



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمّـه لخضر - الوادي



كلية العلوم الدقيقة

قسم الفيزياء

مجال: علوم المادة

شعبة: الفيزياء

مذكرة تخرج ماستر أكاديمي

تخصص: فيزياء الإشعاع

حساب مقطع تشتت كومبتون باستخدام نظرية الاضطراب

من إعداد:

غضبان مختار

أمام لجنة المناقشة المكونة من:

رئيساً	جامعة الوادي	أستاذ محاضر أ	عسكري سهيلة
مناقشاً	جامعة الوادي	أستاذ محاضر ب	علوش آمال
مؤطراً	جامعة الوادي	أستاذ تعليم عالي	سعد الله إبراهيم
مؤطراً	جامعة الوادي	أستاذ محاضر ب	أحميم رشيد

السنة الجامعية: 2024-2025

الإهداء

بسم الله الرحمن الرحيم.

أتشرف بتقديم هذا العمل المتواضع:

- إلى وطني العزيز الجزائر،
- إلى والديا الكريمين،
- إلى زوجتي العزيزة،
- إلى أولادي الأحباء،
- إلى إخوتي وأخواتي الأعزاء،
- إلى أساتذتي الكرام،
- إلى زملائي الكرام،
- إلى أصدقائي الأوفياء،
- وإلى القارئ الكريم.

مختار مختار

الواحد، في: 2025/05/24.

شكر وعرفان

بسم الله الرحمن الرحيم،

الحمد لله أولاً وآخرًا، ظاهرًا وباطنًا،

الحمد له على نعمه التي لا تُعدّ ولا تُحصى،

والشكر موصول له تعالى على عونه وتوفيقه في إتمام هذا العمل المتواضع، الذي ما كان ليبرى النور لولا توفيقه سبحانه وتعالى.

أتقدم بجزيل الشكر وخالص التقدير إلى الأستاذين الفاضلين الأستاذ الدكتور إبراهيم سعد الله والدكتور أحميم رشيد، على ما قدّماه لي من تأطير علمي وتوجيه سديد، ودعم مستمر طوال فترة إنجاز هذا العمل.

كما أتوجّه بخالص الامتنان إلى الدكتورة سهيلة عسكري، رئيسة لجنة المناقشة، والدكتورة آمال علوش بصفتها مناقشة، على ما تكرّمن به من وقت وجهد وقراءة متأنية لهذا العمل.

ولا يفوتني أن أتقدم بالشكر الجزيل إلى كل أفراد طاقم إدارة كلية العلوم الدقيقة عامة، وقسم الفيزياء خاصة، لما يبذلونه من جهود مشكورة في تهيئة بيئة علمية محفزة وداعمة.

كما أخصّ بالشكر والتقدير السادة الأساتذة الكرام على ما قدموه من علم نافع، وتوجيهات قيّمة، وسعة صدر، متمنيًا لهم دوام التوفيق والنجاح في مسيرتهم الأكاديمية والعلمية.

ولا يسعني في هذا المقام إلا أن أتوجّه ببالغ الشكر والامتنان إلى عائلتي الكريمة، التي كانت سندًا متينًا، وداعمًا معنويًا لا يُقدّر بثمن، فكل كلمات الشكر لا توفيهم حقهم.

كما أتقدم بالشكر إلى كل الأصدقاء والزلاء الذين رافقوني في هذا المشوار، وشاركوني المراحل المختلفة من هذه التجربة العلمية، فلهم مني كل التقدير والإحترام.

تضبان مختار

الواحد، في: 2025/05/24.

الفهرس

II.....الإهداء

III.....شكر وعرفان

IV.....الفهرس

VI.....قائمة الأخطال

VII.....جدول المختصرات

1.....مقدمة عامة

4.....الفصل الأول: أساسيات الإشعاع الكهرومغناطيسي وتكميمه

4.....1.1 مقدمة

4.....2.1 معادلات ماكسويل الأربع وأهميتها

4.....1.2.1 قانون جاوس للحقول الكهربائية

4.....1.2.2 قانون جاوس للحقول المغناطيسية

4.....1.2.3 قانون فاراداي للحث

5.....1.2.4 قانون أمبير مع تصحيح ماكسويل

6.....1.3 معادلة الاستمرارية لحفظ الشحنة

6.....1.4 تفاعل جسيم مشحون مع الحقل الكهرومغناطيسي

7.....1.5 الطاقة الكلية لجملة مادة-إشعاع

8.....1.6 تكميم الإشعاع الكهرومغناطيسي

9.....1.6.1 الكمون الشعاعي للإشعاع الكهرومغناطيسي

12.....1.6.2 الطاقة الكامنة للإشعاع الكهرومغناطيسي

12.....1.6.3 تكميم الطاقة الكامنة للإشعاع كهرومغناطيسي

15.....1.6.4 تكميم الأضواء الصرفة

17.....1.7 الخاتمة

19.....الفصل الثاني: معادلة ديراك والمربوبوراه في إطار الكوانتي

19	1.2 المقدمة
19	2.2 مسلّمات ديراك في ميكانيكا الكم
19	2.2.1 المسلمة الأولى "المؤثر ودوره"
19	2.2.2 المسلمة الثانية "القيم الخاصة و القياس"
19	2.2.3 المسلمة الثالثة "دور معاملات النشر"
20	2.2.4 المسلمة الرابعة "المعادلة التحريكية"
20	3.2 معادلة ديراك
24	4.2 الدفع الزاوي لجسيم ذو حركة نسبية
25	5.2 الحركة النسبية لجسيم في حقول كهرومغناطيسية
25	6.2 حل معادلة ديراك لجسيم طليق
36	7.2 الخاتمة

37 الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

37	1.3 المقدمة
37	2.3 تشتت كومبتون
38	3.2.1 تشتت كومبتون وفق القوانين الكلاسيكية
42	3.2.2 تشتت كومبتون وفق القوانين الكمومية
44	3.2.2.1 القيم الخاصة والأشعة الخاصة للمؤثر
44	3.2.2.2 حل معادلة ديراك
47	3.2.2.3 احتمال انتقال الجملة (إلكترون-فوتون) من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية خلال وحدة الزمن
57	3.2.2.4 حساب مقطع كومبتون لتشتت فوتون بإلكترون
74	3.3 المقارنة وتأكيذ النتائج
77	4.3 الخاتمة

79 الخاتمة العامة

81 المراجع

84 الملخص

قائمة الأشكال

الفصل الأول: أساسيات الإشعاع الكهرومغناطيسي وتكميمه

الشكل 1.1: الحقل الكهرومغناطيسي واتجاه انتشارها في الفضاء 11

الفصل الثاني: معادلة ديراك والسينوراه في إطار الكم النسبي

الشكل 2.1: ارتفاع جسيم من حالة طاقة سالبة إلى حالة طاقة موجبة في نظرية ثقب ديراك 35

الشكل 2.2: سرعة جسيم (إلكترون) تصف أحواله معادلة ديراك 35

الشكل 2.3: الطاقة الكلية لإلكترون تصف أحواله معادلة ديراك 36

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

الشكل 3.1: رسم تخطيطي لتجربة تأثير كومبتون 37

الشكل 3.2: التغيير في الطول الموجي للفوتون المتشتت بدلالة زاوية التشتت 41

الشكل 3.3: تغيير شدة الفوتون المتشتت بدلالة زاوية التشتت 41

الشكل 3.4: التغيير في طاقة الفوتون المتشتت بدلالة زاوية التشتت 41

الشكل 3.5: رسم تخطيطي لظاهرة تشتت الضوء $(\hbar k, \hbar \omega)$ بإلكترون 42

الشكل 3.6: رسم تخطيطي للحالة الوهمية المساهمة الأولى 49

الشكل 3.7: رسم تخطيطي للحالة الوهمية المساهمة الثانية 50

الشكل 3.8: التغيير في المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون وفق صيغة كلاين-نيشينا 75

الشكل 3.9: التغيير في المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون وفق نتائج هذه الدراسة 76

الشكل 3.10: مقارنة المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون لهذه الدراسة مع نتائج صيغة كلاين-نيشينا 77

جدول المختصرات

		الأحرف اللاتينية	
وحدته في النظام الدولي	وحدته في النظام الغاوسي	تعريفه	المختصر
J	erg	مؤثر ديراك لطاقة جسيم نسبي طليق	H_{D0}
T.m	G.cm	المرافق المركب للكمون الشعاعي	\vec{A}^*
/	/	منقول المرافق العقدي للمؤثر الهيرميتي \hat{A}	\hat{A}^\dagger
T.m	G.cm	الكمون الشعاعي للنمط (λ)	\vec{A}_λ
T.m	G.cm	المرافق العقدي للكمون الشعاعي ذو النمط (λ)	\vec{A}_λ^*
T.m	G.cm	الكمون الشعاعي للنمط (μ)	\vec{A}_μ
kg.m ² .s ⁻¹	g.cm ² .s ⁻¹	الدفع الزاوي الكلي	\vec{J}_{am}
kg.m.s ⁻²	g.cm.s ⁻²	المشتقة الزمنية للدفع الخطي القانوني المدرك	\dot{P}_λ
m.s ⁻¹	m.s ⁻¹	المشتقة الزمنية لسعة الموجة المدركة ذات النمط (λ)	\dot{Q}_λ
m ⁻¹	cm ⁻¹	شعاع الموجة للفوتون المنتشتت	\vec{k}'
kg.m.s ⁻¹	g.cm.s ⁻¹	مؤثر الدفع الخطي الحركي	\vec{p}
kg.m.s ⁻¹	g.cm.s ⁻¹	المركبة الصفيرية لمؤثر رباعي الدفع الخطي	p_0
kg.m.s ⁻²	g.cm.s ⁻²	المشتقة الزمنية للدفع الخطي القانوني المرافق	\dot{p}_λ
m.s ⁻¹	m.s ⁻¹	المشتقة الزمنية لسعة الموجة (السرعة القانونية) ذات النمط (λ)	\dot{q}_λ
m.s ⁻¹	m.s ⁻¹	المرافق العقدي للسرعة القانونية غير المدركة (\dot{q}_λ)	\dot{q}_λ^*
m.s ⁻¹	m.s ⁻¹	المشتقة الزمنية لسعة الموجة ذات النمط (μ)	\dot{q}_μ
kg.m.s ⁻¹	g.cm.s ⁻¹	مؤثر الدفع الخطي القانوني	\vec{p}
J	erg	مؤثر طاقة يصف الحالة المستقرة للجلمة مادة-أضواء	H_0
J	erg	مؤثر ديراك لطاقة الجسيم النسبي	H_D
J	erg	مؤثر طاقة المادة الصرفة	H^P
J	erg	مؤثر طاقة الجلمة تفاعل مادة-أضواء	$\hat{H} = V$
J	erg	مؤثر طاقة الأضواء الصرفة	\hat{H}^R
/	/	المؤثر الخطي الهيرميتي الذي يوافق الكمية الملاحظة (A)	A
N	dyn	القوة المؤثرة على الجسيم المشحون	\vec{F}

جدول المختصرات

J	erg	مؤثر طاقة الأجسام المادية الصرفة للجملة	H^P
J	erg	مؤثر طاقة ممتزج (مادة-إشعاع)	H^{PR}
J	erg	مؤثر طاقة الإشعاع الكهرومغناطيسي الصرف للجملة	H^R
T.m	G.cm	الكمون الشعاعي	\vec{A}
T (Tesla)	Gauss (G)	الحقل المغناطيسي	\vec{B}
V.m ⁻¹	statV/cm	الحقل الكهربائي	\vec{E}
J	erg	الطاقة الكلية لجملة مادة-إشعاع	E_T
J	erg	الطاقة النهائية للجملة	E_f
J	erg	الطاقة الابتدائية للجملة	E_i
J	erg	الطاقة الحركية للجسيم المتحرك	E_k
J	erg	طاقة الفوتون	E_p
J	erg	الطاقة الكامنة للجسيم المتحرك	$E_p(\vec{r})$
J	erg	الطاقة الكلية للحركة النسبية لجسيم طليق كتلته (m)	E_p
A.m ⁻²	statA.cm ⁻²	كثافة التيار الكهربائي	\vec{j}
kg.m ² .s ⁻¹	g.cm ² .s ⁻¹	الدفع الزاوي المداري	\vec{L}
/	/	مؤثر العدد	N_λ
kg.m.s ⁻¹	g.cm.s ⁻¹	الدفع الخطي القانوني المدرك	P_λ
m	cm	سعة الموجة المدركة ذات النمط (λ)	Q_λ
kg.m ² .s ⁻¹	g.cm ² .s ⁻¹	الدفع الزاوي الذاتي	\vec{S}
s ⁻¹	s ⁻¹	احتمال الانتقال الكمومي	T_i^f
/	/	مؤثر الرفع	a^\dagger
J.s	erg.s	معامل التناسب لّف الذاتي	a_s
/	/	معاملات عقدية (أعداد مركبة)	c_n
m ⁻¹	cm ⁻¹	شعاع الموجة، أو شعاع الموجة للفوتون الوارد	\vec{k}
/	/	أعداد صحيحة	$n_{\lambda\ell}$
kg.m.s ⁻¹	g.cm.s ⁻¹	الدفع الحركي	\vec{p}
kg.m.s ⁻¹	g.cm.s ⁻¹	الدفع الخطي القانوني (الدفع المعمم) المرافق	p_λ
m	cm	سعة الموجة (الاحداثية القانونية أو المعممة) للنمط (λ)	q_λ
/	/	معامل نشر يتعلق بالزمن فقط	$q_\lambda(t)$
m	cm	المرافق العقدي لسعة الموجة (q_λ)	q_λ^*

جدول المختصرات

m	cm	سعة الموجة (الاحداثية القانونية غير المدركة) للنمط (μ)	q_μ
m	cm	شعاع الموضع	\vec{r}
m	cm	المركبات المكانية غير التوافقية للموضع	x^k
m	cm	المركبات المكانية التوافقية	x_k
m	cm	ضد رباعي الموضع	x^μ
m	cm	رباعي الموضع	x_μ
kg.m.s ⁻¹	g.cm.s ⁻¹	الدفع الخطي القانوني (الكلي)	\vec{p}
kg.m.s ⁻¹	g.cm.s ⁻¹	المركبات المكانية غير التوافقية للدفع الخطي القانوني	p^k
kg.m.s ⁻¹	g.cm.s ⁻¹	المركبات المكانية التوافقية للدفع الخطي القانوني	p_k
kg.m.s ⁻¹	g.cm.s ⁻¹	ضد رباعي الدفع الخطي القانوني	p^μ
kg.m.s ⁻¹	g.cm.s ⁻¹	رباعي الدفع الخطي القانوني	p_μ
/	/	مصفوفات جاما	γ^μ
/	/	ثابت نظم السبينور	N
J ⁻¹	erg ⁻¹	دالة جرين	G
m	cm	ضلع العلبة المكعبة	L
m ²	cm ²	السطح المحيط بالحجم V	S
V	statV	الطاقة الكامنة المخزنة في الحقل الكهرومغناطيسية	U
m ³	cm ³	الحجم المتكامل عليه	V
V	statV	الجهد الكهرومغناطيسي	$V(\vec{r})$
/	/	مؤثر الخفض	a
m.s ⁻¹	cm.s ⁻¹	سرعة الضوء في الفراغ	c
m ²	cm ²	عنصر السطح	$d\vec{S}$
C	statC	الشحنة الأولية للجسيم	e
kg	g	كتلة الشحنة	m
/	/	العدد الكمي الرئيسي	n
C	statC	شحنة الجسيم	q
/	/	حل سبينور ديراك في فضاء الموضع	$u(\vec{r}, t)$
/	/	حل سبينور ديراك في فضاء الدفع الخطي القانوني والطاقة	$u(\vec{P}, E)$
m.s ⁻¹	cm.s ⁻¹	سرعة الجسيم	v
V	statV	الطاقة الكامنة الكهرومغناطيسية المعممة	\mathcal{U}

جدول المختصرات

/	/	مصفوفة الواحدية من الرتبة (2 × 2)	II
			الأحرف اليونانية
m	cm	الطول الموجي للفوتون بعد التشتت	λ'
H.m ⁻¹	/	نفاذية الفراغ	μ_0
F.m ⁻¹	/	سماحية الفراغ	ϵ_0
sr	sr	عنصر الزاوية الصلبة	$d\Omega$
m ² .sr ⁻¹	cm ² .sr ⁻¹	المقطع التفاضلي للتصادم	$d\sigma$
rad	rad	زاوية التشتت	θ
m	cm	الطول الموجي الابتدائي للفوتون	λ
C.m ⁻³	statC.cm ⁻³	كثافة الشحنة الكهربائية	ρ
m ²	cm ²	المقطع الكلي للتصادم	σ
/	/	شعاع وحدة الاستقطاب	$\vec{\epsilon}$
rad.s ⁻¹	rad.s ⁻¹	التواتر الزاوي، أو التواتر الزاوي للفوتون الوارد	ω
rad.s ⁻¹	rad.s ⁻¹	التواتر الزاوي للفوتون المتشتت	ω'
rad	rad	فرق الطور	δ
V	statV	الكمون السلمي	φ
/	/	معامل لورنتز	γ
J	erg	لاغرانجيان النظام	\mathcal{L}
/	/	موثر دالامبيرتيان	\square
/	/	دلتا كرونير	δ
m.s ⁻¹	cm.s ⁻¹	سرعة طور الموجة المستوية	v_λ
/	/	حالة الاستقطاب	σ
m ^{-3/2}	cm ^{-3/2}	دالة موجة ديراك	ψ
m ^{-3/2}	cm ^{-3/2}	مرافق دالة موجة ديراك	ψ^\dagger
/	/	الأشعة الذاتية	$ \psi\rangle, \psi_n\rangle$
/	/	فضاء هيلبرت	\mathcal{H}
/	/	رمز ليفي - سيفيتا	ϵ_{ijk}
/	/	مصفوفات باولي	σ_k
/	/	مصفوفات ديراك	$\vec{\alpha}, \alpha_k, \beta$
/	/	المركبات المكانية لمصفوفة جاما	γ^k

جدول المختصرات

Hz	Hz	تردد الموجة الكهرومغناطيسية	ν
m	cm	طول موجة كومبتون المختزلة	λ_{ce}
Hz	Hz	تردد موجة كومبتون المختزلة	ν_{ce}
m ³	cm ³	دالة دلتا ديراك لحفظ الدفع	$\delta(\vec{k} - \vec{k}')$
J ⁻¹	erg ⁻¹	دالة دلتا ديراك لحفظ الطاقة	$\delta(E_i - E_f)$
/	/	دلتا كرونير لتعامد مؤشر اللف	$\delta_{s,s'}$
J	erg	مؤثر سلسلة الاضطراب	Γ
J	erg	عنصر مصفوفة الاضطراب	Γ_{fi}
J	erg	كمية لا نهائية صغرى	δ_G
S.m ⁻¹	s ⁻¹	الموصلية الكهربائية	σ_c

مؤشرات سفلية وأسس

/	/	المركبات الكارتيزية	ℓ
/	/	مؤشرات وهمية تستخدم للجمع	i, j, k
/	/	مؤثر	op
/	/	مؤشرات السبينور (من 1 إلى 4)	s, s'
/	/	الاحداثيات الكارتيزية للمركبات الكارتيزية (ℓ)	x, y, z
/	/	مؤشر الشحنة	α
/	/	مؤشر الشحنة	β
/	/	مؤشرات النمط	λ, λ', μ

مقدمة عامة

مفهوم التشتت اصطلاحاً

التشتت هو عملية يُعاد فيها توجيه الجسم، الجسم، أو الموجة نتيجة تصادم أو تفاعل مع وسط آخر، مما يؤدي إلى تغيير في المسار والطاقة والتوزيع المكاني [1]، حيث يمكن أن تحدث هذه الظاهرة في سياقات مختلفة، مثل الفيزياء [2, 3]، حيث تحرف الجسيمات أو الموجات بسبب الاصطدامات أو التفاعلات، أو في مجالات أوسع مثل الرياضيات والإحصاء [4]، حيث تشير إلى تشتت أو إعادة توزيع العناصر في نظام ما [5, 6].

مفهوم التشتت في الفيزياء

التشتت هو إحدى النتائج للظاهرة الفيزيائية التي تعرف بالتصادم. في الفيزياء، يشير مصطلح التصادم إلى تفاعل مفاجئ بين مادتين أو أكثر مثل الأجسام، أو الجسيمات أو الأمواج، حيث يتضمن تبادل القوة والدفع (الزخم) [7]. ومن الأمثلة على ذلك اصطدام الكرة بالحائط، اصطدام كرات البلياردو ببعضها البعض، اصطدام المطرقة بمسمار، واصطدام السيارات في حادث. وتعتمد نتيجة التصادم على طبيعة المواد المشاركة، والقوة المطبقة، ومدة التلامس. ويمكن تصنيف التصادم على أنه تصادم مرن [8, 9]، حيث يتم حفظ الطاقة الحركية الكلية للنظام بعد التصادم (على سبيل المثال: ارتداد الكرة عن الحائط)، أو التصادم اللين "أو التصادم غير المرن" [5, 10]، حيث يتم فقدان بعض أو كل الطاقة الحركية الكلية للنظام بعد التصادم، غالباً ما يحدث هذا الفقدان على شكل حرارة أو تشوه (على سبيل المثال، حوادث السيارات). كتنويه، يحدث التصادم المرن تماماً، حيث لا يتم فقدان أي طاقة حركية، على المستوى الذري فقط، في حين يؤدي التصادم اللين تماماً إلى أقصى حد من فقدان الطاقة، وتقع معظم التصادمات في العالم الحقيقي بين هذين النقيضين، حيث تظهر درجات متفاوتة من المرونة وتبديد الطاقة [11]. يمكن أن يؤدي التصادم إلى نتائج مختلفة، مثل الانتشار، التشتت (انحراف الجسيمات أو الموجات)، الإشعاع، الاندماج، الانبعاث، الامتصاص، التشوه في الأجسام العيانية (المايكروسكوبية)، والتفاعلات الكمومية مثل الفناء أو تبادل القوة [12, 13].

في السياق الفيزيائي، يشير التشتت إلى انحراف الجسيمات أو الموجات أو الإشعاع نتيجة تفاعلها مع وسط أو سطح أو جسيم آخر، مما يؤدي غالباً إلى تغيير في الاتجاه، الطاقة، والدفع. هناك العديد من الأشكال للتشتت [14, 15]، ومنها التشتت المرن، حيث يتم حفظ الطاقة (على سبيل المثال، تشتت كومبتون، تشتت رايلي، وتشتت رودرفورد) [15, 16]، والتشتت اللين، حيث يتم نقل الطاقة إلى أو من النظام المتفاعل (على سبيل المثال، تشتت رامان) [15, 16]. تشمل التصنيفات الأخرى التشتت المتماسك، حيث تظل الموجات المتفرقة في الطور (على سبيل المثال، تشتت براج)، والتشتت غير المتماسك، حيث تكون الموجات خارج الطور (على سبيل المثال، التشتت المنتشر)، والتشتت المتعدد، الذي ينطوي على انحرافات متتالية في الوسائط الكثيفة.

مفهوم تشتت كومبتون

يشير تأثير كومبتون إلى تشتت الفوتون عند الاصطدام بجسيم مشحون حر، عادةً إلكترون، مما يؤدي إلى انخفاض في طاقة الفوتون (أو زيادة في الطول الموجي) [17]. تنطبق هذه الظاهرة على الإشعاع الكهرومغناطيسي عالي الطاقة، مثل أشعة جاما والأشعة السينية [3, 18]، وتتضمن تصادمًا مرئيًا حيث يتم نقل جزء من طاقة الفوتون إلى الإلكترون. يعتمد التغيير في الطول الموجي، المسمى تحول كومبتون، على زاوية التشتت θ ، وقد تم اكتشافه من طرف العالم الفيزياء الأمريكي "آرثر هولبي كومبتون" في عام 1923 [19]، الذي حصل على جائزة نوبل في الفيزياء في عام 1927، هذا التأثير الذي أظهر الطبيعة الموجية-الجسيمية للضوء [20, 21]، وهي إضافة حاسمة لفهم ميكانيكا الكم [22]. على عكس مفهوم التشتت الكلاسيكي للضوء والذي يعرف بتشتت تومسون [23, 24]، والذي يفترض وجود موجات كهرومغناطيسية وجسيمات مشحونة [25]، يتطلب تأثير كومبتون أن يتصرف الفوتون ككم طاقة منفصل لتفسير التغيرات الملحوظة في الطول الموجي.

قدمت تجارب كومبتون أيضًا أدلة حاسمة على حفظ الطاقة والدفع في تفاعلات الفوتون والإلكترون. وقد دحض التحقق من صحة هذا المبدأ، الذي دعمه فيزيائيون مثل بوتي وجيجر، النظريات الكلاسيكية مثل نموذج بور-كرامرز-سليتر "نموذج بي كي إس" [26]. وكان لتأثير كومبتون أهمية كبيرة لتمييزه عن الظواهر الأخرى، مثل ظاهرة التأثير الكهروضوئي، حيث تطرد الفوتونات منخفضة الطاقة الإلكترونيات، وظاهرة إنتاج الأزواج، حيث تخلق الفوتونات عالية الطاقة أزواجًا من الإلكترون والبوزيترون. وأثبتت التجارب حينها أن الأشعة السينية المشتتة لها أطوال موجية أطول من الأشعة الواردة، وهو ما يتعارض مع التوقعات الكلاسيكية، ويتطلب نمذجة الضوء كجسيم وموجة. جنبًا إلى جنب مع عمل أينشتاين السابق على التأثير الكهروضوئي، عزز تأثير كومبتون الطبيعة المزدوجة للضوء ووضع الأساس للفيزياء الكمومية الحديثة.

إشكالية الدراسة

يُعد تشتت الضوء بواسطة الإلكترونات ظاهرة أساسية تُجسّد التداخل العميق بين ميكانيكا الكم والفيزياء النسبية، وتوفّر فهمًا دقيقًا لطبيعة التفاعلات بين المادة والإشعاع. تُركّز هذه الدراسة على التحليل الكمي لتشتت الفوتونات عالية الطاقة عند تفاعلها مع الإلكترونات في المجال الكهرومغناطيسي للنواة، مع دمج الاعتبارات النسبية لحركة الإلكترون المتقهر. ويتم ذلك باستخدام نظرية الاضطراب المتعلق بالزمن، بما يسمح بوصف ديناميكيات تبادل الطاقة والدفع بدقة. وتُعدّ ظاهرة كومبتون أحد الأمثلة البارزة على تشتت الفوتونات، إذ يحدث فيها تصادم مرن بين فوتون عالي الطاقة وإلكترون شبه حر، يُنجم عنه زيادة ملحوظة في الطول الموجي للفوتون المنتشتت ($\Delta\lambda$)، وتعتمد قيمتها على كل من الطاقة الابتدائية للفوتون الوارد (E_p) وزاوية التشتت θ . أما في الحالات غير النسبية، حيث تكون طاقة الفوتون منخفضة مقارنة بطاقة سكون الإلكترون، يتلاشى تأثير كومبتون تدريجيًا ليقترّب من تشتت تومسون، الذي يتميز بتفاعل مرّن وتغير طفيف في الطاقة. ومن خلال تحديد القيم والأشعة

الخاصة للنظام، سيتم تحليل التوزيع الزاوي للطاقة الناتجة عن الفوتونات المتشتتة، مما يتيح وصفاً معمقاً للبنية الطيفية الناتجة عن التفاعل. وتُختتم الدراسة بمقارنة النتائج النظرية المُحصَل عليها مع الصيغة الكلاسيكية المعروفة بصيغة كلاين-نشيما، ما يبرز أصالة هذا العمل في دمج المتكامل بين المفاهيم الكمية والنسبية والأدوات الرياضية المتقدمة لتفسير هذه الظاهرة الفيزيائية الجوهرية.

