N° d'ordre :
N° de série :

**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR ELOUED**

**FACULTÉ DESSCIENCES ET DE TECHNOLOGIE**

**Mémoire de fin d'étude**

# LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation numérique

**Thème**

# Les applications compatibles et les points fixes dans les espaces métriques

Présenté par: - GHERBI Hadda
- MAKAOUI Fatma
- REZZAG MOHCEN Oum el fadhel

Sous la supervisionde :
**Mr: BILOUL Said**

Année universitaire:2014 – 2015

# *Remerciements*

Nous remercions Allah le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience pour l'accomplissement de ce travail.

Nous remercions les chers parents qui nous ont donné la volonté pour la réussite dans mon vie.

Nous exprimons toutes nos gratitudes à "**Mr BELOUL Said**", pour l'effort fourni, les conseils prodigués, sa patience et sa persévérance dans le suivi.

Cela a été un plaisir et un honneur de travailler avec quelqu'un d'aussi compétent et d'aussi cultivé, ainsi qu'à le professeur "**BEN ALI Brahim**".

Nous adressons également nos remerciements, à tous nos enseignants, pour leurs aides inestimables, qui nous ont donné les bases de la science.

Nous remercions très sincèrement, les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examinateur.

Nous tenons a remercie tous les étudiants de la promotion 2014/2015 de Maths de l'université **ECHAHID HAMMA LAKHDER El-oued**.

A toute personne qui a participé de près ou de loin pour l'accomplissement de ce modeste travail particulièrement: "**Mr Smail, Nabilla, Oum selma, Asma, Chafai**".

# Notations générales

| | |
|---|---|
| $X$ | ensemble non vide. |
| $\mathbb{R}$ | ensemble des nombres réelles. |
| $\mathbb{R}_+$ | ensemble des nombres réelles positive. |
| $d$ | distance. |
| $\|.\|$ | norme. |
| $\|.\|$ | la valeur absolue. |
| $T$ | application. |
| sup | supérieur de fonction |
| $\{x_n\}$ | suite. |
| $d_1$ | $= \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i - y_i\|$ . |
| $d_2$ | $= \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i - y_i\|^2}$. |
| $d_\infty$ | $= \max\limits_{1\leq i\leq n} \|x_i - y_i\|$ . |
| $F$ | ensemble de toute les fonctions. |
| $B$ | ensemble des fonctions bornées. |
| $C([a,b])$ | espace des applications continue. |

# Table des matières

# Introduction générale

Les mathématiciens sont intéressés à étudier le concept de point fixe dans différents espaces, par leur extrême importance en mathématiques, il aide à résoudre certains problèmes mathématiques telles que la résolution des équations différentielles et intégrales, et est encore utilisé dans de nombreux services dans ce temps.

Depuis des décennies, en 1976, Jungck a utilisé la notion d'application commutativité afin d'établir l'existence des points fixes communs dans des espaces métriques.

Les premiers travaux sur la théorie des points fixes concernant plus d'une application a été donnée par Jungck en 1977, il a prouvé leur fameux théorème pour deux applications dans un espace métrique complet et il introduit la notion d'application commutativité.

En vue d'améliorer les conditions de commutativité dans des théorèmes communs de point fixe, Sessa a introduit le concept d'applications faiblement commutativité. Ainsi, Jungck a défini la notion d'applications compatibles afin de généraliser le concept de la faible commutativité et a montré que les applications faiblement commutativité sont compatibles, mais l'inverse est impossible.

Ensuite, Jungck et Rhoades introduit le concept de compatibilité faible pour le réglage des applications à valeur unique et à valeurs multiples qui est le plus générale que la compatibilité.

Les chercheurs de ce domaine introduisent plusieurs définitions de la faible commutativité tels que les applications compatibles, les applications compatibles de type (A), (B), (C), (P), (E) . Qui sont toujours en développement dans des conditions limitées et plus étroite.

Dans notre étude, nous allons examiner la théorie de point fixe pour deux paires d'applications d'un espace métrique dans lui-même en utilisant les notions de compatibilité dans l'espace métrique, qui reconnaît une recherche intensive par les scientifiques. Pour atteindre cet objectif, l'étude dans ce travail est divisé en trois chapitres:

Dans le premier chapitre, on a commencé par des rappelles sur quelques concepts de base de l'espace métrique, ainsi, nous avons détaillés un peu les applications compatibles et leurs caractéristiques dans le même espace, puis la deuxième chapitre qui est consacré à l'étude des théories de point fixe, et le troisième chapitre, est pour l'étude des applications telles qu'on trouve une solution des équations intégrales et des équations fonctionnelles.

# Chapitre 1

# Compatibilité des fonctions

D'abord, dans ce chapitre, nous avons notionée quelques notations générales, définitions principales sur les applications contractions et les applications compatibles dans l'espace métrique.

En suite, nous avons citer les propriétés des applications compatibles qui seront utilisés dans les chapitres 2 et 3 et leur différents types.

## 1.1 Distances et espaces métriques

### 1.1.1 Distances

**Définition 1.1.1** *Soit $X$ un ensemble non vide.On appelle distance (ou métrique) sur $X$ toute application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les trois propriétés suivantes:*

*($D_1$): Pour tous $x, y \in X$, on a $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (défini positive).*

*($D_2$): Pour tous $x, y \in X$, on a $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrique).*

*($D_3$): Pour tous $x, y, z \in X$, on a $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire).*

**Exemple 1.1.1** *$C$ l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ à $\mathbb{R}$.*

*($[a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$) et pour $x, y \in C$ défini $d$ par:*

$$d(x,y) = \max\{|x(t) - y(t)| : t \in [a,b]\}. \tag{1.1.1}$$

1.

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \max\{|x(t)-y(t)| : t \in [a,b]\} = 0 \\ &\Longleftrightarrow |x(t)-y(t)| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall t \in [a,b], x(t) = y(t) \\ &\Longleftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

2.

$$d(x;y) = \max\{|x(t)-y(t)| : t \in [a,b]\} = \max\{|y(t)-x(t)| : t \in [a;b]\} = d(y,x).$$

3. pour $x, y \in C$

$$d(x,y) = \max\{|x(t)-y(t)| : t \in [a,b]\}.$$

$$\begin{aligned} (1.1.1) &= |x(t_0)-y(t_0)| \\ &\leq |x(t_0)-z(t_0)| + |z(t_0)-y(t_0)| \\ &\leq \max\{|x(t)-z(t)| : t \in [a;b]\} + \max\{|z(t)-y(t)| : t \in [a,b]\} \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

### 1.1.2 Distances équivalentes

**Définition 1.1.2** *On dit que deux distances $d_1$ et $d_2$ sur $X$ sont équivalentes s'il existe deux réels $C_2 \geq C_1 > 0$ tels que:*

$$\forall (x,y) \in X^2 \qquad C_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq C_2 d_1(x,y).$$

**Exemple 1.1.2** *les deux applications*

*$d : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$ et $d' : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2}$ où $(x_1, x_2)$ et $(y_1, y_2)$ désignent respectivement les composantes de $x$ et $y$, sont des distances équivalentes sur $\mathbb{R}^2$. en effet, la relation $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a| + |b| \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$ valable pour tous réels $a$, $b$ implique que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$\sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2} \leq |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| \leq \sqrt{2}\sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2}.$$

**Exemple 1.1.3** *Sur $\mathbb{R}$, la distance $d : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to |\arctan(x) - \arctan(y)|$ n'est pas équivalence à la distance usuelle $d' : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to |x-y|$. voire [17]*

### 1.1.3 Espaces métriques

**Définition 1.1.3** *On appelle espace métrique tout ensemble non vide $X$ muni d'une distance.*

**Exemple 1.1.4** *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$,les applications suivantes définissent trois distances sur $\mathbb{R}^n$ :*

$$d_\infty : (x; y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \max_{i=\{1,..,n\}} |x_i - y_i|\,,$$

*et*

$$d_1 : (x; y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \sum_{i=1,..,n} |x_i - y_i|\,,$$

*La troisième est ce qu'on appelle la distance euclidienne*

$$d_2 : (x; y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \sqrt{\sum_{i=1,..,n} |x_i - y_i|^2}\,.$$

### 1.1.4 Suite de Cauchy et espaces complets

#### Limite d'une suite

**Définition 1.1.4** *Soit $d$ une distance de $X$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $X$.*

*On dit que $x$ est la limite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0\, \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon\ .$$

**Remarque 1.1.1** *La limite d'une suite, quand elle existe, est unique.*

#### Suites convergentes

**Définition 1.1.5** *On dit que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $x$, et on écrit:*

$$x_n \to x \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

*Si $\{x_n\}$ converge vers $l$, alors toute sous-suite de $\{x_n\}$ converge vers $l$.*

### Suite de Cauchy

**Définition 1.1.6** *Une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(X,d)$ est dite de Cauchy si:*

$$\forall\varepsilon>0, \exists n\in\mathbb{N} \text{ tel que, } \forall p,q\in\ \mathbb{N} : p>q\geq n \Longrightarrow d(x_p,x_q)\leq\varepsilon.$$

*On écrit alors:*

$$\underset{p,q\longrightarrow\infty}{d(x_p,x_q)}\longrightarrow 0.$$

**Exemple 1.1.5** *La suite géométrique $(K^n)$, pour $0<k<1$, est une suite de Cauchy. pour $p>n>0$,*

$$|k^p-k^n| = k^n\left|k^{p-n}-1\right| < k^n.$$

*Donc, en prenant $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln k}\right]+1$ pour $p>n\geq N$,*

$$|k^p-k^n|<\varepsilon.$$

**Exemple 1.1.6** *Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle .*

*La suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $x_n=n$ n'est pas une suite de Cauchy. voire [17]*

**Proposition 1.1.1** *Dans un espace métrique, toute suite convergente est de Cauchy.*

**Preuve.** Soit $\{x_n\}$ une suite convergeant vers $\ell$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $n_0$ dans $\mathbb{N}$ tel que:

$$\forall n\in N,\qquad n\geq n_0\ \Rightarrow d(x_n,\ell)\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier,$\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2$,

$$(p\geq n_0) \text{ et } (q\geq n_0)\Rightarrow d(x_p,x_q)\leq d(x_p,\ell)+d(x_q,\ell)\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Et donc $\{x_n\}$ est de Cauchy. ■

# 1.2 Les contractions

## 1.2.1 La Continuité

**Définition 1.2.1** *Soit deux espaces métriques* $(X, d_X)$ *et* $(Y, d_Y)$, $f : X \to Y$ *une application* $f$ *est continue sur un sous-ensemble* $D$ *de* $X$ *si:*

$\forall x \in D \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists \eta_{x,\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^* \;\; \forall y \in D$

$$(d_X(x, y) \leq \eta_{x,\varepsilon} \Longrightarrow \; d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon).$$

