement $\phi^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\phi^\ell} > 0 \text{ telle que :} \\ \quad |\phi^\ell(x, \eta_1, \xi_1, \alpha_1, d_1) - \phi^\ell(x, \eta_2, \xi_2, \alpha_2, d_2)| \leq L_{\phi^\ell} (|\eta_1 - \eta_2| + |\xi_1 - \xi_2| + |\alpha_1 - \alpha_2| \\ \quad + |d_1 - d_2|), \quad \forall \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \quad \alpha_1, \alpha_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \phi^\ell(x, \eta, \xi, \alpha, d) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \quad \forall \eta, \xi \in \mathbb{S}^d \\ \quad \text{et } \alpha, d \in \mathbb{R}, \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \phi^\ell(x, 0, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega^\ell), \\ (d) \phi^\ell(x, \eta, \xi, \alpha, d) \text{ est bornée } \forall \eta, \xi \in \mathbb{S}^d, \quad \alpha, d \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifie :

$$\begin{cases} (a) \mathcal{E}^\ell(x, \tau) = (e_{ijk}^\ell(x) \tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (b) e_{ijk}^\ell = e_{ikj}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j, k \leq d. \end{cases} \quad (2.23)$$

L'opérateur de permittivité électrique $\mathcal{G}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifie :

$$\begin{cases} (a) \mathcal{G}^\ell(x, E) = (b_{ij}^\ell(x) E_j), \quad b_{ij}^\ell = b_{ji}^\ell, \quad b_{ij}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j \leq d, \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{G}^\ell} > 0 \text{ telle que :} \\ \quad \mathcal{G}^\ell E \cdot E \geq m_{\mathcal{G}^\ell} |E|^2, \quad \forall E \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{cases} \quad (2.24)$$

La fonction de taux d'adhésion $H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$$\begin{cases} (a) \text{ Il existe } L_{ad} > 0 \text{ telle que :} \\ \quad |H_{ad}(x, \beta_1, \xi_1, r_1, d_1) - H_{ad}(x, \beta_2, \xi_2, r_2, d_2)| \leq L_V (|\beta_1 - \beta_2| + |\xi_1 - \xi_2| + |r_1 - r_2| \\ \quad + |d_1 - d_2|), \quad \forall \beta_1, \beta_2, \xi_1, \xi_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto H_{ad}(x, \beta, \eta, r, d) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \quad \forall \beta, \xi, r \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^{d-1}, \\ (c) \text{ L'application } (\beta, \xi, r, d) \mapsto H_{ad}(x, \beta, \xi, r, d) \text{ est continu sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \\ \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (d) H_{ad}(x, 0, \xi, r, d) = 0, \quad \forall \xi, r \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (e) H_{ad}(x, \beta, \xi, r, d) \geq 0, \quad \forall \beta \leq 0, \quad \xi, r \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \text{ et} \\ \quad H_{ad}(x, \beta, \xi, r, d) \leq 0, \quad \forall \beta \geq 1, \quad \xi, r \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{cases} \quad (2.25)$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

$$\begin{cases} (a) \text{ Il existe } L_\nu > 0 \text{ telle que :} \\ \quad |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2|, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b) (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (c) \text{ l'application } x \mapsto p_\nu(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \quad \forall r \in \mathbb{R}, \\ (d) p_\nu(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{cases} \quad (2.26)$$

On suppose que les forces volumiques f_0^ℓ et les tractions surfaciques f_2^ℓ , et les charges électriques volumique q_0^ℓ et surfaciques q_2^ℓ et la source de chaleur volumique sont ρ^ℓ ont les régularités :

$$f_0^\ell \in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)^d), \quad f_2^\ell \in C(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \quad (2.27)$$

$$q_0^\ell \in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)), \quad q_2^\ell \in C(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)), \quad \rho^\ell \in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)). \quad (2.28)$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν et γ_τ satisfont les conditions :

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (2.29)$$

Le coefficient énergétique κ_0^ℓ et le coefficient de diffusion des microfissures κ^ℓ est vérifié :

$$\kappa_0^\ell > 0, \quad \kappa^\ell > 0. \quad (2.30)$$

Tandis que le coefficient de frottement μ vérifie :

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (2.31)$$

Le champ initial de déplacement satisfait :

$$\mathbf{u}_0^\ell \in V^\ell. \quad (2.32)$$

Le champ initial d'endommagement satisfait :

$$\alpha_0^\ell \in K^\ell. \quad (2.33)$$

Le coefficient de température satisfait :

$$\theta_0^\ell \in E_1^\ell. \quad (2.34)$$

Finalement ,on suppose que le champ initial d'adhésion satisfait :

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad (2.35)$$

Nous énonçons maintenant quelques définitions qu'on utilise dans la suite de ce chapitre.

D'abord, l'application d'inclusion de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. On définit la fonction $f = (f^1, f^2) : [0, T] \rightarrow V$ par :

$$(f(t), \mathbf{v})_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T], \quad (2.36)$$

et la fonction $q = (q^1, q^2) : [0, T] \rightarrow W$ par :

$$(q(t), \zeta)_W = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t) \cdot \zeta^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t) \cdot \zeta^\ell da, \quad \forall \zeta \in W, t \in [0, T]. \quad (2.37)$$

Les conditions (2.27) et (2.28) impliquent

$$f \in C(0, T; V), \quad q \in C(0, T; W). \quad (2.38)$$

Nous introduisons les fonctions continues suivantes $a_0 : E_1 \times E_1 \rightarrow \mathbb{R}$

$a : E_1 \times E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$a_0(\zeta, \xi) = \sum_{\ell=1}^2 \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \zeta^\ell \cdot \nabla \xi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \zeta^\ell \xi^\ell da. \quad (2.39)$$

$$a(\zeta, \xi) = \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \zeta^\ell \cdot \nabla \xi^\ell dx. \quad (2.40)$$

On définit la fonctionnelle d'adhésion comme suit $j_{ad} : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])[v_\nu] + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) \cdot [\mathbf{v}_\tau]) da. \quad (2.41)$$

La fonctionnelle de compliance normale $j_{\nu c} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{\nu c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu])[v_\nu] da, \quad (2.42)$$

et la fonctionnelle de frottement $j_{fr} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{v}_\tau\| da. \quad (2.43)$$

La condition (2.26) entraîne que les intégrales dans (2.42) et (2.43) sont bien définies.

2.2 Formulation variationnelle

A l'aide des formules de Green on voit directement que si $\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}$ et β sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (2.5), (2.7), (2.10) et (2.11) avec (2.41), (2.42) et (2.43) pour tout $t \in [0, T]$ on déduit que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell (\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t))) dx + \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) dx &= \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da + \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

d'après (2.5) et (2.7)-(2.8) on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell(\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))dx - \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))dx &= \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da \\ &+ \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell \end{aligned}$$

La formule de Green pour $\ell = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^1} \boldsymbol{\sigma}^1(\varepsilon(\mathbf{v}^1) - \varepsilon(\mathbf{u}^1(t)))dx - \int_{\Omega^1} f_0^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t))dx &= \int_{\Gamma_2^1} f_2^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t))da \\ &+ \int_{\Gamma_3^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^1 \in V^1 \end{aligned} \quad (2.44)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^2} \boldsymbol{\sigma}^2(\varepsilon(\mathbf{v}^2) - \varepsilon(\mathbf{u}^2(t)))dx - \int_{\Omega^2} f_0^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t))dx &= \int_{\Gamma_2^2} f_2^1 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t))da \\ &+ \int_{\Gamma_3^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^2 \in V^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

à addition (2.44) et (2.45)

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell(\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da + \\ &\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da + \\ &\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

d'après (2.36)

$$(f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da.$$

En suite :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} = (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{\mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell.$$

On calcule $\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da = ? :$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t)) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^1 (\mathbf{v}_\nu^1 - \mathbf{u}_\nu^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^2 (\mathbf{v}_\nu^2 - \mathbf{u}_\nu^2(t)) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 (\mathbf{v}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 (\mathbf{v}_\tau^2 - \mathbf{u}_\tau^2(t)) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu ([v_\nu - u_\nu(t)]) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da \\ &= \int_{\Gamma_3} (-p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da, \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da &= \int_{\Gamma_3} (-p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Nous supposons que $\Gamma_3 = \Gamma_3^+ \cup \Gamma_3^-$.

où $\Gamma_3^+ = \{x \in \Gamma_3 / \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu])\}$

et $\Gamma_3^- = \{x \in \Gamma_3 / \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu])\}$.

$$\text{D'où } \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da = \int_{\Gamma_3^+} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da + \int_{\Gamma_3^-} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da.$$

Pour $[\mathbf{u}_\tau]$:

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\int_{\Gamma_3^+} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau]) da \geq - \int_{\Gamma_3^+} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \|\mathbf{u}_\tau\| da.$$

Maintenant, en utilisant (2.11).

$$\int_{\Gamma_3^+} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau]) da \geq - \int_{\Gamma_3^+} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{u}_\tau\| da = 0. \quad (2.47)$$

Et

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau(t)]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \lambda[\mathbf{u}_\tau(t)][\mathbf{u}_\tau(t)] da.$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau(t)]) da &= -\lambda \int_{\Gamma_3^-} \|\mathbf{u}_\tau\|^2 da \\ &= - \int_{\Gamma_3^-} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \|\mathbf{u}_\tau\| da, \\ &= - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{u}_\tau\| da, \end{aligned}$$

alors :

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau(t)]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{u}_\tau\| da. \quad (2.48)$$

Pour $[\mathbf{v}_\tau]$:

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \lambda([u_\nu])[\mathbf{v}_\tau] da,$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau]) da &\geq -\lambda \int_{\Gamma_3^-} \|\mathbf{u}_\tau\| \|\mathbf{v}_\tau\| da \\ &\geq - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\mathbf{v}_\tau\| da, \end{aligned} \quad (2.49)$$

nous utilisons (2.48) et le égalité (2.49) pour trouver :

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da \geq - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) (\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau\|) da, \quad (2.50)$$

nous utilisons (2.47) et le égalité (2.50) pour trouver :

$$\int_{\Gamma_3} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da \geq - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau\|) da. \quad (2.51)$$

Maintenant, nous utilisons (2.46) et (2.51) pour trouver :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} &\geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{\mathbf{V}} - \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu]) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau\|) da \\ &- \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da. \end{aligned}$$

D'après (2.41)-(2.42) et (2.43) on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{vc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \\ & + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{\mathbf{V}}, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \end{aligned} \quad (2.52)$$

En utilise la formule de Green pour les inconnues électrique du problème ainsi que les conditions (2.6), (2.14) et la définition (2.37) on a :

$$(\mathbf{D}^\ell, \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\operatorname{div} \mathbf{D}^\ell, \phi^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell,$$

d'où

$$\int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} \mathbf{D}^\ell \cdot \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da + \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell. \quad (2.53)$$

Pour $\ell = 1, 2$, on a d'après (2.14) :

$$\int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da = 0,$$

alors :

$$\int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} \mathbf{D}^\ell \cdot \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell. \quad (2.54)$$

On a d'après (2.6) et (2.15) :

$$\int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell. \quad (2.55)$$

La formule de Green pour $\ell = 1$

$$\int_{\Omega^1} \mathbf{D}^1 \cdot \nabla \phi^1 dx + \int_{\Omega^1} q_0^1 \cdot \phi^1 dx = \int_{\Gamma_b^1} q_2^1 \cdot \phi^1 da, \quad \forall \phi^1 \in H_1^1. \quad (2.56)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} \mathbf{D}^2 \cdot \nabla \phi^2 dx + \int_{\Omega^2} q_0^2 \cdot \phi^2 dx = \int_{\Gamma_b^2} q_2^2 \cdot \phi^2 da, \quad \forall \phi^2 \in H_1^2, \quad (2.57)$$

à addition (2.56) et (2.57) on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da, \\ & \sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da = 0. \end{aligned}$$

On a d'après (2.37) :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da = (q(t), \phi)_W.$$

Donc :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} + (q(t), \phi)_W = 0.$$

De (2.2), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell(t))), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (-q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T). \quad (2.58)$$

Maintenant ,pour tout $t \in [0, T]$ et de (2.4) , on obtient :

$$\begin{aligned} (\dot{\theta}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} - (\kappa_0^\ell \Delta \theta^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} &= \left(\Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \\ \forall \xi^\ell &\in E_1. \end{aligned} \quad (2.59)$$

En utilisant la formule de Green on a :

$$-\kappa_0^\ell (\Delta \theta^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \theta^\ell(t) \cdot \nabla \xi^\ell dx - \kappa_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \frac{\partial \theta^\ell(t)}{\partial \nu^\ell} \xi^\ell dx, \quad \forall \xi^\ell \in E_1$$

on a d'après (2.13) :

$$-\kappa_0^\ell (\Delta \theta^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \theta^\ell(t) \cdot \nabla \xi^\ell dx + \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \theta^\ell(t) \xi^\ell dx, \quad \forall \xi^\ell \in E_1. \quad (2.60)$$

Nous utilisons (2.60) et l'égalité (2.59), on trouve :

$$\begin{aligned} (\dot{\theta}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \theta^\ell(t) \cdot \nabla \xi^\ell dx + \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \theta^\ell(t) \cdot \xi^\ell dx \\ = \left(\Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi^\ell \in E_1, \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\theta}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^2 \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \theta^\ell(t) \cdot \nabla \xi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \theta^\ell(t) \cdot \xi^\ell dx \\ = \sum_{\ell=1}^2 \left(\Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi^\ell \in E_1. \end{aligned}$$

D'après (2.39), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\dot{\theta}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\theta(t), \xi) = \sum_{\ell=1}^2 \left(\Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)},$$

$$\forall \xi^\ell \in E_1. \quad (2.61)$$

Enfin, soit $\alpha^\ell(t) \in K^\ell$ et pour tout $t \in [0, T]$. De la définition (1.51) de $\partial\psi_{K^\ell}(\alpha^\ell)$ et de (2.3), on obtient :

$$(\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t) - \dot{\alpha}^\ell(t) + \kappa^\ell \Delta \alpha^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} \leq 0, \quad \forall \xi^\ell \in K^\ell.$$

Donc :

$$\begin{aligned} & (\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} \\ & \leq (\dot{\alpha}^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} - \kappa^\ell (\Delta \alpha^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green et (2.12)

$$(\Delta \alpha^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} = - \int_{\Omega^\ell} \nabla \alpha^\ell(t) \cdot \nabla (\xi^\ell - \alpha^\ell(t)) dx.$$

En suite :

$$\begin{aligned} & (\dot{\alpha}^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \alpha^\ell(t) \cdot \nabla (\xi^\ell - \alpha^\ell(t)) dx \\ & \geq (\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\alpha}^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \alpha^\ell(t) \cdot \nabla (\xi^\ell - \alpha^\ell(t)) dx \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 (\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi^\ell \in K^\ell. \end{aligned}$$

D'après (2.40), on trouve :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\alpha}^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 (\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi^\ell \in K^\ell. \end{aligned} \quad (2.62)$$

De (2.1), (2.2), (2.52), (2.61), (2.58), (2.62), (2.9), (2.17) et (2.18), on obtient la formulation variationnelle du problème \mathcal{P} .

Problème $\mathcal{P}V$. Trouver les champs des déplacements $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) : [0, T] \rightarrow V$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, les potentiels électriques $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) : [0, T] \rightarrow W$, les champs des températures $\theta = (\theta^1, \theta^2) : [0, T] \rightarrow E_1$, les champs d'endommagements $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) : [0, T] \rightarrow E_1$, le champ d'adhésion $\beta :$

$[0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D} = (\mathbf{D}^1, \mathbf{D}^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{W}$, tels que :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \boldsymbol{\theta}^\ell, \alpha^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \boldsymbol{\theta}^\ell(s), \alpha^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell), \quad (2.63)$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell)), \quad (2.64)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{vc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{\mathcal{V}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, t \in [0, T], \quad (2.65)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\ell(t) - \boldsymbol{\rho}^\ell(t), \boldsymbol{\xi}^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\ell=1}^2 \left(\boldsymbol{\Theta}^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(t)), \boldsymbol{\theta}^\ell(t), \alpha^\ell(t)), \boldsymbol{\xi}^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in E_1, t \in [0, T], \quad (2.66)$$

$$\alpha(t) \in K, \quad \sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\alpha}^\ell(t), \boldsymbol{\xi}^\ell - \alpha^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\alpha(t), \boldsymbol{\xi} - \alpha(t)) \geq$$

$$\sum_{\ell=1}^2 \left(\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(t)), \boldsymbol{\theta}^\ell(t), \alpha^\ell(t)), \boldsymbol{\xi}^\ell - \alpha^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in K, t \in [0, T], \quad (2.67)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell(t))), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (-q(t), \phi)_{\mathcal{W}}, \quad \forall \phi \in \mathcal{W}, t \in [0, T], \quad (2.68)$$

$$\dot{\beta}(t) = \mathbf{H}_{ad}(\beta(t), \xi_\beta(t), R_\nu([u_\nu(t)]), R_\tau([u_\tau(t)])), \quad p.p. t \in [0, T], \quad (2.69)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (2.70)$$

Dans le reste de cette section, nous présentons quelques inégalités comprenant les fonctionnelles j_{ad} , j_{vc} et j_{fr} qui seront utilisées dans les sections suivantes. Ci-dessous dans cette section, β, β_1, β_2 dénotent les éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tel que $0 \leq \beta, \beta_1, \beta_2 \leq 1$ p.p. sur Γ_3 , $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}^\ell$ et \mathbf{v}^ℓ représentent des éléments de \mathcal{V}^ℓ , et c est une constante générique positive qui peut dépendre de $\Omega^\ell, \Gamma_3, \gamma_\tau, \gamma_\nu, p_\nu, p_\tau$ et L , dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite aux fonctions diverses sur $x^\ell \in \Omega^\ell \cup \Gamma_3$.