خطة البحث

في هذا العمل، قد تم إتباع خطوات جد دقيقة لضمان تطور منطقي وتدرجي للمفاهيم المؤدية إلى فهم شامل لتشتت كومبتون ضمن إطار كمي نسبي. البحث سيتم افتتاحه بمقدمة عامة تحوي دوافع الدراسة وأهدافها وسياقها العلمي، بينما يرسى الفصل الأول المعرفة الأساسية من خلال عرض الأوصاف الكلاسيكية والكمية للإشعاع الكهرومغناطيسي، بما في ذلك تكيم المجال. بناءً على ذلك، يقدم الفصل الثاني مبادئ ميكانيكا الكم النسبية، مع استكشاف مفصل لمعادلة ديراك، وطبيعة السبينور، والتنبؤ النظري للجسيمات المضادة، مما يوفر الأدوات الرياضية والفيزيائية اللازمة لتحليل التفاعلات عالية الطاقة. وأخيراً، الفصل الثالث، وهو لب الدراسة، حيث سيتم تطبيق الأدوات التي سيتم التطرق لها في الفصلين الأول والثاني على حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون، موضحاً التفاعل بين النظرية والكميات القابلة للقياس. في النهاية، سوف يختتم هذا العمل بخاتمة عامة تلخص أهم النتائج والمخرجات المستفادة، وتقتراح اتجاهات محتملة للبحوث المستقبلية.

الفصل الأول: أساسيات الإشعاع الكهرومغناطيسي وتكميمه

1.1. مقدمة

جوهر هذا الفصل هو تكميم الإشعاع الكهرومغناطيسي الصرف، وهو مفهوم أساسي في فيزياء الإشعاع، حيث يتيح فهمًا أدق لآلية انبعاث وامتصاص الفوتونات والتفاعلات الأساسية بين الضوء والمادة. كما يلعب دورًا محوريًا في تطوير النماذج النظرية، مما يساعد على تفسير الظواهر الكمومية المعقدة وتعزيز دقة التنبؤات الفيزيائية. إضافة إلى ذلك، فإن التطبيقات العملية لهذا التكميم تمتد إلى المجالات التصنيعية، حيث يسهم في ابتكار تقنيات متقدمة في البصريات الكمومية، والفوتونيات، والحوسبة الكمومية، مما يمهد الطريق لتطوير أجهزة أكثر كفاءة ودقة في مختلف الصناعات الحديثة.

2.1. معادلات ماكسويل الأربع وأهميتها

معادلات ماكسويل تُعد الركيزة الأساسية لفهم سلوك المجالات الكهربائية والمغناطيسية وانتشار الموجات الكهرومغناطيسية وتفاعلها مع المادة [27, 28]، مما يجعلها ذات صلة مباشرة بظواهر التشتت. في هذه الدراسة، ستُصاغ المعادلات ضمن نظام الوحدات الغاوسي، لما يتميز به من تبسيط للحسابات النظرية في سياق الديناميكا الكهربائية الكلاسيكية والنسبية.

1.2.1 قانون جاوس للحقول الكهربائية

ينص هذا القانون على أن التدفق الكهربائي الكلي عبر سطح مغلق يتناسب مع الشحنة الكلية المحصورة داخل هذا السطح.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

2.2.1 قانون جاوس للحقول المغناطيسية

ينص هذا القانون على أن التدفق المغناطيسي الكلي عبر سطح مغلق يساوي دائمًا صفرًا.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.1)$$

3.2.1 قانون فاراداي للحث

ينص هذا القانون على أن تغيّر التدفق المغناطيسي عبر حلقة مغلقة يولد قوة دافعة كهربائية داخلها، وهو الأساس الفيزيائي

لعمل المولدات الكهربائية والمحولات والمُحجّات، حيث يُحوّل التغيّر في المجال المغناطيسي إلى طاقة كهربائية.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.1)$$

1.2.4 قانون أمبير مع تصحيح ماكسويل

ينص هذا القانون على أن المجال المغناطيسي حول أي حلقة مغلقة لا ينتج فقط عن تيار كهربائي ولكن أيضاً عن مجال كهربائي متغير (تيار الإزاحة). وقد قدم ماكسويل هذا التصحيح لجعل المعادلات متسقة مع مبدأ حفظ الشحنة وأدى إلى التنبؤ بالموجات الكهرومغناطيسية.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \left(4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (4.1)$$

يمكن التعبير عن الحقل الكهربائي \vec{E} والحقل المغناطيسي \vec{B} بدلالة الكمون السلمي φ والكمون الشعاعي \vec{A} على النحو

التالي:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5.1)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (6.1)$$

إذا كانت المسألة التي قيد الدراسة تتضمن وسط خال من الشحنات المترسبة " $\rho = 0$ " وخال كذلك من كثافة تيارات

" $\vec{J} = 0$ "، الأمر الذي يجعل الكمون السلمي معدوماً " $\varphi = 0$ "، عندها يحقق الكمون الشعاعي \vec{A} العبارتين الآتيتين:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (7.1)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (8.1)$$

يطلق على العبارة (7.1) إسم معيار كولوم "أو المعيار العرضي"، الذي يبسط معادلات ماكسويل عن طريق فصل

الكمون السلمي عن الكمون الشعاعي، وأما العبارة (8.1) فتمثل معادلة موجة للكمون الشعاعي تنتشر في الفراغ بالسرعة c .

كذلك، ينص قانون أوم على أن كثافة التيار \vec{J} في ناقل تتناسب طردياً مع المجال الكهربائي \vec{E} .

$$\vec{J} = \sigma_c \vec{E} \quad (9.1)$$

الفصل الأول: أساسيات الإشعاع الكهرومغناطيسي وتكميمه

حيث σ_c هي الموصلية الكهربائية.

3.1 معادلة الاستمرارية لحفظ الشحنة

تعتبر هذه المعادلة عن حفظ الشحنة الكهربائية، حيث تنص على أن معدل تغير كثافة الشحنة في منطقة ما يساوي التباعد السلبي لكثافة التيار.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (10.1)$$

4.1 تفاعل جسيم مشحون مع الحقل الكهرومغناطيسي

تخضع حركة جسيم مشحون q في المجال الكهرومغناطيسي لقوة لورنتز النسبية، حيث تبين عبارتها كيفية تحرك الجسيم المشحون عندما يتعرض لقوى كهرومغناطيسية، حيث $q\vec{E}$ هي القوة الكهربائية التي تعمل على تسريع الجسيم في اتجاه الحقل \vec{E} ، بينما $\frac{1}{c}q\vec{v} \times \vec{B}$ هي القوة المغناطيسية التي تعمل بشكل عمودي على كل من السرعة والمجال المغناطيسي، وبما أن القوة المغناطيسية تكون دائماً عمودية على السرعة \vec{v} ، فإنها لا تغير سرعة الجسيم q ولكن تغير اتجاهه فقط، مما يؤدي إلى حركة دائرية أو حلزونية بناءً عن مركبات السرعة الأولية [29, 30].

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (11.1)$$

بتعويض الحقلين الكهربائي \vec{E} والمغناطيسي \vec{B} بالمعادلتين (5.1) و (6.1)، على التوالي، في المعادلة (11.1)، وبعد إجراء مجموعة من الحسابات، يتم الحصول على معادلة حركة الجسيم المشحون q في الحقل الكهرومغناطيسي بدلالة الكومونين السلمي φ والشعاعي \vec{A} .

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left(\vec{p} + \frac{1}{c} q \vec{A} \right)}_{\vec{P}} = -q \vec{\nabla} \underbrace{\left(\varphi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right)}_u \quad (12.1)$$

وفقاً للمعادلة (12.1)، يمكن كتابة معادلة حركة الجسيم المشحون q في الحقل الكهرومغناطيسي كالآتي:

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = -q \vec{\nabla} u \quad (13.1)$$

الفصل الأول: أساسيات الإشعاع الكهرومغناطيسي وتكميمه

فيما يخص \vec{P} الموضح في المعادلة (13.1)، فهو الدفع الخطي القانوني، المعروف أيضاً باسم الدفع الخطي الكلي، للجسيم المشحون q في الحقل الكهرومغناطيسي، وهو يجمع بين كل من الدفع الحركي \vec{p} والدفع الكموني $\frac{1}{c}q\vec{A}(\vec{r})$ ، ويظهر في ميكانيكا الهاملتوني وميكانيكا لاغرانج [29, 30]. كذلك، يتم تعريفه كالاتي:

$$\vec{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} \quad (14.1)$$

حيث \mathcal{L} هو لاغرانجيان النظام، وصيغته هي:

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{P}, t) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{q}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r})) - q\varphi(\vec{r}) \quad (15.1)$$

كذلك، يتم اشتقاق هاملتوني النظام H من اللاغرانجيان \mathcal{L} باستخدام تحويل ليجيندر، حيث يتم تعريف الهاملتوني كالاتي:

$$H = \vec{P} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{1}{c}q\vec{A}(\vec{r}) \right)^2 + q\varphi(\vec{r}) \quad (16.1)$$

ومنهُ، تُكْتَبُ معادلات الهاملتوني للحركة كالاتي:

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i}; \quad \dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad (17.1)$$

5.1 الطاقة الكلية لجملة مادة-إشعاع

الطاقة الكلية E_T لجملة مادة-إشعاع هي [30]:

$$E_T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} \left(\vec{P}_{\alpha} - \frac{1}{c}q_{\alpha}\vec{A}(\vec{r}_{\alpha}) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha(\neq\beta)} \frac{q_{\alpha}q_{\beta}}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}|} + \sum_{\alpha} q_{\alpha}\varphi(\vec{r}_{\alpha}) + E^R \quad (18.1)$$

وهي عبارة عن مجموع كل من الطاقة الحركية لجملة الجسيمات (مثل الإلكترونات والأيونات)، والطاقة الكامنة الناشئة عن القوى البينية بين هذه الجسيمات، وطاقة كمون الجملة التي تتلقاها من حقول خارجية كمونها $\varphi(\vec{r}_{\alpha})$ (إن وجدت)، وأخيراً، طاقة الإشعاع E^R .

$$E^R = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (E^2 + B^2) \quad (19.1)$$

الفصل الأول: أساسيات الإشعاع الكهرومغناطيسي وتكميمه

علما أن التكامل يجرى على كل الفضاء في العبارة (19.1).

وبعد إجراء مجموعة من الحسابات، يتم الحصول على عبارة الطاقة الكلية لجملة مادة-إشعاع، وتُكتب كالتالي:

$$E_T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} \vec{P}_{\alpha}^2 + \sum_{\alpha} \left(-\frac{1}{m_{\alpha}c} q_{\alpha} \vec{A}(\vec{r}_{\alpha}) \cdot \vec{P}_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}c^2} \vec{A}^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha(\neq\beta)} \frac{q_{\alpha}q_{\beta}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}|} + \sum_{\alpha} q_{\alpha} \varphi(\vec{r}_{\alpha}) + E^R \quad (20.1)$$

ومنه، يمكن كتابة العلاقة (20.1) على شكل مؤثر طاقة الجملة دون تقريب كالتالي:

$$H = H^P + H^R + H^{PR} \quad (21.1)$$

فيما يخص المؤثر H^P ، فهو يمثل مؤثر طاقة الأجسام المادية الصرفة للجملة، أي وكأن الجملة خالية من الإشعاع الكهرومغناطيسي أصلاً.

$$H^P = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} \vec{P}_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha(\neq\beta)} \frac{q_{\alpha}q_{\beta}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}|} + \sum_{\alpha} q_{\alpha} \varphi(\vec{r}_{\alpha}) \quad (22.1)$$

أما المؤثر H^{PR} ، فهو يمثل مؤثر طاقة ممتزج من مؤثر طاقة الأجسام المادية \vec{P}_{α} ، ومؤثر طاقة الإشعاع الكهرومغناطيسي

$\vec{A}(\vec{r}_{\alpha})$.

$$H^{PR} = \sum_{\alpha} \left(-\frac{1}{m_{\alpha}c} q_{\alpha} \vec{A}(\vec{r}_{\alpha}) \cdot \vec{P}_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}c^2} \vec{A}^2 \right) \quad (23.1)$$

وأما المؤثر H^R ، فهو يمثل مؤثر طاقة الإشعاعات الكهرومغناطيسية (الأضواء) الصرفة، أي وكأن الجملة خالية من أي

أجسام مادية، وسيتم تحديده لاحقاً في الجزء "4.6.1 تكميم الأضواء الصرفة".

6.1. تكميم الإشعاع الكهرومغناطيسي

إن تعويض علاقتي الحقل الكهربائي (5.1) والحقل المغناطيسي (6.1) في المعادلة (4.1)، يُمكن من الحصول على

العبارة الآتية:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{1}{c} \left(4\pi \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right) \quad (24.1)$$

وبعد التحليل، تُصَبِّحُ العبارة (24.1) على الشكل الآتي:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (25.1)$$

كذلك، بتعويض علاقة الحقل الكهربائي (5.1) في المعادلة (1.1)، يتم الحصول على ما يلي:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 4\pi \rho(\vec{r}, t) \quad (26.1)$$

وبعد التحليل، تُصَبِّحُ العبارة (26.1) كالآتي:

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -4\pi \rho(\vec{r}, t) \quad (27.1)$$

ولفصل الكمون الشعاعي عن الكمون السلمي في العبارتين (25.1) و (27.1)، يَتَّوَجَّبُ تعريف معيار لورينز كما يلي:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (28.1)$$

بتطبيق معيار لورينز على المعادلة (25.1)، يتم الحصول على معادلة الموجة للكمون الشعاعي \vec{A} ، ونكتب كالآتي:

$$\square \vec{A} = \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (29.1)$$

أما معادلة الموجة للكمون السلمي، فيتحصل عليها بتطبيق معيار لورينز على المعادلة (27.1).

$$\square \phi = \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho(\vec{r}, t) \quad (30.1)$$

علما أنّ " $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ " هو مؤثر دالامبيرتيان.

1.6.1 الكمون الشعاعي للإشعاع الكهرومغناطيسي

الفصل الأول: أساسيات الإشعاع الكهرومغناطيسي وتكميمه

لتحديد صيغة الكمون الشعاعي للإشعاع الكهرومغناطيسي الصفر (الضوء)، من الضروري تكميم المعادلة (8.1) مع

مراعاة اعتبارات المجال الكهرومغناطيسي في إطار معيار كولوم " $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ". عليه، سيتم تكميم الكمون الشعاعي \vec{A} وفقاً للفرضيات التالية:

- سَيُعْتَبَرُ الإشعاع الكهرومغناطيسي محصور داخل علبة مكعبة الشكل ضلعها L أكبر بشكل ملحوظ من مقاييس الطول المميزة للجoule، وهذا يضمن أن السلوك الفيزيائي للنظام يظل مستقلاً عن اختيار الضلع L ؛
- يخضع الكمون الشعاعي \vec{A} لشروط الحدودية الدورية على أسطح العلبة المكعبة، مما يعني أن قيمته عند السطوح المتقابلة هي متساوية، أي أن:

$$A_\ell\left(\frac{L}{2}\right) = A_\ell\left(-\frac{L}{2}\right), \quad \ell = x, y, z \quad (31.1)$$

الخطوة الموالية هي إيجاد حل للمعادلة (8.1) على شكل نشر على الأساس المتعامد $\{\vec{A}_\lambda\}$ الذي يتعلق بالموضع فقط، وفي إطار الشروط الحدودية الموضحة في المعادلة (31.1).

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_\lambda q_\lambda(t) \vec{A}_\lambda(\vec{r}) \quad (32.1)$$

علما أن $q_\lambda(t)$ هو معامل نشر يتعلق بالزمن فقط، وهو الذي يحكم التطور الزمني للجoule.

من الضروري ذكر علاقة التعمد للكمون الشعاعي \vec{A}_λ ، حيث يشير وجود " $4\pi c^2$ " إلى أنه قد تم نَظْمُ الأساس وفقاً لنظام

CGS للوحدات الكهرومغناطيسية [30].

$$\int d^3r \vec{A}_\lambda^* \vec{A}_{\lambda'} = 4\pi c^2 \delta_{\lambda, \lambda'} \quad (33.1)$$

بتعويض الحل الموضح في المعادلة (32.1) في المعادلتين (7.1) و (8.1)، وبإجراء مجموعة من الحسابات، يَتِمُّ

الحصول على عبارة الكمون الشعاعي $\vec{A}_\lambda(\vec{r}, t)$.

$$\vec{A}_\lambda(\vec{r}, t) = q_\lambda(t) \vec{A}_\lambda(\vec{r}) = \vec{\epsilon}_\lambda q_\lambda \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} e^{i(\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r} - \omega_\lambda t)} \quad (34.1)$$

$$\vec{A}_\lambda(\vec{r}) = \vec{\epsilon}_\lambda q_\lambda \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} e^{i\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}} \text{ و } q_\lambda(t) = q_\lambda e^{-i\omega_\lambda t}$$

الفصل الأول: أساسيات الإشعاع الكهرومغناطيسي وتكميمه

عليه، العبارة (34.1) هي عبارة عن موجة مستوية شعاع إنتشارها هو \vec{k}_λ ، سعتها هي q_λ ، تواترها الزاوي هو ω_λ ،

سرعة طورها هي $v_\lambda = \frac{\omega_\lambda}{k_\lambda}$ ، وشعاع استقطابها $\vec{\epsilon}_\lambda$ يمثل شعاع الواحدة وفق الحقل الكهربائي \vec{E}_λ .

عليه، عبارة الإشعاع (الضوء) عند الموضع \vec{r} في اللحظة t يتم الحصول عليها بجمع كافة الأمواج، أي أن الكمون

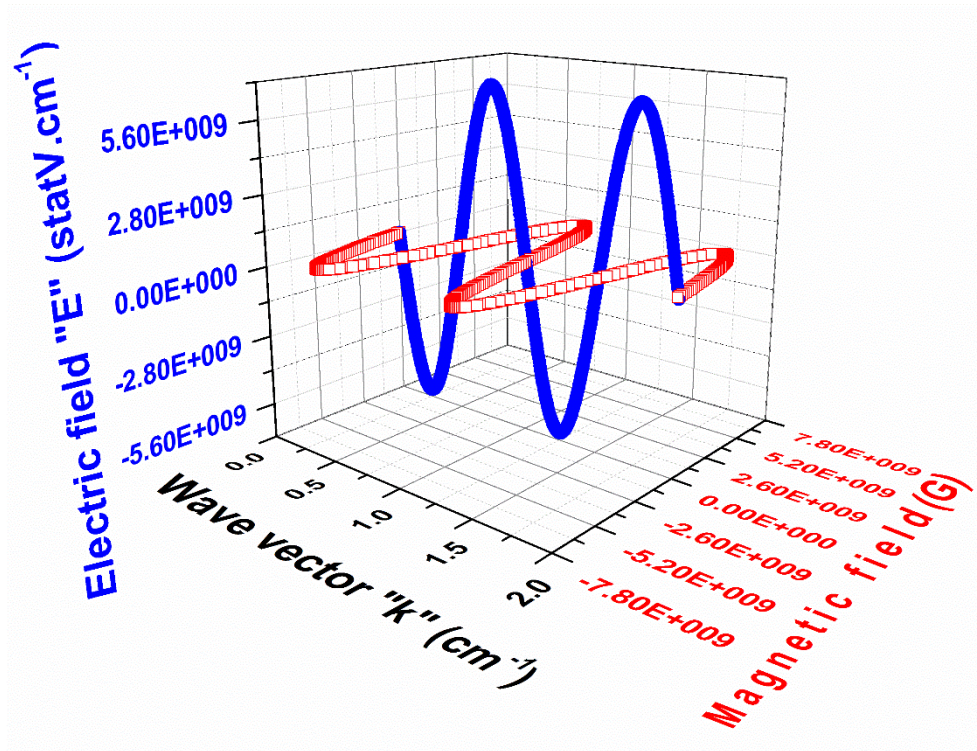
الشعاعي للإشعاع الكهرومغناطيسي عند موضع ما هو مجموع عدد لا نهائي من الأمواج المستوية تأتي إلى ذلك الموضع من كل حذب وصوب.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda} \vec{\epsilon}_\lambda q_\lambda \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} e^{i(\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r} - \omega_\lambda t)} \quad (35.1)$$

كنتويه، العبارة (34.1) هي عبارة عن موجة مستوية لأن $\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{k}_\lambda = 0$ ، أي أن $\vec{\epsilon}_\lambda \perp \vec{k}_\lambda$. عليه، يَبْمُ تعيين قيم \vec{k}_λ

المتاحة في العلية المكعبة التي ضلعها L بتطبيق الشروط الحدية.

$$k_{\lambda\ell} = \frac{2\pi}{L} n_{\lambda\ell}, \text{ حيث } \begin{cases} \ell = x, y, z \\ n_{\lambda\ell} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{cases} \quad (36.1)$$



الشكل 1.1: الحقل الكهرومغناطيسي واتجاه انتشارها في الفضاء.

الفصل الأول: أساسيات الإشعاع الكهرومغناطيسي وتكميمه

وكما هو موضح في الشكل 1.1، تنتشر الموجة الكهرومغناطيسية على طول المحور x ، مُمَثَّلاً بشعاع الموجة \vec{k}_λ ، مع توجيه شعاع الحقل الكهربائي \vec{E}_λ على طول المحور y ، وشعاع الحقل المغناطيسي \vec{B}_λ على طول المحور z . هذه الأشعة الثلاثة $(\vec{E}_\lambda, \vec{B}_\lambda, \vec{k}_\lambda)$ متعامدة على بعضها البعض، لتشكل نظام إحداثيات يميني، حيث يهتز الحقل الكهربائي عمودياً، والحقل المغناطيسي أفقياً، وتتحرك الموجة على طول المحور x . عليه، يمثل الترتيب المكاني، الموضح في الشكل 1.1، البنية الأساسية لموجة كهرومغناطيسية مستقطبة خطياً في الفراغ.

1.6.2 الطاقة الكامنة للإشعاع الكهرومغناطيسي

إن الطاقة الكامنة الكلية U المخزنة في الحقل الكهرومغناطيسي وفق نظام CGS هي [30]:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (E^2 + B^2) \quad (37.1)$$

في حالة عدم وجود شحنات مترسبة ($\rho = 0$) وعدم وجود كثافات تيار ($\vec{J} = 0$)، وبتعويض العبارة (1.32) في عبارتي

الحقل الكهربائي (العلاقة (1.5)) والحقل المغناطيسي (العلاقة (1.6))، يتم الحصول على العبارتين التاليتين:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\sum_{\lambda} \frac{1}{c} \dot{q}_{\lambda} \vec{A}_{\lambda} = -\sum_{\lambda} \frac{1}{c} p_{\lambda} \vec{A}_{\lambda} \quad (38.1)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \sum_{\lambda} q_{\lambda} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_{\lambda}) \quad (39.1)$$

بوضع العبارتين (1.38) و (1.39) في العبارة (1.37)، وبعد إجراء مجموعة من الحسابات، تُصَبِّحُ عبارة الطاقة

U_{λ} للهزاز الضوئي التوافقي ذو النمط λ ودالة الهاملتوني H_{λ} لذات الهزاز تعطى كالتالي:

$$U_{\lambda} = H_{\lambda}(q_{\lambda}, p_{\lambda}) = \frac{1}{2} (p_{\lambda}^2 + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda}^2) \quad (40.1)$$

1.6.3 تكميم الطاقة الكامنة للإشعاع الكهرومغناطيسي

في ميكانيكا الكم، عندما تم وصف الحقل الكهرومغناطيسي كمجموعة من الهزازات التوافقية الكمية (الهزازات الضوئية)،

فإن الإحداثيات المعممة $(q_{\lambda}, p_{\lambda})$ قدمت لوصف أوضاع المجال، ومع ذلك، تعتبر هذه الإحداثيات غير لائقة للتكميم، رغم أنها

إحداثيات قانونية، لأنها تعتبر غير مدركة لأنها ذات قيم عقدية، بمعنى أنها لا تتوافق بشكل مباشر مع الكميات الفيزيائية القابلة

الفصل الأول: أساسيات الإشعاع الكهرومغناطيسي وتكميمه

للقياس (لا تعبر عن معاني فيزيائية) مثل الطاقة، عدد الفوتونات، ومكونات الحقل الكهرومغناطيسي. عليه، الإحداثيات المؤهلة للتكميم هي الإحداثيات المدركة والقانونية.

كما هو ملاحظ، الكمون الشعاعي الموضح في العبارة (32.1) هو عقدي، ولجعله يعبر عن معنى فيزيائي وله صلة

بحقول ذات معنى فيزيائي يجب أن يُحَيَّل حقيقي باعتبار مرافقه " $\sum_{\lambda} q_{\lambda}^*(t) \vec{A}_{\lambda}^*(\vec{r})$ " كالآتي :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda} q_{\lambda}(t) \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) + \sum_{\lambda} q_{\lambda}^*(t) \vec{A}_{\lambda}^*(\vec{r}) \quad (41.1)$$

علما أن عبارة الحد " $q_{\lambda}(t) \vec{A}_{\lambda}(\vec{r})$ " موضحة في العبارة (34.1)، وأما عبارة الحد " $q_{\lambda}^*(t) \vec{A}_{\lambda}^*(\vec{r})$ " فهي :

$$q_{\lambda}^*(t) \vec{A}_{\lambda}^*(\vec{r}) = \vec{\epsilon}_{\lambda} q_{\lambda}^* \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} e^{-i(\vec{k}_{\lambda} \cdot \vec{r} - \omega_{\lambda} t)} \quad (42.1)$$

فالعبارة (42.1) هي عبارة عن موجة مستوية شعاع إنتشارها هو $-\vec{k}_{\lambda}$ أي أنها تنتشر عكس \vec{k}_{λ} ، سعتها هي q_{λ}^* ، و

شعاع استقطابها هو $\vec{\epsilon}_{-\lambda} = \vec{\epsilon}_{\lambda}$.