## 1.2.2 La continuité uniforme

**Définition 1.2.2** *Soient* $(X, d_X)$ *et* $(Y, d_Y)$ *deux espaces métriques,*
$D$ *un sous-ensemble de* $X$ *et* $f$ *une application de* $D$ *dans* $Y$.
*On dit que* $f$ *est uniformément continue sur* $D$ *si:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \; \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \; \forall (x, y) \in D^2 \qquad (d_X(x, y) \leq \eta \Longrightarrow \; d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon).$$

**Remarque 1.2.1** *Toute application uniformément continue sur* $D$ *est continue sur* $D$.

## 1.2.3 Application Lipschitzienne

**Définition 1.2.3** *Soient* $(X, d_X)$ *et* $(Y, d_Y)$ *deux espaces métriques.*
*Une application* $f$ *de* $X$ *dans* $Y$ *est lipschitzienne si:*

$$\exists k \in \mathbb{R}^+ \; \forall (x, y) \in X^2 \quad d_Y(f(x), f(y) \leq k d_X(x, y).$$

## 1.2.4 Applications Contractantes

**Définition 1.2.4** *On dit qu'une application* $f : X \longrightarrow X$ *est contractante de* $(X, d)$ *si pour quelque nombre réel c telles que* $0 \leq \; c < 1$, *on a*

$$\forall x; y \in X, \quad d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y).$$

**Remarque 1.2.2** *En finissant cette section par les implications suivantes:*
*(f contractante)* $\Longrightarrow$ *(f Lipschitzienne)* $\Longrightarrow$ *(f uniformément continue)*
$\Longrightarrow$ *(f continue).*

## 1.3 Applications Compatibles

### 1.3.1 La Commutativité

**Définition 1.3.1** *Soient $S$ et $T$ deux applications d'un espace métrique $(X, d)$ dans lui-même, on dit que commutativité si*

$$\forall x \in X,\ STx = TSx.$$

### 1.3.2 La Commutativité faible

**Définition 1.3.2** *Soient $S$ et $T$ deux applications d'un espace métrique $(X, d)$ dans lui-même, on dit que faiblement commutativité si*

$$\forall x \in X,\ d(STx; TSx) \leq d(Tx; Sx).$$

**Exemple 1.3.1** *Soit $X = [0, 1]$ muni la distance euclidienne, on définit $T$ ,$S : X \to X$ par:*

$$\forall x \in X,\ Tx = \frac{x}{2a + x},\ Sx = \frac{x}{a},$$

*où $a > 1$, alors*

$$\forall x \in X,\ d(TSx, STx) \leq \frac{ax + x^2}{a(2a + x)} = d(Tx, Sx).$$

*Ainsi $T$ et $S$ sont faiblement commutativité , mais ils ne sont pas commutativité de cette sence, parce que si $x \neq 0$ on a:*

$$TSx = \frac{x}{2a^2 + x} > \frac{x}{a(2a + x)} = STx.$$

### 1.3.3 Fonctions compatibles

**Définition 1.3.3** *Soit $(X, d)$ espace métrique, $S$, $T : X \to X$ sont compatibles si et seulement si*

$$\lim_{n \to \infty} d(STx_n, TSx_n) = 0,$$

*où $\{x_n\}$ est une suite dans $X$ telle que*

$$t \in X\ \lim_{n \to \infty} Sx_n = \lim_{n \to \infty} Tx_n = t.$$

**Exemple 1.3.2** *Soit* $X = [0, \infty[$ *et* $d$ *est distance euclidienne,on définit* $T$ *et* $S$ *sur* $([0, \infty[\,, |.|)$ *comme suite:*

$$Sx = \frac{x+1}{2}, \ \ et\ Tx = 2x - 1.$$

*Considérons la suite* $\{x_n\}$ *qui définit pour tout* $n \geq 1$ *par*

$$x_n = 1 + \frac{1}{n},$$

*il été claire que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \ \ et \lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = 1,$$

*d'où*

$$\lim_{n\to\infty} STx_n = \lim_{n\to\infty} S(1 + \frac{2}{n}) = \lim_{n\to\infty} \ x_n = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} TSx_n = \lim_{n\to\infty} T(1 + \frac{1}{2n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 1 = 1.$$

*Donc, la paire* $\{S, T\}$ *est compatible.*

**Lemme 1.3.1** *Si* $S, T : X \to X$ *de l'espace métrique* $(X, d)$ *sont commutativites, alors elles sont faiblement commutativites, donc compatible, mais la resproque ne peut-être pas.*

*En effet, si la paire* $\{S, T\}$ *est commutativité,* $\forall x \in X$ , $STx = TSx$, *alors*

$$d(STx, TSx) = 0 \leq d(Sx, Tx).$$

*Donc les deux applications sont faiblement commutativites, d'autre part*

$$\lim_{n\to\infty} d(STx_n; TSx_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(Sx_n; Tx_n) = 0,$$

*ce qui implique que* $S$ *et* $T$ *sont compatibles.*

### 1.3.4 Divers types de compatible

#### Compatible de type (A)

**Définition 1.3.4** *Soient* $S, T$ *deux application d'un espace métrique* $(X, d)$ *dans lui-même. On dit que compatibles de type (A) si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} d(STx_n, T^2x_n) = 0 \ \ et \ \lim_{n\to\infty} \ d(TSx_n, S^2x_n) = 0,$$

*où $\{x_n\}$ est une suite en $X$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t, \text{ pour quelque } t \in X.$$

**Exemple 1.3.3** *Soit $X = [0, \infty[$ et $d$ est la distance euclidienne, on définit $S$ et $T$ par :*

$$Sx = \begin{cases} 1 + x, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, x > 1 \end{cases} \qquad Tx = \begin{cases} 1, 0 \leq x < 1 \\ x, 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

*Considérons la suite $\{x_n\}$ qui définit par :*

$$x_n = \frac{1}{n}, \text{pour tout } n \geq 1.$$

*Il est clair que pour tout $n \geq 1$, $0 < x_n \leq 1$,*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = 1,$$

$$\left\| Tx_n - S^2 x_n \right\| = \|1 - 1\| = 0 \longrightarrow 0.$$

*Alors, la paire $\{S, T\}$ est compatible de type $(A)$.*

*Remarquons que $S$ et $T$ ne sont pas continués à $1$.*

**Lemme 1.3.2** *Si $S$ et $T$ sont compatibles de type (A) et $\forall\ t \in X$, $St = Tt$ , alors*

$$STt = S^2 t = TSt = T^2 t\ .$$

**Définition 1.3.5** *On dit que $S$ et $T$ sont $S$-compatible de type (A) si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} d(ST, T^2 x_n) = 0,$$

*et ils sont appelés $T$-compatible de type (A) si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} d(TS, S^2 x_n) = 0,$$

*où $\{x_n\}$ est une suite en $X$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t, \text{pour certain } t \in X.$$

### Compatible de type (B)

**Définition 1.3.6** *Deux applications $S$ et $T$ sont compatibles de type $(B)$ si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, S^2x_n) \leq \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, Tt) + \lim_{n\to\infty} d(Tt, T^2x_n)\right],$$

*et*

$$\lim_{n\to\infty} d(STx_n, T^2x_n) \leq \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} d(STx_n, St) + \lim_{n\to\infty} d(St, S^2x_n)\right],$$

*où $\{x_n\}$ est une suite en $X$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = t, \textit{pour certain } t \in X.$$

*Il est clair que les applications compatibles de type (A) sont des applications compatibles de type (B), mais l'inverse est impossible,voir ([18, Ex. 2.4])*

### Compatible de type (P)

**Définition 1.3.7** *On dit que $T$ et $S$ sont compatibles de type (P) si*

$$\lim_{n\to\infty} d(T^2x_n, S^2x_n) = 0,$$

*où $\{x_n\}$ est une suite en $X$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = t, \ \textit{pour certain } t \in X.$$

*Il est clair que dans ce cas $STx = TSx$ chaque fois $Sx = Tx \ \ \forall x \in X$.*

**Proposition 1.3.1** *Soit $S$ et $T$ sont compatibles de type (P) et soit $Sx_n, Tx_n \to z$ si $n \to \infty$ $\forall z \in X$ , ensuite, nous avons ce qui suit :*

1. $\lim_{n\to\infty} T^2x_n = Sz$ si $S$ est continue en $z$.
2. $\lim_{n\to\infty} S^2x_n = Tz$ si $T$ est continue en $z$.
3. $STz = TSz$ et $Sz = Tz$ si $S$ et $T$ sont continués à $z$.

**Compatible de type (C)**

**Définition 1.3.8** *On dit que deux applications $S$ et $T$ sont compatibles de type (C) si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} d(STx_n, T^2x_n) \leq \frac{1}{3}\left[\lim_{n\to\infty} d(STx_n, St) + \lim_{n\to\infty} d(St, T^2x_n) + \lim_{n\to\infty} d(St, S^2x_n)\right],$$
$$\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, S^2x_n) \leq \frac{1}{3}\left[\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, Tt) + \lim_{n\to\infty} d(Tt, S^2x_n) + \lim_{n\to\infty} d(Tt, T^2x_n)\right],$$

*où $\{x_n\}$ est une suite en $X$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t, \text{ pour certain } t \in X.$$

**Lemme 1.3.3** *Si $S$ et $T$ sont compatibles, ou compatibles de type(A), ou (P), ou (B),ou (C), alors ils sont faiblement compatible.[6,7,10–12]*

### 1.3.5 Faiblement compatible

**Définition 1.3.9** *Deux applications $S, T$ sont faiblement compatible s'ils commutative commuté à leurs points de coïncidenc,*

*s'il existe quelque $u \in X$ telle que $Au = Su$, alors $ASu = SAu$.*

**Exemple 1.3.4** *Soit $X = [0, 2]$ et $d$ est distance euclidienne, $S$ et $T$ sont définis par :*

$$Sx = \begin{cases} 2 - x, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, x > 1 \end{cases} \qquad Tx = \begin{cases} x + 12, 0 \leq x \leq 1 \\ 12, 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

*le point 1 est le point de coïncidence unique de $S$ et $T$ ,*

*c-à-d $S(1) = T(1) = 1$ et $ST(1) = TS(1) = 1$.*

*Alors, la paire $\{S, T\}$ est faiblement compatible.*

*Donc, la paire $\{S, T\}$ ne sont pas compatibles de type (C).*

**Remarque 1.3.1** (*compatible de type (A),(P), (B) et (C)*) $\Longrightarrow$ (*faible compatibilité*) *mais l'inverse peut-être pas.voire [2]*

**Compatible de type(E)**

**Définition 1.3.10** *Soient $S,T$ deux applications d'un espace métrique $(X,d)$ dans lui-même, on dit que compatibles de type (E) si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} S^2x_n = \lim_{n\to\infty} SAx_n = At,$$