D'abord nous faisons remarquer que les fonctionnelles j_{ad} et j_{vc} sont linéaires par rapport au dernier argument et donc

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad j_{vc}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -j_{vc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (2.71)$$

Ensuite, en utilisant (2.41) et les inégalités $|R_\nu([\nu])| \leq L$, $|R_\tau([\tau])| \leq L$, $|\beta_1| \leq 1$, $|\beta_2| \leq 1$, nous déduisons que

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\| da. \quad (2.72)$$

En combinant cette inégalité avec (1.41), nous obtenons

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq c \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V. \quad (2.73)$$

En choisissant $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ dans (2.73), nous trouvons :

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq 0. \quad (2.74)$$

Des manipulations semblables, basées sur la Lipschitzialité des opérateurs R_ν et R_τ montrent que

$$|j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V. \quad (2.75)$$

Aussi, nous prenons $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$ et $\mathbf{u}_2 = 0$ dans (2.74) ensuite nous utilisons les égalités $R_\nu(0) = 0$, $R_\tau(0) = 0$ et (2.73) pour obtenir

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0. \quad (2.76)$$

Maintenant, en utilisant (2.42), on obtient

$$j_{\nu c}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j_{\nu c}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j_{\nu c}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j_{\nu c}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) = - \int_{\Gamma_3} (p_\nu([\mathbf{u}_{1\nu}]) - p_\nu([\mathbf{u}_{2\nu}])([\mathbf{v}_{1\nu}] - [\mathbf{v}_{2\nu}]) da,$$

et d'après (2.26)(b), on a

$$j_{\nu c}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j_{\nu c}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j_{\nu c}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j_{\nu c}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \leq 0. \quad (2.77)$$

Maintenant, nous utilisons (2.43) pour trouver

$$j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq \int_{\Gamma_3} \mu |p_\nu([\mathbf{u}_{1\nu}]) - p_\nu([\mathbf{u}_{2\nu}])| \|\mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}_{2\tau}\|.$$

D'après l'hypothèse (2.26) (a), et gardant en tête (1.41) nous obtenons

$$j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V. \quad (2.78)$$

Les inégalités (2.73)–(2.78) et l'égalité (2.71) vont être utilisées dans des places diverses dans le reste du chapitre.

2.3 Existence et unicité de la solution

Notre intérêt principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel **Problème $\mathcal{P}V$** .

Théorème 2.3.1 *Supposons que (2.19)–(2.35) sont vérifiées. Alors, il existe $\mu_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ , $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, H_{ad}, \mathcal{Q}^\ell$ et $\mathcal{A}^\ell, \ell = 1, 2$ telle que, si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, alors le Problème $\mathcal{P}V$ possède une solution unique $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \theta, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \mathbf{D}\}$. De plus, la solution satisfait*

$$\mathbf{u} \in C(0, T; \mathbf{V}), \quad (2.79)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (2.80)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap L^\infty(0, T; \mathcal{Z}), \quad (2.81)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in C(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (2.82)$$

$$\theta \in L^2(0, T; E_1) \cap H^1(0, T; E_0), \quad (2.83)$$

$$\boldsymbol{\alpha} \in L^2(0, T; E_1) \cap H^1(0, T; E_0), \quad (2.84)$$

$$\mathbf{D} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{W}). \quad (2.85)$$

Un jeu de fonctions $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \theta, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \mathbf{D}\}$ qui satisfaisant (2.63)–(2.70) s'appelle solution faible pour le problème \mathcal{P} . Nous concluons par le Théorème (2.3.1) que, sous les hypothèses (2.19)–(2.35), le problème \mathcal{P} a une solution faible unique qui satisfait (2.79)–(2.85).

Démonstration du Théorème 2.3.1

La démonstration du Théorème (2.3.1) sera effectuée dans plusieurs étapes. A cet effet, nous assumons dans la suite que (2.19)–(2.35) sont satisfaites.

première étape : Soit $(\lambda, \mu) \in C(0, T; E_0 \times E_0)$ et nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème $\mathcal{P}V_{(\lambda, \mu)}$. Trouver le champ de température $\theta_\lambda : [0, T] \rightarrow E_0$, et le champ d'endommagement $\alpha_\mu : [0, T] \rightarrow E_0$ tels que

$$\sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\theta}_\lambda^\ell(t) - \lambda^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\theta_\lambda^\ell(t), \xi) = 0, \quad \forall \xi \in E_0, t \in [0, T], \quad (2.86)$$

$$\alpha_\mu(t) \in K \sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\alpha}_\mu^\ell(t) - \mu^\ell(t), \xi^\ell - \alpha_\mu^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} +$$

$$a(\alpha_\mu(t), \xi - \alpha_\mu(t)) \geq 0, \quad \forall \xi \in K, t \in [0, T], \quad (2.87)$$

$$\theta_\lambda(0) = \theta_0, \quad \alpha_\mu(0) = \alpha_0, \quad (2.88)$$

où $K = K^1 \times K^2$.

Lemme 2.3.1 *Il existe une solution unique $\{\theta_\lambda, \alpha_\mu\}$ du problème $\mathcal{PV}_{(\lambda, \mu)}$ satisfaisant (2.83)–(2.84).*

Démonstration. L'application d'inclusion de $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ dans $(E_0, \|\cdot\|_{E_0})$ est continue et dense. Notant par E_1' l'espace dual de E_1 , nous pouvons écrire le Triplet de Gelfand

$$E_1 \subset E_0 \subset E_1'.$$

On considère l'opérateur linéaire $A_0 : E_1 \rightarrow E_1'$ défini par

$$(A_0\zeta, \xi)_{E_1' \times E_1} = a_0(\zeta, \xi), \quad \forall \zeta, \xi \in E_1. \quad (2.89)$$

Nous utilisons (2.89) et la définition (2.39), en utilisons l'inégalité de Hölder et pour tout $\zeta, \xi \in E_1$, on a :

$$|(A_0\zeta, \xi)_{E_1' \times E_1}| \leq \kappa_0 \|\nabla\zeta\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla\xi\|_{L^2(\Omega)^d} + \lambda_0 \|\xi\|_{L^2(\Gamma)} \|\zeta\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (2.90)$$

Gardant en tête Théorème 1.2.3 (trace de Sobolev), l'inégalité (2.90) devient :

$$\|A_0\zeta\|_{E_1'} \leq C \|\zeta\|_{E_1}, \quad (2.91)$$

ce qui montre que $A_0 : E_1 \rightarrow E_1'$ est continue et donc hemicontinu.

D'après la définitions (2.89) on vérifie :

$$(A_0\zeta, \zeta)_{E_1' \times E_1} \geq 0,$$

i.e, que $A_0 : E_1 \rightarrow E_1'$ est un opérateur monotone.

D'autre part, moyennant (2.90), comme $\lambda_0 > 0$ et pour tout $\zeta \in E_1$, on résulte :

$$(A_0\zeta, \zeta)_{E_1' \times E_1} \geq \kappa_0 \|\nabla\zeta\|_{L^2(\Gamma)^d}^2.$$

et d'ou

$$(A_0\zeta, \zeta)_{E_1' \times E_1} \geq \kappa_0 \|\zeta\|_{E_1}^2 - \kappa_0 \|\zeta\|_{E_0}^2.$$

Alors, A_0 satisfait la condition (1.57) du Théorème 1.2.10 avec $w = \kappa_0$ et $\lambda = -\kappa_0 \|\zeta\|_{E_0}^2$.

Ensuite, de (2.91) nous déduisons que A_0 satisfait la condition (1.58).

Il s'ensuit maintenant de la régularité (2.34) et (2.38) et $\lambda \in L^2(0, T; E'_1)$ que $q_\lambda = \lambda + q \in L^2(0, T; E_0)$ et $\theta_0 \in L^2(\Omega)$.