عليه، لتكميم الطاقة U_{λ} الموضحة في العلاقة (40.1) للإشعاع الكهرومغناطيسي، يجب البحث عن هزازات ضوئية

توافقية ذات إحداثيات مدركة وقانونية $(Q_{\lambda}, P_{\lambda})$ (أي ذات قيم حقيقية) تحقق ما يلي:

$$Q_{\lambda} = q_{\lambda} + q_{\lambda}^* \quad (43.1)$$

$$P_{\lambda} = \dot{Q}_{\lambda} = \dot{q}_{\lambda} + \dot{q}_{\lambda}^* = -i\omega_{\lambda}(q_{\lambda} - q_{\lambda}^*) \quad (44.1)$$

كذلك، اشتقاق Q_{λ} مرتين بالنسبة للزمن تحقق العلاقة التالية:

$$\dot{P}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 Q_{\lambda} = \ddot{Q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 Q_{\lambda} = 0 \quad (45.1)$$

فالعبارة (45.1) ما هي إلا معادلة تحريك هزاز ضوئي توافقي إحداثياته القانونية المدركة $(Q_{\lambda}, P_{\lambda})$.

بضرب العلاقة (45.1) في (\dot{Q}_{λ}) ، ثم مكاملتها، يتم الحصول على مايلي:

$$\dot{Q}_{\lambda} \ddot{Q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 \dot{Q}_{\lambda} Q_{\lambda} = 0 \quad (46.1)$$

وكما معلوم:

$$\begin{cases} \dot{Q}_\lambda \ddot{Q}_\lambda = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{Q}_\lambda^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} P_\lambda^2 \right) \\ \omega_\lambda^2 \dot{Q}_\lambda Q_\lambda = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2 \right) \end{cases} \quad (47.1)$$

ومنه، يتم الحصول على العبارة:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} (Q_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2) = 0 \quad (48.1)$$

والكمية الكلية داخل المشتقة المذكورة في العبارة (48.1) ما هي إلا الطاقة الكلية للهاز التوافقي (أنظر العبارة 1).

(40)). عليه، دالة الهاملتوني للإشعاع الذي إحداثياته (Q_λ, P_λ) هي:

$$H_\lambda(Q_\lambda, P_\lambda) = \frac{1}{2} (P_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2) \quad (49.1)$$

حيث أن الإحداثيات القانونية المدركة الحقيقية (Q_λ, P_λ) تحقق علاقة التبديل القانونية الآتية:

$$[Q_\lambda, P_\lambda] = i\hbar \quad (50.1)$$

أي أن:

$$Q_\lambda = \frac{\partial H_\lambda}{\partial p_\lambda}; \quad P_\lambda = -\frac{\partial H_\lambda}{\partial Q_\lambda} \quad (51.1)$$

ومنه، دالة الهاملتوني لكل الإشعاع تعطى كالآتي:

$$H(Q_\lambda, P_\lambda) = \sum_\lambda H_\lambda = \sum_\lambda \frac{1}{2} (P_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2) \quad (52.1)$$

ومنه، عبارة طاقة الكامنة الكلية U المخزنة في الحقل الكهرومغناطيسي بالإحداثيات القانونية المدركة الحقيقية (Q_λ, P_λ)

هي:

$$U = \sum_\lambda U_\lambda = \sum_\lambda \frac{1}{2} (P_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2) \quad (53.1)$$

ويمكن كتابة الاحداثيات القانونية غير المدركة (q_λ, p_λ) بدلالة الإحداثيات القانونية المدركة الحقيقية (Q_λ, P_λ) على

الشكل الآتي:

$$q_{\lambda}^* = \frac{1}{2} \left(Q_{\lambda} - \frac{i}{\omega_{\lambda}} P_{\lambda} \right) ; q_{\lambda} = \frac{1}{2} \left(Q_{\lambda} + \frac{i}{\omega_{\lambda}} P_{\lambda} \right) \quad (54.1)$$

العبارة (54.1) أساسية في الانتقال من الميكانيكا الكلاسيكية إلى ميكانيكا الكم، مما يسمح بوصف الحقول الكهرومغناطيسية على شكل هزازات توافقية، وهذا يلعب دورًا حاسمًا في نظرية المجال الكمومي، والبصريات الكمومية، ودراسة تفاعل مادة-إشعاع.

كنتويه، من أجل الحصول على العبارة (40.1)، يمكن إتباع نفس الخطوات من العبارة (45.1) إلى العبارة (53.1)، لكن بإستعمال الاحداثيات القانونية غير المدركة $(q_{\lambda}, p_{\lambda})$.

4.6.1 تكميم الأضواء الصرفة

يتم إعطاء دالة الهاملتوني الكلاسيكية لنمط واحد λ للمجال الكهرومغناطيسي بواسطة المعادلة (49.1)، لكن في ميكانيكا الكم، يمكن كتابة المتغيرات العقدية q_{λ} و q_{λ}^* بدلالة مؤثرات الخفض a والرفع a^{\dagger} على الشكل الآتي [30]:

$$q_{\lambda}^* = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\lambda}}} a_{\lambda}^{\dagger} ; q_{\lambda} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\lambda}}} a_{\lambda} \quad (55.1)$$

علما أن مؤثرات الخفض a والرفع a^{\dagger} تعطى على الشكل الآتي:

$$a_{\lambda}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\lambda}}} (\omega_{\lambda} Q_{\lambda} - iP_{\lambda}) ; a_{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\lambda}}} (\omega_{\lambda} Q_{\lambda} + iP_{\lambda}) \quad (56.1)$$

عليه، يمكن كتابة الإحداثيات القانونية المدركة الحقيقية $(Q_{\lambda}, P_{\lambda})$ بدلالة مؤثرات الخفض a والرفع a^{\dagger} على الشكل الآتي:

$$Q_{\lambda} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\lambda}}{2}} (a_{\lambda} + a_{\lambda}^{\dagger}) ; P_{\lambda} = -i \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\lambda}}} (a_{\lambda} - a_{\lambda}^{\dagger}) \quad (57.1)$$

بتعويض الحدود Q_{λ} و P_{λ} الموضحة في العبارة (57.1) في العبارة (49.1)، يَبْمُ الحصول على دالة الهاملتوني على

الشكل الآتي:

$$H_{\lambda} = \frac{\hbar\omega_{\lambda}}{2} (a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda} + a_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger}) \quad (58.1)$$

ويتم تعريف علاقة التبديل كالتالي:

$$[a_\lambda, a_\mu^\dagger] = \delta_{\lambda\mu} \quad (59.1)$$

باستخدام علاقة التبديل الموضحة في العبارة (59.1)، يتم الحصول على قيمة $a_\lambda a_\lambda^\dagger$ كالآتي:

$$[a_\lambda, a_\lambda^\dagger] = 1 \Rightarrow a_\lambda a_\lambda^\dagger = 1 + a_\lambda^\dagger a_\lambda \quad (60.1)$$

بتعويض العبارة (60.1) في العلاقة (58.1)، يَبْمُ الحصول على دالة الهاملتوني على الشكل الآتي:

$$H_\lambda = \hbar\omega_\lambda \left(a_\lambda^\dagger a_\lambda + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega_\lambda \left(N_\lambda + \frac{1}{2} \right) \quad (61.1)$$

عليه، تصف دالة الهاملتوني الموضحة في العبارة (61.1) الطاقة الكلية للهاز التوافقي الكومومي ذو النمط λ ، حيث

يمثل $N_\lambda = a_\lambda^\dagger a_\lambda$ مؤثر العدد، الذي يحسب كميات الطاقة (الفوتونات)، بينما تمثل الكمية $\frac{1}{2} \hbar\omega_\lambda$ طاقة النقطة الصفرية، والتي تنشأ بسبب التقلبات الكومومية.

الآن، يمكن كتابة مؤثر طاقة الإشعاعات الكهرومغناطيسية (الأضواء) الصرفة على الشكل الآتي:

$$H^R = \sum_\lambda H_\lambda = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left(a_\lambda^\dagger a_\lambda + \frac{1}{2} \right) \quad (62.1)$$

يمكن كذلك تكميم الكمون الشعاعي، الحقل الكهربائي، والحقل المغناطيسي في إطار معيار كولوم بنفس الخطوات المتبعة

لتكميم طاقة الأضواء الصرفة، والنتائج النهائية بعد التكميم هي:

• مؤثر الكمون الشعاعي في تصور هايزنبرغ:

$$\vec{A}_{op}(\vec{r}, t) = \sum_\lambda \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k_\lambda L^3}} \vec{\epsilon}_\lambda \left(a_\lambda e^{i(\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r} - \omega_\lambda t)} + a_\lambda^\dagger e^{-i(\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r} - \omega_\lambda t)} \right) \quad (63.1)$$

كما هو مبين في العبارة (63.1)، الجمع على النمط λ هو جمعان، الأول هو جمع على حالة الاستقطاب " $\sigma = 1, 2$ "

و هو مستوي (ذو بعدين)، و الثاني هو جمع على الأنماط " $k_{\lambda\ell} = \frac{2\pi}{L} n_{\lambda\ell}$ " كما تمت الإشارة له سابقا في العبارة (36.1).

عليه، العبارة (63.1) تصبح كالآتي:

$$\vec{A}_{op}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{\sigma k}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}} \vec{\epsilon}_{\vec{\sigma k}} \left(a_{\vec{\sigma k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + a_{\vec{\sigma k}}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right) \quad (64.1)$$

• مؤثر الكمون الشعاعي $\vec{A}_{op}(\vec{r})$ في تصور شرودنغر:

$$\vec{A}_{op}(\vec{r}) = \sum_{\vec{\sigma k}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}} \vec{\epsilon}_{\vec{\sigma k}} \left(a_{\vec{\sigma k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_{\vec{\sigma k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \quad (65.1)$$

• مؤثر الحقل الكهربائي $\vec{E}_{op}(\vec{r})$ في تصور شرودنغر:

$$\vec{E}_{op}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_{op}(\vec{r}) = \frac{1}{c} i\omega \vec{A}_{op}(\vec{r}) = i \sum_{\vec{\sigma k}} \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}} \vec{\epsilon}_{\vec{\sigma k}} \left(a_{\vec{\sigma k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_{\vec{\sigma k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \quad (66.1)$$

• مؤثر الحقل المغناطيسي $\vec{B}_{op}(\vec{r})$ في تصور شرودنغر:

$$\begin{aligned} \vec{B}_{op}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_{op}(\vec{r}) = i\vec{k} \times \vec{A}_{op}(\vec{r}) \\ &= i \sum_{\vec{\sigma k}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}} (\vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{\sigma k}}) \left(a_{\vec{\sigma k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_{\vec{\sigma k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \end{aligned} \quad (67.1)$$

علما أن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{op}(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{A}_{op}(\vec{r}) = 0 \quad (68.1)$$

المعادلات من (65.1) إلى (67.1) تصف المؤثرات الأساسية التي تحكم الحقل الكهرومغناطيسي الكمي، وتدمج كل من مؤثر الكمون الشعاعي ومؤثرات المجال الكهرومغناطيسي وفق تصور شرودنغر، حيث تركز هذه المؤثرات على مؤثرات الرفع و الخفض، والتي تعد ضرورية لتكميم المجال الكهرومغناطيسي، مما يسمح بتمثيل الفوتونات ككميات طاقة منفصلة.

7.1 الخاتمة

تلعب الإشعاعات الكهرومغناطيسية دورًا محوريًا في الفيزياء، إذ تتحكم في التفاعلات بين الجسيمات المشحونة والحقول المنتشرة في الفضاء، حيث تقدم معادلات ماكسويل إطارًا كلاسيكيًا متكاملًا لوصف تلك الحقول، مما يتيح فهمًا دقيقًا لانتشار الموجات، وحركية الشحنات، ونقل الطاقة. ويُعد تفاعل الجسيمات المشحونة مع الحقول الكهرومغناطيسية حجر الأساس في

الفصل الأول: أساسيات الإشعاع الكهرومغناطيسي وتكميمه

فيزياء الإشعاع، إذ يُؤثّرُ بشكل مباشر في سلوك الموجات وتحفيز حركة الجسيمات. ويسمح تحديد الطاقة الكلية لجملة مادة-إشعاع بتمييز مساهمات كل من الجسيمات والحقول، ويمهّد للربط بين المنظورين الكلاسيكي والكمي. ويتطلب هذا الانتقال تكميم الإشعاع الكهرومغناطيسي، حيث تُظهِرُ الفوتونات كمات طاقة منفصلة. لذا، فإن تحديد الكمون الشعاعي والطاقة المخزنة في الإشعاع الكهرومغناطيسي يُعدُّ خطوة أساسية لفهم الطبيعة العميقة للموجات الكهرومغناطيسية وتفاعلاتها.

الفصل الثاني: معادلة ديراك والسبينورات في إطار الكم النسبي

1.2. المقدمة

ميكانيكا الكم هي نظرية فيزيائية أساسية تصف سلوك الجسيمات على المستوى الذري ودون الذري، وتشكل أساساً لعدة فروع مثل فيزياء الكم، كيمياء الكم ونظرية الحقل الكمومي. على عكس الفيزياء الكلاسيكية، هي تتميز بتكميم الكميات الفيزيائية، وازدواجية الموجة-الجسيم، ومبدأ اللايقين الذي طرحه هايزنبرغ عام 1927. نشأت هذه النظرية لتفسير ظواهر لم تستطع النماذج الكلاسيكية معالجتها، مثل إشعاع الجسم الأسود (1900، ماكس بلانك) والتأثير الكهروضوئي (1905، ألبرت أينشتاين). تطورت ميكانيكا الكم تدريجياً عبر "نظرية الكم القديمة"، وشهدت تحولاً جذرياً مع نموذج بور الذري (1913)، وصياغة هايزنبرغ المصفوفية (1925)، ومعادلة شرودنجر الموجية (1926)، ثم تم توحيدها مع النسبية من خلال معادلة ديراك (1928). وتعتمد ميكانيكا الكم الحديثة على دوال موجية تُستخدم للتنبؤ باحتمالات قياس خصائص الجسيمات مثل الطاقة والدفع.

2.2. مسلمات ديراك في ميكانيكا الكم

ميكانيكا الكم تقوم على أربعة مسلمات أساسية صاغها بول ديراك رياضياً باستخدام فضاء هيلبرت والمؤثرات وترميز براكيت، لتوفير إطار موحد ودقيق لوصف الظواهر الكمومية على المستوى المجهرى [31, 32].

2.2.1 المسلمة الأولى "المؤثر ودوره"

تنص المسلمة الأولى على أن كل كمية فيزيائية $\vec{A}(\vec{r}, \vec{p})$ ، دالة لموضع الجسيم ودفعه، يوافقها مؤثر في ميكانيكا الكم، و يتحصل عليه بتعويض \vec{p} بالمؤثر $-i\hbar\vec{\nabla}$ ، أي أن $\vec{A}(\vec{r}, -i\hbar\vec{\nabla})$ ، علماً أن هذا المؤثر يحقق المعادلة الآتية:

$$A\varphi_n = a_n\varphi_n \quad (1.2)$$

حيث أن a_n هي القيم الخاصة للمؤثر \vec{A} ، ويطلق عليها كذلك طيف المؤثر \vec{A} ، و φ_n هي الدوال الخاصة للمؤثر \vec{A} ، و يطلق عليها كذلك الأساس المنبثق عن المؤثر \vec{A} .

2.2.2 المسلمة الثانية "القيم الخاصة و القياس"

تنص المسلمة الثانية على أن المقدار الوحيد الي يشاهد عند إجراء القياس على الكمية الفيزيائية $\vec{A}(\vec{r}, \vec{p})$ هو إحدى القيم الخاصة للمؤثر $\vec{A}(\vec{r}, -i\hbar\vec{\nabla})$.

2.2.3 المسلمة الثالثة "دور معاملات النشر"

الفصل الثاني: معادلة ديراك والسبينورات في إطار الكم النسبي

تنص المسلمة الثالثة على أنه لما تصف حالة الجملة الدالة $\psi(\vec{r}, t)$ ليست دالة خاصة للمؤثر $\vec{A}(\vec{r}, -i\hbar\vec{\nabla})$ ، فإن احتمال

وجود القيم الخاصة a_n عند قياس الكمية $\vec{A}(\vec{r}, \vec{p})$ هو $|c_n(t)|^2$ ، حيث:

$$\sum_n |c_n(t)|^2 = 1 \quad (2.2)$$

2.2.4 المسلمة الرابعة "المعادلة التحريكية"

تنص المسلمة الرابعة على أن معادلة شرودنغر المتعلقة بالزمن هي التي تصف تطور الجملة الفيزيائية في ميكانيك الكم.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H(\vec{r}, -i\hbar\vec{\nabla}, t)\psi(\vec{r}, t) \quad (3.2)$$

حيث أن H هو المؤثر الهاملتوني للجملة، وهو عبارة عن مؤثر هيرميتي يعبر عن الطاقة الكلية للجملة.

2.3 معادلة ديراك

في عام 1928، طرح بول ديراك معادلته الشهيرة التي دمجت بنجاح بين ميكانيكا الكم والنسبية الخاصة، لتشكل نقلة نوعية في فهم سلوك الجسيمات، خصوصاً الإلكترون. جاءت هذه المعادلة استجابة لقصور معادلة شرودنغر (1926) في وصف الجسيمات ذات السرعات القريبة من سرعة الضوء، بعد أن أبرزت نظرية النسبية الخاصة لأينشتاين (1905) ضرورة تطوير إطار كمومي متوافق مع المبادئ النسبية. ومن أبرز نتائج معادلة ديراك تنبؤها بوجود الجسيمات المضادة، وهو اكتشاف غير متوقع آنذاك ومهد الطريق لفهم أعمق لبنية المادة. ولكي تكون هذه المعادلة متوافقة مع النسبية، ينبغي أن تفي بثلاثة مقتضيات رئيسية مستمدة من النسبية الخاصة والعمامة، وهي [32]:

- وجوب تناظر الفضاء والزمان، أي الزامية معاملة الاحداثيات المكانية (x, y, z) و الاحداثيات الزمنية t على قدم المساواة؛

- وجوب خطية الاشتقاق $(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})$ بالنسبة للزمن t ؛

- وجوب صمود المعادلات إزاء تحويلات لورنتز الموضحة في المعادلة (2.4).

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \quad (4.2)$$

حيث (x, y, z, t) و (x', y', z', t') يمثلان إحداثيات نقطتين من معلمين يتحركان بالنسبة لبعضهما البعض بالسرعة

(v).

الفصل الثاني: معادلة ديراك والسبينورات في إطار الكم النسبي

وفقا للمسلمة الأولى لديراك، وبتطبيق المؤثرات على دالة الموجة، يمكن كتابة معادلة القيم الخاصة للهاملتوني كالاتي:

$$E\psi(\vec{r}, t) = H\psi(\vec{r}, t) \quad (5.2)$$

وكما هو معلوم، مشتقات الزمان والمكان للدوال الموجية مرتبطة بالطاقة والدفع الخطي من خلال العبارات الآتية:

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \Rightarrow p^2 = -\hbar^2\nabla^2, \quad E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad (6.2)$$

حيث \vec{p} هو مؤثر الدفع الخطي، حيث أن $(|\vec{p}|^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$.

كذلك، عبارة مؤثر الهاملتوني تعطى كالاتي:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + E_p(\vec{r}) \quad (7.2)$$

بتعويض كل من العبارات (6.2) و (7.2) في العبارة (5.2)، وبإجراء مجموعة من الحسابات، يتم الحصول على

مايلي:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + E_p(\vec{r})\right]}_H \psi(\vec{r}, t) = H\psi(\vec{r}, t) \quad (8.2)$$

عليه، معادلة شرودنغر المتعلقة بالزمن تصف الحركة غير النسبية للجسيمات ذات الطاقات المنخفضة بشكل دقيق وجيد.

فيما يخص الطاقة الكلية للحركة النسبية لجسيم كتلته m ودفعه الخطي \vec{p} ، فهي كالاتي [32, 33]:

$$E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \quad (9.2)$$

عليه، يمكن كتابة مؤثر الهاملتوني للحركة النسبية لهذا الجسيم كالاتي:

$$\hat{H} = c\sqrt{\hat{p}^2 + m^2c^2} \quad (10.2)$$

بتعويض العبارة (10.2) في العبارة (5.2)، يتم الحصول

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = c\sqrt{\hat{p}^2 + m^2c^2}\psi = c\sqrt{(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2) + m^2c^2}\psi \quad (11.2)$$

بوضع " $\hat{p}_0 = i\hbar\frac{\partial}{\partial(ct)}$ " وهو المركبة الصفرية لمؤثر رباعي الدفع الخطي، العبارة (11.2) تغدو كالاتي:

$$\left(\hat{p}_0 - \sqrt{(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2) + m^2 c^2} \right) \psi = 0 \quad (12.2)$$

كما هو ملاحظ، العبارة (12.2) تخل بالمقتضيات الثلاثة للنسبية الخاصة و العامة، و لحل هذه المعضلة، قام ديراك

بكتابة العبارة الآتية [32]:

$$\left(\hat{p}_0 - \sum_{k=1}^3 \alpha_k \hat{p}_k - mc\beta \right) \psi = (\hat{p}_0 - \alpha_1 \hat{p}_1 - \alpha_2 \hat{p}_2 - \alpha_3 \hat{p}_3 - mc\beta) \psi = 0 \quad (13.2)$$

حيث أن α_k و β هما مصفوفتان من الرتبة (4×4) تليان العلاقة النسبية للطاقة والدفع الخطي، حيث يجب أن تلتزما

بعلاقات ضد التبديل لمصفوفات ديراك.

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \mathbb{I} \quad (14.2)$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad (15.2)$$

$$\beta^2 = \alpha_k^2 = \mathbb{I} \quad (16.2)$$

بما أن المصفوفات α_k و β هي مصفوفات من الرتبة (4×4) ، هذا يعني أن دالة الموجة ψ يجب أن تحتوي على أربع

مكونات. كذلك، المصفوفتان α_k و β لا يتعلقان بالإحداثيات المكانية (x, y, z) ، ولا بالدفعات الخطية p_k . عليه، كافة الوسائط

α_k و β تتبادل مع كل واحدة من الاحداثيات المكانية (x, y, z) ، وكذلك تتبادل مع كل الدفعات الخطية p_k . عليه، يمكن القول أنَّ

المصفوفتان α_k و β هي وسائط تتعلق بمتغيرات ذاتية للجسيم ذو الكتلة m ، أي أنها تتعلق بدرجات من الحرية الداخلية وتتضمن

معلومات عن حركتها الذاتية.

من الملاحظ أن الشروط الموضوعية على α_k و β في العبارات (14.2)-(16.2) تحققها مصفوفات باولي.

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (17.2)$$

علما أن مصفوفات باولي الموضحة في العبارة (17.2) هي مصفوفات مربعة من الرتبة (2×2) تحقق الشروط الآتية:

$$\begin{cases} \{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I} \\ [\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \\ \det(\sigma_k) = -1 \\ \text{Tr}(\sigma_k) = 0 \\ \sigma_k^2 = \mathbb{I} \end{cases} \quad (18.2)$$

حيث أن ϵ_{ijk} يعبر عن رمز ليفي - سيفيتا المُستخدَم في تعريف حاصل الضرب الاتجاهي في الأبعاد الثلاثة.

العبارات (14.2)-(16.2) والعبارة (18.2) تُظهِرُ أن هناك تشابه في سلوك الوسائط σ_k و α_k ، مما يدل على أن

الوسيط α_k له علاقة بالدفع الزاوي الذاتي \vec{S} للجسيم ذو الكتلة m ، وليس له أي علاقة بدفعه الزاوي المداري \vec{L} لأن α_k مستقلة

عن الاحداثيات المكانية (x, y, z) ، علماً أن الدفع الزاوي الكلي \vec{J}_{am} يعطى كالآتي [32]:

$$\vec{J}_{am} = \vec{L} + \vec{S} = \underbrace{(\vec{r} \times \vec{p})}_{\vec{L}} + \vec{S} \quad (19.2)$$

من العبارة (16.2) واضح أن $(\alpha_k^2 = \mathbb{I})$ ، أي أن القيم الخاصة لكل α_k هي (1) أو (-1)، وبما أن σ_k هي مصفوفات

مربعة من الرتبة (2×2) كما هو موضح في العبارة (17.2)، و العبارة (13.2) من الرتبة (4×4) ، فإنه يتم إختيار

الوسائط α_k و β كالآتي:

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (20.2)$$

حيث أن كل من مكونات " A_k, B_k, C_k, D_k " هي مصفوفات مربعة من الرتبة (2×2) .

وبما أن هناك تشابه بين الوسائط σ_k و α_k ، فإن α_k تحقق كذلك الشروط الموضحة في العبارة (18.2)، أي أن

$(\alpha_k^2 = \mathbb{I})$ و $(\text{Tr}(\alpha_k) = 0)$ ، ومنه $(A_k + D_k = 0)$ و $(C_k B_k = B_k C_k = 1)$. عليه، اعتمد ديراك المصفوفات الآتية:

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (21.2)$$

ويمكن كتابة مصفوفات ديراك الموضحة في العبارة (21.2) كالآتي:

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}; \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, k = 1, 2, 3 \quad (22.2)$$

الفصل الثاني: معادلة ديراك والسبينورات في إطار الكم النسبي

في العبارتين (21.2) و (22.2) تَظَهَرُ مصفوفات باولي σ_k في الكتل غير القطرية لمصفوفات ديراك α_k . عليه، الوسائط α_k و β أصبحت معلومة، و بتعويضها في العبارة (13.2) يتم الحصول على معادلة ديراك للحركة النسبية لجسيم كتلته m ، وهي:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = c \left(\sum_{k=1}^3 \alpha_k p_k + mc\beta \right) \psi = H_D \psi \quad (23.2)$$

فيما يخص $(H_D = c(\sum_{k=1}^3 \alpha_k p_k + mc\beta))$ ، فهو يعبر عن مؤثر ديراك لطاقة الجسيم النسبي الذي كتلته m ، وبما أن H_D عبارة عن مصفوفة من الرتبة (4×4) ، فيجب أن تكون دالة الموجة ψ عبارة عن سبينور مكون من 4 مركبات.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (24.2)$$

4.2. الدفع الزاوي لجسيم ذو حركة نسبية

في وصف حركة الجسيم بواسطة معادلة ديراك، لا يتم تقليص الدفع الزاوي إلى التعريف البسيط المستخدم في ميكانيكا الكم غير النسبية القائمة على معادلة شرودنغر. على عكس الإطار غير النسبي، حيث يتم حفظ للدفع الزاوي المداري " $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ " لجسيم طليق أو جسيم خاضع لحقل مركزي، تفرض الديناميكيات النسبية بنية أكثر تعقيداً. في الواقع، الدفع الزاوي الكلي \vec{J}_{am} لجسيم هو مجموع دفعه الزاوي المداري \vec{L} ، المرتبط بموقعه \vec{r} ودفعه الخطي \vec{p} ، ودفعه الزاوي الذاتي \vec{S} ، والذي يعكس درجات حرته الداخلية "الف". ومع ذلك، فإن \vec{L} وحده ليس ثابت للحركة في وصف ديراك، وبالتالي تتطلب إدخال \vec{S} لتشكيل $\vec{J}_{am} = \vec{L} + \vec{S}$ ، وهو دفع زاوي ثابت حركة.