*et*

$$\lim_{n\to\infty} S^2x_n = \lim_{n\to\infty} ASx_n = Tt,$$

*où $\{x_n\}$ est une suite dans $X$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t, \text{ pour quelque } t \in X.$$

**Remarque 1.3.2** *Si $At = St$, alors compatible de type (E) implique compatible (compatible de type (A),(B),(C),(P)), mais l'inverse peut être faux.*
*En général, si la paire $\{A,S\}$ est compatible de type (E) implique compatible de type (B).*

**Exemple 1.3.5** *Soit $X = [0,1]$ muni la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$.*
*Définir les applications $A$ et $S$ comme*

$$\forall\ x \in [0,12], Ax = Sx = \frac{1}{2}\ ,\ Ax = Sx = \frac{2}{3}, \text{pour } x = \frac{1}{2}\ ,$$

*et*

$$\forall x \in [1,12],\ \ Ax = 1-x,\ \ Sx = x\ .$$

*Considérons une suite $\{x_n\}$ dans $X$ telle que $x_n \to \frac{1}{2}, x_n > \frac{1}{2}\ \forall\ n$.*
*Alors, nous avons*

$$Ax_n = (1-x_n) \to \frac{1}{2} = t, \text{et } Sx_n = x_n \to \frac{1}{2} = t.$$

*Depuis,$\forall\ n\ , 1-x_n < \frac{1}{2}$ , on a*

$$AAx_n = A(1-x_n) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}, ASx_n = A(x_n) = 1-x_n \to \frac{1}{2},$$

*et*

$$SSx_n = S(x_n) = x_n \to \frac{1}{2}, SAx_n = S(1-x_n) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

*Ainsi, nous avons*

$$A(t) = \frac{2}{3} = S(t) \text{ mais } AS(t) = AS(\frac{1}{2}) = A(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}, SA(t) = SA(\frac{1}{2}) = S(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}.$$

*Cependant,* $\frac{1}{3} = AS(t) \neq SA(t) = \frac{2}{3}$, *où* $t = \frac{1}{2}$.

*Par conséquent, la paire* $\{A, S\}$ *est compatible (compatible de type (A), (B),(C), (P)), mais les applications ne sont pas compatibles de type (E).*

*En outre, il est à noter que les applications ne sont pas au commutatives le point de coïncidence.*

**Définition 1.3.11** *On dit que A et S sont A-compatibles de type (E), si*

$$\lim_{n\to\infty} A^2 x_n = \lim_{n\to\infty} ASx_n = St; \text{ pour certain } t \in X,$$

*où* $\{x_n\})$ *est une suite en* $X$ *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = t, \text{ pour certain } t \in X.$$

**Définition 1.3.12** *Deux applications* $A$ ,$S : X \to X$ *sont* $S$*-compatibles de type (E) si*

$$\lim_{n\to\infty} S^2 x_n = \lim_{n\to\infty} SAx_n = At, \text{ pour certain } t \in X,$$

*où* $\{x_n\}$ *est une suite en* $X$ *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = t, \text{ pour certain } t \in X.$$

### Subsequential et réciproque continuité

**Définition 1.3.13** *Les applications* $A$ *et* $S$ *d'un espace métrique* $(X, d)$ *dans lui-même,on dit être réciproquement continue, si*

$\lim_{n\to\infty} ASx_n = At$ *et* $\lim_{n\to\infty} SAx_n = St$, *chaque fois que* $\{x_n\}$ *est une suite dans* $X$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = t$, *pour certain* $t \in X$.

**Définition 1.3.14** *Deux applications* $A$ *et* $S$ *d'un espace métrique* $(X, d)$ *dans lui-même est appelé à être subsequential continue (faiblement suite continue) s'il existe une suite* $\{x_n\}$ *telle que*

$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = t$, *pour un* $t \in X$ *et satisfont* $\lim_{n\to\infty} ASx_n = At$ *et* $\lim_{n\to\infty} SAx_n = St$.

Notez que subsequential continues ou réciproquement continue sont faiblement subsequential continue, mais l'inverse peut-être pas.
On note $\mathbb{R}_A^+ = [0, A[$, où $A \in [0, \infty[$, soit $\mathcal{F}[0, A[$ un ensemble de toute la fonctions $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfaisant les hypothèses suivantes:

1. $F(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

2. $F$ est croissante dans chaque variable.

3. $F$ est continue.

**Exemple 1.3.6** *Soit $F(t) = t$, alors $F \in \mathcal{F}[0, A[$.*

Définition 1.3.14 avec example 1.3.6 nous obtenons ce qui suit corollaire:

**Corollaire 1.3.1** *Pour $A$, $B$, $S$ et $T$ applications d'un espace métrique $(X, d)$ dans lui-même telle que $\forall\ x, y \in X$*

$$d(Ax, By) \leq \psi(\max(d(Sx, Ty), d(Ax, Sx), d(Ty; By), d(Ax, Ty), d(Ty, Ax))).$$

*Si la paire $\{A, S\}$ est faiblement subsequentially continue et compatible de type (E) ainsi que $\{B, T\}$, alors $A$, $B$, $S$ et $T$ ont une point fixe unique en $X$.*

**Remarque 1.3.3** *finissant cette paragraghe par les implications suivantes:*
*(compatible de type (A)) $\Longrightarrow$ (compatible de type (B)) $\Longrightarrow$ (compatible de type (C)) $\Longrightarrow$ (compatible de type (P)) $\Longrightarrow$ (compatible de type (P)) $\Longrightarrow$ (compatible de type (E)).*
*Si elles sont l'un d'eux est continue, alors Transformation ( $\Longrightarrow$ ) à ($\Longleftrightarrow$).*

# Chapitre 2

# Théorème du point fixe dans espace métrique

Dans ce partie, nous présentons le théorème du point fixe dans un espace métrique, on utilisant les applications compatibles et deux types ce dernier (I) et (II).

## 2.1 point fixe

**Définition 2.1.1** *Soit $X$ un ensemble et $A, B : X \longrightarrow X$ sont applications compatibles, alors nous appelons un point $x_0$ un point fixe dans $X$ si*

$$A(x_0) = B(x_0) = x_0.$$

## 2.2 Théorème de point fixe utilisant application compatible

**Théorème 2.2.1** *Soit $(X, d)$ un espace métrique, $D = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}$, et $A = D$ si $D = \infty$ et $A > D$ si $D < \infty$, soient $T$,$S$ , $I : X \to X$ satisfont*

i $T(X) \subset I(X)$ et $S(X) \subset I(X)$.

ii Supposons qu'il existe $F \in \Omega[0,A)$ et $\psi \in \Gamma[0, F(A-0))$ satisfaisant

$$\forall x, y \in X,\ \ F(d(Tx, Sy)) \leq \psi(F(M(x,y))), \tag{2.2.1}$$

où

$$M(x,y) = \max\left\{d(Ix,Iy), d(Tx,Ix), d(Iy,Iy), \frac{1}{2}(d(Ix,Sy) + d(Iy,Tx))\right\}.$$

iii $I$ est continue et $I(X)$ est complete.

Maintenant soit $x_0$ un point arbitraire dans $X$.
D'aprés $(i)$, on peut définir une suite $\{Ix_n\}$ par

$$Ix_{2n+1} = Tx_{2n},\ \ Ix_{2n+2} = Sx_{2n+1} \text{ pour } n = 0, 1, 2, .... \tag{2.2.2}$$

Pour plus de simplicité, on met $d_n = d(Ix_n, Ix_{n+1})$ pour $n = 0, 1, 2, ...$ .

**Lemme 2.2.1** *La suite qui a définie par (2.2.2) est de Cauchy.pour preuve voire [3]*

***Théorème 2.2.2*** *Suppose les applications $T, S, I, B : X \to X$ vérifient (i)-(iii) de plus, si $I$ est compatible avec $T$ ou $S$, alors $T$,$S$,$I$ ont un point commun unique et fixe dans $X$. De plus la suite$\{Ix_n\}$définie par*(2.2.2)*convergent vers le point fixe commun de $T$,$S$ et $I$.*

**Preuve.** Pour tout $x_0 \in X$, par lemme 2.2.1, la suite $\{Ix_n\}$ définie par (2.2.2) est une suite de Cauchy.
Comme $I(X)$ est complete, $\{Ix_n\}$ converge vers quelques $z$ dans $I(X)$.
Par conséquent, $T(x_{2n}) \to z$ et $S(x_{2n+1}) \to z$,
depuis $I$ est continue, $I(Ix_n) \to Iz$, $I(Sx_{2n+1}) \to Iz$.
Maintenant suppose $I$ est compatible avec $S$ (l'argument est similaire si $I$ est compatible avec $T$), donc $SIx_{2n+1}$ converge vers $Iz$.

$$\begin{aligned} M(x_{2n}, Ix_{2n+1}) = \max\{&d(Ix_{2n}, IIx_{2n+1}), d(Ix_{2n}, Tx_{2n}), d(IIx_{2n+1}, SIx_{2n+1}), \\ &\frac{1}{2}(d(Ix_{2n}, SIx_{2n+1}) + d(IIx_{2n+1}, Tx_{2n}))\right\}. \end{aligned}$$

$$\lim M(x_{2n}, Ix_{2n+1}) = \max\left\{d(z, Iz), d(z, z), d(Iz, Iz), \frac{1}{2}(d(z, Iz) + d(Iz, z))\right\}$$
$$= d(z, Iz).$$

$$F(d(Tx_{2n}, SIx_{2n+1})) \leq \psi(F(M(x_{2n}, Ix_{2n+1})).$$

Ici $F$ est continue, $\psi$ est supérieure semi-continue et maintenant prendre limite quant $n \to \infty$, nous avons

$$F(d(z, Iz)) \leq \psi(F(d(z, Iz)) < F(d(z, Iz)) \Rightarrow z = Iz.$$

Aussi, nous avons

$$\lim M(x_{2n}, z) = d(z, Sz),$$

et

$$F(d(Tx_{2n}, Sz)) \leq \psi(F(M(x_{2n}, z))).$$

Prenant limite quant $n \to \infty$, on obtenons

$$F(d(z, Sz)) \leq \psi(F(d(z, Sz))) < F(d(z, Sz)) \Rightarrow z = Sz.$$

Comme $M(z, z) = d(z, Tz)$,

$$F(d(Tz, z)) \leq \psi(F(M(z, z)) < F(d(Tz, z)) \Rightarrow z = Tz.$$

Pour prouver l'unicité, soient $Tz = Sz = Iz = z$ et
$Ty = Sy = Iy = y$. Nous obtenons

$$M(z, y) = d(z, y),$$

et

$$F(d(z, y)) \leq \psi(F(M(z, y))) < F(d(z, y)) \Rightarrow z = y.$$

Ainsi $T$,$S$ et $I$ ont un point fixe commun unique. ∎

**Exemple 2.2.1** *Soit* $X = \left\{\frac{1}{n}, n = 3, 4, 5, ...\right\} \cup \{0\}$ *avec la distance euclidienne .*
*Soit* $F(t) = t^{\frac{1}{t}}$*, alors* $F \in \Omega[0, A)$*, où* $A = e > D = \frac{1}{3}$*, soit* $\psi(t) = \frac{t}{6}$*, puis* $\psi \in \Gamma[0, e^{\frac{1}{e}})$*.*
*Suppose que* $S$*,* $T$ *et* $I$ *sont des applications de* $X$ *dans lui méme définit par*

$$Tx = Sx = \begin{cases} 0, & si\ x = 0 \\ \frac{1}{2n}, & si\ x = \frac{1}{n}, n \geq 3 \end{cases} \quad et\ Ix = \begin{cases} 0, & si \quad x = 0 \\ \frac{1}{n+1}, & si\ x = \frac{1}{n}, n \geq 3. \end{cases}$$