Finalement, nous remarquons que toutes les conditions du Théorème 1.2.10 sont vérifiées, donc nous concluons qu'il existe une unique fonction θ_λ qui satisfait

$$\theta_\lambda \in L^2(0, T; E_1) \cap H^1(0, T; E_0), \quad \dot{\theta}_\lambda \in L^2(0, T; E'_1),$$

$$\dot{\theta}_\lambda(t) + A_0\theta(t) = q_\lambda(t) \text{ p.p. } t \in [0, T],$$

$$\theta_\lambda(0) = \theta_0.$$

D'autre part, on sait que l'ensemble des endommagements admissibles K est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans E_1 . Ainsi, le champ d'endommagement initial $\alpha_0 \in K$.

On considère l'opérateur $A_1 : E_1 \rightarrow E'_1$ défini par

$$(A_1\zeta, \xi)_{E'_1 \times E_1} = a(\zeta, \xi), \quad \forall \zeta, \xi \in E_1. \quad (2.92)$$

Nous utilisons (2.92) et la définition (2.40), on peut vérifier que A_1 est linéaire, et pour tout $\zeta, \xi \in E_1$, on a

$$(A_1\zeta, \xi)_{E'_1 \times E_1} = (A_1\xi, \zeta)_{E'_1 \times E_1},$$

et

$$\begin{aligned} |(A_1\zeta, \xi)_{E'_1 \times E_1}| &\leq 3\kappa \|\nabla\zeta\|_{\mathbb{H}} \|\nabla\xi\|_{\mathbb{H}} \\ &\leq c \|\zeta\|_{\mathbb{H}^1} \|\xi\|_{\mathbb{H}^1}, \end{aligned}$$

donc, A_1 est continu et symétrique.

Ainsi, pour tout $\xi \in E_1$, nous avons

$$(A_1\xi, \xi)_{E'_1 \times E_1} = \kappa \|\nabla\xi\|_{\mathbb{H}}^2,$$

alors

$$(A_1\xi, \xi)_{E'_1 \times E_1} + (\kappa + 1)\|\xi\|_{E_0}^2 \geq \kappa(\|\nabla\xi\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\xi\|_{E_0}^2),$$

et d'où

$$(A_1\xi, \xi)_{E'_1 \times E_1} + C_2\|\xi\|_{E_0}^2 \geq C_3\|\xi\|_{E_1}^2.$$

Alors, satisfait la condition (1.59) du Théorème 1.2.11 avec $C_2 = \kappa + 1$ et $C_3 = \kappa$.

Nous remarquons que toutes les conditions du Théorème [1.2.11](#) sont vérifiées.

Ce qui termine la preuve du lemme [2.3.1](#). ■

Deuxième étape : Soit $(\lambda, \mu, \eta) \in C(0, T; E_0 \times E_0 \times V)$, nous utilisons le $\theta_\lambda, \alpha_\mu$ obtenu dans le lemme [2.3.1](#) et nous considérons le problème suivant :

Problème $\mathcal{PV}_{(\lambda, \mu, \eta)}$. Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta} : [0, T] \rightarrow V$, un potentiel électrique $\varphi_{\lambda\mu\eta} =: [0, T] \rightarrow W$, le champ d'adhésion $\beta_{\lambda\mu\eta} : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que :

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^\ell), \theta_\lambda^\ell, \alpha_\mu^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + j_{\nu c}(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t), \mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t)) \\ & + (\eta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T], \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi_{\lambda\mu\eta}^\ell(t))), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (-q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T], \quad (2.94)$$

$$\dot{\beta}_{\lambda\mu\eta}(t) = \mathbf{H}_{ad}(\beta_{\lambda\mu\eta}(t), \xi_{\beta_{\lambda\mu\eta}}, R_\nu([u_{\nu\lambda\mu\eta}(t)]), R_\tau([u_{\tau\lambda\mu\eta}(t)])), \quad p.p.t \in [0, T], \quad (2.95)$$

$$\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \beta_{\lambda\mu\eta}(0) = \beta_0. \quad (2.96)$$

Pour l'étude de ce problème on a le résultat suivant.

Lemme 2.3.2

1. Il existe $\mu_0 > 0$ qui dépend de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, \mathbf{H}_{ad}$ et $\mathcal{A}^\ell, \ell = 1, 2$ tels que, si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, alors le Problème $\mathcal{PV}_{(\lambda, \mu, \eta)}$ possède une solution unique $\{\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}, \varphi_{\lambda\mu\eta}, \beta_{\lambda\mu\eta}\}$ qui satisfait la régularité [\(2.79\)](#)–[\(2.81\)](#).
2. Si \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 , sont deux solutions du problème [\(2.93\)](#) et [\(2.96\)](#) correspondant aux données $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; V)$, alors il existe $c > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$,

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \leq c \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V. \quad (2.97)$$

Démonstration..

Nous appliquons le Théorème [1.2.8](#) où $X = V$ l'espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de la norme associée $\|\cdot\|_V$, définies par [\(1.39\)](#) et [\(1.40\)](#).

Nous utilisons le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour définir l'opérateur $A : V \rightarrow V$ par

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \theta_\lambda^\ell, \alpha_\mu^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \quad (2.98)$$

pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, et définir $\mathbf{f}_\eta \in X$ et la fonction $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathbf{f}_\eta(t) = \mathbf{f}(t) - \boldsymbol{\eta}(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.99)$$

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = j_{\nu c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (2.100)$$

Soit $\mathbf{v} \in V$; en utilisant (2.98) nous avons

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}_1 - \mathbf{A}\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell), \theta_\lambda^\ell, \alpha_\mu^\ell) - \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \theta_\lambda^\ell, \alpha_\mu^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}.$$

En utilisant (2.19)(a)

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{u}_1 - \mathbf{A}\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V &\leq \sum_{\ell=1}^2 \|\mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell), \theta_\lambda^\ell, \alpha_\mu^\ell) - \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \theta_\lambda^\ell, \alpha_\mu^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \|\varepsilon(\mathbf{v}^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell}, \\ &\leq \sum_{\ell=1}^2 L_{\mathcal{A}^\ell} \|\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell\|_{V^\ell} \|\mathbf{v}^\ell\|_{V^\ell}, \\ &\leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \end{aligned}$$

d'où

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}_1 - \mathbf{A}\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V \leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V.$$

Mettons ensuite $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}_1 - \mathbf{A}\mathbf{u}_2$ dans l'inégalité précédent pour obtenir

$$\|\mathbf{A}\mathbf{u}_1 - \mathbf{A}\mathbf{u}_2\|_V \leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V. \quad (2.101)$$

Soit $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$. Nous utilisons (2.98) pour trouver

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}_1 - \mathbf{A}\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell), \theta_\lambda^\ell, \alpha_\mu^\ell) - \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \theta_\lambda^\ell, \alpha_\mu^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}.$$

Moyennant maintenant (2.19)(b), on trouve

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{u}_1 - \mathbf{A}\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V &\geq \sum_{\ell=1}^2 m_{\mathcal{A}^\ell} \|\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell\|_{V^\ell}^2, \\ &\geq \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2, \end{aligned}$$

donc

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}_1 - \mathbf{A}\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \geq \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2. \quad (2.102)$$

Nous concluons de (2.101) et (2.102) que l'opérateur A est fortement monotone et de Lipschitz sur V .

Aussi, en utilisant (2.42) et (2.43) pour voir que la fonctionnelle j définie dans (2.100) satisfait la condition (1.54)(a). Moyennant (2.26) et (2.31) encore une fois, nous utilisons (2.77), (2.78) et (2.100), nous trouvons l'inégalité suivante

$$j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) + j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq L_\nu c_0^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V, \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V. \quad (2.103)$$

Finalement, ce qui montre que la fonctionnelle j vérifie la condition (1.54)(a) sur $X = V$. De plus, en utilisant (2.38) et prenant en considération que $\eta \in C(0, T; V)$, nous concluons de (2.99) que $f_\eta \in C(0, T; V)$, i.e., f_η satisfait (1.55). Soit

$$\mu_0 = \frac{\min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2})}{c_0^2 L_\nu},$$

et remarquons que μ_0 dépend de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, \mathbf{H}_{ad}$. Supposons que $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$. Alors

$$c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}), \quad (2.104)$$

et, en appliquant le résultat d'existence et d'unicité sur les inégalités quasi-variationnelles (Théorème 1.2.8), il s'ensuit l'existence d'un élément unique $\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta} \in V$ qui vérifie

$$(A\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}, v - \mathbf{u}_{\lambda\mu\eta})_V + j(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}, v) - j(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}, \mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}) \geq (f_\eta, v - \mathbf{u}_{\lambda\mu\eta})_V \quad \forall v \in V. \quad (2.105)$$

Maintenant, nous montrons que

$$\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta} \in C(0, T; V).$$

Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$, et on considère les notations $\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t_i) = \mathbf{u}_i$, $\theta_\lambda(t_i) = \theta_i$, $\alpha_\mu(t_i) = \alpha_i$, $\eta(t_i) = \eta_i$, $f(t_i) = f_i$, $i = 1, 2$, en utilisant des arguments basés sur (2.93) nous trouvons