عليه، التطور الزمني للدفع الزاوي المداري لجسيم طليق يصف حركته مؤثر طاقة ديراك وفق المركبة x هو:

$$i\hbar \frac{d\hat{L}_x}{dt} = [\hat{L}_x, \hat{H}_D] = [\hat{L}_x, c\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + mc^2\beta] = i\hbar c(\alpha_y p_z - \alpha_z p_y) \quad (25.2)$$

تظهر العبارة (25.2) أن التغير الزمني للدفع الزاوي المداري \hat{L}_x ليس معدوماً، مما يعني أنه ليس ثابتاً للحركة في وصف ديراك. عليه، من خلال إدخال الدفع الزاوي الكلي " $\vec{J}_{am} = \hat{L}_x + \hat{S}_x$ "، يتم ضمان حفظ الدفع الزاوي في الديناميكيات النسبية.

$$i\hbar \frac{d\hat{J}_{am_x}}{dt} = [\hat{J}_{am_x}, \hat{H}_D] = [\hat{J}_{am_x}, c\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + mc^2\beta] = [\hat{L}_x + \hat{S}_x, c\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + mc^2\beta] = 0 \quad (26.2)$$

وبعد إجراء التحليل، تُستخلص مركبات العزم الزاوي الذاتي لجسيم كتلته m كما تصفها معادلة ديراك.

$$\hat{S}_x = \begin{pmatrix} A_{s_x} & 0 \\ 0 & A_{s_x} \end{pmatrix} = a_s \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{S} = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (27.2)$$

هكذا تبين أن معادلة ديراك تصف أحوال جسيم له لف ذاتي مقداره نصف كمية دفعه الزاوي ($\frac{1}{2}\hbar$).

2.5 الحركة النسبية لجسيم في حقول كهرومغناطيسية

عبارة مؤثر طاقة جسيم كتلته m وشحنته q في الحقل الكهرومغناطيسي في نظري ديراك تُعطى كالآتي:

$$\begin{aligned} H_D &= c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2\beta + q\varphi(\vec{r}) = c\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{P} - \frac{1}{c}q\vec{A}(\vec{r}) \right) + mc^2\beta + q\varphi(\vec{r}) \\ &= \underbrace{c\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + mc^2\beta}_{H_{D_0}} + q \underbrace{\left(\varphi(\vec{r}) - \vec{\alpha} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \right)}_{V(\vec{r})} \end{aligned} \quad (28.2)$$

عليه، يمكن إعادة صياغة العبارة (28.2) كالآتي:

$$H_D = H_{D_0} + qV(\vec{r}) \quad (29.2)$$

حيث أن H_{D_0} هو مؤثر طاقة جسيم طليق ذو كتلة m في نظري ديراك، و $V(\vec{r})$ تعبر عن الكمون الكهرومغناطيسي

الذي يؤثر على الجسيم من خلال شحنته q .

تُفضي الصيغة (29.2) مباشرة إلى معادلات الحركة التي تصف تطور الجسيم في المجالات الكهرومغناطيسية، موحدة

بين ميكانيكا الكم والديناميكا الكهربائية الكلاسيكية، بحيث تُسترجع قوة لورنتز في الحد الكلاسيكي، وتظهر تأثيرات كمية كظاهرة

"زيتربفيغونغ" واقتران المدار بالمغزل.

2.6 حل معادلة ديراك لجسيم طليق

في هذا الجزء سيتم البحث عن حلٍ لمعادلة ديراك للحركة النسبية لجسيم طليق ذو كتلة m .

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_{D_0} \psi = \left(c\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + mc^2\beta \right) \psi \quad (30.2)$$

الفصل الثاني: معادلة ديراك والسبينورات في إطار الكم النسبي

ولكي تصبح العبارة (30.2) أنسب للحل، يتم ضربها في الوسيط $\frac{\beta}{c}$.

$$\underbrace{\beta}_{=\gamma_0} \left(\underbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial(ct)}}_{p_0} \psi \right) = \left(\underbrace{\beta \vec{\alpha}}_{=\beta \alpha_k = \vec{\gamma} = \gamma_k} \cdot \underbrace{\hat{\mathcal{P}}}_{=-i\hbar \nabla = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^k}} + mc \underbrace{\beta^2}_{=1} \right) \psi$$

$$\Rightarrow (\gamma_0 p_0 - \vec{\gamma} \hat{\mathcal{P}} - mc) \psi = 0 \quad (31.2)$$

$$\Rightarrow (\gamma_0 p_0 - \gamma_k \mathcal{P}_k - mc) \psi = 0$$

$$\Rightarrow \left(\gamma_0 i\hbar \frac{\partial}{\partial(ct)} + \gamma_k i\hbar \frac{\partial}{\partial x^k} - mc \right) \psi = 0$$

كما تمت الإشارة له سابقا في العبارة (24.2)، ψ هي عبارة عن مصفوفة عمودية من أربع عناصر، ويطلق عليها

ملفات ديراك أو السبينور الثنائي.

تمهيدا لاستعمال الشكل الكوفارينتي، من الجيد تعريف مصفوفات جاما " γ^μ ".

$$\left\{ \begin{array}{l} x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^k) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}) \\ \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \\ \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \frac{\partial}{\partial(ct)} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} = \gamma^0 \frac{\partial}{\partial(ct)} + \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ \mathcal{P}^\mu = (\mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2, \mathcal{P}^3) = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_k) = \left(\frac{E}{c}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3 \right) \\ \mathcal{P}_\mu = (\mathcal{P}^0, -\mathcal{P}^1, -\mathcal{P}^2, -\mathcal{P}^3) = (\mathcal{P}_0, -\mathcal{P}_k) = \left(\frac{E}{c}, -\mathcal{P}_1, -\mathcal{P}_2, -\mathcal{P}_3 \right) \end{array} \right. \quad (32.2)$$

بتطبيق الترميز الكوفارينتي الموضح في العبارة (32.2) على العبارة (31.2)، يتم الحصول على ما يلي:

$$\left(\gamma_0 i\hbar \frac{\partial}{\partial(ct)} + \gamma_k i\hbar \frac{\partial}{\partial x^k} - mc \right) \psi = 0 \Rightarrow \left(i\hbar \left(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial(ct)} + \gamma_k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) - mc \right) \psi = 0 \quad (33.2)$$

$$\Rightarrow i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc \psi = 0$$

فيما يخص مركبات المصفوفة γ^μ هي أيضا هيرميتية وتحقق العلاقات الجبرية التالية:

$$\begin{cases} (\gamma^0)^2 = \beta^2 = 1 \\ (\gamma_k)^2 = -1, \quad k = 1, 2, 3 \\ \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \\ \gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \end{cases} \quad (34.2)$$

عليه، الشكل النهائي لمعادلة ديراك لجسيم الطليق هي:

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0 \quad (35.2)$$

العبارة (35.2) يمكن حلها في الحالتين، الأولى هي لما يكون الجسيم في حالة حركة، والثانية لما يكون الجسيم ساكن.

حل معادلة ديراك لجسيم طليق في حالة حركة

في هذا الجزء يُلتَمَسُ إيجاد حلول للعبارة (35.2)، وهي من الشكل [32]:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{L^3} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} u(\vec{r}, t) = \frac{1}{L^3} e^{i\frac{(\vec{P}\cdot\vec{r} - Et)}{\hbar}} u(\vec{P}, E) \quad (36.2)$$

كما تُظهر العبارة (36.2)، فإن الحلول المطلوبة تأخذ شكل أمواج مستوية $\psi(\vec{r}, t)$ محصورة في مكعب طول ضلعه L ،

بحيث تنعدم هذه الأمواج على أوجهه المتقابلة. ولتكون $\psi(\vec{r}, t)$ حلاً لمعادلة ديراك لجسيم حر، ينبغي تحديد السبينور $u(\vec{P}, E)$.

عليه، سيتم تعويض العبارة (36.2) في المعادلة (35.2)، ومنه يُتَحَصَّلُ على ما يلي:

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -i\frac{E}{\hbar}\psi(\vec{r}, t) \\ \frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial x^k} = i\frac{P^k}{\hbar}\psi(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (37.2)$$

بتعويض العبارة (37.2) في المعادلة (35.2)، يتم الحصول على ما يلي:

$$\begin{aligned} i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0 &\Rightarrow \left(i\hbar\left(\gamma_0\frac{\partial}{\partial(ct)} + \gamma_k\frac{\partial}{\partial x^k}\right) - mc \right)\psi = 0 \\ &\Rightarrow \left(i\hbar\left(-i\gamma_0\frac{E}{c\hbar} + \gamma_k i\frac{P^k}{\hbar}\right) - mc \right)\psi = 0 \\ &\Rightarrow \left(\gamma_0\frac{E}{c} - \gamma_k P^k - mc\right)\psi = 0 \end{aligned} \quad (38.2)$$

الفصل الثاني: معادلة ديراك والسبينورات في إطار الكم النسبي

من الملاحظ في العبارة (38.2) أن المركبات المكانية للدفع الخطي القانوني \mathcal{P}^k أنها غير توافقية، و لكي تصبح توافقية، يتوجب إستعمال المُؤثر المتري $g^{\mu\nu}$. وبعد إجراء بعض الحسابات يمكن كتابة العبارة (38.2) على الشكل التالي:

$$\left(\gamma_0 \frac{E}{c} + \gamma_k \mathcal{P}_k - mc\right)\psi = 0 \Rightarrow (\gamma^\mu \mathcal{P}_\mu - mc)\psi = 0 \quad (39.2)$$

بما أن المعامل الأسّي " $\frac{1}{L^2} e^{i\frac{(\vec{P}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}}$ " الموضح في العبارة (36.2) لا يؤثر على السبينور $u(\vec{P}, E)$ ، فإنه يمكن كتابة

العبارة (39.2) كالآتي:

$$(\gamma^\mu \mathcal{P}_\mu - mc)u = 0 \quad (40.2)$$

العبارة (40.2) تُعرّف بمعادلة ديراك للدفع والفضاء، ويمكن كتابتها كالآتي:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{E}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{P} - mc \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} ((E/c) - mc) & (-\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) & -((E/c) + mc) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (41.2)$$

تحليل العبارة (41.2) يُنتج عنه معادلتان رئيسيتان مقترنتان في وقت واحد، وهما:

$$\begin{cases} ((E/c) - mc) u_A = (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) u_B \\ ((E/c) + mc) u_B = (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) u_A \end{cases} \quad (42.2)$$

لكي يكون لجملة المعادلتين (42.2) حلان غير معدومين، يجب أن ينعدم محددها، وحينها يتم الحصول على القيم

الخاصة لمؤثر طاقة الجسيم الطليق.

$$Det = \begin{vmatrix} ((E/c) - mc) & -(\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) & -((E/c) + mc) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow E = \pm E_p = \pm \sqrt{c^2 \mathcal{P}^2 + (mc^2)^2} \quad (43.2)$$

انطلاقاً من العبارة (43.2)، يمكن القول أنه حتى تتحقق معادلة ديراك لجسيم طليق يجب أن تتحقق العلاقة النسبية بين

الطاقة والدفع الخطي، وهي كالآتي:

الفصل الثاني: معادلة ديراك والسبينورات في إطار الكم النسبي

$$E^2 - (mc^2)^2 = c^2 \mathcal{P}^2 \quad (44.2)$$

لتحديد u_B ، يجب اختيار شكل u_A كما هو موضح في العبارة (45.2)، علماً أن كل منهما هو عبارة عن سبينور ذو

مركبتان.

$$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ أو } u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (45.2)$$

فيما يخص تحليل وتوسيع $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{P}})$ فينتج عنه ما يلي:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{P}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{P}_x + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \mathcal{P}_y + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathcal{P}_z = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_z & \mathcal{P}_x - i\mathcal{P}_y \\ \mathcal{P}_x + i\mathcal{P}_y & -\mathcal{P}_z \end{pmatrix} \quad (46.2)$$

الآن سيتم التعبير عن u_B بدلالة u_A ، وذلك إنطلاقاً من العبارة (42.2).

$$\begin{aligned} ((E/c) + mc) u_B &= (\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{P}}) u_A \Rightarrow u_B = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{P}})}{((E/c) + mc)} u_A \\ &= \frac{1}{((E/c) + mc)} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_z & \mathcal{P}_x - i\mathcal{P}_y \\ \mathcal{P}_x + i\mathcal{P}_y & -\mathcal{P}_z \end{pmatrix} u_A \end{aligned} \quad (47.2)$$

في هذه الحالة، سيتم استعمال الطاقة الموجبة $(E = +E_p = \sqrt{c^2 \mathcal{P}^2 + (mc^2)^2})$ ، وذلك لتجنب غدو u_B إلى

مالانهاية عند انعدام الدفع الخطي القانوني $(\vec{\mathcal{P}} = 0)$. عليه، يتم الحصول على حلين مستقلين u_1 و u_2 ، وهما كالآتي:

$$u_1 = \mathbb{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c\mathcal{P}_z}{E + mc^2} \\ \frac{c(\mathcal{P}_x + i\mathcal{P}_y)}{E + mc^2} \end{pmatrix}; \quad u_2 = \mathbb{N} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(\mathcal{P}_x - i\mathcal{P}_y)}{E + mc^2} \\ \frac{-c\mathcal{P}_z}{E + mc^2} \end{pmatrix} \quad (48.2)$$

فيما يخص الحلان u_1 و u_2 ، فهما حلان يصفان أحوال جسيم كتلته m ، دفعه الخطي القانوني $\vec{\mathcal{P}}$ ، طاقته

مالانهاية عند انعدام الدفع الخطي القانوني $(\vec{\mathcal{P}} = 0)$ ، ولفه \vec{S} ، علماً أن \mathbb{N} هو عبارة عن ثابت نظم السبينور $u(\vec{\mathcal{P}}, E)$ ، وسيتم تحديده

لاحقاً. ومنه، الحلان في هذه الحالة هما:

الفصل الثاني: معادلة ديراك والسبينورات في إطار الكم النسبي

$$\psi_{1,2}(\vec{r}, t, \vec{P}, E) = N \frac{1}{L^2} e^{i\frac{(\vec{P}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}} u_{1,2}(\vec{P}, E) \quad (49.2)$$

لتحديد u_A ، يتم اختيار شكل u_B كالآتي:

$$u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ أو } u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (50.2)$$

وبإتباع نفس الخطوات التي قد حددت بها u_B ، يتم تحديد u_A ، لكن سيتم استعمال الطاقة السالبة

وذلك لتجنب غدو u_A إلى مالانهاية عند انعدام الدفع الخطي القانوني ($\vec{P} = 0$)، $(E = -E_P = -\sqrt{c^2\mathcal{P}^2 + (mc^2)^2})$

ومنه يتم الحصول على حلين مستقلين u_3 و u_4 ، وهما:

$$u_3 = N \begin{pmatrix} \left(\frac{c\mathcal{P}_z}{E - mc^2} \right) \\ \left(\frac{c(\mathcal{P}_x + i\mathcal{P}_y)}{E - mc^2} \right) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u_4 = N \begin{pmatrix} \left(\frac{c(\mathcal{P}_x - i\mathcal{P}_y)}{E - mc^2} \right) \\ \left(\frac{-c\mathcal{P}_z}{E - mc^2} \right) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (51.2)$$

فيما يخص الحلان u_3 و u_4 ، فهما حلان يصفان أحوال شبه جسيم كتلته m ودفعه الخطي القانوني \vec{P} ، وطاقته

$$(E = -E_P = -\sqrt{c^2\mathcal{P}^2 + (mc^2)^2})$$

للتوضيح، إن الرمز E و \vec{P} لا يمثلان سوى وسيطين رياضيين يتوافقان مع كميات فيزيائية معروفة، هما الطاقة الكلية

والدفع الخطي القانوني لجسيم كتلته m ، على التوالي. ومن المهم تفسير إشارات هذه الكميات بناءً على القوانين الفيزيائية، وليس

بمعزل عنها. وعليه، فإن القول بأن "جسيمًا كتلته m له طاقة سالبة" هو قول غير دقيق فيزيائيًا، لأن الطاقة السالبة، كما هو

معروف، لا تمثل حالة فيزيائية حقيقية يمكن أن توجد فيها الجسيمات. لذلك، فإن الحل ($u(\vec{P}, E < 0)$) لا يُعبّر عن جسيم ذو

طاقة سالبة، بل يُمكن تفسيره بأنه يمثل حالة شبه جسيم كتلته m [34]، يتحرك بدفع خطي قانوني يعادل $-\vec{P}$ ، ويملك طاقة

موجبة ($E = -E_P$)، وعزم لف ذاتي (سبين) مُحدَد \vec{S} . وبذلك، لا توجد جسيمات تتحرك بطاقة سالبة فيزيائيًا، وهذا التفسير

يتماشى تمامًا مع مبدأ الاستقرار الفيزيائي والمنطق الطبيعي، كما ينسجم مع تأويل ديراك لوجود الجسيمات المضادة. ومنه،

الحلان في هذه الحالة هما:

$$\psi_{3,4}(\vec{r}, t, -\vec{P}, -E) = \mathbb{N} \frac{1}{L^2} e^{-i\frac{(\vec{P}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}} u_{3,4}(-\vec{P}, -E) = \mathbb{N} \frac{1}{L^2} e^{i\frac{(\vec{P}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}} v_{1,2}(\vec{P}, E) \quad (52.2)$$

وعليه يَتِمُّ استبدال الحلان u_3 و u_4 كالآتي:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_3(-\vec{P}, -E) = v_1(\vec{P}, E) = \mathbb{N} \begin{pmatrix} \left(\frac{-c\mathcal{P}_z}{-E - mc^2} \right) \\ \left(\frac{-c(\mathcal{P}_x + i\mathcal{P}_y)}{-E - mc^2} \right) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{N} \begin{pmatrix} \left(\frac{c\mathcal{P}_z}{E + mc^2} \right) \\ \left(\frac{c(\mathcal{P}_x + i\mathcal{P}_y)}{E + mc^2} \right) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_4(-\vec{P}, -E) = v_2(\vec{P}, E) = \mathbb{N} \begin{pmatrix} \left(\frac{-c(\mathcal{P}_x - i\mathcal{P}_y)}{-E - mc^2} \right) \\ \left(\frac{-c\mathcal{P}_z}{-E - mc^2} \right) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{N} \begin{pmatrix} \left(\frac{c(\mathcal{P}_x - i\mathcal{P}_y)}{E + mc^2} \right) \\ \left(\frac{c\mathcal{P}_z}{E + mc^2} \right) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (53.2)$$

عليه، يرمز للف الجسيم الذي كتلته m بالرمز $u_{1,2}(\vec{P}, E)$ ، ويرمز للف شبه الجسيم بالرمز $v_{1,2}(\vec{P}, E)$.

عليه، الحلول التامة (الدوال الخاصة التامة) للمعادلة (30.2) هي الحلول الأربعة التالية:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \psi_1(\vec{r}, t, \vec{\mathcal{P}}, E) = N \frac{1}{L^2} e^{i\frac{(\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{r} - Et)}{\hbar}} u_1(\vec{\mathcal{P}}, E) = N \frac{1}{L^2} e^{i\frac{(\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{r} - Et)}{\hbar}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c\mathcal{P}_z}{E + mc^2} \\ \frac{c(\mathcal{P}_x + i\mathcal{P}_y)}{E + mc^2} \end{pmatrix} \\
 \psi_2(\vec{r}, t, \vec{\mathcal{P}}, E) = N \frac{1}{L^2} e^{i\frac{(\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{r} - Et)}{\hbar}} u_2(\vec{\mathcal{P}}, E) = N \frac{1}{L^2} e^{i\frac{(\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{r} - Et)}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(\mathcal{P}_x - i\mathcal{P}_y)}{E + mc^2} \\ \frac{-c\mathcal{P}_z}{E + mc^2} \end{pmatrix} \\
 \psi_3(\vec{r}, t, -\vec{\mathcal{P}}, -E) = N \frac{1}{L^2} e^{i\frac{(\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{r} - Et)}{\hbar}} v_1(\vec{\mathcal{P}}, E) = N \frac{1}{L^2} e^{i\frac{(\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{r} - Et)}{\hbar}} \begin{pmatrix} \frac{c\mathcal{P}_z}{E + mc^2} \\ \frac{c(\mathcal{P}_x + i\mathcal{P}_y)}{E + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \psi_4(\vec{r}, t, -\vec{\mathcal{P}}, -E) = N \frac{1}{L^2} e^{i\frac{(\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{r} - Et)}{\hbar}} v_2(\vec{\mathcal{P}}, E) = N \frac{1}{L^2} e^{i\frac{(\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{r} - Et)}{\hbar}} \begin{pmatrix} \frac{c(\mathcal{P}_x - i\mathcal{P}_y)}{E + mc^2} \\ \frac{c\mathcal{P}_z}{E + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{array} \right. \quad (54.2)$$

تجدر الإشارة إلى أن:

- السبينور $u_1(\vec{\mathcal{P}}, E)$ يصف أحوال جسيم كتلته m دفعه الخطي القانوني $\vec{\mathcal{P}}$ ، طاقته $(E = E_p)$ ، ولفه واقف ومقداره نصف كمية دفعه الزاوي $(\frac{1}{2}\hbar)$.
- السبينور $u_2(\vec{\mathcal{P}}, E)$ يصف أحوال جسيم كتلته m دفعه الخطي القانوني $\vec{\mathcal{P}}$ ، طاقته $(E = E_p)$ ، ولفه مقلوب ومقداره نصف كمية دفعه الزاوي $(\frac{1}{2}\hbar)$.
- السبينور $v_1(\vec{\mathcal{P}}, E)$ يصف أحوال جسيم كتلته m دفعه الخطي القانوني $-\vec{\mathcal{P}}$ ، طاقته $(E = -E_p)$ ، ولفه واقف ومقداره نصف كمية دفعه الزاوي $(\frac{1}{2}\hbar)$.
- السبينور $v_2(\vec{\mathcal{P}}, E)$ يصف أحوال جسيم كتلته m دفعه الخطي القانوني $-\vec{\mathcal{P}}$ ، طاقته $(E = -E_p)$ ، ولفه مقلوب ومقداره نصف كمية دفعه الزاوي $(\frac{1}{2}\hbar)$.

الفصل الثاني: معادلة ديراك والسبينورات في إطار الكم النسبي

تَبَقَّى الآن تحديد الثابت (\mathbb{N}) لنظم السبينور $u_{1,2}(\vec{\mathcal{P}}, E)$ و $v_{1,2}(\vec{\mathcal{P}}, E)$. من أجل ذلك، سيتم أخذ السبينور

$u_1(\vec{\mathcal{P}}, E)$ لتطبيق شرط التنظيم عليه.

$$u_1^\dagger u_1 = 1 = |\mathbb{N}|^2 \left(|1|^2 + |0|^2 + \left| \left(\frac{c\mathcal{P}_z}{E + mc^2} \right) \right|^2 + \left| \left(\frac{c(\mathcal{P}_x + i\mathcal{P}_y)}{E + mc^2} \right) \right|^2 \right) \Rightarrow |\mathbb{N}|^2 \quad (55.2)$$

$$= \left(\frac{(E_{\mathcal{P}} + mc^2)}{2E_{\mathcal{P}}} \right) \Rightarrow \mathbb{N} = \sqrt{\frac{(E_{\mathcal{P}} + mc^2)}{2E_{\mathcal{P}}}}$$

عليه، يضمن ثابت نظم السبينور أن تُمَثَّل حلول سبينور ديراك حالات كمية ذات دلالة فيزيائية بكثافة احتمالية مُقاسة بشكل

صحيح، كما يُحَافَظ على الاتساق مع مبادئ النسبية، ويضمن نتائج محدودة وقابلة للتفسير عبر جميع الأطر المرجعية.

حل معادلة ديراك لجسيم طليق في حالة سكون

بالنسبة لجسيم حر في حالة سكون ($\vec{\mathcal{P}} = 0$)، يمكن كتابة معادلة ديراك كالتالي:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = mc^2 \beta \psi \quad (56.2)$$

حيث يمكن بناء حلول العبارة (56.2) بشكل صريح، حيث توفر هذه الحالة فهمًا أساسيًا لدور اللف (السبينور) وتفسير

حلول الطاقة الموجبة والسالبة ($E = \pm mc^2$). عليه، الحلول في هذه الحالة هي عبارة عن موجة مستوية من الشكل:

$$\psi(t, E) = e^{\frac{-iEt}{\hbar}} u(E) \quad (57.2)$$

عليه، الحلول التامة (الدوال الخاصة التامة) للمعادلة (56.2) هي الحلول الأربعة التالية:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(t, E) = e^{-\frac{imc^2 t}{\hbar}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_2(t, E) = e^{-\frac{imc^2 t}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_3(t, E) = e^{\frac{imc^2 t}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_4(t, E) = e^{\frac{imc^2 t}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (58.2)$$

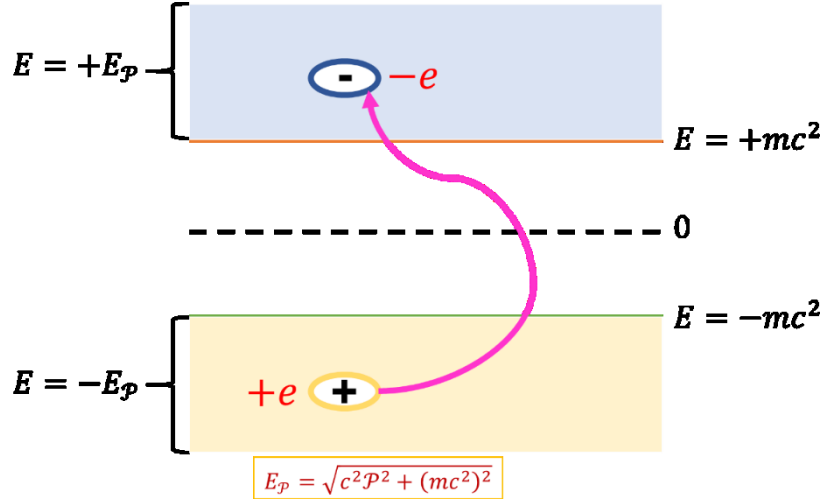
عليه، عند تطبيق معادلة ديراك على جسيم حر ساكن، تُنتج أربعة حلول مستقلة خطياً، حلان للإلكترونات (حالة لف سبينيور ذو طاقة موجبة $(E = +mc^2)$)، وحلان للبوزيترونات الناتجة من حلول الطاقة $(E = -mc^2)$. تكشف هذه الحلول عن الوجود الجوهرى للمادة المضادة في نظرية الكم النسبية، فلا وجود لجسيم ذو طاقة سالبة بل يوجد جسيم مضاد ذو طاقة موجبة. وعليه، يمكن القول أنَّ معادلة ديراك لجسيم ساكن تصف ما يلي:

- حالة إلكترون طاقته $(E = +mc^2)$ ، ولفه واقف ومقداره نصف كمية دفعه الزاوي $(\frac{1}{2}\hbar)$.
- حالة إلكترون طاقته $(E = +mc^2)$ ، ولفه مقلوب ومقداره نصف كمية دفعه الزاوي $(\frac{1}{2}\hbar)$.
- حالة شبه إلكترون (بوزترون) طاقته $(E = -mc^2)$ ، ولفه واقف ومقداره نصف كمية دفعه الزاوي $(\frac{1}{2}\hbar)$.
- حالة شبه إلكترون (بوزترون) طاقته $(E = -mc^2)$ ، ولفه مقلوب ومقداره نصف كمية دفعه الزاوي $(\frac{1}{2}\hbar)$.