*Il est évident de voir que* $T(X) \subset I(X)$, $S(X) \subset I(X)$, $I$ *est continue et* $I(X)$ *est complete.*

*Pour* $x = 0$,$d(TIx, ITx) \leq d(Tx, Ix)$ *est vrai.*

*Pour* $x = \frac{1}{n}$, $n \geq 3$

$$d(TIx, ITx) = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} < \frac{n-1}{2n(n+1)} = d(Tx, Ix).$$

*Par conséquent, la paire* $\{T, I\}$ *est faiblement commutative de ceci* $T$ *et* $I$ *sont compatible.*

*Maintenant, nous prouvons que pour chaque* $x, y \in X$,

$$F(d(Tx, Sy)) \leq \psi(F(d(x, y))) \leq \psi(F(M(x, y))).$$

*Il y a trois cas possibles:*

*Cas(i)* $x = y$.

*Si* $x = y = 0$, *donc*

$$F(d(Tx, Sy)) = 0 = \psi(F(d(x, y))) \leq \psi(F(M(x, y))).$$

*Si* $x = y = \frac{1}{n}$,$n \geq 3$, *alors* $M(x, y) = \left(\frac{n-1}{2n(n+1)}\right)$

$$F(d(Tx, Sy)) = 0 \leq \frac{1}{6}\left(\frac{n-1}{2n(n+1)}\right)^{\left(\frac{2n(n+1)}{n-1}\right)} = \psi(F(M(x, y))).$$

*Cas(ii) si* $x = 0$, $y = \frac{1}{n}$ *ou vice-versa donc* $M(x, y) = \frac{1}{n+1}$

$$F(d(Tx, Sy)) = \left(\frac{1}{2n}\right)^{2n} \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \psi(F(M(x, y))).$$

*Cas(iii) si* $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{m}$, $n > m \geq 3$, *alors* $d(Ix, Iy) = \frac{n-m}{(m+1)(n+1)}$ *et*

$$\begin{aligned} F(d(Tx, Sy)) &= \left(\frac{n-m}{2mn}\right)^{\left(\frac{2mn}{n-m}\right)} \\ &\leq \frac{1}{6}\left(\frac{n-m}{(m+1)(n+1)}\right)^{\left(\frac{(m+1)(n+1)}{n-m}\right)} \\ &= \psi(F(d(Ix, Iy))) \\ &\leq \psi(F(M(x, y))). \end{aligned}$$

*Par conséquent* $T$, $S$ *et* $I$ *vérifient toute les conditions dans le théorème 2.2.2.*

*Ainsi, ils ont un point commun fixe unique point* $x^* = 0$.

## 2.3 Théorème de point fixe utilisant compatible de type $(I),(II)$

**Compatible de type (I)**

**Définition 2.3.1** *Soient $S,T : X \to X$ sont applications, la paire $\{S,T\}$ est dite pour être compatible de type $(I)$ si*

$$d(t,Tt) \leq \overline{\lim} d(t,STx_n),$$

*chaque fois que $\{x_n\}$ est une suite en $X$ telle que*

$$\lim Sx_n = \lim Tx_n = t \text{ pour certain } t \in X.$$

**Exemple 2.3.1** *Soit $X = [0,\infty[$ soit avec la distance usuelle, définissons $S,T : X \to X$ par $\quad Sx = 2x+1 \quad$ et $\; Tx = x^2+1$.*

*Puis, à $x = 0$, $Sx = Tx$, aussi $STx = 3$ et $TSx = 2$, qui montre que $S$ et $T$ ne sont pas compatibles faible.*

*Supposons maintenant que $\{x_n\}$ est une suite dans $X$ telle que $\lim Sx_n = \lim Tx_n = t$ pour certain $t \in X$.*

*Par définition de $S$ et $T$ , $t = 1$, Pour cette valeur, nous avons*

$$d(t,Tt) = 1 \leq 2 = \overline{\lim} d(t,STx_n),$$

*ce qui montre que le paire $\{S,T\}$ est application compatible de type $(I)$.*

**Compatible de type (II)**

**Définition 2.3.2** *La paire $\{S,T\}$ est dite compatible de type $(II)$ si et seulement si $\{S,T\}$ est compatible de type $(I)$.*

**Exemple 2.3.2** *Soit $X = [0,\infty[$ avec la distance euclidienne, définit $S,T : X \to X$ par*

$$Sx = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [0,2] \\ 2+x & \text{si } x \in [2,\infty[ \end{cases} \quad \text{et } Tx = \begin{cases} 2+x & \text{si } x \in [0,2[ \\ 4+x & \text{si } x \in [2,\infty[ \end{cases}$$

*Notez que $2$ est un point fixe de $S$, alors la paire $\{S,T\}$ est compatible de type $(II)$ mais les applications $S$ et $T$ ne sont pas faiblement compatibles*

*parce que $S0 = 2 = T0$ mais $ST0 = 2 \neq 6 = 6 = TS0$.*

**Proposition 2.3.1** *[12]Soit $S,T:X\to X$ telle que la paire $\{S,T\}$ est compatible de type $(I)$ (resp. type $(II)$) et $Sp=Tp$ pour quelques $p\in X$, donc*

$$d(Sp,TTp)\leq d(Sp,STp)\quad (resp. d(Tp,SSp)\leq d(Tp,TSp)).$$

**Lemme 2.3.1** *[14]Soit $\psi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ est une fonction continue telle que $\psi(t)<t$ pour chaque $t>0$,donc $\lim\limits_{n\to\infty}\psi^n(t)=0$, où $\psi^n$ dénotes le n fois répétée de la composition $\psi$ avec lui-même.*

**Théorème 2.3.1** *Soit $(X,d)$ un espace métrique complet, $A$, $B$, $S$ et $T$ sont des applications d'un espace métrique $(X,d)$ dans lui méme, vérifiant les conditions:*

i $S(X)\subseteq B(X), T(X)\subseteq A(X)$,

ii $\forall\ x,y\in X$, il existe une fonction continue satisfie
$\psi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $\psi(0)=0$ et $\psi(s)<s$ pour $s>0$ tel que

$$\int_0^{d(Sx,Ty)}\varphi(t)dt\leq\psi\left(\int_0^{M(x,y)}\varphi(t)dt\right),$$

où $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ est une application intégrable Lebesge qui est sommable, positif ou nul et tel que

$$\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0 \text{ pour chaque } \varepsilon>0, \tag{2.3.1}$$

et

$$M(x,y)=\frac{1}{2}\max\{2d(Ax,By),d(Sx,Ax),d(Ty,By),d(Sx,By),d(Ty,Ax)\},$$

et n'importe quels de $(iii)$ ou $(iv)$ suivants:

iii $A$ ou $B$ est continue et les paires $\{S,A\}$ et $\{T,B\}$ sont compatibles de type $(I)$,

iv $S$ ou $T$ est continue et les paires $\{S,A\}$ et $\{T,B\}$ sont compatibles de type $(II)$.

Alors $A, B, S$ et $T$ ont un point fixe commun unique.

**Preuve.** Soit $x_0 \in X$ est un point arbitraire de $X$.

De $(i)$ nous pouvons construire une suite $\{y_n\}$ en $X$ comme suit:

$$y_{2n+1} = Sx_{2n} = Bx_{2n+1} \text{ et } y_{2n+2} = Tx_{2n+1} = Ax_{2n+2}$$

pour tout $n = 0, 1, \ldots$. Définie $d_n = d(y_n, y_{n+1})$, puis, par $(ii)$,

$$\int_0^{d(Sx_{2n},Tx_{2n+1})} \varphi(t)dt \leq \psi\left(\int_0^{M(x_{2n},x_{2n+1})} \varphi(t)dt\right), \tag{2.3.2}$$

où

$$\begin{aligned} M(x_{2n}, x_{2n+1}) &= \frac{1}{2}\max\{2d(Ax_{2n}, Bx_{2n+1}), d(Sx_{2n}, Ax_{2n}), d(Tx_{2n+1}, Bx_{2n+1}), \\ &\quad d(Sx_{2n}, Bx_{2n+1}), d(Tx_{2n+1}, Ax_{2n})\} \\ &= \max\left\{d_{2n}, \frac{d_{2n+1}}{2}, \frac{d(y_{2n}, y_{2n+2})}{2}\right\} \\ &\leq \max\{d_{2n}, d_{2n+1}\}. \end{aligned}$$

Ainsi, de (2.3.2) nous avons

$$\int_0^{d_{2n+1}} \varphi(t)dt \leq \psi\left(\int_0^{\max\{d_{2n},d_{2n+1}\}} \varphi(t)dt.\right). \tag{2.3.3}$$

Maintenant, si $d_{2n+1} \geq d_{2n}$ pour quelque $n$, donc de(2.3.3) nous avons

$$\int_0^{d_{2n+1}} \varphi(t)dt \leq \psi\left(\int_0^{d_{2n+1}} \varphi(t)dt\right) < \int_0^{d_{2n+1}} \varphi(t)dt \quad ,$$

qu'est une contradiction.