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell), \theta_1^\ell - \theta_2^\ell, \alpha_1^\ell - \alpha_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \leq j_{\nu c}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \\ & + j_{\nu c}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) \\ & - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) + (\eta_1 - \eta_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V + (f_1 - f_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Combinons maintenant l'inéquation précédente avec l'hypothèse (2.19) de l'opérateur \mathcal{A}^ℓ , et les propriétés (2.75), (2.78) des fonctionnelles $j_{\nu c}, j_{fr}$ pour trouvons l'inégalité suivante

$$m_{\mathcal{A}^\ell} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \leq c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 + \|\eta_1 - \eta_2\|_V \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V$$

$$+\|f_1 - f_2\|_V \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V.$$

Ce qui mène à l'inégalité suivante

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}^\ell} - c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}} (\|\eta_1 - \eta_2\|_V + \|f_1 - f_2\|_V). \quad (2.107)$$

Donc :

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \leq c (\|\eta_1 - \eta_2\|_V + \|f_1 - f_2\|_V). \quad (2.108)$$

$$\text{où } c = \frac{1}{m_{\mathcal{A}^\ell} - c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}}.$$

Rappelons que $f \in C(0, T; V)$, et sous l'hypothèse de petitesse $c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty} < m_{\mathcal{A}^\ell}$ il vient de (2.108) que l'application $t \mapsto \mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t) : [0, T] \rightarrow V$ est continue. C'est à dire $\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta} \in C(0, T; V)$.

Maintenant, nous définissons la forme bilinéaire $G : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$G(\varphi, \phi) = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \varphi, \phi \in W. \quad (2.109)$$

D'après (1.45), (1.46), (2.24) et (2.109) avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous pouvons démontrer que la forme bilinéaire G est continue, symétrique et coercive on W . Cependant, en utilisant le théorème de représentation de Riesz on peut définir une forme linéaire continue $w_{\lambda\mu\eta} : [0, T] \rightarrow W$ par

$$(w_{\lambda\mu\eta}(t), \phi)_W = (q(t), \phi)_W + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T].$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram, pour déduire qu'il existe un élément unique $\varphi_{\lambda\mu\eta}(t) \in W$ tel que

$$\begin{aligned} G(\varphi_{\lambda\mu\eta}(t), \phi) &= (w_{\lambda\mu\eta}(t), \phi)_W \\ &= (q(t), \phi)_W + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \phi \in W. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Nous prouvons maintenant dire que $\varphi_{\lambda\mu\eta} \in C(0, T; W)$, soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ et pour simplicité, on considère les notation $\varphi_{\lambda\mu\eta}(t_i) = \varphi_i, \mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t_i) = \mathbf{u}_i, q(t_i) = q_i$ pour $i = 1, 2$, nous utilisons (2.94) et nettons $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$, on obtient

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell (\nabla \varphi_1 - \nabla \varphi_2), \nabla \varphi_1 - \nabla \varphi_2)_{H^\ell} = (q_1 - q_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \nabla \varphi_1 - \nabla \varphi_2)_{H^\ell}.$$

En utilisant (2.23) et (2.24)(b), nous trouvons

$$m_G \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 \leq C_\varepsilon \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W + \|q_1 - q_2\|_W \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W,$$

ce qui mène à l'inégalité suivante

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq C(\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W), \quad (2.111)$$

où C est une constante positive. Notons aussi que les hypothèses (2.28) combinées avec la définition (2.37) impliquent que $q \in C(0, T; W)$ avec $\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta} \in C(0, T; V)$, l'inégalité (2.111) implique que $\varphi_{\lambda\mu\eta} \in C(0, T; W)$.

Finalement, nous considérons l'application $H_{\lambda\mu\eta} : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ défini par

$$H_{\lambda\mu\eta}(t, \beta) = H_{ad}(\beta_{\lambda\mu\eta}(t), \xi_{\beta_{\lambda\mu\eta}}, R_\nu([u_{\lambda\mu\eta\nu}(t)]), \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta\tau}(t)])),$$

pour $t \in [0, T]$ et $\beta \in L^2(\Gamma_3)$. Il s'ensuit d'après les propriétés des opérateurs de troncation R_ν et \mathbf{R}_τ que $H_{\lambda\mu\eta}$ est de Lipschitz par rapport au deuxième argument, et cela uniformément dans le temps. De plus, pour tout $\beta \in L^2(\Gamma_3)$ l'application $t \rightarrow H_{\lambda\mu\eta}(t, \beta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$. Nous utilisons maintenant une version du Théorème de Cauchy-Lipschitz, nous obtenons l'existence d'une fonction unique fonction $\beta_{\lambda\mu\eta\xi} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ tel que

$$\dot{\beta}_{\lambda\mu\eta}(t) = \mathbf{H}_{ad}(\beta_{\lambda\mu\eta}(t), \xi_{\beta_{\lambda\mu\eta}}, R_\nu([u_{\nu\lambda\mu\eta}(t)]), \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{\tau\lambda\mu\eta}(t)])), \quad p.p.t \in [0, T], \quad (2.112)$$

$$\beta_{\lambda\mu\eta}(0) = \beta_0. \quad (2.113)$$

D'après la remarque 1.1.1 nous démontrons $0 \leq \beta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p sur Γ_3 nous déduisons que $0 \leq \beta_{\lambda\mu\eta}(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p sur Γ_3 . Il résulte de la définition de l'ensemble \mathcal{Z} , que $\beta_{\lambda\mu\eta} \in \mathcal{Z}$, ce qui conclut la preuve du lemme (2.3.2).
■

Troisième étape : Nous considérons l'opérateur :

$$\mathbf{\Lambda} : C(0, T; V \times E_0 \times E_0) \rightarrow C(0, T; V \times E_0 \times E_0),$$

défini par :

$$\mathbf{\Lambda}(\eta, \lambda, \mu)(t) = (\mathbf{\Lambda}^1(\eta, \lambda, \mu)(t), \mathbf{\Lambda}^2(\eta, \lambda, \mu)(t), \mathbf{\Lambda}^3(\eta, \lambda, \mu)(t)) \in V \times E_0 \times E_0, \quad (2.114)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{\Lambda}^1(\eta, \lambda, \mu)(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} &= - \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi_{\lambda\mu\eta}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta_{\lambda\mu\eta}(t), \mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t), \mathbf{v}) \\
 &+ \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^\ell(s)), \theta_\lambda^\ell(s), \alpha_\mu^\ell(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell}, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V},
 \end{aligned} \tag{2.115}$$

$$\mathbf{\Lambda}^2(\eta, \lambda, \mu)(t) = (\Theta^1(\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\mu\eta}^1, \varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^1), \theta_\lambda^1, \alpha_\mu^1), \Theta^2(\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\mu\eta}^2, \varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^2), \theta_\lambda^2, \alpha_\mu^2)), \tag{2.116}$$

$$\mathbf{\Lambda}^3(\eta, \lambda, \mu)(t) = (\phi^1(\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\mu\eta}^1, \varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^1), \theta_\lambda^1, \alpha_\mu^1), \phi^2(\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\mu\eta}^2, \varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^2), \theta_\lambda^2, \alpha_\mu^2)). \tag{2.117}$$

Pour tout $(\eta, \lambda, \mu) \in C(0, T; \mathbf{V} \times E_0 \times E_0)$, θ_λ et α_μ représentent le champ de température et le champ d'endommagement obtenus dans le lemme (2.3.1). $\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}$, φ_η et β_η représentent le champ de déplacements, le potentiel électrique et le champ d'adhésion obtenus dans le lemme (2.3.2), et $\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\mu\eta}^\ell$ défini par

$$\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\mu\eta}^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^\ell), \theta_\lambda^\ell, \alpha_\mu^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^\ell(s)), \theta_\lambda^\ell(s), \alpha_\mu^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi_{\lambda\mu\eta}^\ell). \tag{2.118}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.3 *L'opérateur $\mathbf{\Lambda}$ admet un point fixe unique*

$$(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) \in C(0, T; \mathbf{V} \times E_0 \times E_0).$$

Démonstration. Nous montrons que pour un nombre entier positif m , la puissance m ième de l'opérateur $\mathbf{\Lambda}$, notée $\mathbf{\Lambda}^m$ est une contraction dans $C(0, T; \mathbf{V} \times E_0 \times E_0)$.