نظرية الثقوب والجسيمات المضادة

في عام 1928، قدّم بول ديراك معادلته الموجية النسبية، بهدف وصف الإلكترون بما يتوافق مع ميكانيكا الكم والنسبية الخاصة، حيث تنبأت معادلة ديراك بحلول طاقة من الشكل $(E = \pm\sqrt{c^2\mathcal{P}^2 + (mc^2)^2})$ ، مما يشير إلى وجود حالات ذات طاقة سالبة. ولحل هذه المشكلة، اقترح ديراك في عام 1930 مفهوم بحر ديراك، وهو فراغ مملوء بالإلكترونات ذات طاقة سالبة، حيث تنشأ فجوة موجبة الشحنة عند غياب أحد هذه الإلكترونات كما هو موضح في الشكل 2. 1. عرف الفيزيائيون هذه الفجوة باسم "البوزيترون"، وقد تم تأكيد وجوده تجريبياً على يد كارل أندرسون عام 1932، في أول دليل مباشر على المادة المضادة.

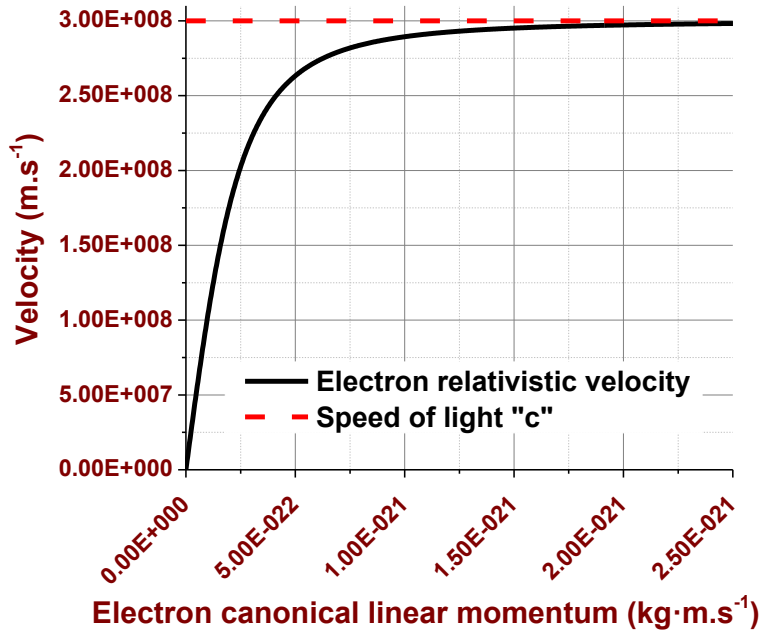
الفصل الثاني: معادلة ديراك والسبينورات في إطار الكم النسبي



الشكل 2. 1: ارتقاء جسيم من حالة طاقة سالبة إلى حالة طاقة موجبة في نظرية ثقب ديراك.

في النسبية الخاصة، سرعة الجسيم تُعطى كالآتي [35]:

$$v = \frac{c^2 \mathcal{P}}{E_{\mathcal{P}}} \quad (59.2)$$



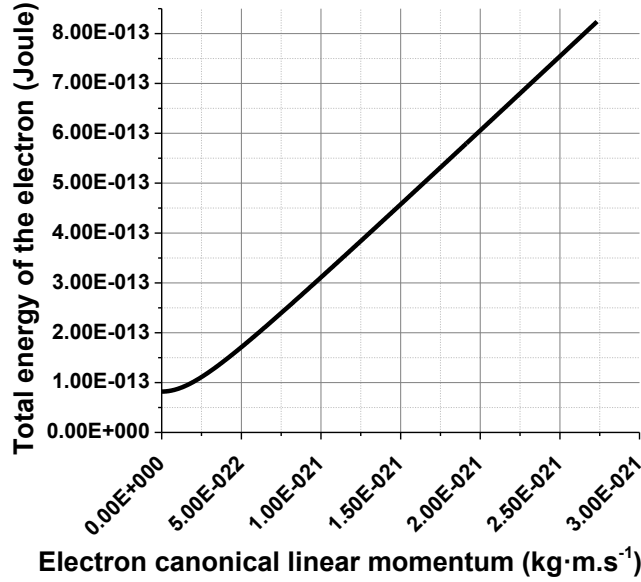
الشكل 2. 2: سرعة جسيم (إلكترون) تصف أحواله معادلة ديراك.

يُظهر الشكل 2. 2 كيف تتغير السرعة النسبية v للإلكترون الحر بدلالة الدفع الخطي القانوني \vec{P} . فعندما تكون قيم \vec{P}

صغيرة، تزداد السرعة بشكل خطي تقريباً، مما يُشبه سلوك الحركة في الميكانيكا الكلاسيكية. ومع تزايد الدفع وتجاوزه بكثير

الفصل الثاني: معادلة ديراك والسبينورات في إطار الكم النسبي

mc ، تقترب السرعة تدريجيًا من سرعة الضوء c دون أن تتجاوزها، وهو ما يتوافق مع تنبؤات نظرية النسبية الخاصة التي تمنع الجسيمات التي لها كتلة من الوصول إلى سرعة الضوء. هذا السلوك يبرز العلاقة الجوهرية بين السرعة والطاقة والدفع في إطار الديناميكا النسبية.



الشكل 2. 3: الطاقة الكلية للإلكترون تصف أحواله معادلة ديراك.

كما هو موضح في الشكل 2. 3، تزداد طاقة E_p طرديًا مع زيادة العزم \vec{P} ، بدءًا من قيمة دنيا mc^2 عند سكون الجسيم. عند دفع منخفض، ترتفع طاقة E_p ببطء، بما يتوافق مع سلوك الطاقة الحركية الكلاسيكية. ولكن عندما يصبح الدفع الخطي القانوني أكبر بكثير من mc ، تزداد الطاقة خطيًا تقريبًا مع P ، أي $(E_p \approx cP)$ ، وهذا يعكس سلوك الجسيمات في الطور الفائق النسبي، حيث تزداد الطاقة بشكل غير خطي مع الدفع، مما يضمن بقاءها منتهية ويؤكد استحالة تجاوز سرعة الضوء رغم اقترابها منها.

2. 7. الخاتمة

اشتمل هذا الفصل على دراسة شاملة لمعادلة ديراك، التي توحد بين ميكانيكا الكم والنسبية الخاصة لوصف الجسيمات عالية السرعة، كما تم التطرق للدفع الزاوي المداري و الذاتي وتفاعل الجسيمات مع الحقول الكهرومغناطيسية، مع التركيز على دور السبينور في تشكيل الحالة الكمومية. كما تم توضيح مفهوم الطاقة السالبة ونظرية الثقوب التي أدت إلى اكتشاف المادة المضادة، مما يعزز الفهم لبنية المادة ونظريات المجال الكمومي.

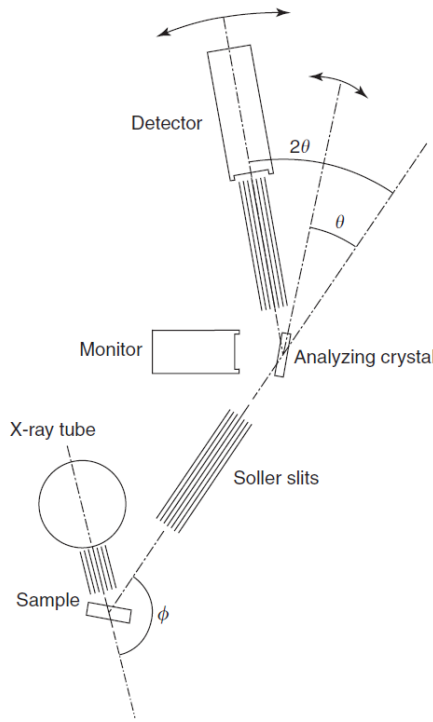
الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

1.3. المقدمة

التشتت هو ظاهرة فيزيائية أساسية يحدث فيها انحراف الجسيمات أو الموجات عن مسارها نتيجة تفاعلها مع جسيمات أو حقول أو وسائط أخرى. وتكتسي هذه الظاهرة أهمية بالغة في ميكانيكا الكم والديناميكا الكهربائية والفيزياء النووية، حيث تتيح فهماً عميقاً للبنى الذرية ودون الذرية وانتشار الموجات. ينقسم التشتت إلى نوعين رئيسيين: مرن، تُحفظ فيه الطاقة الحركية مثل تشتت كومبتون ورايلي وذر فورد؛ وغير مرن، حيث يحدث تبادل طاقي، كما في تشتت رامان وتشتت الإلكترونات غير المرنة. يُوصف التشتت رياضياً بالمقطع العرضي التفاضلي $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$ ، الذي يحدد احتمال تشتت الجسيمات بزوايا معينة، والمقطع العرضي الكلي σ ، الذي يمثل المساحة الفعالة للتفاعل ويعد عنصراً أساسياً في فيزياء الجسيمات والطاقة العالية.

2.3. تشتت كومبتون

تشتت الضوء بواسطة الذرات والجزيئات ظاهرة طبيعية تُلاحظ في بيئات عديدة مثل الغلاف الجوي للأرض والبلازما. ومن الأمثلة الأساسية على ذلك تشتت الضوء بواسطة إلكترون [36]، والمعروف باسم تأثير كومبتون، عندما يصطدم فوتون عالي الطاقة ($\hbar\omega$) بإلكترون شبه طليق في المجال الكهرومغناطيسي للنواة، وهو ما يوضحه الشكل 3.1.



الشكل 3.1: رسم تخطيطي لتجربة تأثير كومبتون [37].

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

أثناء التفاعل يتبادل الفوتون والإلكترون الطاقة والدفع [17, 38]. ونتيجةً لذلك، يرتد الإلكترون، ويتشتت الفوتون بزاوية θ بالنسبة لاتجاهه الأصلي، مع زيادة مقابلة في طول الموجي. وبالتالي، تكون طاقة الكم للفوتون المُشتت أقل من طاقة الكم للفوتون الأساسي بمقدار الطاقة الحركية لارتداد الإلكترون.

3.2.1 تشتت كومبتون وفق القوانين الكلاسيكية

لفهم ظاهرة تأثير كومبتون بشكل أوضح، يُستحسن البدء بتحديد طاقة ودفع النظام قبل التصادم وبعده. عليه، يتم تعريف طاقة ودفع النظام قبل التصادم وفق العبارة (3.1)، وحالته بعد التصادم وفق العبارة (3.2).

$$\begin{cases} E_p = h\nu = \hbar\omega, \vec{p}_p = \hbar\vec{k} \\ E_e = m_e c^2, \vec{p}_e \approx 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} E'_p = h\nu' = \hbar\omega', \vec{p}'_p = \hbar\vec{k}' \\ E'_e = \sqrt{c^2 p_e'^2 + (m_e c^2)^2}, \vec{p}'_e = (\hbar\vec{k} - \hbar\vec{k}') \end{cases} \quad (2.3)$$

فبتطبيق مبدأ حفظ الطاقة والدفع على الجملة، يتم الحصول على العبارة (3.3).

$$\begin{cases} E_p + E_e = E'_p + E'_e \Rightarrow (\hbar\omega + m_e c^2) = \hbar\omega' + \sqrt{c^2 p_e'^2 + (m_e c^2)^2} \\ \vec{p}_p + \vec{p}_e = \vec{p}'_p + \vec{p}'_e \Rightarrow \hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \vec{p}'_e \end{cases} \quad (3.3)$$

وفقاً للعبارة (3.3)، يمكن كتابة عبارة طاقة الجملة كالآتي:

$$\begin{aligned} ((\hbar\omega + m_e c^2) - \hbar\omega')^2 &= c^2 p_e'^2 + (m_e c^2)^2 = c^2 (\hbar\vec{k} - \hbar\vec{k}')^2 + (m_e c^2)^2 \\ &\Rightarrow (\hbar\omega + m_e c^2)^2 - 2\hbar\omega'(\hbar\omega + m_e c^2) + (\hbar\omega')^2 \\ &= c^2 (\hbar\vec{k} - \hbar\vec{k}')^2 + (m_e c^2)^2 \\ &\Rightarrow (\hbar\omega)^2 + 2\hbar\omega m_e c^2 + (m_e c^2)^2 - 2\hbar\omega'(\hbar\omega + m_e c^2) + \left(\frac{\hbar\omega'}{\hbar c k'}\right)^2 \\ &= (c\hbar)^2 (k^2 + 2kk' \cos \theta + k'^2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

وكما هو معلوم، $(\hbar\omega = \hbar c k)$ و $(\hbar\omega' = \hbar c k')$ ، ومنه تصبح العبارة (4.3) كالآتي:

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

$$m_e c^2 (\omega - \omega') = \hbar \omega \omega' - \hbar \omega \omega' \cos \theta = \hbar \omega \omega' (1 - \cos \theta) \quad (5.3)$$

ومنه يمكن كتابة ما يلي:

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\hbar \omega}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \quad (6.3)$$

$$k' = \frac{k}{1 + \frac{\hbar \omega}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \quad (7.3)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{\lambda \hbar \omega}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) = \frac{2\pi \hbar}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (8.3)$$

تصف النتائج الواردة في العبارات (6.3) - (8.3) العلاقة بين التواتر ω' والطاقة ($\hbar \omega'$) لفوتون مشتت بواسطة إلكترون بزواوية انحراف θ ، والتواتر ω والطاقة ($\hbar \omega$) للفوتون الوارد. تشير العبارة (6.3) إلى أن تردد الفوتون المشتت أقل من تردد الفوتون الوارد ($\omega' < \omega$)، ويعتمد هذا الانزياح في التواتر على كل من زاوية الانحراف وطاقة الفوتون الوارد ($\omega' = \omega'(\theta, \hbar \omega)$). تتوافق هذه النتيجة مع ملاحظة كومبتون، حيث قال: "عندما أُوجّه ضوءاً أحادي اللون إلى جسم ما، أرى أضواءً حوله"، أي أنه لاحظ ألواناً مختلفة تحيط بالهدف. عند تحليل هذه النتائج، وجد كومبتون أنها تتعارض مع نظرية ماكسويل الموجية للضوء (Maxwell's wave theory of light)، التي تنص على أن "الضوء مجرد موجة". ولحل هذا التناقض، اقترح كومبتون تفسيراً جسيماً لهذه الظاهرة، مقترحاً اعتبار الضوء كمات ($\hbar \omega$) من الطاقة، وهي فكرة تدعمها العبارات (6.3) - (8.3). في ذلك الوقت، كان يُعتقد أن الضوء يُظهر سلوكاً موجياً فقط؛ وكان كومبتون أول من طرح فكرة أن للضوء خصائص جسيمية وموجية. لم يكن هذا المفهوم جديداً تماماً، فقبل 27 عاماً، اقترح بلاك بالمثل أن الضوء يُظهر سلوكاً موجياً-جسيمياً مزدوجاً لتفسير إشعاع الأجسام العتمة.

وفقاً للعبارة (6.3)، تتأثر قيم تواتر الفوتون المتشتت بالمقدار $(\frac{\hbar \omega}{m_e c^2})$ على النحو الآتي:

• إذا كانت $(\frac{\hbar \omega}{m_e c^2} \ll 1)$ ، فإن طاقة الفوتون المتشتت تتغير في المجال غير النسبي، حيث تكون قيمة تواتر

الفوتون المتشتت هي نفسها تقريبا قيمة تواتر الفوتون الوارد، وهو ما توضحه العبارة (9.3)، ويتم التمييز

بينهما من خلال زاوية التشتت "زاوية الرصد" θ .

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

$$\omega' \cong \left(\frac{\omega}{1 + \underbrace{\frac{\hbar\omega}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}_{\sim 0}} \right) \cong \omega \quad (9.3)$$

عليه، عندما تكون طاقة الفوتون الوارد أصغر بكثير من طاقة سكون الإلكترون ($\hbar\omega \ll m_e c^2$)، يَحْدُثُ تشتت كومبتون في المجال غير النسبي. في هذه الحالة، تبقى طاقة الفوتون المتشتت وكذلك تواتره مطابقة تقريباً لطاقة الفوتون الوارد. ومنه، يعود فقدان الطاقة الضئيل فقط إلى زاوية التشتت θ ، مع حدوث فقدان طاقة ($\Delta E_p = E_p - E'_p = \hbar\omega - \hbar\omega'$) أكبر عند زوايا تشتت أكبر. ومع ذلك، ولأن ($\hbar\omega$) صغيرة جداً مقارنةً بـ ($m_e c^2 \sim 511 \text{ keV}$)، فإن التغير في التواتر يكون ضئيلاً حتى عند زوايا التشتت الكبيرة. وهذا يعكس محدودية قدرة الفوتونات منخفضة الطاقة على نقل طاقة أو دفع حركي كبير إلى الإلكترون.

• أما في المجال النسبي، تكون ($\frac{\hbar\omega}{m_e c^2} \gg 1$)، أي أن:

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \underbrace{\frac{\hbar\omega}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}_{\sim \frac{\hbar\omega}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}} = \frac{m_e c^2}{\hbar(1 - \cos \theta)} \quad (10.3)$$

وعليه تتحكم قيم زاوية التشتت θ في تقدير قيم تواتر الفوتون المتشتت. ففي حالة زاوية تشتت صغيرة، تواتر الفوتون المتشتت يعطى بالعلاقة (11.3) ويطلق عليه تشتت إلى الأمام (forward scattering)، وإذا كانت زاوية تشتت كبيرة، تواتر الفوتون المتشتت يعطى بالعلاقة (12.3) ويطلق عليه تشتت إلى الخلف (backward scattering).

$$\omega' = \frac{m_e c^2}{\hbar} = \frac{c}{\left(\frac{\hbar}{m_e c}\right)} = \frac{c}{\lambda_{ce}} = 2\pi\nu_c = \omega_c = 7.76 \times 10^{20} \text{ rad.s}^{-1} \quad (11.3)$$

$$\omega' = \frac{m_e c^2}{\hbar(1 - \cos \theta)} = \frac{\left(\frac{m_e c^2}{\hbar}\right)}{(1 - \cos \theta)} = \frac{\omega_c}{(1 - \cos \theta)} \quad (12.3)$$

حيث ($\lambda_{ce} = \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{1.054 \times 10^{-34}}{9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8} = 3.86 \times 10^{-13} \text{ m}$) هو طول موجة كومبتون المختزلة.

في المجال النسبي للطاقة ($\hbar\omega \gg m_e c^2$)، تكون طاقة الفوتون الوارد كبيرة جداً مقارنةً بطاقة سكون الإلكترون. في هذه الحالة، يتغير سلوك التشتت بشكل ملحوظ، فعند زوايا تشتت صغيرة، يصبح تواتر الفوتون المتشتت ω' عاليًا للغاية. وبما أن

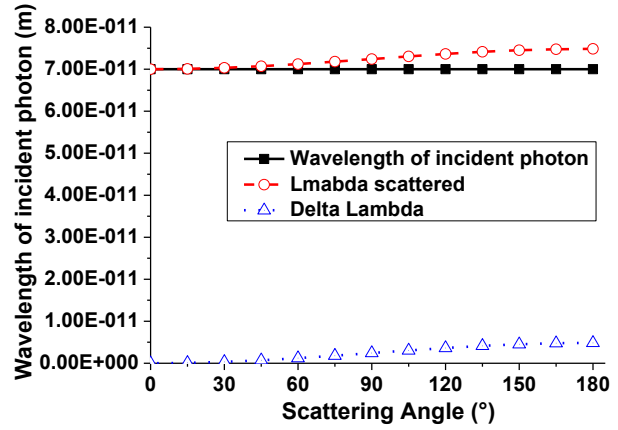
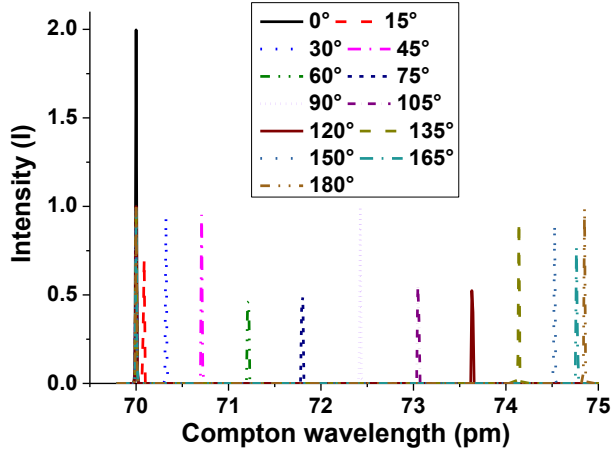
الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

وبما $(\omega' = 2 \frac{m_e c^2}{\hbar \theta^2} = 2 \frac{\omega_c}{\theta^2})$ عند قيم θ صغيرة، فإن تواتر الفوتون المتشتت هو $(1 - \cos \theta = 1 - (1 - \frac{\theta^2}{2}) = \frac{\theta^2}{2})$

أن $(\theta \rightarrow 0)$ ، فإن ω' يميل نظريًا إلى اللانهاية، ولكنه فيزيائيًا محدود بتواتر إلكترون كومبتون $(\omega_c = 7.76 \times 10^{20} \frac{\text{rad}}{\text{s}})$

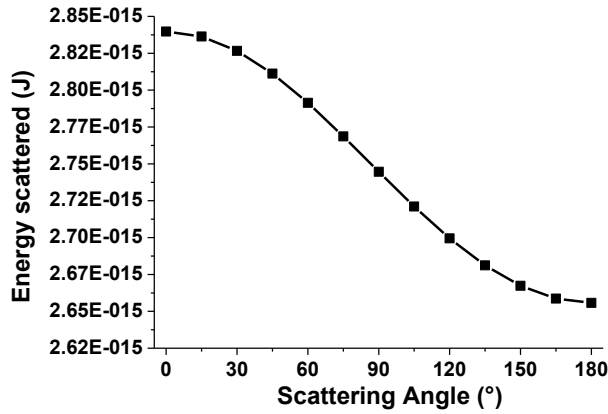
وهو ما تعرضه العبارة (11.3)، وهذا ما ينتج عنه فوتونات مشتتة للأمام تحمل طاقات عالية جدًا تواترها مستقل عن تواتر

الفوتونات الواردة، وهي علامة مميزة لتشتت كومبتون النسبي عند زوايا صغيرة.



الشكل 3.3: تغير شدة الفوتون المتشتت بدلالة تغير زاوية التشتت.

الشكل 3.2: التغير في الطول الموجي للفوتون المتشتت بدلالة زاوية التشتت.



الشكل 3.4: التغير في طاقة الفوتون المتشتت بدلالة تغير زاوية التشتت.

أما عندما تكون زاوية التشتت كبيرة (قريبة من 180°)، يقترب الحد $(1 - \cos \theta)$ من قيمته القصوى وهي 2. ونتيجة

لذلك، يصبح تواتر الفوتون المتشتت $(\omega' = \frac{\omega_c}{2})$ ، مما يعني أن الفوتون المتشتت يفقد جزءًا كبيرًا من طاقته، وهي ظاهرة تُعرف

باسم التشتت إلى الخلف. في هذه الحالة، يتحرك الفوتون المتشتت للخلف بشكل شبه مباشر مع انخفاض كبير في الطاقة.

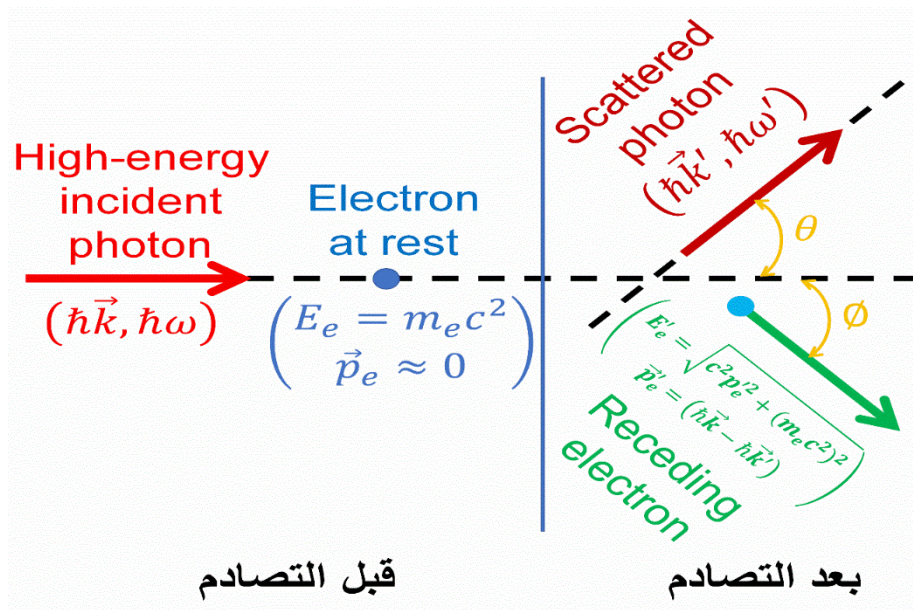
الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

كذلك، وفقاً للعبارتين (11.3) و (12.3)، يكون تواتر الفوتون المتشتت في المجال النسبي للطاقة مستقلاً تماماً عن

تواتر الفوتون الوارد (الأصلي)، ويعتمد بشكل أساسي على تغير زاوية التشتت θ .

2.2.3 تشتت كومبتون وفق القوانين الكومية

تشتت الأضواء عند اصطدامها بالمواد هي ظاهرة طبيعية وشائعة، حيث يُعزى معظم التشتت إلى الإلكترونات، نظراً لصغر كتلتها مقارنةً بالأيونات. ويقوم التشتت أساساً على تبادل كميات فيزيائية بين الفوتونات والإلكترونات بصورة فردية، لا جماعية. وتجدر الإشارة إلى أن غالبية الإلكترونات في الكون مقيدة داخل نوى الذرات، أي أنها توجد ضمن حقول النوى كما هو مفترض في النماذج الفيزيائية. وكما ذكر سابقاً، فإن ظاهرة تأثير كومبتون تختص بدراسة سلوك تصادم الفوتونات العنيفة وعالية الطاقة ($E_p = \hbar\omega$) مع إلكترونات مرتبطة بالنوى، والتي تتميز بطاقة ارتباط منخفضة مقارنةً بطاقة الفوتونات ($|E_e| \ll \hbar\omega$)، حيث E_e تمثل طاقة ارتباط الإلكترون بالنواة.