Ainsi $d_{2n} > d_{2n+1}$ pour tout $n$, et par conséquent, de (2.3.3) on a

$$\int_0^{d_{2n+1}} \varphi(t)dt \leq \psi\left(\int_0^{d_{2n}} \varphi(t)dt\right) .$$

De même,

$$\int_0^{d_{2n}} \varphi(t)dt \leq \psi\left(\int_0^{d_{2n-1}} \varphi(t)dt\right).$$

En général, nous avons pour tout $n = 1, 2, ...,$

$$\int_0^{d_n} \varphi(t)dt \leq \psi\left(\int_0^{d_{n-1}} \varphi(t)dt\right) . \tag{2.3.4}$$

De (2.3.4), nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^{d_n} \varphi(t)dt &\leq \psi\left(\int_0^{d_{n-1}} \varphi(t)dt\right)\\ &\leq \psi^2\left(\int_0^{d_{n-2}} \varphi(t)dt\right)\\ &.\\ &.\\ &.\\ &\leq \psi^n\left(\int_0^{d_0} \varphi(t)dt\right),\end{aligned}$$

et, prenant la limite quand $n \to \infty$ et utilisant le lemme 2.3.1, nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{d_n} \varphi(t)dt \leq \lim_{n\to\infty}\psi^n\left(\int_0^{d_0} \varphi(t)dt\right) = 0,$$

qui, de (2.3.1), implique que

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0. \tag{2.3.5}$$

Maintenant nous montrons que $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy.

Pour cela, il suffisant de montrer que $\{y_{2n}\}$ est une suite de Cauchy.

Suppose que $\{y_{2n}\}$ n'est pas une suite de Cauchy, donc il existe une $\varepsilon > 0$ telle que pour chaque entier $2k$ il existe même des entiers $2m(k) > 2n(k) > 2k$ telle que

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}) \geq \varepsilon. \tag{2.3.6}$$

Pour chaque entier pair $2k$, soit $2m(k)$ l'entier positif excédant $2n(k)$ verifiant (2.3.6) telle que

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}) < \varepsilon. \tag{2.3.7}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} 0<\delta &= \int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt \\ &\leq \int_0^{d(y_{2n(k)},y_{2m(k)})} \varphi(t)dt \\ &\leq \int_0^{d(y_{2n(k)},y_{2m(k)-2})+d_{2m(k)-2}+d_{2m(k)-1}} \varphi(t)dt. \end{aligned}$$

Donc, par (2.3.5), (2.3.6) et (2.3.7) il résulte que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{d(y_{2n(k)},y_{2m(k)})} \varphi(t)dt = \delta. \tag{2.3.8}$$

Aussi, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|d(y_{2n(k)},y_{2m(k)-1}) - d(y_{2n(k)},y_{2m(k)})\right| \leq d_{2m(k)-1},$$

et

$$\left|d(y_{2n(k)+1},y_{2m(k)-1}) - d(y_{2n(k)},y_{2m(k)})\right| \leq d_{2m(k)-1} + d_{2n(k)},$$

et ainsi

$$\int_0^{\left|d(y_{2n(k)},y_{2m(k)-1})-d(y_{2n(k)},y_{2m(k)})\right|} \varphi(t)dt \leq \int_0^{d(y_{2m(k)-1})} \varphi(t)dt,$$

et

$$\int^{\left|d(y_{2n(k)+1},y_{2m(k)-1})-d(y_{2n(k)},y_{2m(k)})\right|} \varphi(t)dt \leq \int_0^{d_{2m(k)-1}+d_{2n(k)}} \varphi(t)dt.$$

Utilisant (2.3.8), on a

$$\int_0^{d(y_{2n(k)},y_{2m(k)-1})} \varphi(t)dt \to \delta, \tag{2.3.9}$$

et

$$\int_0^{d(y_{2n(k)+1},y_{2m(k)-1})} \varphi(t)dt \to \delta, \tag{2.3.10}$$

quand $k \to \infty$, ainsi

$$\begin{aligned} d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}) &\leq d_{2n(k)} + d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)}) \\ &\leq d_{2n(k)} + d(Sx_{2n(k)}, Tx_{2m(k)-1}), \end{aligned}$$

et donc

$$\int_0^{d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})} \varphi(t)dt \leq \int_0^{d_{2n(k)}+d(Sx_{2n(k)}, Tx_{2m(k)-1})} \varphi(t)dt.$$

Soient $k \to \infty$ des deux côtés de la dernière inégalité, on a

$$\begin{aligned} \delta &\leq \lim_{k\to\infty} \int_0^{d(Sx_{2n(k)}, Tx_{2m(k)-1})} \varphi(t)dt \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \psi \left( \int_0^{M(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1})} \varphi(t)dt \right), \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

où

$$\begin{aligned} M(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}) = \frac{1}{2} \max \big\{ & 2d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}), d_{2n(k)}, d_{2m(k)-1}, \\ & d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}), d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}) \big\}. \end{aligned}$$

Combinant (2.3.5), (2.3.6), (2.3.7), (2.3.8), (2.3.9) et (2.3.10),
produisent la contradiction suivante (2.3.11): $\delta \leq \psi(\delta) < \delta$.
Ainsi $\{y_{2n}\}$ est une suite de Cauchy et ainsi $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy.
Comme $X$ est complète, elle converge vers un point $z$ dans $X$.
Comme $\{Sx_{2n}\}$, $\{Bx_{2n+1}\}$, $\{Tx_{2n+1}\}$ et $\{Ax_{2n+2}\}$ sont des subsuites de $\{y_n\}$,
donc $Sx_{2n}$, $Bx_{2n+1}$, $Tx_{2n+1}$, $Ax_{2n+2} \to z$ quand $n \to \infty$.
Maintenant, suppose que la condition $(iii)$ tient avec $B$ est continue.
Puis, comme la paire $\{T, B\}$ est compatible de type $(I)$ et $B$ est continue, nous avons

$$d(z, Bz) \leq \overline{\lim} d(z, TBx_{2n+1}), BBx_{2n+1} \to Bz. \tag{2.3.12}$$

Maintenant, les données $x = x_{2n}$ et $y = Bx_{2n+1}$ en $(ii)$, on obtient

$$\int_0^{d(Sx_{2n}, TBx_{2n+1})} \varphi(t)dt \leq \psi \left( \int_0^{M(x_{2n}, Bx_{2n+1})} \varphi(t)dt \right), \tag{2.3.13}$$

où

$$M(x_{2n},Bx_{2n+1})=\frac{1}{2}\max\{2d(Ax_{2n},BBx_{2n+1}),d(Sx_{2n},Ax_{2n})\,,$$
$$d(TBx_{2n+1},BBx_{2n+1}),d(Sx_{2n},BBx_{2n+1}),d(TBx_{2n+1},Ax_{2n})\}\,.$$

On consider que $\overline{\lim}d(z,TBx_{2n+1})=0$.

Suppose $\overline{\lim}d(z,TBx_{2n+1})>0$.

Maintenant, en laissant la limite supérieure sur des deux côtés de (2.3.13), nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^{\overline{\lim}d(z,TBx_{2n+1})}\varphi(t)dt &= \overline{\lim}\int_0^{d(Sx_{2n},TBx_{2n+1})}\varphi(t)dt\\
&\le \overline{\lim}\psi\left(\int_0^{M(x_{2n},Bx_{2n+1})}\varphi(t)dt\right)\\
&\le \psi\left(\int_0^{\max\left\{d(z,TBz),\frac{\overline{\lim}d(TBx_{2n+1},Bz)}{2},\frac{\overline{\lim}d(TBx_{2n+1},z)}{2}\right\}}\varphi(t)dt.\right)\\
&\le \psi\left(\int_0^{\overline{\lim}d(TBx_{2n+1},z)}\varphi(t)dt\right)\\
&< \int_0^{\overline{\lim}d(TBx_{2n+1},z)}\varphi(t)dt,
\end{aligned}$$

qui est une contradiction.

Ainsi $\overline{\lim}d(z,TBx_{2n+1})=0$ et ainsi de (2.3.11) $Bz=z$.

Encore remplace de $x$ par $x_{2n}$ et $y$ par $z$ dans $(ii)$, on a

$$\int_0^{d(Sx_{2n},Tz)}\varphi(t)dt\le\psi\left(\int_0^{M(x_{2n},z)}\varphi(t)dt\right),$$

où

$$\begin{aligned} M(x_{2n}, z) &= \frac{1}{2} \max \{2d(Ax_{2n}, Bz), d(Sx_{2n}, Ax_{2n}), d(Tz, Bz), \\ &\quad d(Sx_{2n}, Bz), d(Tz, Ax_{2n})\} \\ &= \frac{1}{2} \max \{d(Ax_{2n}, z), d(Sx_{2n}, Ax_{2n}), d(Tz, z), d(Sx_{2n}, z), d(Tz, Ax_{2n})\}, \end{aligned}$$

et soient $n \to \infty$, nous avons

$$\int_0^{d(z,Tz)} \varphi(t)dt \leq \psi\left(\int_0^{\frac{d(z,Tz)}{2}} \varphi(t)dt\right) < \int_0^{\frac{d(z,Tz)}{2}} \varphi(t)dt.$$

Qui est une contradiction si $d(z, Tz) > 0$.

Ainsi $d(z, Tz) = 0$, i.e. $Tz = z$. Puisque $T(X) \subseteq A(X)$, il y a un point $u \in X$ telle que $Tz = Au = z$.

De $(ii)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{d(Su,z)} \varphi(t)dt &= \int_0^{d(Su,Tz)} \varphi(t)dt \\ &\leq \psi\left(\int_0^{d(Su,z)} \varphi(t)dt\right) \\ &< \int_0^{d(Su,z)} \varphi(t)dt, \end{aligned}$$

qui est une contradiction si $d(Su, z) > 0$, ainsi $Su = z = Au$.

Par proposition 2.3.1, nous avons $d(Su, AAu) \leq d(Su, SAu)$ et ainsi $d(z, Az) \leq d(z, Sz)$.

Encore de $(ii)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{d(Sz,z)} \varphi(t)dt &= \int_0^{d(Sz,Tz)} \varphi(t)dt \\ &\leq \psi\left(\int_0^{\frac{d(Sz,z)}{2}} \varphi(t)dt\right) \\ &< \int_0^{\frac{d(Sz,z)}{2}} \varphi(t)dt, \end{aligned}$$

qui est une contradiction si $d(Sz, z) > 0$. Ceci montre que

$$Sz = z = Az = Bz = Tz,$$

et $z$ est un point fixe commun de $A$, $B$, $S$ et $T$ .

Si nous supposons que $A$ est continu au lieu de $B$, similairement nous pouvons montrer que $z$ est un point fixe commun de $A$, $B$, $S$ et $T$ .

L'autre cas $(iv)$ peut etre disposé d'arguments semblables comme ci-dessus.

Il est facile de voir que le point fixe commun de $A$, $B$, $S$ et $T$ est unique. ■

# Chapitre 3

# Application

Dans ce dernier chapitre, nous avons présentée quelques applications du théorème du point fixe dans un espace métrique. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution d'équations intégrales non-linéaires et nous établissons l'existence de la solution aux systèmes d'équations fonctionnelles découlant de la programmation dynamique.

Enfin, nous avons présentée quelques exemples appliqués afin de montrer une image plus claire sur les théorèmes.