Soient $(\eta_1, \lambda_1, \mu_1), (\eta_2, \lambda_2, \mu_2) \in C(0, T; \mathbf{V} \times E_0 \times E_0)$ et par simplicité, nous utilisons les notations $\mathbf{u}_{\eta_i, \lambda_i, \mu_i} = \mathbf{u}_i$, $\varphi_{\eta_i, \lambda_i, \mu_i} = \varphi_i$, $\beta_{\eta_i, \lambda_i, \mu_i} = \beta_i$, $\theta_{\lambda_i} = \theta_i$, $\alpha_{\mu_i} = \alpha_i$ et $\boldsymbol{\sigma}_{\eta_i, \lambda_i, \mu_i} = \boldsymbol{\sigma}_i$ pour $i = 1, 2$. En utilisant (2.118), (2.41) nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{\Lambda}^1(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \mathbf{\Lambda}^1(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_{\mathbf{V}}^2 &\leq \sum_{\ell=1}^2 \|(\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_1^\ell(t) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_2^\ell(t)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \\
 + \sum_{\ell=1}^2 \int_0^t &\|\mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell(s)), \theta_1^\ell(s), \alpha_1^\ell(s)) - \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell(s)), \theta_2^\ell(s), \alpha_2^\ell(s))\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 ds \\
 &+ c \|\beta_1^2(t) R_\nu([u_{1\nu}]) - \beta_2^2(t) R_\nu([u_{2\nu}])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\
 &+ c \|\beta_1^2(t) \mathbf{R}_\tau([u_{1\tau}(t)]) - \beta_2^2(t) \mathbf{R}_\tau([u_{2\tau}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2.
 \end{aligned}$$

En utilisant (2.20) et (2.23)

$$\begin{aligned} \|\Lambda^1(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_V^2 &\leq \sum_{\ell=1}^2 \|(\mathcal{E}^\ell)^*\|_{L^\infty(\Omega^\ell)}^2 \|\nabla \varphi_1^\ell(t) - \nabla \varphi^\ell(t)\|_{H^\ell}^2 \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 L_{\mathcal{Q}^\ell} \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_1^\ell(s) - \mathbf{u}_2^\ell(s)\|_{V^\ell}^2 ds + \int_0^t \|\theta_1^\ell(s) - \theta_2^\ell(s)\|_{L^2(\Omega^\ell)}^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|\alpha_1^\ell(s) - \alpha_2^\ell(s)\|_{L^2(\Omega^\ell)}^2 ds \right) + c \|\beta_1^2(t)R_\nu([u_{1\nu}]) - \beta_2^2(t)R_\nu([u_{2\nu}])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &\quad + c \|\beta_1^2(t)\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{1\tau}(t)]) - \beta_2^2(t)\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{2\tau}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2, \end{aligned}$$

et en utilisant la définition de R_ν et \mathbf{R}_τ on a

$$\begin{aligned} \|\Lambda^1(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_V^2 &\leq \max(L_{\mathcal{Q}^1}, L_{\mathcal{Q}^2}) \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{E_0}^2 ds + \|(\mathcal{E})^*\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \right. \\ &\quad \left. + c \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right). \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|\Lambda^1(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_V^2 &\leq C \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{E_0}^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.119)$$

Où $C = \max(\max(L_{\mathcal{Q}^1}, L_{\mathcal{Q}^2}), \|(\mathcal{E})^*\|_{L^\infty(\Omega)}, c)$.

Par des arguments similaires, de (2.116), (2.118) et (2.21), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|\Lambda^2(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \Lambda^2(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_{E_0}^2 &\leq C (\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 \\ &\quad + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{E_0}^2 + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{E_0}^2 ds \\ &\quad + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2 + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2 ds + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2). \end{aligned} \quad (2.120)$$

De même, l'utilisation de (2.22) implique :

$$\begin{aligned} \|\Lambda^3(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \Lambda^3(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_{E_0}^2 &\leq C (\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 \\ &\quad + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{E_0}^2 + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{E_0}^2 ds \\ &\quad + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2 + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2 ds + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2). \end{aligned} \quad (2.121)$$

Alors, depuis (2.119), (2.120) et (2.121) on a

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbf{\Lambda}(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \mathbf{\Lambda}(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_{\mathbf{V} \times E_0 \times E_0}^2 \leq C (\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \\
 & + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{E_0}^2 + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{E_0}^2 ds \\
 & \quad + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2 + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2 ds \\
 & \quad + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2) .
 \end{aligned} \tag{2.122}$$

Du problème de Cauchy (2.95), nous pouvons écrire

$$\beta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t \mathbf{H}_{ad}(\beta_i(s), \xi_{\beta_i}(s), R_\nu([u_{i\nu}(s)]), \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{i\tau}(s)])) ds$$

et, en utilisant (1.25) et (2.25), nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} & \leq C \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\
 & \quad + C \int_0^t \|R_\nu([u_{1\nu}(s)]) - R_\nu([u_{2\nu}(s)])\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\
 & \quad + C \int_0^t \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{1\tau}(s)]) - \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{2\tau}(s)])\|_{L^2(\Gamma_3)} ds.
 \end{aligned}$$

Utilisant la définition de R_ν et \mathbf{R}_τ et en écrivant $\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2$, nous obtenons

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \left(\int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds \right). \tag{2.123}$$

Ensuite, nous appliquons l'inégalité de Gronwall pour déduire

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds,$$

et en utilisant la relation (1.41) on obtient

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds. \tag{2.124}$$

Nous utilisons maintenant (2.94), (1.45), (2.23) et (2.36) pour trouver

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \leq C \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2. \tag{2.125}$$

De (2.86) on déduit que

$$(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2, \theta_1 - \theta_2)_{E_0} + a_0(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2) + (\lambda_1 - \lambda_2, \theta_1 - \theta_2)_{E_0} = 0.$$

Nous intégrons cette égalité par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$ et l'inégalité $a_0(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2) \geq 0$, on obtient

$$\frac{1}{2} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2 \leq \int_0^t (\lambda_1(s) - \lambda_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s))_{E_0} ds.$$

Ce qui implique que

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2 \leq \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{E_0}^2 ds + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2 ds.$$

Cette inégalité combinée avec l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2 \leq C \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{E_0}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.126)$$

De plus, de (2.87) nous déduisons que $t \in [0, T]$

$$(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{E_0} + a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \leq (\mu_1 - \mu_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{E_0}.$$

Intégrer l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_0$ et l'inégalité $a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$, on obtient

$$\frac{1}{2} \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{E_0}^2 \leq \int_0^t (\mu_1(s) - \mu_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s))_{E_0} ds,$$

ce qui implique que

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{E_0}^2 \leq \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{E_0}^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{E_0}^2 ds.$$

Cette inégalité combinée avec l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{E_0}^2 \leq C \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{E_0}^2 ds. \quad (2.127)$$

Nous combinons (2.97), (2.124), (2.127) et dans (2.122) et les estimations pour obtenir

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{\Lambda}(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \mathbf{\Lambda}(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_{V \times E_0 \times E_0}^2 \leq \\ & C \int_0^t \|(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(s) - (\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(s)\|_{V \times E_0 \times E_0}^2 ds. \end{aligned}$$

En réitérant m fois l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{\Lambda}^m(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \mathbf{\Lambda}^m(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)\|_{C(0, T; V \times E_0 \times E_0)}^2 \leq \\ & \frac{C^m T^m}{m!} \|(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - (\eta_2, \lambda_2, \mu_2)\|_{C(0, T; V \times E_0 \times E_0)}^2 ds. \end{aligned}$$

Ainsi, pour m assez grand, l'opérateur $\mathbf{\Lambda}^m$ est une contraction sur l'espace de Banach $C(0, T; V \times E_0 \times E_0)$, donc il existe un point fixe unique $(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) \in C(0, T; V \times E_0 \times E_0)$, et par conséquent $(\eta^*, \lambda^*, \mu^*)$ est l'unique point fixe de l'opérateur $\mathbf{\Lambda}$. ■

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour établir la démonstration du Théorème (2.3.1)

Démonstration

Existence. Soit $(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) \in C(0, T; V \times E_0 \times E_0)$ est un point fixe de l'opérateur $\mathbf{\Lambda}$, et soit $\{\theta_{\lambda^*}, \alpha_{\mu^*}\}$ est les solutions du Problème $\mathcal{P}V_{(\lambda^*, \mu^*)}$ et $\{\mathbf{u}_{\lambda^* \eta^* \mu^*}, \varphi_{\lambda^* \eta^* \mu^*}, \beta_{\lambda^* \eta^* \mu^*}\}$ les solutions du Problème $\mathcal{P}V_{(\lambda^*, \mu^*, \eta^*)}$, pour $\lambda = \lambda^*$, $\eta = \eta^*$ et $\mu = \mu^*$. Nous utilisons les notations suivantes :