الشكل 3.5: رسم تخطيطي لظاهرة تشتت الضوء $(\hbar\vec{k}, \hbar\omega)$ بإلكترون.

كما هو موضح في الشكل 3.5، عندما يسقط فوتون وارد حالته الكومية $|1_{\sigma\vec{k}}\rangle$ ، ذو استقطاب σ ، ودفع \vec{k} ، وطاقة

$\hbar ck$ ، على إلكترون في حقل نواة ذرة، وكانت الحالة الابتدائية للإلكترون ($m_e c^2, \vec{p} \cong 0$)، أي أن الإلكترون

ساكن تقريباً بطاقة ربط ضعيفة جداً مقارنةً بطاقة الفوتون الوارد، فإن الفوتون والإلكترون يتبادلان كميات فيزيائية مثل الحركة

والطاقة خلال عملية التشتت. في الحالة النهائية، يختفي الفوتون الابتدائي ويظهر فوتون جديد حالته $|1_{\sigma'\vec{k}'}\rangle$ و استقطاب σ'

ودفع \vec{k}' ، وطاقة $\hbar ck'$ ، مع إلكترون انتقل إلى حالة جديدة $|u_{S'\vec{k}'}\rangle$ توازي طاقته ودفعه الناتجين عن التفاعل. أي أن الحالة

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

النهائية لا تحتوي على الفوتون الابتدائي، بل على الفوتون المنتشتت والإلكترون المنتقل. عليه، يتجلى في هذه العملية مبدأ حفظ الطاقة والدفع، كما تمثل تطبيقاً مباشراً لعلاقات الكم في فضاء الحالات، حيث يتم تمثيل الفوتونات بحالات عديدة (Fock states) والإلكترونات بدوال موجية سبينورية (Spinor wavefunctions).

أما فيما يتعلق بوصف حالة الجملة قبل التصادم وبعده، فقد تم توضيحهما في العبارتين (1.3) و (2.3)، على التوالي، مع التنويه إلى أن التحليل سيتم في الإطار النسبي للطاقة ($\frac{\hbar\omega}{m_e c^2} \gg 1$)، نظرًا للطاقات العالية جدًا للفوتونات الواردة مقارنة بطاقة الإلكترونات ($\hbar\omega \gg m_e c^2$). وفقا لهذه المعطيات، مؤثر طاقة الجملة تفاعل "إلكترون-ضوء" التي تصف أحوالها النسبية هو مؤثر ديراك الموضح في العبارة (13.3).

$$\begin{aligned}\hat{H} &= c\vec{\alpha} \cdot \hat{p} + m_e c^2 \beta + \hat{H}^R = c\vec{\alpha} \cdot \left(\hat{\mathcal{P}} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right) + m_e c^2 \beta + \hat{H}^R \\ &= \underbrace{c\vec{\alpha} \cdot \hat{\mathcal{P}} + m_e c^2 \beta}_{\hat{H}^P} + \hat{H}^R - \underbrace{e\vec{\alpha} \cdot \vec{A}(\vec{r})}_{\hat{H}^{PR}}\end{aligned}\quad (13.3)$$

ومنه، يمكن عرض مؤثر طاقة الجملة تفاعل "إلكترون-ضوء" على الشكل الآتي:

$$\hat{H} = \hat{H}^P + \hat{H}^R + \hat{H}^{PR} = \hat{H}_0 + \hat{H}^{PR} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (14.3)$$

حيث أن \hat{H} هو مؤثر الطاقة الكلية لجملة (مادة-أضواء)، \hat{H}^R هو مؤثر طاقة الأضواء الصرفة، \hat{H}^P هو مؤثر طاقة المادة الصرفة، ($\hat{H}^{PR} = \hat{V} = -e\vec{\alpha} \cdot \vec{A}(\vec{r})$) هو مؤثر طاقة الجملة تفاعل مادة-أضواء، \hat{H}_0 هو مؤثر طاقة يصف الحالة المستقرة للجملة مادة-أضواء، و \hat{V} يعد اضطراباً للمؤثر \hat{H}_0 مما يجعل الجملة تنتقل من حالة إلى أخرى من حالات \hat{H}_0 . كذلك، المادة متمثلة في الشحنة الأولية e ومصفوفات ديراك $\vec{\alpha}$ المسؤولة على لف المادة، وأما الأضواء فهي الفوتونات المتمثلة في كمونها الشعاعي $\vec{A}(\vec{r})$ ، والذي يعرف كالاتي:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{\sigma\vec{k}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}} \vec{\epsilon}_{\sigma\vec{k}} \left(a_{\sigma\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + a_{\sigma\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \quad (15.3)$$

وفيما يخص معادلة ديراك لحركة إلكترون في الحقل الكهرومغناطيسي، فهي موضحة في العبارة (16.3).

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi = (\hat{H}^P + \hat{H}^R + \hat{H}^{PR}) \psi = (\hat{H}_0 + \hat{H}^{PR}) \psi = (\hat{H}_0 + \hat{V}) \psi \quad (16.3)$$

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

ولحل هذه المعادلة، فيجب تهيئة المؤثر \hat{H} ، عليه يجب تحديد القيم والأشعة الخاصة.

1.2.2.3 القيم الخاصة والأشعة الخاصة للمؤثر

فيما يخص معادلة القيم الخاصة للمؤثر \hat{H}_0 ، فهي تعطى كالاتي:

$$\hat{H}_0|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle \quad (17.3)$$

وكما هو معلوم، مؤثر طاقة الحالة المستقرة للجلملة مادة-أضواء هو عبارة عن مجموع مؤثرين، $(\hat{H}_0 = \hat{H}^P + \hat{H}^R)$ ،

عليه، فإن القيم الخاصة للمؤثر \hat{H}_0 تساوي مجموع القيم الخاصة $(E_R + E_P)$ ، وأشعته الخاصة تكون على شكل ضرب شعاعين $(|\varphi_P\rangle|\varphi_R\rangle)$ ، علما أنهما يحققان معادلة القيم الخاصة.

$$|\varphi\rangle = |\varphi_P\rangle|\varphi_R\rangle \Rightarrow \begin{cases} \hat{H}^P|\varphi_P\rangle = E_P|\varphi_P\rangle \\ \hat{H}^R|\varphi_R\rangle = E_R|\varphi_R\rangle \end{cases} \quad (18.3)$$

وكما تمت الإشارة له في العبارة (1. 61)، عبارة مؤثر طاقة الأضواء الصرفة هي:

$$\hat{H}^R = \sum_{\sigma\vec{k}} \hbar ck \left(a_{\sigma\vec{k}}^\dagger a_{\sigma\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (19.3)$$

حيث أن $a_{\sigma\vec{k}}$ و $a_{\sigma\vec{k}}^\dagger$ هما مؤثر إحداث الفوتون (λ, \vec{k}) ومؤثر إفناء الفوتون (λ, \vec{k}) ، على التوالي.

عليه، القيم الخاصة والأشعة الخاصة للمؤثر \hat{H}^R هما موضحان في العبارتين (20.3) و (21.3)، على التوالي.

$$E_R = \sum_{\sigma\vec{k}} \hbar ck \left(n_{\sigma\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (20.3)$$

$$|\varphi_R\rangle = \left| n_{\sigma_1\vec{k}_1} n_{\sigma_2\vec{k}_2} n_{\sigma_3\vec{k}_3} n_{\sigma_4\vec{k}_4} \dots \dots n_{\sigma_n\vec{k}_n} \right\rangle \quad (21.3)$$

علما أن الأشعة الخاصة للمؤثر \hat{H}^R الموافقة للنمط n_λ يمكن كتابتها كالاتي:

$$|\varphi_{n_\lambda}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_\lambda!}} \left(a_{\sigma\vec{k}}^\dagger \right)^{n_\lambda} |\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_\lambda!}} \left(a_{\sigma\vec{k}}^\dagger \right)^{n_\lambda} |0\rangle \quad (22.3)$$

حيث أن $n_{\sigma\vec{k}}$ و n_λ يعبران عن عدد الفوتونات في النمط $\sigma\vec{k}$ و λ ، على التوالي.

2.2.2.3 حل معادلة ديراك

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

يمكن كتابة معادلة ديراك ($\hat{H}^P |\varphi_P\rangle = E_P |\varphi_P\rangle$) على الشكل الآتي:

$$\hat{H}^P |\varphi_P\rangle = E_P |\varphi_P\rangle \Rightarrow (c\vec{\alpha} \cdot \hat{\mathcal{P}} + m_e c^2 \beta) |\varphi_P\rangle = E_P |\varphi_P\rangle \quad (23.3)$$

وفقا للعبارة (23.2)، القيم الخاصة للمؤثر \hat{H}^P هي:

$$E_P = \pm E_e = \pm \sqrt{c^2 \mathcal{P}^2 + (m_e c^2)^2} \quad (24.3)$$

أما حل معادلة ديراك الموضحة في العبارة (23.3)، فقد تم التطرق له سابقا في الجزء (حل معادلة ديراك لجسيم طليق

في حالة حركة)، وحلها من الشكل:

$$|\varphi_{PS}\rangle = \begin{pmatrix} |\varphi_{P1}\rangle \\ |\varphi_{P2}\rangle \\ |\varphi_{P3}\rangle \\ |\varphi_{P4}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |u_1(\vec{k}, E_e)\rangle \\ |u_2(\vec{k}, E_e)\rangle \\ |u_3(\vec{k}, E_e)\rangle \\ |u_4(\vec{k}, E_e)\rangle \end{pmatrix} \frac{1}{L^2} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = \frac{1}{L^2} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} |u_S(\vec{k}, E_e)\rangle, S = 1, 2, 3, 4 \quad (25.3)$$

علما أن $(\frac{1}{L^2} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})})$ يأخذ بالاعتبار الجزء الفضائي للدالة $|\varphi_P\rangle$ ، و $|u_S(\vec{k}, E_e)\rangle$ يأخذ بعين الاعتبار الجزء المتعلق

باللف لنفس الدالة، حيث أن العبارة (26.3) تضمن أن مجموعة الحلول ذات الموجة المستوية للسبينورات تشكل أساساً تاماً، متعامداً ومتجانساً، وهو جانب أساسي لتوسيع وتحليل حالات الحقول الكمومية، خاصة في عمليات التشتت حيث يلعب حفظ الدفع والسبينور دوراً مركزياً.

$$\langle \varphi_{PS\vec{k}} | \varphi_{PS'\vec{k}'} \rangle = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{S,S'} \quad (26.3)$$

حيث أن $\delta(\vec{k} - \vec{k}')$ يمثل دالة دلتا ديراك لحفظ الدفع بين الحالة الابتدائية والنهائية.

ووفقا للعبارة (26.2)، الحل التام (الأشعة الخاصة التامة) للمعادلة (23.3) هي الحل الأربعة التالية:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\varphi_{P1}\rangle = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} |u_1(\vec{k}, E)\rangle = \sqrt{\frac{(E_e + m_e c^2)}{2E_e}} \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c\mathcal{P}_z}{E_p + m_e c^2} \\ \frac{c(\mathcal{P}_x + i\mathcal{P}_y)}{E_p + m_e c^2} \end{pmatrix} \\ |\varphi_{P2}\rangle = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} |u_2(\vec{k}, E)\rangle = \sqrt{\frac{(E_e + m_e c^2)}{2E_e}} \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(\mathcal{P}_x - i\mathcal{P}_y)}{E_p + m_e c^2} \\ \frac{-c\mathcal{P}_z}{E_p + m_e c^2} \end{pmatrix} \\ |\varphi_{P3}\rangle = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} |u_3(\vec{k}, E)\rangle = \sqrt{\frac{(E_e + m_e c^2)}{2E_e}} \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \begin{pmatrix} \frac{c\mathcal{P}_z}{E_p - m_e c^2} \\ \frac{c(\mathcal{P}_x + i\mathcal{P}_y)}{E_p - m_e c^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |\varphi_{P4}\rangle = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} |u_4(\vec{k}, E)\rangle = \sqrt{\frac{(E_e + m_e c^2)}{2E_e}} \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \begin{pmatrix} \frac{c(\mathcal{P}_x - i\mathcal{P}_y)}{E_p - m_e c^2} \\ \frac{-c\mathcal{P}_z}{E_p - m_e c^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (27.3)$$

علما أن السبينورين $|u_1(\vec{k}, E)\rangle$ و $|u_2(\vec{k}, E)\rangle$ يصفان أحوال إلكترون كتلته m_e ، دفعه الخطي القانوني $\vec{\mathcal{P}}$ ، وطاقته

$(E_p = +E_e = +\sqrt{c^2\mathcal{P}^2 + (m_e c^2)^2})$. أما السبينوران $|u_3(\vec{k}, E)\rangle$ و $|u_4(\vec{k}, E)\rangle$ يصفان أحوال شبه الإلكترون

(البوزترون) الذي كتلته m_e ، دفعه الخطي القانوني $\vec{\mathcal{P}}$ ، وطاقته $(E_p = -E_e = -\sqrt{c^2\mathcal{P}^2 + (m_e c^2)^2})$.

عليه، القيم الخاصة للمؤثر \hat{H}_0 هي:

$$E = E_R + E_p = \sum_{\sigma\vec{k}} \hbar c k \left(n_{\sigma\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \pm E_e = \sum_{\sigma\vec{k}} \hbar c k \left(n_{\sigma\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \pm \sqrt{c^2\mathcal{P}^2 + (m_e c^2)^2} \quad (28.3)$$

أما الأشعة الخاصة للمؤثر \hat{H}_0 هي:

$$|\varphi\rangle = |\varphi_P\rangle |\varphi_R\rangle = |\varphi_{PS\vec{k}}\rangle |\varphi_R\rangle = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} |u_{S\vec{k}}\rangle |n_{\sigma_1\vec{k}_1} n_{\sigma_2\vec{k}_2} n_{\sigma_3\vec{k}_3} n_{\sigma_4\vec{k}_4} \dots \dots \dots n_{\sigma_n\vec{k}_n}\rangle \quad (29.3)$$

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

3.2.2.3 احتمال انتقال الجملة (إلكترون-فوتون) من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية خلال وحدة الزمن

في ظاهرة تأثير كومبتون، يُعدُّ حساب احتمال انتقال الجملة (فوتون-إلكترون) من الحالة الابتدائية $|\varphi_i\rangle$ إلى الحالة النهائية $|\varphi_f\rangle$ ، وكلاهما من حالات الهاملتوني المستقر \hat{H}_0 ، خلال وحدة الزمن، خطوة أساسية تُسهم في حساب المقطع العرضي التفاضلي للتصادم. عند اللحظة $(t = 0)$ ، تكون الجملة في الحالة المستقرة $|\varphi_i\rangle$ ، وهي حالة ذات طاقة محددة من طيف المؤثر \hat{H}_0 ، وبعد تأثير الفوتون الوارد على الإلكترون عبر تأثير التفاعل $\hat{V} = -e\vec{\alpha} \cdot \vec{A}(\vec{r})$ ، تنتقل الجملة إلى الحالة النهائية $|\varphi_f\rangle$ التابعة أيضاً للهاملتوني \hat{H}_0 ، وذلك خلال زمن كافٍ لاعتبار التفاعل قد تم. بناءً عليه، فإن احتمال الانتقال الكمومي من الحالة $|\varphi_i\rangle$ إلى الحالة $|\varphi_f\rangle$ الناتج عن الفعل \hat{V} خلال فترة زمنية طويلة يعطى كالآتي:

$$T_i^f = \frac{2\pi}{\hbar} |\Gamma_{fi}|^2 \delta(E_i - E_f) \quad (30.3)$$

فيما يخص المقدار $\delta(E_i - E_f)$ ، فهو يعرف بدالة ديراك لحفظ الطاقة بين الحالة الابتدائية والنهائية.

حيث Γ_{fi} هو عنصر مصفوفة الاضطراب وهو عنصر مصفوفي انتقالي يصف مقدار (سعة) الانتقال من الحالة الابتدائية

i إلى الحالة النهائية f ، و Γ هو مؤثر سلسلة الاضطراب، ويعطى كالآتي:

$$\Gamma = V + VGV + VGVGV + \dots \quad (31.3)$$

أما G ، فهي دالة جرين (The Green's function)، وهي موضحة في العبارة (32.3)، وهي تصف استجابة النظام

الكمومي للاضطراب، مُخصِّصاً كيفية انتشار الحالات الافتراضية (الوهمية) الوسيطة بين التفاعلات، وتلعب كذلك دوراً محورياً

في نظرية التشتت الكمي (Quantum scattering theory)، وخاصةً في توسيع مؤثر سلسلة الاضطراب Γ .

$$G = \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\delta} \quad (32.3)$$

يمكن كتابة عنصر مصفوفة الاضطراب كالآتي:

$$\Gamma_{fi} = V_{fi} + \sum_{\gamma_v} \frac{V_{f\gamma_v} V_{\gamma_v i}}{E_i - E_{\gamma_v}} \dots \cong \langle \varphi_f | \Gamma | \varphi_i \rangle \cong \langle \varphi_f | V | \varphi_i \rangle + \sum_{\gamma_v} \frac{\langle \varphi_f | V | \varphi_{\gamma_v} \rangle \langle \varphi_{\gamma_v} | V | \varphi_i \rangle}{E_i - E_{\gamma_v}} + \dots \quad (33.3)$$

من المهم ملاحظة أن الحالات الافتراضية الوسيطة $|\varphi_{\gamma_v}\rangle$ التي تظهر في سلسلة الاضطراب لا تظهر في التكوينات

الأولية أو النهائية للنظام، لأنها ليست أشعة خاصة للمؤثر \hat{H}_0 ، وبالتالي لا تساهم في الطاقة. ومع ذلك، فهي أساسية في العمليات

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

الداخلية للتفاعل، حيث تعمل على حفظ الدفع الخطي. عليه، هذه الحالات الافتراضية غير قابلة للملاحظة، ولكنها تلعب دورًا رياضيًا حاسمًا كوسيط في التحولات ضمن عملية التشتت.

من خلال التعبير الرياضي، يمكن ملاحظة أن الحد الأول في سلسلة الاضطراب ($V_{fi} = \langle \varphi_f | V | \varphi_i \rangle$) لا يساهم في

عملية التشتت، لأنه يحتوي على مؤثرات إحداث $a_{\lambda\vec{k}}^\dagger$ وإفناء $a_{\lambda\vec{k}}$ خطية فقط، وبالتالي، فإن عنصر مصفوفة الاضطراب لهما يندعم تلقائيًا إذا لم تختلف الحالة الابتدائية (φ_i) عن الحالة النهائية (φ_f) بوجود أو غياب فوتون واحد على الأقل. وهذا يتعارض مع جوهر ظاهرة التشتت، الذي يتطلب تغييرًا فعليًا في عدد الجسيمات (مثل امتصاص فوتون أو انبعائه). لذلك، فإن مساهمة هذا الحد تكون معدومة بسبب التعامد بين الحالات الكمومية المختلفة. أما الحد الثاني من سلسلة الاضطراب

$(\sum_{\gamma\nu} \frac{\langle \varphi_f | V | \varphi_{\gamma\nu} \rangle \langle \varphi_{\gamma\nu} | V | \varphi_i \rangle}{E_i - E_{\gamma\nu}})$ ، والذي يتناسب مع V^2 ، فهو يحتوي على تراكيب ثنائية من مؤثرات الإحداث والإفناء مثل

$((a_{\lambda\vec{k}})^2, (a_{\lambda\vec{k}}^\dagger)^2, a_{\lambda\vec{k}} a_{\lambda\vec{k}}^\dagger, a_{\lambda\vec{k}}^\dagger a_{\lambda\vec{k}})$ ، ما يتيح إمكانية الانتقال بين الحالات الكمومية التي تختلف بفوتون، وبالتالي هو الحد

الأول غير المعدوم والمساهم فعليًا في ظاهرة التشتت. الحدين $a_{\lambda\vec{k}} a_{\lambda\vec{k}}^\dagger$ و $a_{\lambda\vec{k}}^\dagger a_{\lambda\vec{k}}$ يساهمان في التشتت لأن تأثيرهما لا يغير

في عدد فوتونات الحالة الابتدائية والحالة النهائية، وهو بالضبط حالة التشتت. أما الحدين $(a_{\lambda\vec{k}}^\dagger)^2$ و $(a_{\lambda\vec{k}})^2$ لا يساهمان في

ظاهرة التشتت. أما بقية حدود سلسلة الاضطراب فسوف يتم إهمالها، لأن مساهمة الحد الثاني من سلسلة الاضطراب تحوي كل

المعلومات الضرورية حول ظاهرة تشتت فوتون بالإلكترون. عليه، عبارة احتمال الانتقال خلال وحدة الزمن هي:

$$T_i^f = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_{\gamma\nu} \frac{\langle \varphi_f | V | \varphi_{\gamma\nu} \rangle \langle \varphi_{\gamma\nu} | V | \varphi_i \rangle}{E_i - E_{\gamma\nu}} \right|^2 \delta(E_i - E_f) \quad (34.3)$$

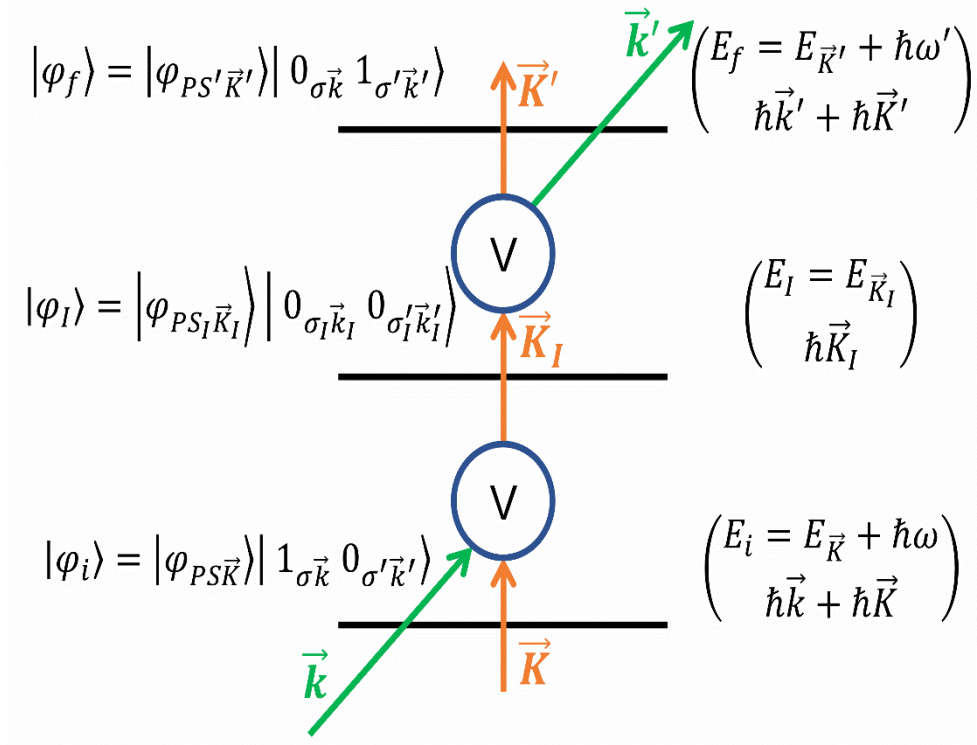
بتعويض $\hat{V} = -e\vec{\alpha} \cdot \vec{A}(\vec{r})$ في العبارة (34.3)، يتم الحصول على مايلي:

$$T_i^f = \frac{2\pi}{\hbar} e^4 \left| \sum_{\gamma\nu} \frac{\langle \varphi_f | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_{\gamma\nu} \rangle \langle \varphi_{\gamma\nu} | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_i \rangle}{E_i - E_{\gamma\nu}} \right|^2 \delta(E_i - E_f) \quad (35.3)$$

هناك حالتان وهميتان تساهمان في عملية تشتت فوتون فقط، وبقية الحالات الوهمية لا تساهم. فالحالة الوهمية المساهمة

الأولى هي التي توافق إزالة الفوتون $\sigma\vec{k}$ بالتأثير V الأول، فنفضي إلى الحالة الوهمية $|0_{\sigma_1\vec{k}_1} 0_{\sigma_1'\vec{k}_1'}\rangle$ $|\varphi_i\rangle = |\varphi_{PS_1\vec{k}_1}\rangle$

الخالية من الأضواء، ثم يتم إحداث الفوتون $\sigma'\vec{k}'$ من التأثير V الثاني كما هو موضح في الشكل 3.6.

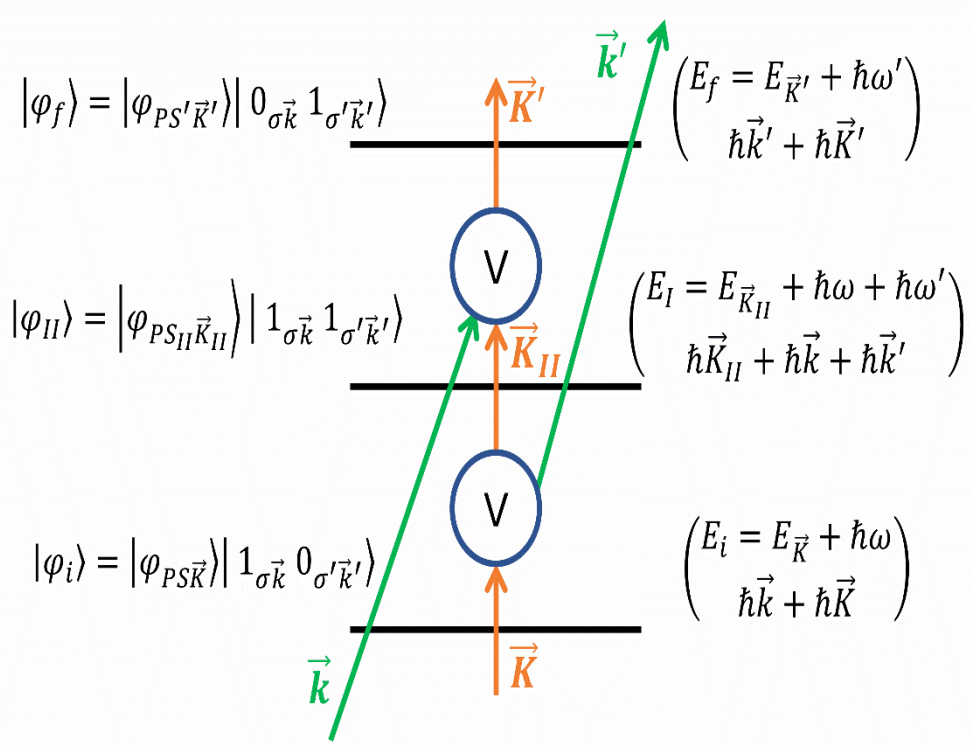


الشكل 3.6: رسم تخطيطي للحالة الوهمية المساهمة الأولى.