## 3.1 Application aux équations intégrales

Maintenant, nous donnons l'application suivante au théorème 2.2.1 avec la condition:

si la paire $\{A, S\}$ et $\{B, T\}$ sont faiblement compatible

Considérons l'équation de Voltera-Hammerstein suivante équations intégrales non-linéaires:[19]

$$x(t) = w(t, x(t)) + \mu \int_0^t m(t, s) g_i(s, x(s)) ds + \lambda \int_0^\infty k(t, s) h_j(s, x(s)) ds \ , \tag{3.1.1}$$

pour tout $t \in [0, \infty[$, où $w(t, x(t)) \in L[0, \infty[$ est connu, $m(t, s)$, $k(t, s)$, $g_i(s, x(s))$ et $h_j(s, x(s))$, $i$, $j = 1, 2$ et $i \neq j$ sont évaluées des fonctions réelles ou complexes qui sont mesurables tant en $t$ et $s$ sur $[0, \infty[$ et $\lambda, \mu$ sont des nombres réels ou complexes.

Ces fonctions remplissent les conditions suivantes:

$(C_0)$: L'intégrale $\int_0^\infty |w(s, x(s))| \, ds$ est bornée pour tout $x(s) \in L[0, \infty[$, et il existe $1 > K_0 > 0$ tel que, pour chaque $s \in [0, \infty[$,

$$|w(s, x(s)) - w(s, y(s))| \leq K_0 |x(s) - y(s)|, \forall x, y \in L[0, \infty[.$$

$(C_1)$:

$$\int_0^\infty \sup_{0 \leq s < 1} |m(t; s)| \, dt = M_1 < +\infty.$$

$(C_2)$:

$$\int_0^\infty \sup_{0 \leq s < 1} |k(t; s)| \, dt = M_2 < +\infty.$$

$(C_3)$:

$$g_i(s, x(s)) \in L[0, \infty), \forall x \in L[0, \infty[$$

et il existe $1 > K_1 > 0$ tel que pour tout $s \in [0, \infty[$,

$$|g_1(s, x(s)) - g_2(s, y(s))| \leq K_1 |x(s) - y(s)|, \forall x, y \in L[0, \infty[.$$

$(C_4)$:

$$h_i(s, x(s)) \in L[0, \infty[$$

pour tout $x \in L[0, \infty[$ et il existe $1 > K_2 > 0$ tel que pour tout $s \in [0, \infty[$,

$$|h_1(s, x(s)) - h_2(s, y(s))| \leq K_2 |x(s) - y(s)|, \forall x, y \in L[0, 1[.$$

Le théorème d'existence peut être formulé comme suit:

**Théorème 3.1.1** *Soient $F$ et $\psi$ deux fonctions définies dans le théorème 2.2.1.*

*Si en plus à des hypothèses $(C_0)$ - -$(C_4)$, les conditions suivantes sont également remplies:*

a- Pour $i, j = 1, 2$ avec $i \neq j$ ,

$$\lambda \int_0^t k(t, s) h_i(s, w(s, x(s))) ds + \mu \int_0^s m(s, \top) g_j(\top, x(\top)) d\top) ds = 0.$$

b- Pour certain $x \in L[0, \infty[$,

$$\mu \int_0^t m(t, s) g_i(s, x(s)) ds = x(t) - w(t, x(t)) - \lambda \int_0^\infty k(t, s) h_i(s, x(s)) ds = \Gamma_i(t) \in L[0, \infty).$$

Si pour certain $\Gamma_i(t) \in L[0, 1[$, il existe $\theta_i(t) \in L[0, \infty[$ tel que:

c-

$$\mu\int_0^t m(t,s)g_i(s,x(s)-\Gamma_i(s))ds = w(t;x(t))+\lambda\int_0^\infty k(t,s)h_i(s,x(s)-\Gamma_i(s))ds$$
$$=\theta_i(t),\quad i=1,2,$$

**Théorème 3.1.2** *Ensuite, le système d'équation intégrale non linéaire Voltera-Hammerstein simultanées (3.1.1) a une unique solution dans* $L[0,1[$*pour chaque paire de nombres réels ou complexes* $\lambda$,$\mu$ *avec,* $p\geq 0$

$$K_0+|\mu|\,M_1K_1+|\lambda|\,M_2K_2<1 \text{ et } F(|\mu|\,M_1K_1p)\leq(1-(K_0+|\lambda|\,M_2K_2)p). \tag{3.1.2}$$

**Preuve.** Comparant la notation avec le théorème 2.2.1, ici $X=L[0,\infty[$.
Pour chaque $x(s)\in L[0,1[$, nous définissons les applications $A,B,S,T$ par:

$$Ax(t)=\mu\int_0^t m(t,s)g_1(s,x(s))ds,\ Bx(t)=\mu\int_0^t m(t,s)g_2(s,x(s))ds,$$
$$Sx(t)=(I-C)x(t) \text{ et } Tx(t)=(I-D)x(t),$$

où

$$Cx(t)=w(t,x(t))+\lambda\int_0^\infty k(t,s)h_1(s,x(s))ds,$$
$$Dx(t)=w(t,x(t))+\lambda\int_0^\infty k(t,s)h_2(s,x(s))ds.$$

Ici $w(t,x(t))\in L[0,\infty[$ est connue et $I$ est l'opérateur d'identité sur $L[0,\infty[$.
Nous allons montrer que chaque $A,B,C,D,S,T$ sont des opérateurs de $L[0,\infty[$ dans lui-même.
En effet, nous avons

$$|Ax(t)|\leq|\mu|\int_0^\infty |m(t,s)|\,.\,|g_1(s,x(s))|\,ds\leq|\mu|\sup_{0\leq s<\infty}|m(t,s)|\int_0^\infty |g_1(s,x(s))|\,ds.$$

En appliquant les conditions ($C_1$) et ($C_3$) et ainsi, nous avons

$$\int_0^\infty |Ax(t)|\,dt\leq|\mu|\int_0^\infty \sup_{0\leq s<\infty}|m(t,s)|\,dt\int_0^\infty |g_1(s,x(s))|\,ds<+\infty,$$

et donc $Ax \in L[0,\infty[$, de même $Bx \in L[0,\infty[$.

Pour l'application $C$, nous appliquons les conditions ($C_2$) et ($C_4$) de la façon suivante:

$$\int_0^\infty |Cx(t)|\,dt \leq \int_0^\infty |w(t,x(t))|\,dt + |\lambda| \int_0^\infty \sup_{0\leq s<\infty} |k(t,s)|\,dt \int_0^\infty |h_1(s,x(s))|\,ds < +\infty,$$

comme $\int_0^\infty |w(t,x(t))|\,dt$ est délimitée et donc $C$ est un opérateur en lui-même sur $L[0,\infty[$.

Un argument semblable est valide pour $D$, de même $S$ et $T \in L[0,\infty[$.

Par conséquent, $A, B, C, D, S, T$ sont des opérateurs de $L[0,\infty[$ dans lui-même.

Soit la condition (i) du théorème 2.2.1, pour prouver

$A(X) \subseteq T(X)$,c-à-d, $A(L[0,\infty[) \subseteq T(L[0,\infty[)$.

Soit $x(t) \in L[0,\infty[$ arbitraire, ainsi nous avons

$$\begin{aligned}
T(Ax(t) + w(t,x(t))) &= (I - D)(Ax(t) + w(t,x(t))) \\
&= Ax(t) - \lambda \int_0^\infty k(t,s) h_2(s, Ax(s) + w(s,x(s)))ds \\
&= Ax(t) - \lambda \int_0^\infty k(t,s) h_2[s, \mu \int_0^s m(s,\top) g_1(\top, x(\top))d\top + w(s,x(s))]ds \\
&= Ax(t), \text{par hypothèse } (a).
\end{aligned}$$

Par conséquent $A(L[0,\infty[) \subseteq T(L[0,\infty[)$, de même $B(L[0,\infty[) \subseteq S(L[0,\infty[)$.

De plus, nous vérifions (ii) du théorème 2.2.1.

Supposons que $x, y \in L[0,\infty[$.

Ainsi LHS est:

$$\begin{aligned}
F(\|Ax-By\|) &= F(\int_0^\infty |Ax(t)-By(t)|\,dt), \text{par définition de } \|.\| \\
&= F(\int_0^\infty |\mu \int_0^t m(t,s)[g_1(s,x(s))-g_2(s,x(s))]ds|dt) \\
&\leq F(\int_0^\infty |\mu| \sup_{0\leq s<\infty} |m(t,s)|\,dt \int_0^\infty |g_1(s,x(s))-g_2(s,y(s))|\,ds) \\
&\leq F(|\mu|\,M_1 \int_0^\infty K_1\,|x(s)-y(s)|\,ds), \text{par } (C_1) \text{ et } (C_3) \\
&= F(|\mu|\,M_1K_1\,\|x-y\|).
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$F(\|Ax-By\|) \leq F(|\mu|\,M_1K_1\,\|x-y\|). \tag{3.1.3}$$

De la même façon, à l'aide des hypothèses ($C_0$), ($C_2$) et ($C_4$), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|Cx-Dy\| &= \int_0^\infty |w(t,x(t))-w(t,y(t))+\lambda \int_0^\infty k(t,s)[h_1(s,x(s))-h_2(s,y(s))]ds|dt \\
&\leq \int_0^\infty |w(t,x(t))-w(t,y(t))|\,dt \\
&+ |\lambda| \int_0^\infty \sup_{0\leq s<\infty} |k(t,s)|\,dt. \int_0^\infty |h_1(s,x(s))-h_2(s,y(s))ds| \\
&\leq (K_0+|\lambda|\,M_2K_2)\,\|x-y\|\,.
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$\|Cx-Dy\| \leq (K_0+|\lambda|\,M_2K_2)\,\|x-y\|\,. \tag{3.1.4}$$

Ainsi, pour l'RHS de (ii), nous avons

$$\begin{aligned}
F(M(x,y)) &= F(\max\{\|Sx-Ty\|,\|Ax-Sx\|,\|By-Ty\|,\frac{1}{2}[\|By-Sx\|+\|Ax-Ty\|]\}) \\
&\geq F(\|Sx-Ty\|), \text{comme } F \text{ est non-décroissante} \\
&= F(\|(I-C)x-(I-D)y\|) = F(\|x-y\|-\|Cx-Dy\|), \\
&\qquad \text{par la propriété de triangle de } \|.\| \\
&\geq F(\|x-y\|-(K_0+|\lambda| M_2K_2)\|x-y\|), \text{par } (2.4) \\
&= F(\{1-K_0-|\lambda| M_2K_2\}\|x-y\|).
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi,

$$F(M(x,y)) \geq F(\{1-K_0-|\lambda| M_2K_2\}\|x-y\|). \tag{3.1.5}$$

Ensuite, comme la fonction $\psi$ croissante, de sorte que

$$\begin{aligned}
\psi(F(M(x,y))) &\geq \psi(F(\{1-K_0-|\lambda| M_2K_2\}.\|x-y\|)), \text{par } (3.1.5) \\
&\geq F(|\mu| M_1K_1\|x-y\| k), \text{par } (3.1.2) \\
&\geq F(\|Ax-By\|), \text{par } (3.1.3).
\end{aligned}$$

Ainsi la contraction généralisée de la condition (ii) du théorème 2.2.1 est vérifiée.