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_{\lambda^* \eta^* \mu^*}, \quad \varphi_* = \varphi_{\lambda^* \eta^* \mu^*}, \quad \beta_* = \beta_{\lambda^* \eta^* \mu^*}, \quad \theta_* = \theta_{\lambda^*}, \quad \alpha_* = \alpha_{\mu^*}, \quad (2.128)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_*^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell), \theta_*^\ell, \alpha_*^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(s)), \theta_*^\ell(s), \alpha_*^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi_*^\ell), \quad (2.129)$$

$$\mathbf{D}_*^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi_*^\ell)). \quad (2.130)$$

Nous prouvons que $(\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \varphi_*, \theta_*, \alpha_*, \beta_*, \mathbf{D}_*)$ satisfait (2.63)–(2.69) et la régularité (2.79)–(2.85). En effet, nous écrivons (2.93) pour $(\eta, \lambda, \mu) = (\eta^*, \lambda^*, \mu^*)$ et en utilisant (2.128), on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell), \theta_*^\ell, \alpha_*^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + j_{\nu c}(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_*(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{u}_*(t)) \\ & + (\eta^*(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_*(t))_V \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_*(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Nous combinons les égalités $\mathbf{\Lambda}^1(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \eta^*$, $\mathbf{\Lambda}^2(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \lambda^*$ et $\mathbf{\Lambda}^3(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \mu^*$ avec (2.115), (2.116) et (2.117) pour obtenir

$$\begin{aligned} (\eta^*(t), \mathbf{v})_V &= - \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi_*^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta_*(t), \mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}) \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(s)), \theta_*^\ell(s), \alpha_*^\ell(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$\lambda_*^\ell(t) = \Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}_*^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(t)), \theta_*^\ell(t), \alpha_*^\ell(t)), \quad \ell = 1, 2, \quad (2.133)$$

$$\mu_*^\ell(t) = \phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}_*^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(t)), \theta_*^\ell(t), \alpha_*^\ell(t)), \quad \ell = 1, 2. \quad (2.134)$$

Maintenant, En utilisant (2.132) dans (2.131) pour obtenir

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell), \theta_*^\ell, \alpha_*^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\
 & + \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(s)), \theta_*^\ell(s), \alpha_*^\ell(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(t)) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\
 & + j_{ad}(\beta_*(t), \mathbf{u}_*(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_*(t)) + j_{\nu c}(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_*(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}) \\
 & - j_{fr}(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{u}_*(t)) - \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi_*^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\
 & \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_*(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad p.p. t \in [0, T].
 \end{aligned} \tag{2.135}$$

Et En utilisant (2.133) dans (2.86) on obtient

$$\sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\theta}_*^\ell(t), \xi^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\theta_*^\ell(t), \xi) = \sum_{\ell=1}^2 (\lambda_*^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \tag{2.136}$$

pour tout $\xi \in E_0$, $p.p. t \in [0, T]$.

Ensuite, de (2.134) et (2.87), $\alpha_*(t) \in K$ on a

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\alpha}_*^\ell(t), \xi^\ell - \alpha_*^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\alpha_*(t), \xi^\ell - \alpha_*^\ell(t)) \geq \\
 & \sum_{\ell=1}^2 (\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}_*^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(t)), \theta_*^\ell(t), \alpha_*^\ell(t)), \xi^\ell - \alpha_*^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)},
 \end{aligned} \tag{2.137}$$

pour tout $\xi \in K$, $p.p. t \in [0, T]$.

Nous écrivons (2.94) pour $(\eta, \lambda, \mu) = (\eta^*, \lambda^*, \mu^*)$ et en employant (2.128), on obtient

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi_*^\ell(t))), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(t)))_{H^\ell} = (-q(t), \phi)_W, \tag{2.138}$$

pour tout $\phi \in W$, $p.p. t \in [0, T]$.

De plus, nous utilisons $\mathbf{u}_{\eta^* \lambda^* \mu^*}$ dans (2.95) et (2.128) on obtient

$$\dot{\beta}_*(t) = \mathbf{H}_{ad}(\beta_*(t), \xi_{\beta_*}(t), R_\nu([u_{*\nu}(t)]), \mathbf{R}_\tau([u_{*\tau}(t)])), \quad p.p. t \in [0, T]. \tag{2.139}$$

Les relations (2.131)–(2.139) que $\{\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \varphi_*, \theta_*, \alpha_*, \beta_*, \mathbf{D}_*\}$ est une solution du problème (2.63)–(2.70). Et d'après les lemmes 2.3.1 et 2.3.2 on a les régularité (2.79)–(2.85). Puisque \mathbf{u}_* , φ_* , θ_* et α_* satisfait (2.79), (2.80), (2.83) et (2.84) on a

$$\boldsymbol{\sigma}_* \in C(0, T; \mathcal{H}). \tag{2.140}$$

Pour $\ell = 1, 2$, on choisit $v = \mathbf{u} \pm \phi$, avec $\phi = (\phi^1, \phi^2)$, $\phi^\ell \in D(\Omega^\ell)^d$ et $\phi^{3-\ell} = 0$, on obtient

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}_*^\ell(t) = -f_0^\ell(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad \ell = 1, 2. \quad (2.141)$$

La régularité (2.82) suit les formes (2.27), (2.140) et (2.141). Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$, d'après (1.45), (2.23), (2.24) et (2.130), nous concluons qu'il existe une constante positive $C > 0$ vérifiant

$$\|\mathbf{D}_*(t_1) - \mathbf{D}_*(t_2)\|_H \leq C (\|\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)\|_W + \|\mathbf{u}_*(t_1) - \mathbf{u}_*(t_2)\|_V).$$

En rappelant les régularités pour \mathbf{u}_* et φ_* dans (2.79) et (2.80), on a

$$\mathbf{D}_* \in C(0, T; H). \quad (2.142)$$

Pour $\ell = 1, 2$, on choisit $\phi = (\phi^1, \phi^2)$, avec $\phi^\ell \in D(\Omega^\ell)^d$ et $\phi^{3-\ell} = 0$, dans (2.138) et de (2.37) on obtient

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_*^\ell(t) = q_0^\ell(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad \ell = 1, 2. \quad (2.143)$$

Et de (2.85), (2.28), (2.142) et (2.143) on tire

$$\mathbf{D}_* \in C(0, T; \mathcal{W}).$$

Enfin, nous concluons que $\{\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \varphi_*, \theta_*, \alpha_*, \beta_*, \mathbf{D}_*\}$ est une solution faible du problème \mathcal{PV} qui satisfait les régularités (2.79)–(2.85), en ce qui termine la preuve de la partie d'existence du théorème 2.3.1.

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur $\mathbf{\Lambda}$ qui est défini par (2.115)–(2.117). ■

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié théoriquement un problème de contact avec adhésion et compliance normale entre deux corps en thermo-électro-élasticité avec mémoire longue et endommagement.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème. Comme la frontière des corps et les données des problèmes ont des bonnes régularités. Donc, la solution du problème électro-mécanique et du problème variationnelle est la même.

On à montré l'existence et l'unicité de la solution des problèmes précédents par l'utilisation des arguments suivants : équation variationnelle dépendant du temps, équation variationnelle d'évolution, équation différentielle, le lemme de Gronwall et point fixe.

Bibliographie

- [1] A. Aissaoui, *Analyse Variationnelle de quelques problèmes aux limites de Contact avec adhésion et endommagement*, Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2014).
- [2] K. T. Andrews and M. Shillor, *Dynamic adhesive contact of a membrane*, Advances in Mathematical Sciences and Applications 13 (2003), no. 1, 343-356.
- [3] K. T. Andrews, K. L. Kuttler and M. Shillor (1997), *On the dynamic behavior of a thermoviscoelastic body in frictional contact with a rigid obstacle*, Euro. J. Appl. Math. 8, 417-436.
- [4] K. T. Andrews, L. Chapman, J. R. Fernandez, M. Fisackerly, M. Shillor, L. Vannierian, and T. VanHouten, *A membrane in adhesive contact*, SIAM Journal on Applied Mathematics 64 (2003), no. 1, 152-169.
- [5] A. Azeb Ahmed, *Etude théorique de quelques problèmes dynamiques en contact avec endommagement*, Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2015).
- [6] A. Azeb Ahmed, S. Boutechebak, *Analysis of a dynamic thermo-elasto-viscoplastic contact problem* Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2013, No. 71,1-17; December 2013.
- [7] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff (1976).
- [8] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman, Boston (1984).
- [9] R.C. Batra , J.S. Yang, *Saint Venant's principle in linear piezoelectricity*, Journal of Elasticity, 38(1995), 209-218.
- [10] E. Bonetti, G. Bonfanti, *Existence and Uniqueness of the Solution to 3D Thermo-viscoelastic System*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2003, No . 50, pp. 1-15.