أما الحالة الوهمية المساهمة الثانية هي التي توافق إحداث الفوتون $\sigma'\vec{k}'$ بالتأثير V الأول، فيفرضي للحالة

$$|\varphi_{II}\rangle = |\varphi_{PS_{II}\vec{K}_{II}}\rangle |1_{\sigma_I\vec{k}_I} 1_{\sigma'_I\vec{k}'_I}\rangle$$

ثم يتم إقناء الفوتون $\sigma\vec{k}$ بالتأثير V الثاني، وهو ما يوضحه الشكل 3.7.



الشكل 3. 7: رسم تخطيطي للحالة الوهمية المساهمة الثانية.

وفقا لما يوضحه الشكل 3. 6 و الشكل 3. 7 وبعد الجمع على الحالات الوهمية، العبارة (35. 3) تغدو كالآتي :

$$T_i^f = \frac{2\pi}{\hbar} e^4 \left| \sum \frac{\langle \varphi_f | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_I \rangle \langle \varphi_I | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_i \rangle}{E_i - E_I} + \sum \frac{\langle \varphi_f | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_{II} \rangle \langle \varphi_{II} | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_i \rangle}{E_i - E_{II}} \right|^2 \delta(E_i - E_f) \quad (36. 3)$$

الآن سيتم حساب عنصر المصفوفة، علما أن كل الحالات وكل التأثيرات معلومة. عليه، حساب عنصر المصفوفة

هو كالآتي: $\langle \varphi_I | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_i \rangle$

$$\langle \varphi_I | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_i \rangle = \langle \varphi_{PS'I} | \langle 0_{\sigma\vec{k}} | \langle 0_{\sigma'\vec{k}'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | 1_{\sigma\vec{k}} \rangle | 0_{\sigma'\vec{k}'} \rangle | \varphi_{PSi} \rangle \quad (37. 3)$$

من الملاحظ أن تأثير \vec{A} على الحالة النهائية $| 0_{\sigma'\vec{k}'} \rangle$ يؤدي إلى انعدام عنصر المصفوفة، وعليه،

$$\langle 0_{\sigma'\vec{k}'} | 0_{\sigma'\vec{k}'} \rangle = 1. \text{ كذلك، تأثير } a_{\sigma\vec{k}}^\dagger \text{ على الحالة } | 1_{\sigma\vec{k}} \rangle \text{ يعدم النتيجة، وتأثير } a_{\sigma\vec{k}} \text{ على } | 1_{\sigma\vec{k}} \rangle \text{ يساهم، ومنه:}$$

$$\langle \varphi_I | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_i \rangle = \langle \varphi_{PS'I} | \langle 0_{\sigma\vec{k}} | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | 1_{\sigma\vec{k}} \rangle | \varphi_{PSi} \rangle =$$

$$\left\langle \varphi_{PS'I} \left| \sum_{\sigma_I \vec{k}_I} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}} \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma_I \vec{k}_I} \left\langle 0_{\sigma\vec{k}} \left| a_{\sigma_I \vec{k}_I} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right| 1_{\sigma\vec{k}} \right\rangle \right| \varphi_{PSi} \right\rangle = \quad (38. 3)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \varphi_{PS'I} \left| \sum_{\sigma_I \vec{k}_I} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}} \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma_I \vec{k}_I} \delta_{\sigma, \sigma_I} \delta_{\vec{k}, \vec{k}_I} \left\langle 0_{\sigma \vec{k}} \left| e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right| 1_{\sigma \vec{k}} \right\rangle \right| \varphi_{PSi} \right\rangle = \\ & \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}} \left\langle \varphi_{PS'I} \left| \left\langle 0_{\sigma \vec{k}} \left| \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right| 1_{\sigma \vec{k}} \right\rangle \right| \varphi_{PSi} \right\rangle = \\ & \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}} \langle u_{KIS_I} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{k}} | u_{KS} \rangle \frac{1}{L^3} \int d^3 r e^{i(\vec{K} + \vec{k} - \vec{K}_I) \cdot \vec{r}} \end{aligned}$$

ومنه نتيجة حساب عنصر المصفوفة $\langle \varphi_I | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_i \rangle$ هي:

$$\langle \varphi_I | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_i \rangle = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}} \langle u_{KIS_I} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{k}} | u_{KS} \rangle \delta_{\vec{K} + \vec{k}, \vec{K}_I} \quad (39.3)$$

فيما يخص الكمية $\delta_{\vec{K} + \vec{k}, \vec{K}_I}$ ، فتدل على أنّ الانتقال من الحالة الابتدائية $|\varphi_i\rangle$ إلى الحالة الوهمية الأولى $|\varphi_I\rangle$ يستوجب

حفظ الدفع الخطي.

أما فيما يخص حساب عنصر المصفوفة $\langle \varphi_f | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_I \rangle$ ، فهو كالآتي:

$$\langle \varphi_f | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_I \rangle = \langle \varphi_{PS'f} | \langle 0_{\sigma \vec{k}} | \langle 1_{\sigma' \vec{k}'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | 0_{\sigma \vec{k}} \rangle | 0_{\sigma' \vec{k}'} \rangle | \varphi_{PS'I} \rangle \quad (40.3)$$

من الملاحظ أنه لا ينبغي أن يُأثر \vec{A} على الحالة الابتدائية $|0_{\sigma \vec{k}}\rangle$ للفوتونات لأنه يؤدي إلى انعدام عنصر المصفوفة،

وعليه، $\langle 0_{\sigma \vec{k}} | 0_{\sigma \vec{k}} \rangle = 1$. كذلك، تأثير $a_{\sigma_I \vec{k}_I}$ على الحالة $|0_{\sigma' \vec{k}'}\rangle$ يَعمِد النتيجة، وتأثير $a_{\sigma' \vec{k}'}^\dagger$ على $|0_{\sigma' \vec{k}'}\rangle$ يساهم، ومنه:

$$\langle \varphi_f | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_I \rangle = \langle \varphi_{PS'f} | \langle 1_{\sigma' \vec{k}'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | 0_{\sigma' \vec{k}'} \rangle | \varphi_{PS'I} \rangle \quad (41.3)$$

وبالسير على نفس الخطوات المتبعة في الحساب المُجرى في العبارة (38.3)، تكون نتيجة حساب عنصر المصفوفة

$\langle \varphi_f | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_I \rangle$ كالآتي:

$$\langle \varphi_f | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_I \rangle = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k'L^3}} \langle u_{K'IS'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma' \vec{k}'} | u_{KIS_I} \rangle \delta_{\vec{K}_I, \vec{k}' + \vec{K}'} \quad (42.3)$$

أما فيما يخص حساب عنصر المصفوفة $\langle \varphi_{II} | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_i \rangle$ ، فهو كالآتي:

$$\langle \varphi_{II} | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | \varphi_i \rangle = \langle \varphi_{PS'II} | \langle 1_{\sigma \vec{k}} | \langle 1_{\sigma' \vec{k}'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{A} | 1_{\sigma \vec{k}} \rangle | 0_{\sigma' \vec{k}'} \rangle | \varphi_{PSi} \rangle \quad (43.3)$$

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

من الملاحظ أنه لا ينبغي أن يُأثر \vec{A} على الحالة الابتدائية $|1_{\sigma\vec{k}}\rangle$ للفوتونات لأنه يؤدي إلى إنعدام عنصر المصفوفة، وعليه، $\langle 1_{\sigma\vec{k}}|1_{\sigma\vec{k}}\rangle = 1$. كذلك، تأثير $a_{\sigma_1\vec{k}_1}$ على الحالة $|0_{\sigma'\vec{k}'}\rangle$ يَعدَم النتيجة، وتأثير $a_{\sigma_1\vec{k}_1}^\dagger$ على $|0_{\sigma'\vec{k}'}\rangle$ يساهم، ومنه:

$$\langle\varphi_{II}|\vec{\alpha}\cdot\vec{A}|\varphi_i\rangle = \langle\varphi_{PS'II}|\langle 1_{\sigma'\vec{k}'}|\vec{\alpha}\cdot\vec{A}|0_{\sigma'\vec{k}'}\rangle|\varphi_{PSi}\rangle \quad (44.3)$$

وبالسير على نفس الخطوات المتبعة في الحساب المُجرى في العبارة (38.3) وبإستعمال نظم الشعاع

$$\langle 1_{\sigma'\vec{k}'}|1_{\sigma'\vec{k}'}\rangle = 1$$

تكون نتيجة حساب عنصر المصفوفة $\langle\varphi_{II}|\vec{\alpha}\cdot\vec{A}|\varphi_i\rangle$ كالآتي:

$$\langle\varphi_{II}|\vec{\alpha}\cdot\vec{A}|\varphi_i\rangle = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k'L^3}} \langle u_{KSII}|\vec{\alpha}\cdot\vec{\epsilon}_{\sigma'\vec{k}'}|u_{KS}\rangle \delta_{\vec{k}_{II},\vec{k}-\vec{k}'} \quad (45.3)$$

أما فيما يخص حساب عنصر المصفوفة $\langle\varphi_f|\vec{\alpha}\cdot\vec{A}|\varphi_{II}\rangle$ ، فهو كالآتي:

$$\langle\varphi_f|\vec{\alpha}\cdot\vec{A}|\varphi_{II}\rangle = \langle\varphi_{PS'f}|\langle 0_{\sigma\vec{k}}|\langle 1_{\sigma'\vec{k}'}|\vec{\alpha}\cdot\vec{A}|1_{\sigma\vec{k}}\rangle|1_{\sigma'\vec{k}'}\rangle|\varphi_{PS'II}\rangle \quad (46.3)$$

من الملاحظ أنه لا ينبغي أن يُأثر \vec{A} على الحالة النهائية $|1_{\sigma'\vec{k}'}\rangle$ للفوتونات لأنه يؤدي إلى إنعدام عنصر المصفوفة،

وعليه، $\langle 1_{\sigma'\vec{k}'}|1_{\sigma'\vec{k}'}\rangle = 1$. كذلك، تأثير $a_{\sigma_1\vec{k}_1}^\dagger$ على الحالة $|1_{\sigma\vec{k}}\rangle$ يَعدَم النتيجة، وتأثير $a_{\sigma_1\vec{k}_1}$ على $|1_{\sigma\vec{k}}\rangle$ يساهم، ومنه:

$$\langle\varphi_f|\vec{\alpha}\cdot\vec{A}|\varphi_{II}\rangle = \langle\varphi_{PS'f}|\langle 0_{\sigma\vec{k}}|\vec{\alpha}\cdot\vec{A}|1_{\sigma\vec{k}}\rangle|\varphi_{PS'II}\rangle \quad (47.3)$$

وبالسير على نفس الخطوات المتبعة في الحساب المُجرى في العبارة (38.3) وبإستعمال نظم الشعاع

$$\langle 0_{\sigma\vec{k}}|0_{\sigma\vec{k}}\rangle = 1$$

تكون نتيجة حساب عنصر المصفوفة $\langle\varphi_f|\vec{\alpha}\cdot\vec{A}|\varphi_{II}\rangle$ كالآتي:

$$\langle\varphi_f|\vec{\alpha}\cdot\vec{A}|\varphi_{II}\rangle = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}} \langle u_{K'S'}|\vec{\alpha}\cdot\vec{\epsilon}_{\sigma\vec{k}}|u_{KISII}\rangle \delta_{\vec{k}_{II},\vec{k}'-\vec{k}} \quad (48.3)$$

فيما يخص عبارة الطاقة في مقام الحد الأول والثاني فهي كالآتي:

$$\begin{cases} E_i - E_{I=I} = E_{\vec{k}} + \hbar\omega - E_{\vec{k}_I} \\ E_i - E_{II} = E_{\vec{k}} - \hbar\omega' - E_{\vec{k}_{II}} \end{cases} \quad (49.3)$$

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

وفيما يخص الانتقال من الحالة الوهمية إلى الحالة النهائية، فهو يستوجب حفظ الدفع الخطي كما هو موضح في العبارة

(50.3).

$$\begin{cases} \vec{K}_I = \vec{k} + \vec{K}, & \hbar\vec{k} + \hbar\vec{K} = \hbar\vec{K}_I = \hbar\vec{k}' + \hbar\vec{K}' \\ \vec{K}_{II} = \vec{K} - \vec{k}', & \hbar\vec{k} + \hbar\vec{K} = \hbar\vec{k} + \hbar\vec{k}' + \hbar\vec{K}_{II} = \hbar\vec{k}' + \hbar\vec{K}' \end{cases} \quad (50.3)$$

بغض النظر عن الدوال دلتا، التي تحوي في طياتها حفظ الدفع الخطي، وتعويض عناصر المصفوفة، وعبارة في

العبارة (36.3)، يتم الحصول على ما يلي:

$$T_i^f = \frac{8\pi^3 \hbar c^2}{k' k L^6} e^4 \left| \sum_{S'} \frac{\langle u_{K'S'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma' \vec{k}'} | u_{K_I S_I} \rangle \langle u_{K_I S_I} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{k}} | u_{K S} \rangle}{E_{\vec{K}} + \hbar\omega - E_{\vec{k} + \vec{K}}} \right| +$$

$$\left| \sum_{S'} \frac{\langle u_{K'S'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{k}} | u_{K_{II} S_{II}} \rangle \langle u_{K S} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma' \vec{k}'} | u_{K S} \rangle}{E_{\vec{K}} - \hbar\omega' - E_{\vec{K} - \vec{k}'}} \right|^2 \delta(E_i - E_f) =$$

(51.3)

$$\frac{8\pi^3 \hbar c^2}{k' k L^6} e^4 \left| \sum_{S'} \frac{\langle u_{f S'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}') | u_{I S'} \rangle \langle u_{I S'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}) | u_{i S} \rangle}{E_{\vec{K}} + \hbar\omega - E_{\vec{k} + \vec{K}}} \right| +$$

$$\left| \sum_{S'} \frac{\langle u_{f S'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}) | u_{II S'} \rangle \langle u_{II S'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}') | u_{i S} \rangle}{E_{\vec{K}} - \hbar\omega' - E_{\vec{K} - \vec{k}'}} \right|^2 \delta(E_i - E_f)$$

ومنه، تصبح عبارة احتمال انتقال الجملة (إلكترون-فوتون) من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية خلال وحدة الزمن

كالآتي:

$$T_i^f = \frac{8\pi^3 \hbar c^2}{k' k L^6} e^4 |\sum_{S'} (W_1 + W_2)|^2 \delta(E_i - E_f) \quad (52.3)$$

الآن سيتم معالجة الحد W_1 بضربه وقسمته على مرافق مقامه، وهو ما تُظهره العبارة (53.3).

$$W_1 = \frac{E_{\vec{K}} + \hbar\omega + E_{\vec{k} + \vec{K}}}{E_{\vec{K}} + \hbar\omega + E_{\vec{k} + \vec{K}}} \frac{\langle u_{K'S'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma' \vec{k}'} | u_{K_I S_I} \rangle \langle u_{K_I S_I} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{k}} | u_{K S} \rangle}{E_{\vec{K}} + \hbar\omega - E_{\vec{k} + \vec{K}}} = \quad (53.3)$$

$$(E_{\vec{K}} + \hbar\omega + E_{\vec{K}+\vec{K}}) \frac{\langle u_{K'S'} | \vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma' \vec{K}'} | u_{K_I S_I} \rangle \langle u_{K_I S_I} | \vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{K}} | u_{K S} \rangle}{2\hbar\omega(E_{\vec{K}} - \hbar c K \cos \theta)}$$

فيما يخص الحد $(E_{\vec{K}} + \hbar\omega + E_{\vec{K}+\vec{K}})$ ، فهو عبارة عن عدد، عليه، العبارة (53.3) تصبح كالآتي:

$$W_1 = \frac{\langle u_{K'S'} | \vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma' \vec{K}'} (E_{\vec{K}} + \hbar\omega + E_{\vec{K}+\vec{K}}) | u_{K_I S_I} \rangle \langle u_{K_I S_I} | \vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{K}} | u_{K S} \rangle}{2\hbar\omega(E_{\vec{K}} - \hbar c K \cos \theta)} \quad (54.3)$$

وباستعمال معادلة القيم الخاصة، علما أن $(E_I \equiv E_{\vec{K}_I} \equiv E_{\vec{K}+\vec{K}})$ ، يتم الحصول على العبارة (55.3).

$$\begin{aligned} (E_{\vec{K}} + \hbar\omega + E_{\vec{K}+\vec{K}}) | u_{K_I S_I} \rangle &= (E_{\vec{K}} + \hbar\omega + E_{\vec{K}+\vec{K}}) | u_{K_I S_I} \rangle = (E_{\vec{K}} + \hbar\omega + H_I) | u_{K_I S_I} \rangle \\ &= (E_{\vec{K}} + \hbar\omega + H^P) | u_{K_I S_I} \rangle = (E_{\vec{K}} + \hbar\omega + (c\vec{a} \cdot \vec{p} + m_e c^2 \beta)) | u_{K_I S_I} \rangle \quad (55.3) \\ &= (E_{\vec{K}} + \hbar\omega + (\hbar c \vec{a} \cdot (\vec{k} + \vec{K}) + m_e c^2 \beta)) | u_{K_I S_I} \rangle \end{aligned}$$

بأخذ $\omega = ck$ ، وبتعويض العبارة (55.3) في العبارة (54.3)، يتم الحصول على ما يلي:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\langle u_{K'S'} | \vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma' \vec{K}'} (E_{\vec{K}} + \hbar\omega + (\hbar c \vec{a} \cdot (\vec{k} + \vec{K}) + m_e c^2 \beta)) | u_{K_I S_I} \rangle \langle u_{K_I S_I} | \vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{K}} | u_{K S} \rangle}{2\hbar ck(E_{\vec{K}} - \hbar c K \cos \theta)} \quad (56.3) \\ &= \frac{\langle u_{K'S'} | \vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma' \vec{K}'} \mathcal{A} | u_{K_I S_I} \rangle \langle u_{K_I S_I} | \vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{K}} | u_{K S} \rangle}{2\hbar c(E_{\vec{K}} - \hbar c K \cos \theta)} \end{aligned}$$

حيث أن المؤثر \mathcal{A} يعطى كالآتي:

$$\mathcal{A} = \frac{(E_{\vec{K}} + \hbar\omega + (\hbar c \vec{a} \cdot (\vec{k} + \vec{K}) + m_e c^2 \beta))}{k} \quad (57.3)$$

ينضح من العبارة (56.3) أنه يمكن إجراء جمع على S_I ، أي الجمع على الحالات الوهمية، ومنه:

$$\sum_{S_I} | u_{K_I S_I} \rangle \langle u_{K_I S_I} | = 1 \quad (58.3)$$

وبهذا الجمع، يتم تَغْيِيبُ الحالات الوهمية، ومنه تصبح العبارة (56.3) كالآتي:

$$\begin{aligned} \sum_{S_I} W_{1S_I} &= \sum_{S_I} \frac{\langle u_{K'S'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma' \vec{k}'} \mathcal{A} | u_{K_I S_I} \rangle \langle u_{K_I S_I} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{k}} | u_{KS} \rangle}{2\hbar c (E_{\vec{K}} - \hbar c K \cos \theta)} \\ &= \frac{\langle u_{K'S'} | (\vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma' \vec{k}'}) \mathcal{A} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{k}}) | u_{KS} \rangle}{2\hbar c (E_{\vec{K}} - \hbar c K \cos \theta)} \end{aligned} \quad (59.3)$$

بنفس الطريقة، يتم معالجة الحد W_2 ، علماً أن $(\vec{K}_{II} = \vec{K} - \vec{k}')$ ، وعليه يتم الحصول على العبارة الآتية:

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{E_{\vec{K}} - \hbar \omega' + E_{\vec{K}-\vec{k}'}}{E_{\vec{K}} - \hbar \omega' + E_{\vec{K}-\vec{k}'}} \frac{\langle u_{K'S'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{k}} | u_{K_{II} S_{II}} \rangle \langle u_{K_{II} S_{II}} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma' \vec{k}'} | u_{KS} \rangle}{E_{\vec{K}} - \hbar \omega' - E_{\vec{K}-\vec{k}'}} \\ &= - \frac{\langle u_{K'S'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{k}} (E_{\vec{K}} - \hbar \omega' + E_{\vec{K}-\vec{k}'}) | u_{K_{II} S_{II}} \rangle \langle u_{K_{II} S_{II}} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma' \vec{k}'} | u_{KS} \rangle}{2\hbar \omega' (E_{\vec{K}} - \hbar c K \cos \theta')} \\ &= - \frac{\langle u_{K'S'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{k}} (E_{\vec{K}} - \hbar \omega' + H^P) | u_{K_{II} S_{II}} \rangle \langle u_{K_{II} S_{II}} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma' \vec{k}'} | u_{KS} \rangle}{2\hbar \omega' (E_{\vec{K}} - \hbar c K \cos \theta')} \quad (60.3) \\ &= - \frac{\langle u_{K'S'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{k}} (E_{\vec{K}} - \hbar \omega' + (\hbar c \vec{\alpha} \cdot (\vec{K} - \vec{k}') + m_e c^2 \beta)) | u_{K_{II} S_{II}} \rangle \langle u_{K_{II} S_{II}} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma' \vec{k}'} | u_{KS} \rangle}{2\hbar \omega' (E_{\vec{K}} - \hbar c K \cos \theta')} \\ &= - \frac{\langle u_{K'S'} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma \vec{k}} \mathcal{B} | u_{K_{II} S_{II}} \rangle \langle u_{K_{II} S_{II}} | \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma' \vec{k}'} | u_{KS} \rangle}{2\hbar c (E_{\vec{K}} - \hbar c K \cos \theta')} \end{aligned}$$

حيث أن المؤثر (\mathcal{B}) يعطى كالاتي:

$$\mathcal{B} = \frac{(E_{\vec{K}} - \hbar \omega' + (\hbar c \vec{\alpha} \cdot (\vec{K} - \vec{k}') + m_e c^2 \beta))}{k'} \quad (61.3)$$

يتضح من العبارة (60.3) أنه يمكن إجراء جَمْعٍ على S_{II} ، أي الجمع على الحالات الوهمية، ومنه:

$$\sum_{S_I} |u_{K_{II} S_{II}} \rangle \langle u_{K_{II} S_{II}}| = 1 \quad (62.3)$$

وبهذا الجمع، يتم تَغْيِيبُ الحالات الوهمية، ومنه تصبح العبارة (60.3) كالاتي :

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

$$\begin{aligned} \sum_{S_{II}} W_{2S_{II}} &= - \sum_{S_{II}} \frac{\langle u_{K'S'} | \vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma\vec{k}} \mathcal{B} | u_{K_{II}S_{II}} \rangle \langle u_{K_{II}S_{II}} | \vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma'\vec{k}'} | u_{KS} \rangle}{2\hbar c (E_{\vec{k}} - \hbar c K \cos \theta')} \\ &= - \frac{\langle u_{K'S'} | (\vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma\vec{k}}) \mathcal{B} (\vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma'\vec{k}'}) | u_{KS} \rangle}{2\hbar c (E_{\vec{k}} - \hbar c K \cos \theta')} \end{aligned} \quad (63.3)$$

الخطوة الموالية، هي تعويض العبارتين (59.3) و (63.3) في العبارة (51.3)، ومنه:

$$\begin{aligned} T_i^f &= \frac{2\pi^3}{\hbar k' k L^6} e^4 \left| \frac{\langle u_{K'S'} | (\vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma'\vec{k}'}) \mathcal{A} (\vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma\vec{k}}) | u_{KS} \rangle}{(E_{\vec{k}} - \hbar c K \cos \theta)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\langle u_{K'S'} | (\vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma\vec{k}}) \mathcal{B} (\vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma'\vec{k}'}) | u_{KS} \rangle}{(E_{\vec{k}} - \hbar c K \cos \theta')} \right|^2 \delta(E_i - E_f) \end{aligned} \quad (64.3)$$

بالعودة إلى العبارة (1.3)، يُلاحظ أن الدفع الخطي للإلكترون قبل التصادم معدوم تقريبا، أي أن $(\vec{K} \approx 0 \Rightarrow \vec{p}_e \approx 0)$

و $(E_{\vec{k}} = E_e = m_e c^2)$ ، ومنه يمكن صياغة العبارة (64.3) كالآتي:

$$\begin{aligned} T_i^f &= \frac{2\pi^3 e^4 \delta(E_i - E_f)}{\hbar k' k L^6 m_e^2 c^4} \left| \left\langle u_{K'S'} \left| \frac{\{ (\vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma'\vec{k}'}) \mathcal{A} (\vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma\vec{k}}) - (\vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma\vec{k}}) \mathcal{B} (\vec{a} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma'\vec{k}'}) \}}{Q} \right| u_{KS} \right\rangle \right|^2 \\ &= \frac{2\pi^3 r_e^2}{\hbar k' k L^6} |\langle u_{K'S'} | Q | u_{KS} \rangle|^2 \delta(E_i - E_f) \end{aligned} \quad (65.3)$$

حيث أن r_e هو نصف قطر الإلكترون الكلاسيكي (Classical electron radius) وفق نظام CGS.

يمكن كذلك كتابة العبارة (65.3) على الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} T_i^f &= \frac{2\pi^3 r_e^2}{\hbar k' k L^6} \sum_{SS'} (\langle u_{K'S'} | Q | u_{KS} \rangle \times \langle u_{K'S'} | Q | u_{KS} \rangle) \delta(E_i - E_f) \\ &= \frac{2\pi^3 r_e^2}{\hbar k' k L^6} \sum_{SS'} (\langle u_{K'S'} | Q^\dagger | u_{KS} \rangle \langle u_{K'S'} | Q | u_{KS} \rangle) \delta(E_i - E_f) \end{aligned} \quad (66.3)$$

وبوجود علاقة تمام الأساس $\sum_{S'} |u_{K'S'}\rangle \langle u_{K'S'}| = 1$ ، يمكن كتابة العبارة (66.3) على الشكل الآتي:

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

$$T_i^f = \frac{2\pi^3 r_e^2}{\hbar k' k L^6} \sum_S \langle u_{k' s'} | Q^\dagger Q | u_{k s} \rangle \delta(E_i - E_f) \quad (67.3)$$

كما يمكن أيضا صياغة العبارة (67.3) على الشكل الآتي:

$$T_{\vec{k};1_{\sigma\vec{k}};1_{\sigma'\vec{k}'}}^{\vec{k}';1_{\sigma'\vec{k}'}} = \frac{2\pi^3 r_e^2}{\hbar k' k L^6} \text{Trace}(Q^\dagger Q) \delta(E_i - E_f) \quad (68.3)$$

عليه، العبارة (68.3) تمثل احتمال انتقال الجملة (إلكترون-فوتون) من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية خلال وحدة الزمن.