Maintenant, nous prouvons que la paire $\{A,S\}$ est faiblement compatible.

Pour cela, nous avons

$$\begin{aligned}
\|SAx(t)-ASx(t)\| &= \|(I-C)Ax(t)-A(I-C)x(t)\| \\
&= \|Ax(t)-CAx(t)-Ax(t)+ACx(t)\| \\
&= \|ACx(t)-CAx(t)\|.
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Maintenant, chaque fois que $Ax(t)=Sx(t)$, nous avons

$$\mu\int_0^t m(t,s)g_1(s,x(s))ds = x(t)-w(t,x(t))-\lambda\int_0^\infty k(t,s)h_1(s,x(s))ds. \tag{3.1.7}$$

En utilisant l'équation(3.1.7) en (3.1.6), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|SAx(t) - ASx(t)\| = \|ACx(t) - CAx(t)\| &= ||AC[w(t, x(t)) + \lambda \int_0^\infty k(t, s)h_1(s, x(s))ds \\
&+ \mu \int_0^t m(t, s)g_1(s, x(s))ds] - CA[w(t, x(t)) \\
&+ \lambda \int_0^\infty k(t, s)h_1(s, x(s))ds + \mu \int_0^t m(t, s)g_1(s, x(s))ds]|| \\
&= ||A[w(t, x(t)) + \lambda \int_0^\infty k(t, s)h_1(s, x(s) - \Gamma_1(s))ds] \\
&- C[\mu \int_0^t m(t, s)g_1(s, x(s) - \Gamma_1(s))ds]|| \\
&= ||\mu \int_0^t m(t, s)g_1[s, w(s, x(s)) + \lambda \int_0^\infty k(s, \top)h_1(\top, x(\top) - \Gamma_1(\top))d\top]ds \\
&- w(t, x(t)) \\
&- \lambda \int_0^\infty k(t, s)h_1[s, \mu \int_0^s m(s, \top)g_1(\top,\ x(\top) - \Gamma_1(\top))d\top]ds|| \\
&= 0, \text{ from } (3.1.1).
\end{aligned}$$

Cela montre que la paire $\{A, S\}$ est faiblement compatible, De même façon $\{B, T\}$ est aussi faiblement compatible.

Par conséquent, toutes les conditions de notre théorème 2.2.1 sont vérifiées et la solution de l'équation (3.1.1) existe.

Enfin, nous montrons l'unicité de la solution, soit $v(t) \in L[0, \infty[$ une autre solution de (3.1.1), puis par ($C_0$)–($C_4$), nous avons

$$\begin{aligned}\|u(t)-v(t)\| &\leq \int_0^\infty |w(t,u(t))-w(t,v(t))+\mu\int_0^t m(t,s)(g_1(s,u(s))-g_2(s,v(s)))ds \\ &+\lambda\int_0^\infty k(t,s)(h_1(s,u(s))-h_2(s,v(s)))ds|dt \\ &\leq (K_0+|\mu|\,M_1K_1+|\lambda|\,M_2K_2)\,\|u(t)-v(t)\| < \|u(t)-v(t)\|\end{aligned}$$

une contradiction,ainsi, la solution est unique. ■

Nous avons démontré dans la preuve du théorème 3.1.1 que toutes les conditions sont vérifiées, et aussi que l'intégrante V-H non linéaire l'équation (3.1.1) du théorème 3.1.1 a une solution unique dans $L[0,\infty[$.

Ci-dessous, nous mettons $A=B$, $S=T$, $L[0,\infty[=BC[0,\infty[$, $g_1=g_2=g$, $h_1=h_2=h$, $\lambda=\mu=1$,dans l'équation (3.1.1) du théorème 3.1.1, pour obtenir l'exemple 3.1.1, ci-dessous, comme une équation intégrale non linéaire réduite (3.1.8).

De toute évidence, pour ces valeurs particulières dans cet exemple, toutes les conditions sont remplies.

Maintenant, par une autre méthode, nous montrerons ci-dessous que, l'équation intégrale non linéaires ont une solution unique dans $BC[0,\infty[$.

Cela va complètement valider notre théorème 3.1.1.

**Exemple 3.1.1** *Examinez les points suivants de l'équation intégrale non linéaire suivant dans $BC[0,\infty[$:*

$$x(t)=w(t,x(t))+\int_0^t m(t,s)g(s,x(s))ds+\int_0^\infty k(t,s)h(s,x(s))ds. \tag{3.1.8}$$

*Soit $P$ et $Q$ deux opérateurs de $BC[0,\infty[$ en lui-même comme définies ci-dessous:*

$$(Px)(t)=\int_0^t m(t,s).x(s)ds \ \text{et}\ (Qx)(t)=\int_0^\infty k(t,s).x(s)ds.$$

*Soient les conditions suivantes remplies où $K_1,K_2$ des constantes:*

*($C_0$): $|w(t,x(t))-w(t,y(t))|\leq r\,|x(t)-y(t)|$, $\forall x(t),y(t)\in B_r$ et $r\geq 0$ une constante.*

*($C_1$): $m(t,s)$ est telle que $Px(t)$ est l'opérateur continue de $BC[0,\infty[$ dans lui-même.*

*($C_2$): $k(t,s)$ est telle que $Qx(t)$ est l'opérateur continue de $BC[0,\infty[$ en lui-même.*

*($C_3$): $|g(t,x(t)) - g(t,y(t))| \leq K_1 |x(t) - y(t)|$, $\forall x(t), y(t) \in B_r$ et $1 > K_1 \geq 0$ .*

*($C_4$): $|h(t,x(t)) - h(t,y(t))| \leq K_2 |x(t) - y(t)|$, $\forall x(t), y(t) \in B_r$ et $1 > K_2 \geq 0$ .*

*Alors il existe une unique solution de (3.1.8) pourvue que $M_1K_1 + M_2K_2 + r < 1$ et $|w(t,x(t))| + M_1 |g(t,0)| + M_2 |h(t,0)| \leq r(1 - M_1K_1 - M_2K_2)$, où $M_1$, $M_2$ constituent des normes de $P$ et $Q$, respectivement.*

**Preuve.** Supposons que les applications $A$, $B$, $S$, $T$ sont définies ci-dessous:

$$(Ux)(t) = w(t,x(t)) + \int_0^s m(t,s)g(s,x(s))ds = w(t,x(t)) + (Ax)(t),$$

$$(Uy)(t) = w(t,y(t)) + \int_0^s m(t,s)g(s,y(s))ds = w(t,y(t)) + (By)(t),$$

$$(Vx)(t) = \int_0^\infty k(t,s)h(s,x(s))ds = (Cx)(t) - w(t,x(t)) = x(t) - (Sx)(t) - w(t,x(t)),$$

$$(Vy)(t) = \int_0^\infty k(t,s)h(s,y(s))ds = (Dx)(t) - w(t,y(t)) = y(t) - (Ty)(t) - w(t,y(t)).$$

Les opérateurs $U$ et $V$ de $B_r$ dans $BC[0,\infty)$ définies ci-dessus sont Banach espaces.
Nous montrons que $(U+V) : B_r \to B_r$ est une contraction.
Car, soit $x \in B_r$ donc

$$|U(x)(t) + V(x)(t)| \leq |w(t,x(t))| + M_1 |g(t,x(t))| + M_2 |h(t,x(t))| .$$

Nous avons les inégalités suivantes

$$|g(t,x(t))| \leq |g(t,x(t)) - g(t,0)| + |g(t,0)| \leq K_1 |x(t)| + |g(t,0)| . \tag{3.1.9}$$

De même,

$$|h(t,x(t))| \leq |h(t,x(t)) - h(t,0)| + |h(t,0)| \leq K_2 |x(t)| + |h(t,0)| . \tag{3.1.10}$$

De (3.1.9) et (3.1.10), nous avons

$$|U(x)(t) + V(x)(t)| \leq |w(t,x(t))| + K_1M_1 |x(t)| + M_1 |g(t,0)| + M_2 |x(t)| + M_2 |h(t;0)| .$$

Comme, par hypothèse

$$|w(t,x(t))| + M_1 |g(t,0)| + M_2 |h(t,0)| \leq 1 - K_1M_1 - K_2M_2,$$

nous avons

$$|U(x)(t) + V(x)(t)| \leq r(1 - K_1M_1 - K_2M_2) + K_1M_1r + K_2M_2r = r.$$

Ainsi $U(x)(t) + V(x)(t) \in B_r$, également

$$\begin{aligned} |U(x)(t) + V(x)(t) - U(y)(t) - V(y)(t)| &\leq r |x(t) - y(t)| + K_1M_1 |x(t) - y(t)| \\ &+ K_2M_2 |x(t) - y(t)| \\ &= (r + K_1M_1 + K_2M_2) |x(t) - y(t)| . \end{aligned}$$

Puisque $(r + K_1M_1 + K_2M_2) < 1$, alors $U + V$ est une contraction sur $B_r$, donc par Banach contraction théorème, il existe une solution unique de (3.1.8).
Ceci valide complètement théorème 3.1.1. ∎

## 3.2 Application aux d'équations fonctionnelles découlant de la programmation dynamique

Dans cette section, comme application pour nos résultats , nous établissons l'existence de la solution à la suivante systèmes d'équations fonctionnelles découlant de la programmation dynamique:

$$\begin{cases} F_i(x) = \sup\limits_{x \in S} \{u(x,y) + H_i(x,y,F_i(T(x,y)))\}, i = 1,2 \\ G_i(x) = \sup\limits_{x \in S} \{u(x,y) + K_i(x,y,G_i(T(x,y)))\}, i = 1,2 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Soit $X$, $Y$ deux espaces de Banach et $W \subset X$, $D \subset Y$ sont états et décisions spatiales respectivement, nous dénotons $B(W)$ ensemble des fonctions bornées définies sur $W$ , muni de la distance suivante:

$$h, k \in B(W), d(h,k) = \sup_{x \in W} |h(x) - k(x)|$$

**Théorème 3.2.1** *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées:*

*($C_1$): $H_i$ et $K_i$ sont bornées.*

*($C_2$) : pour tout $x$, $y \in S$ et $h, k \in B(S)$ il existe une fonction $\psi \in \Psi$ tel que:*

$$|H_1(x,y,h) - K_1(x,y,k)| \leq \psi(\max(d(A_2h, B_2k), d(A_1h, A_2h), d(B_1k, B_2k),$$
$$d(A_2h, B_1k), d(B_2k, A_1h))),$$