-
- [11] S. Boutechebak, A. Azeb Ahmed, *Analysis of a dynamic frictional contact Problem for thermo-elasto-viscoplastic materials with damage*, Gen. Math. Notes, Vol. 19, No. 1, No-vember 2013, pp.60-77.
- [12] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, 1987.
- [13] O. Chau, J. R. Fernández, M. Shillor and M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, J. of Comp. and App. Math, 159 (2003), pp.431–465,
- [14] O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea, *Dynamic frictionless contact with adhesion*, J. Appl. Math. Phys.(ZAMP),55 (2004) , pp. 32–47 ,
- [15] N. Chougui, *Analyse Mathématique de Quelques Problèmes de Contact en Electro-élasticité et en Electro-viscoélasticité*, Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2015).
- [16] M. Cocu and R. Rocca, *Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis 34 (2000), no. 5, 981-1001.
- [17] B. Douib and T. Hadj ammar, *Frictional contact problem between thermoelastic piezoelectric bodies with damage, adhesion and normal compliance*, Palestine Journal of Mathematics, (2020), 493–510.
- [18] G. Duvant, J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Numerische Mathematik 90 (2002), 689-719.
- [19] J. R. Fernandez, M. Shillor, and M. Sofonea, *Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion*, Mathematical and Computer Modelling 37 (2003), no. 12-13, 1317-1333.
- [20] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, (2002).
- [21] M. Fremond and B. Nedjar, *Damage in concret : the unilateral phynomenon*, Nuclear Engng. Design, 156 (1995), pp.323-335.
- [22] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage, Gradient of Damage and Principle of Virtual Work*, Int. J. Solids Structures, 33 (8), 1083-1103. (1996).
- [23] M.Frémond, *Contact with adhesion. Dans Topics in nonsmooth mechanics (Edité par J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos, et G.Strang)*, Birkhauser Verlag,Basel (1988), 177-221.

-
- [24] M. Frémond, K.L. Kuttle, B. Nedjar, M.Shillor; *One-dimensional models of damage*, Adv. Math. Sci. Appl., 8(2) , pp. 541-570, 1998.
- [25] M Frémond, *Equilibre de structures qui adhèrent à leur support*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Série II 295 (1982), no. 11, 913-916.
- [26] M. Frémond, *Adhérence des solides*, *J.Mécanique Théorique et Appliquée*, 6(1987), pp. 383-407 .
- [27] P. Germain, *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, Masson et Cie, Paris, (1973).
- [28] R. J. Gu and M. Shillor (2001), *Thermal and wear analysis of an elastic beam in sliding contact*, Int. J. Solids Structures 38(14), 2323-2333.
- [29] T. Hadj Ammar, *Etude Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact Entre Deux Corps Déformables*, Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2015).
- [30] W. Han, K.L. Kuttler, M. Shillor and M. Sofonea, *Elasti Beam in Adhesive Contact*, Int. J. Solids Structures 39 (2002), 1145-1164.
- [31] W. Han, M. Sofonea, K. Kazmi, *Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic-visco-plastic materials*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 3915-3926.
- [32] L. Jianu, M. Shillor and M. Sofonea, *A Viscoelastic Bilateral Frictionless Contact Problem with Adhesion*, Applic. Anal. 80 (2001), 233-255.
- [33] Z. Lerguet, *Analyse de quelques problèmes de contact avec frottement et adhé- sion*,Thèse de doctorat, Université de Sétif, (2008).
- [34] G. Leszek, A. Ochala, M. Shillor, *Quasistatic thermoviscoelastic problem with normal compliance, multivalued friction and wear diffusion. Nonlinear Analysis : R. W. A (27)*, 183-202. (2016).
- [35] A. B Merouani, F. Messelmi, *Dynamic Evolution of Damage in Elastic- Thermo- Viscoplastic Materials*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010 (2010), No. 129, pp. 1-15.
- [36] F. Messelmi, B. Merouani, M. Meflah, *Nonlinear Thermoelasticty Problem*, Ana- lele Universităţii Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XV (2008), 207-217.

-
- [37] F. Messelmi, B. Merouani, *Quasi-Static Evolution of Damage in Thermo-Viscoplastic Materials*, Analele Universității Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XVII (2010), Issue No. 2, 133-148.
- [38] R.D Mindlin, *Polarisation gradient in elastic dielectrics*, Int. J. Solids Structures 4 (1968),637-663.
- [39] J. Nečas, I. Hlavaček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction*, Elsevier, Amesterdam, (1981).
- [40] J. Nečas, *Les méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris (1967).
- [41] E. Rabinowiz (1995), *Friction and Wear of Materials*, (2nd ed.) Wiley, N.Y.
- [42] M. Raous, L. Cangémi, and M. Cocu, *A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 177 (1999), no. 3-4, 383-399.
- [43] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, *Analysis of Quasistatic Viscoelastic Proplem with Friction and damage*, Adv. Math. Sci. App. 10, 2002, 173-189.
- [44] J. Rojek and J. J. Telega, *Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. I : general developments*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics 39 (2001), no. 3, 655-677.
- [45] M. Selmani, M. sofonea, *viscoelastic frictionless contact problems with adhesion*, Hindazi Publishing Corporation Journal of Inequalities and Applications Volume 2006, Pages 1-22.
- [46] M. Selmani, *dynamic frictionless contact problems in viscoelasticity with long-term memory*, Analele Universiti Oradea Fasc. Matematica, Ton XVI (2009), 75-92.
- [47] M. Shillor, M. Sofonea, J. J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics 655, Springer, Berlin, (2004).
- [48] M. Sofonea, A. Matei, *Variational inequalities with applications*, A Study of anti-plane frictional contact problems, Springer, New York (à paraître), p.51.
- [49] M. Sofonea, El. H. Essoufi, *A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Mathematical Modelling and Analysis 9, 2004, 229-242.
- [50] M. Sofonea, *Functional Methods in Thermo- Elasto- Plasticity*, Ph. D. Thesis, Univ of Buccharest, (1988) (in Romanian).

- [51] M. Sofonea, W. Han and M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and App. Math. 276, Chapman-Hall/CRC Press, New York, (2006).
- [52] N. Stromberg, *Continuum Thermodynamics of Contact, Friction and Wear*, Thesis No, 491, Departement of Mechanical Engineering, Linkoping Institute of Technology, Linkoping, Sweden, (1995).
- [53] R. A. Toupin, *A dynamical theory of elastic dielectrics*. Int. J. Engrg. Sci. 1 (1963).

Résumé

L'objectif de ce mémoire est l'étude de problèmes en Mécanique de Contact avec adhésion et compliance normale pour des lois constitutives thermo-électro-élastiques avec mémoire longue et endommagement. Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité d'une solution faible pour les problèmes étudiés. La mémoire structurée en deux parties. La première partie est consacrée à rappeler les différents modèles mécaniques de contact étudiés ainsi que quelques outils mathématiques nécessaires dans la mémoire. La deuxième partie est destinée à l'étude théorique des problèmes de contact avec adhésion et compliance normale en thermo-électro-élastiques avec mémoire longue et endommagement.

Mots clés: thermo-électro-élastiques, adhésion, compliance normale, endommagement, inéquation d'évolution, inéquation quasi variationnelle, solution faible, point fixe.

Abstract

The purpose of this work is the study of some problems in Contact Mechanics with adhesion and compliance normal for thermo-electro-elastic with long memory and damage constitutive laws. The results obtained concern the existence and uniqueness of weak solutions for the studied problems. The memory is structured into two parts. The first part is dedicated to recall different mechanical models of contact, as well as some necessary mathematical tools. The second part is destined to the theoretical study of the problems of contact with adhesion and normal compliance in thermo-electro-elastic with long-term memory and damage.

Key words: thermo-électro-élastiques, adhesion, compliance normale, damage, evolutionary variational inequality, quasi-variational inequality, weak solution, fixed point.

الملخص

إن الهدف من هذه المذكرة هو دراسة مسألة تواصل بالالتصاق والاستجابة العادية في ميكانيك التماس لقوانين المرونة الحرارية الكهربائية مع ذاكرة طويلة وإتلاف، فالنتائج المتحصل عليها تخص وجود وحدانية الحل للمسألة المدروسة. تتكون المذكرة من جزأين الجزء الأول مخصص للتذكير بمختلف النماذج الميكانيكية المدروسة وكذلك بعض الوسائل الرياضية الضرورية في هذه المذكرة. الجزء الثاني موجه لدراسة مسائل التلامس مع الإلتصاق والإستجابة العادية في الحرارية كهرومطاطية مع ذاكرة طويلة وإتلاف. كلمات مفتاحية: المرونة الحرارية الكهربائية، الإلتصاق، الاستجابة العادية، إتلاف، متباينة شبه تغيرية، باينة تطور، الحل الضعيف، نقطة ثابتة.