*($C_3$) : il existe deux séquences $\{h_n\}$ en $S$ et $h, k \in B(S)$ telle que*

$\lim_{n\to\infty} \sup |A_1h_n - h| = \lim_{n\to\infty} \sup |A_2h_n - h| = 0$ *et* $\lim_{n\to\infty} \sup |A_1A_2h_n - A_1h| = 0.$

*($C_4$) : pour toute suite $\{p_n\}$ en $S$ et $p \in B(S)$ telle que $\lim_{n\to\infty} \sup |p_n - p| = 0$*

*et* $\lim_{n\to\infty} \sup |A_1^2p_n - A_2p| = \lim_{n\to\infty} \sup |A_1A_2p_n - p_2k| = 0.$

*($C_5$) : il existe une suite $\{k_n\}$ en $S$ et $k \in B(S)$*

*telle que* $\lim_{n\to\infty} \sup |B_1k_n - k| = \lim_{n\to\infty} \sup |B_2h_n - k| = 0$ *et*

$\lim_{n\to\infty} \sup |B_1B_2h_n - B_1h| = 0,$ $\lim_{n\to\infty} \sup |A_1A_2h_n - A_1h| = 0.$

*($C_6$) : pour n'importe quelle suite $\{q_n\}$ en $S$ et $q \in B(S)$ telle que $\lim_{n\to\infty} \sup |q_n - q| = 0$*

*et* $\lim_{n\to\infty} \sup |B_1^2q_n - B_2p| = \lim_{n\to\infty} \sup |B_1B_2q_n - B_2q| = 0,$

*où les application $A_i$ et $Bi$ définies par:*

$$A_ih = \sup_{x\in S} \{u(x,y) + H_i(x,y,h(T(x,y)))\},$$

$$B_ik = \sup_{x\in S} \{u(x,y) + K_i(x,y,k(T(x,y)))\}.$$

*Donc les systèmes (3.2.1) ont une solution unique dans $B(W)$.*

**Preuve.** Les systèmes (3.2.1) ont une solution si et seulement si les applications $A_i, B_i, i = 1,2$ ont un point fixe commun.

D'abord, on remarque que la condition ($C_1$) implique que, pour $i = 1,2$ les quatre applications $A_i$ , $B_i$ sont de $B(W)$ en lui-même.

Pour la condition contractive, la condition ($C_2$) donne pour tout $h, k \in B(W)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $y, z \in D$ telle que

$$A_1h < u(x,y) + H_1(x,y,h(T(x,y))) + \varepsilon, \tag{3.2.2}$$

$$B_1h < u(x,z) + K_1(x,z,h(T(x,z))) + \varepsilon, \tag{3.2.3}$$

et comme

$$A_1h \geq u(x,z) + H_1(x,z,h(T(x,z))), \tag{3.2.4}$$

$$B_1h \geq u(x,y) + K_1(x,y,h(T(x,y))), \tag{3.2.5}$$

donc de (3.2.2) et (3.2.5) nous obtenons

$$\begin{aligned} A_1h - B_1k &\leq H_1(x,y,h(T(x,y))) - K_1(x,y,k(T(x,y))) + \varepsilon \\ &\leq \psi(\max(d(A_2h,B_2k), d(A_1h,A_2h), d(B_1k,B_2k), \\ & d(A_2h,B_1k), d(B_2k,A_1h))) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

D'autre part et de (3.2.3) et (3.2.4) nous obtenons

$$\begin{aligned} A_1hB_1k &> K_1(x,y,h(T(x,y))) - h_1(x,y,k(T(x,y))) - \varepsilon \\ &\geq -\psi(\max(d(A_2h,B_2k), d(A_1h,A_2h), d(B_1k,B_2k), \\ & d(A_2h,B_1k), d(B_2k,A_1h))) - \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

par conséquent, (3.2.6) et (3.2.7) impliquent que

$$\begin{aligned} d(A_1h,B_1k) = \sup|A_1h - B_1k| &\leq |H_1(x,y,h(T(x,y))) - K_1(x,y,k(T(x,y)))| + \varepsilon \\ &\leq \psi(\max(d(A_2h,B_2k), d(A_1h,A_2h), d(B_1k,B_2k), \\ & d(A_2h,B_1k), d(B_2k,A_1h))) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme la dernière inégalité est vrai pour tout arbitraire $\varepsilon > 0$, on peut écrire:

$$\begin{aligned} d(A_1h,B_1k) \leq \psi(\max(&d(A_2h,B_2k), d(A_1h,A_2h), d(B_1k,B_2k), \\ &d(A_2h,B_1k), d(B_2k,A_1h))), \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

les conditions ($C_3$) et ($C_4$) impliquent que $\{A_1, A_2\}$ est $A_1-$subsequentiallement continu et $A_1-$compatible de type (E), ainsi que la paire $\{B_1, B_2\}$ est $B_1-$subsequentiallement continu et $B_1-$compatible de type (E) de ($C_5$) et ($C_6$).
Par conséquent, toutes les conditions de corollaire 1.3.1 sont vérifiées, $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ ont un point fixe commun en $B(W)$ et ce point est une solution commune de système d'équations fonctionnelles (3.2.1) [1]. ■

# Bibliographie


[1] BELOUL S., 2008- Some fixed point theorems for weakly subsequentially continuous and compatible of type (E) mappings with an application. Int. J. Nonlinear Anal. Appl. Vol. 6822 (2008): 1-11.

[2] BOUHADJERA H., et FISHER B., 2007- Common Fixed Point Theorems of Meir and Keeler Type for Weakly Compatible Maps. Mathematica Moravica. Vol. 11 (2007): 9–16.

[3] CHOPADE P. U., BONDAR K. L., PATIL S. T., 2010- Common Fixed Point Theorem for Some New Generalized Contractive Mappings. Int. Journal of Math. Analysis. Vol. 4(38): 1881 – 1890.

[4] DONEDDU A., 1979- Topologie. Fonctions réelles d'une variable réelle. Tome 4. Ed: 2. Libraire Vuibert, Paris. 313p.

[5] GERALD J., 1986- Compatible Mappings And Common Fixed Points. Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol. 9(4): 771-779.

[6] [6] G.Jungck,P.P Murthy and Y.J Cho,Compatible mappings of type (A) and common fixed points,Math.Japon,38 (1993)381-390.

[7] [5] G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points, Int. J. Math. & Math. Sci., 9(1986), 771-779.

[8] H. K. Pathak and M. S. Khan, Compatible mappings of (B) and common fixed point theorems of Gregus type, Czechoslovak Math. J., 45 (120) (1995), 685-69.

[9] : H. K. Pathak, Y. J. Cho,S. M. Kang and B. S. Lee,Fixed point theorems for compatible mappings of type (P) and opplication to dynamic programming, Le Matematiche (Fasc.I), 50 (1995), 15-33.

[10] H. K. Pathak, Y.J. Cho, S.M. Khan, B. Madharia, Compatible mappings of type (C) and common fixed point theorems of Gregus type, Demonstratio Math. 31 (3) (1998) 499-518.

[11] H.K. Pathak, M.S. Khan, Compatible mappings of type (B) and common fixed point theorems of Gregus type,Czechoslovak Math. J. 45 (120) (1995) 685–698.

[12] H.K. Pathak, S.N. Mishra and A.K. Kalinde, Common fixed point theorems with applications to nonlinear integral equations, Demonstratio Math., 32, 3, (1999), 547-564.

[13] H.K. Pathak, Y.J. Cho, S. Chang, S.M. Kang, Compatible mappings of type (P) and fixed point theorem in metric spaces and probabilistic metric spaces, Novi Sad J. Math. 26 (2) (1996) 87–109.

[14] J. Matkowski, Fixed point theorems for mappings with a contractive iterate at a point, Proc. Amer. Math. Soc., 62, 2, (1977), 344-348.

[15] LESFARI A., 2014- Notions fondamentales d'analyse mathématique: Résumés de cours, exercices et problèmes corrigés. Ed. Ellipses, Paris. 360p.

[16] M.R. Singh and Y. Mahendra Singh Compatible mappings of type (E) and common fixed point theorems of Meir-Keeler type, International J. Math.Sci. Engg. Appl. 1 (2),(2007) 299 â 315.

[17] Pathak, H. K. and Khan, M. S. Compatible mappings of type (B) and common fixed point theorems of GreguU type, Czechoslovak Math. J. 45 (120), 685–698, 1995.

[18] S.P. Singh, B.A. Meade, On common fixed point theorems, Bull. Austral.Math. Soc. 16 (1977) 49-53.

[19] VERMA R. K., et PATHAK H. K., 2012- Solution Of Nonlinear Integral Equations Via Fixed Point Of Generlized Contractive Condition. MATEMATIQKI VESNIK. Vol. 64(3): 223–231.

**Résumé**

La précédente thèse, on a étudié les applications compatibles et le point fixe dans l'espace métrique. D'abord, on a fourni diverses définitions de base qui seront utilisées dans cette étude, suivi d'une preuve de théorème de point fixe, qui ensuite fourni par leurs applications multiples, correspond à la résolution des équations intégrales non-linéaire et les équations fonctionnelles, qui nous aide à confirmer la présence, l'unicité des solutions sous les conditions des applications comptabilités et certaines de leurs propriétés, avec des exemples.

**Mots-clés:** Espace métrique, suite de Cauchy, l'application contractante, l'applications compatible, point fixe commune.

**Abstract**

In this work, we have studied the compatible applications and the fixed point in the metric space. Firstly, we provided all the necessary definitions which are used later on this work , then we have proved the fixed point theory that we are going to study some of its applications such as solving non-linear integral equations and functional equation, this theory helped us to prove the existence of unique solutions under the conditions of some compatible applications and their characteristics by giving some examples.

**Key words:** metric space, sequence Cauchy, contracting application, compatible application, point fixe common.

**الملخص**

في هذا العمل، قمنا بدراسة التطبيقات التوافقية والنقطة الثابتة في الفضاء المتري، بداية عملنا على تقديم مختلف التعريفات الاساسية التي سيتم استخدامها في ما يلي، من ثم تطرقنا الى برهان نظرية النقطة الثابتة والبعض من تطبيقاتها المتمثلة في حل المعادلات التكاملية غير الخطية والمعادلات الدالية والتي ساعدتنا على اثبات وجود ووحدانية الحلول تحت شروط التطبيقات التوافقية وخصائصها مع اعطاء امثلة.

**الكلمات المفتاحية: فضاء متري،** متتالية كوشي، التطبيق المقلص، التطبيقات التوافقية، **النقطة الثابتة المشتركة.**