3.2.2.4 حساب مقطع كومبتون لتشتت فوتون بإلكترون

عبارة مقطع تشتت فوتون في الحالة (σ, \vec{k}) إلى فوتون في الحالة (σ', \vec{k}') بإلكترون حالته $(\vec{p}_e \approx 0, \delta, E_e = m_e c^2)$ تُعطى كالاتي:

$$\sigma(\vec{k}, \vec{k}') d^3 k' = \frac{d^3 n_{k'}}{J_0} \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{k}', S, S' \\ \sigma, \sigma', \delta, \delta'}} T_{\vec{k}, \vec{k}', S}^{\vec{k}', \vec{k}, S'} D_{\vec{k} S}(0) \quad (69.3)$$

حيث J_0 هو تدفق الفوتونات الموافقة للحالة الكمية (σ, \vec{k}) والواردة على الإلكترونات التي تكون في البداية بطاقة سكون

$(\vec{p}_e \approx 0, \delta, E_e = m_e c^2)$. في هذه الدراسة، سيتم اعتبار أن هناك فوتون واحد $1_{\sigma\vec{k}}$ يتدفق ودفعه الخطي هو $\hbar\vec{k}$ ، حيث

يحمل هذا الفوتون كمية معينة من الدفع الخطي وهو محصور داخل حجم تنظيم محدود قيمته L^3 . نظراً لوجود فوتون واحد فقط

داخل هذا الحجم، فإن كثافة عدد الفوتونات هي $(n_p = \frac{1}{L^3})$. وبما أن الفوتون الوارد يتحرك بسرعة الضوء c ، فإن التدفق J_0

يُعرف على أنه عدد الفوتونات التي تمر عبر وحدة مساحة في وحدة زمنية، وهو ما توضحه العبارة (70.3)، وهو يُعد كمرجع

لحساب مقطع التشتت العرضي (the scattering cross section).

$$J_0 = n_p v = \frac{1}{L^3} c \quad (70.3)$$

أما الحد $n_{k'}$ ، فهو يشير إلى كثافة الحالات الكمومية المقابلة لقيمة للدفع الخطي التي يمثلها \vec{k}' ، حيث ترتبط هذه الكمية

مباشرةً بعنصر الحجم في فضاء الدفع الخطي، المعروف أيضاً باسم الفضاء المتبادل (reciprocal space) أو (k_{space}) ،

ويطلق عليه كذلك فضاء معكوس الفضاء. وكما توضح العبارة (71.3)، تتيح هذه العبارة الانتقال من وصف منفصل للحالات

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

في حجم فيزيائي محدود إلى تمثيل مستمر في فضاء الدفع الخطي، وهو أمر أساسي لحساب الكميات الفيزيائية مثل احتمالات الانتقال ومقاطع التشتت العرضية في نظرية الكم.

$$d^3n_{k'} = \frac{L^3}{(2\pi)^3} d^3k' \quad (71.3)$$

بتعويض العبارات (68.3)، (70.3)، و (71.3) في العبارة (69.3)، عبارة المقطع التفاضلي للتشتت تصبح

كالآتي:

$$\sigma(\vec{k}, \vec{k}') d^3k' = \frac{r_e^2 d^3k'}{4\hbar ck'k} \text{Trace}(Q^\dagger Q) \delta(E_i - E_f) \quad (72.3)$$

إن الجمع الظاهر في العبارة (69.3) جد معقد بسبب وجود حالات الطاقة السالبة، وهو الأمر الذي يجب أن لا يكون في

حالة التشتت ($E_K > 0$)، و لتخطي هذه المعضلة سيتم استخدام العبارة (73.3) و المتمثلة في مؤثر الإسقاط P_K على حالات الطاقة الموجبة.

$$P_K = \frac{|E_K| + H_K^P}{2|E_K|} \quad (73.3)$$

حيث أن:

$$P_K |u_{KS}\rangle = \frac{|E_K| |u_{KS}\rangle + H_K^P |u_{KS}\rangle}{2|E_K|} = \frac{|E_K| |u_{KS}\rangle + |E_K| |u_{KS}\rangle}{2|E_K|} = \begin{cases} |u_{KS}\rangle, E_K > 0 \\ 0, E_K < 0 \end{cases} \quad (74.3)$$

ومنه عبارة مقطع التفاضلي تصبح:

$$\sigma(\vec{k}, \vec{k}') d^3k' = \frac{r_e^2 d^3k'}{4\hbar ck'k} \sum \text{Trace} \left((Q^\dagger P_K) (Q P_K) \right) \delta(E_i - E_f) \quad (75.3)$$

لف الجملة في الحالة الابتدائية موزع توزيعا عشوائيا ولا يمكن التحكم فيه، وأما الحالة النهائية فلا يُطلبُ فيها حالة معينة

لف، عليه، سيتم أخذ القيمة المتوسطة على حالة اللف الابتدائية، ثم يتم الجمع على كافة حالات اللف النهائية، ومنه العبارة (75.3).

(75) تصبح كالآتي:

$$\sigma(\vec{k}, \vec{k}') d^3 k' = \frac{r_e^2 d^3 k'}{4\hbar c k' k} \frac{1}{2} \sum_{\delta, \delta'=1}^2 \langle u_{KS} | Q^\dagger P_K | u_{K'S'} \rangle \langle u_{K'S'} | Q P_K | u_{KS} \rangle \delta(E_i - E_f) \quad (76.3)$$

$$= \frac{r_e^2 d^3 k'}{8\hbar c k' k} \sum_{S, S'=1}^4 \langle u_{KS} | Q^\dagger P_K | u_{K'S'} \rangle \langle u_{K'S'} | Q P_K | u_{KS} \rangle \delta(E_i - E_f)$$

وبتعويض العبارة (73.3) في العبارة (76.3)، يتم الحصول على ما يلي:

$$\sigma(\vec{k}, \vec{k}') d^3 k' = \frac{r_e^2 d^3 k'}{32\hbar c k' k |E_K| |E_{K'}|} \sum_{S, S'=1}^4 \langle u_{KS} | Q^\dagger (|E_{K'}| + H_{K'}^P) | u_{K'S'} \rangle \langle u_{K'S'} | Q (|E_K| + H_K^P) | u_{KS} \rangle \delta(E_i - E_f) \quad (77.3)$$

يمكن تقليص العبارة (77.3) على الشكل الآتي:

$$\sigma(\vec{k}, \vec{k}') d^3 k' = \frac{r_e^2 d^3 k'}{32\hbar c k' k |E_K| |E_{K'}|} \sum_{S=1}^{S=4} \langle u_S | (\mathbb{X}) | u_S \rangle \delta(\hbar c k + E_{\bar{K}} - \hbar c k' - E_{\bar{K}'}) \quad (78.3)$$

حيث أن عبارة المؤثر \mathbb{X} تعطى كالاتي:

$$\mathbb{X} \equiv Q^\dagger (|E_{K'}| + H_{K'}^P) Q (|E_K| + H_K^P) \quad (79.3)$$

ومنه عبارة مقطع التفاضلي لتشتت تصبح كالاتي:

$$\sigma(\vec{k}, \vec{k}') d^3 k' = \frac{r_e^2 d^3 k'}{32\hbar c k' k |E_K| |E_{K'}|} \text{Trace}(\mathbb{X}) \delta(\hbar c k + E_{\bar{K}} - \hbar c k' - E_{\bar{K}'}) \quad (80.3)$$

حيث أن:

$$\text{Trace}(\mathbb{X}) = \sum_{S=1}^{S=4} \langle u_S | \left(Q^\dagger (|E_{K'}| + H_{K'}^P) Q (|E_K| + H_K^P) \right) | u_S \rangle \quad (81.3)$$

إن تعيين المقطع التفاضلي لتشتت الموضح في العبارة (80.3) يتوقف على تعيين أثر مصفوفة المؤثر $(\text{Trace}(\mathbb{X}))$.

ولتحليل صيغة المؤثر \mathbb{X} ، سيتم استعمال المعطيات التي سبق توضيحها في العبارتين (3.1) و (3.2)، أي المعطيات الآتية:

$$\begin{cases} |E_{\vec{K}}| \approx m_e c^2, \vec{K} \approx 0 \\ |E_{K'}| = \hbar c(k - k') \\ \vec{K} + \vec{k} = \vec{K}' + \vec{k}' \end{cases} \quad (82.3)$$

وبالاعتماد على مبدأ حفظ الطاقة، سيتم تحديد قيم المقدار $(|E_{K'}| + H_{K'}^P)$ على النحو الآتي:

$$(|E_{K'}| + H_{K'}^P) = m_e c^2 + m_e c^2 \beta = m_e c^2 (1 + \beta) \quad (83.3)$$

وبالاعتماد على مبدأ حفظ الطاقة، سيتم تحديد قيم المقدار $(|E_{K'}| + H_{K'}^P)$ على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} |E_{K'}| + H_{K'}^P &= m_e c^2 + \hbar c(k - k') + m_e c^2 \beta + \hbar c \vec{\alpha} \cdot (\vec{k} - \vec{k}') \\ &= m_e c^2 (1 + \beta) + \hbar c \underbrace{((k - k') + k \alpha_k - k' \alpha_{k'})}_{\mathcal{Z}} \\ &= m_e c^2 (1 + \beta) + \hbar c \mathcal{Z} \end{aligned} \quad (84.3)$$

$$\mathcal{Z} = \left(\frac{(k - k')}{\delta k} + \frac{k \alpha_k - k' \alpha_{k'}}{\alpha_{\delta k}} \right) \quad \text{حيث أن}$$

سعيًا لتحليل عبارة \mathcal{Q} ، يتوجب تقليص المؤثر \mathcal{A} كالآتي:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{(E_{\vec{K}} + \hbar \omega + (\hbar c \vec{\alpha} \cdot (\vec{k} + \vec{K})) + m_e c^2 \beta)}{k} \\ &= \frac{(m_e c^2 + \hbar \omega + (\hbar c \vec{\alpha} \cdot (\vec{k} + \vec{K})) + m_e c^2 \beta)}{k} \\ &= \hbar c \left(1 + \vec{\alpha} \cdot \frac{(\vec{k} + \vec{K})}{k} \right) + \frac{m_e c^2}{k} (1 + \beta) \\ &= \hbar c (1 + \alpha_{\vec{k}}) + \frac{m_e c^2}{k} (1 + \beta) \end{aligned} \quad (85.3)$$

$$(\alpha_{\vec{k}} = \vec{\alpha} \cdot \frac{(\vec{k} + \vec{K})}{k}) \quad \text{حيث أن}$$

كذلك، المؤثر \mathcal{B} قد تم تقليصه كالآتي:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{(E_{\vec{K}} - \hbar\omega' + (\hbar c\vec{\alpha} \cdot (\vec{K} - \vec{k}') + m_e c^2 \beta))}{k'} \\
 &= \frac{(m_e c^2 - \hbar\omega' + (\hbar c\vec{\alpha} \cdot (\vec{K} - \vec{k}') + m_e c^2 \beta))}{k'} \\
 &= -\hbar c \left(1 + \vec{\alpha} \cdot \frac{(\vec{k}' - \vec{K})}{k'} \right) + \frac{m_e c^2}{k'} (1 + \beta) \\
 &= -\hbar c (1 + \alpha_{\vec{k}'}) + \frac{m_e c^2}{k'} (1 + \beta)
 \end{aligned} \tag{86.3}$$

حيث أن $(\alpha_{\vec{k}'} = \vec{\alpha} \cdot \frac{(\vec{k}' - \vec{K})}{k'})$.

ومنه، عبارة Q تصبح كالآتي:

$$\begin{aligned}
 Q &= \{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\varepsilon}_{\sigma' \vec{k}'}) \mathcal{A}(\vec{\alpha} \cdot \vec{\varepsilon}_{\sigma \vec{k}}) - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\varepsilon}_{\sigma \vec{k}}) \mathcal{B}(\vec{\alpha} \cdot \vec{\varepsilon}_{\sigma' \vec{k}'})\} = \alpha_{\xi'} \mathcal{A} \alpha_{\xi} - \alpha_{\xi} \mathcal{B} \alpha_{\xi'} \\
 &= \alpha_{\xi'} \left(\hbar c (1 + \alpha_{\vec{k}}) + \frac{m_e c^2}{k} (1 + \beta) \right) \alpha_{\xi} \\
 &\quad - \alpha_{\xi} \left(-\hbar c (1 + \alpha_{\vec{k}'}) + \frac{m_e c^2}{k'} (1 + \beta) \right) \alpha_{\xi'} \\
 &= \hbar c \left[\alpha_{\xi'} (1 + \alpha_{\vec{k}}) \alpha_{\xi} + \alpha_{\xi} (1 + \alpha_{\vec{k}'}) \alpha_{\xi'} \right] \\
 &\quad + m_e c^2 \left[\frac{\alpha_{\xi'} (1 + \beta) \alpha_{\xi}}{k} - \frac{\alpha_{\xi} (1 + \beta) \alpha_{\xi'}}{k'} \right]
 \end{aligned} \tag{87.3}$$

حيث أن:

$$\alpha_{\xi'} (1 + \alpha_{\vec{k}}) \alpha_{\xi} + \alpha_{\xi} (1 + \alpha_{\vec{k}'}) \alpha_{\xi'} = (\alpha_{\xi'} \alpha_{\xi} + \alpha_{\xi} \alpha_{\xi'} + \alpha_{\xi'} \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\xi} + \alpha_{\xi} \alpha_{\vec{k}'} \alpha_{\xi'}) \tag{88.3}$$

وبالتعويض في العبارة (87.3)، يتم الحصول على ما يلي:

$$Q = \hbar c \left[(\alpha_{\xi'} \alpha_{\xi} + \alpha_{\xi} \alpha_{\xi'} + \alpha_{\xi'} \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\xi} + \alpha_{\xi} \alpha_{\vec{k}'} \alpha_{\xi'}) \right] + m_e c^2 \left[\frac{\alpha_{\xi'} (1 + \beta) \alpha_{\xi}}{k} - \frac{\alpha_{\xi} (1 + \beta) \alpha_{\xi'}}{k'} \right] \tag{89.3}$$

سيتم الآن استعمال الخاصية الموضحة في العبارة (90.3)، لكن مع ضرورة إحترام الترتيب.

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{A})(\vec{\alpha} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\alpha} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (90.3)$$

علما أن $\vec{\alpha}$ و β يحققان الخصائص الآتية:

$$\begin{cases} \alpha_x \alpha_y \alpha_z = i \\ [\alpha_x, \alpha_y]_+ = [\alpha_y, \alpha_z]_+ = [\alpha_z, \alpha_x]_+ = 0 \\ [\alpha_\ell, \beta]_+ = \alpha_\ell \beta + \beta \alpha_\ell, \ell = x, y, z \end{cases} \quad (91.3)$$

بتطبيق الخصائص الموضحة في العبارتين (90.3) و (91.3) على العبارة (89.3)، يتم الحصول على مايلي:

$$Q = \hbar c \left[2(\vec{\epsilon}_{\sigma\vec{k}} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma'\vec{k}'}) + \alpha_{\xi'} \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\xi} + \alpha_{\xi} \alpha_{\vec{k}'} \alpha_{\xi'} \right] + m_e c^2 \left[\frac{\alpha_{\xi'} \alpha_{\xi}}{k} - \frac{\alpha_{\xi} \alpha_{\xi'}}{k'} \right] (1 - \beta) \quad (92.3)$$

سبق وأن تم تعريف Z ، ولكن سيتم التذكير بها مع تعريف X و Y في العبارة (93.3)، وذلك من أجل تبسيط الحدود.

$$\begin{cases} X = \frac{\alpha_{\xi'} \alpha_{\xi}}{k} - \frac{\alpha_{\xi} \alpha_{\xi'}}{k'} \\ Y = \left(\alpha_{\xi'} \alpha_{\xi} + \alpha_{\xi} \alpha_{\xi'} + \alpha_{\xi'} \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\xi} + \alpha_{\xi} \alpha_{\vec{k}'} \alpha_{\xi'} \right) = 2 \underbrace{\left(\vec{\epsilon}_{\sigma\vec{k}} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma'\vec{k}'} \right)}_{\mathcal{R}} + \underbrace{\left(\alpha_{\xi'} \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\xi} + \alpha_{\xi} \alpha_{\vec{k}'} \alpha_{\xi'} \right)}_{\mathcal{M}} \\ Z = \left((k - k') + k \alpha_k - k' \alpha_{k'} \right) = \delta k + \alpha_{\delta\vec{k}} \end{cases} \quad (93.3)$$

$Y = 2\mathcal{R} + \mathcal{M}$

أي أن العبارة (92.3) تغدو كالتالي:

$$Q = \hbar c Y + m_e c^2 X (1 - \beta) = m_e c^2 X (1 - \beta) + \hbar c Y \quad (94.3)$$

ومنه عبارة مرافق Q هي:

$$Q^\dagger = m_e c^2 (1 - \beta) X^\dagger + \hbar c Y^\dagger \quad (95.3)$$

الخطوة الآتية هي تحليل الحد $Q^\dagger (|E_{K'}| + H_{K'}^P)$

$$\begin{aligned} Q^\dagger (|E_{K'}| + H_{K'}^P) &= (m_e c^2 (1 - \beta) X^\dagger + \hbar c Y^\dagger) (m_e c^2 (1 + \beta) + \hbar c Z) \\ &= (m_e c^2)^2 (1 - \beta) X^\dagger (1 + \beta) + \hbar c m_e c^2 [(1 - \beta) X^\dagger Z + Y^\dagger (1 + \beta)] \\ &\quad + (\hbar c)^2 Y^\dagger Z \end{aligned} \quad (96.3)$$

الآن، سيتم تحليل الحد $Q(|E_K| + H_K^P)$.

$$\begin{aligned} Q(|E_K| + H_K^p) &= (m_e c^2 \mathcal{X}(1 - \beta) + \hbar c \mathcal{Y})(m_e c^2(1 + \beta)) \\ &= (m_e c^2)^2 \mathcal{X} \underbrace{(1 - \beta)(1 + \beta)}_{=0} + \hbar c m_e c^2 \mathcal{Y}(1 + \beta) = \hbar c m_e c^2 \mathcal{Y}(1 + \beta) \end{aligned} \quad (97.3)$$

عليه العبارة (79.3) للمؤثر \mathbb{X} تصبح كالآتي:

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &\equiv ((m_e c^2)^2(1 - \beta)\mathcal{X}^\dagger(1 + \beta) + \hbar c m_e c^2[(1 - \beta)\mathcal{X}^\dagger \mathcal{Z} + \mathcal{Y}^\dagger(1 + \beta)] \\ &\quad + (\hbar c)^2 \mathcal{Y}^\dagger \mathcal{Z})(\hbar c m_e c^2 \mathcal{Y}(1 + \beta)) \\ &= [\hbar c m_e c^2 \mathcal{Y}^\dagger(1 + \beta) + \hbar^2 c^2 \mathcal{Y}^\dagger \mathcal{Z} + (m_e c^2)^2(1 - \beta)\mathcal{X}^\dagger(1 + \beta) \\ &\quad + \hbar c m_e c^2(1 - \beta)\mathcal{X}^\dagger \mathcal{Z}](\hbar c m_e c^2 \mathcal{Y}(1 + \beta)) \\ &= \hbar c m_e c^2 \left[\hbar c m_e c^2 \underbrace{\mathcal{Y}^\dagger(1 + \beta)\mathcal{Y}(1 + \beta)}_{\mathcal{S}_1} + \hbar^2 c^2 \underbrace{\mathcal{Y}^\dagger \mathcal{Z} \mathcal{Y}(1 + \beta)}_{\mathcal{S}_2} \right. \\ &\quad \left. + (m_e c^2)^2 \underbrace{(1 - \beta)\mathcal{X}^\dagger(1 + \beta)\mathcal{Y}(1 + \beta)}_{\mathcal{S}_3} \right. \\ &\quad \left. + m_e c^2 \underbrace{(1 - \beta)\mathcal{X}^\dagger \mathcal{Z} \mathcal{Y}(1 + \beta)}_{\mathcal{S}_4} \right] \end{aligned} \quad (98.3)$$

فيما يخص أثر المصفوفتان \mathcal{S}_3 و \mathcal{S}_4 ، فمن الواضح أنهما يعدمان مباشرة باستعمال خاصية أثر جداء المصفوفات، أي أن:

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\mathcal{S}_3) &= \text{Trace} \left((1 - \beta)\mathcal{X}^\dagger(1 + \beta)\mathcal{Y}(1 + \beta) \right) \\ &= \text{Trace} \left(\mathcal{X}^\dagger(1 + \beta)\mathcal{Y} \underbrace{(1 + \beta)(1 - \beta)}_{=0} \right) = 0 \end{aligned} \quad (99.3)$$

$$\text{Trace}(\mathcal{S}_4) = \text{Trace} \left((1 - \beta)\mathcal{X}^\dagger \mathcal{Z} \mathcal{Y}(1 + \beta) \right) = \text{Trace} \left(\mathcal{X}^\dagger \mathcal{Z} \mathcal{Y} \underbrace{(1 + \beta)(1 - \beta)}_{=0} \right) \quad (100.3)$$

$$= 0$$

الخطوة الموالية هي تحليل المصفوفة \mathcal{S}_1 .

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \mathbf{y}^\dagger(1 + \beta)\mathbf{y}(1 + \beta) = (2\mathcal{R} + \mathcal{M}^\dagger)(1 + \beta)(2\mathcal{R} + \mathcal{M})(1 + \beta) \\ &= 4\mathcal{R}^2(1 + \beta)^2 + 2\mathcal{R}[(1 + \beta)\mathcal{M}(1 + \beta) + \mathcal{M}^\dagger(1 + \beta)^2] \\ &\quad + \mathcal{M}^\dagger(1 + \beta)\mathcal{M}(1 + \beta) \end{aligned} \quad (101.3)$$

وبما أنّ $(\mathcal{M}(1 + \beta) = (1 - \beta)\mathcal{M})$ و $((1 + \beta)^2 = 2(1 + \beta))$ ، فإن العبارة (101.3) تصبح:

$$\mathcal{S}_1 = 4(2\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}\mathcal{M}^\dagger)(1 + \beta) \quad (102.3)$$

وهناك خاصية تقول "أن أثر مصفوفة مكونة من عدد فردي من الألفات (مجموع "ألفا α ") بالغ ما بلغ هو معدوم، أثر مصفوفة مكونة من عدد زوجي من الألفات بالغ ما بلغ هو غير معدوم، و $(\text{Trace}(\mathbb{I}) = 4)$ ". وبما أنّ الحد الثاني من العبارة (102.3) به (\mathcal{M}^\dagger) ، وهي مصفوفة مكونة من ثلاثة من الألفات، فإن أثرها معدوم. ومنه، العبارة (102.3) تصبح كالآتي:

$$\mathcal{S}_1 = 8\mathcal{R}^2\mathbb{I}(1 + \beta) \quad (103.3)$$

تَبْقَى فقط تحليل المصفوفة \mathcal{S}_2 .

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &= \mathbf{y}^\dagger\mathbf{Z}\mathbf{y}(1 + \beta) = (2\mathcal{R} + \mathcal{M}^\dagger)(\delta k + \alpha_{\delta\vec{k}})(2\mathcal{R} + \mathcal{M})(1 + \beta) \\ &= [\delta k(2\mathcal{R} + \mathcal{M}^\dagger)(2\mathcal{R} + \mathcal{M}) + (2\mathcal{R} + \mathcal{M}^\dagger)(\alpha_{\delta\vec{k}})(2\mathcal{R} + \mathcal{M})](1 + \beta) \\ &= [\delta k\{4\mathcal{R}^2 + 2\mathcal{R}(\mathcal{M} + \mathcal{M}^\dagger) + \mathcal{M}^\dagger\mathcal{M}\} + 4\mathcal{R}\alpha_{\delta\vec{k}}\mathcal{R} + 2\mathcal{R}\alpha_{\delta\vec{k}}\mathcal{M} \\ &\quad + 2\mathcal{M}^\dagger\alpha_{\delta\vec{k}}\mathcal{R} + \mathcal{M}^\dagger\alpha_{\delta\vec{k}}\mathcal{M}](1 + \beta) \\ &= [4\delta k\mathcal{R}^2\mathbb{I} + 4\mathcal{R}^2\alpha_{\delta\vec{k}} + 2\mathcal{R}\delta k(\mathcal{M} + \mathcal{M}^\dagger) + 2\mathcal{R}(\mathcal{M}^\dagger\alpha_{\delta\vec{k}} + \alpha_{\delta\vec{k}}\mathcal{M}) \\ &\quad + \delta k(\mathcal{M}^\dagger\mathcal{M}) + \mathcal{M}^\dagger\alpha_{\delta\vec{k}}\mathcal{M}](1 + \beta) \end{aligned} \quad (104.3)$$

وبتطبيق خاصية "أثر جداء مصفوفات مكونة من عدد فردي أو زوجي من الألفات" على العبارة (103.3)، يتم الحصول

على ما يلي:

$$\begin{aligned}
 \text{Trace}(\mathcal{S}_2) &= \text{Trace} \left(\left[4\delta k \mathcal{R}^2 \mathbb{I} + \underbrace{4\mathcal{R}^2 \alpha_{\delta \vec{k}}}_{=0} + \underbrace{2\mathcal{R} \delta k (\mathcal{M} + \mathcal{M}^\dagger)}_{=0} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2\mathcal{R}(\mathcal{M}^\dagger \alpha_{\delta \vec{k}} + \alpha_{\delta \vec{k}} \mathcal{M}) + \delta k (\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}) + \underbrace{\mathcal{M}^\dagger \alpha_{\delta \vec{k}} \mathcal{M}}_{=0} \right] (1 + \beta) \right) \quad (105.3) \\
 &= \text{Trace} \left([4\delta k \mathcal{R}^2 \mathbb{I} + 2\mathcal{R}(\mathcal{M}^\dagger \alpha_{\delta \vec{k}} + \alpha_{\delta \vec{k}} \mathcal{M}) + \delta k (\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M})] (1 + \beta) \right)
 \end{aligned}$$

ومنه، العبارة النهائية للمصفوفة \mathcal{S}_2 هي:

$$\mathcal{S}_2 = [4\delta k \mathcal{R}^2 \mathbb{I} + 2\mathcal{R}(\mathcal{M}^\dagger \alpha_{\delta \vec{k}} + \alpha_{\delta \vec{k}} \mathcal{M}) + \delta k (\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M})] (1 + \beta) \quad (106.3)$$

بتعويض قيم \mathcal{S}_1 و \mathcal{S}_2 في العبارة (3.98)، يتم الحصول على ما يلي:

$$\mathbb{X} = \hbar^2 c^2 m_e c^2 [8m_e c^2 \mathcal{R}^2 \mathbb{I} + \hbar c [4\delta k \mathcal{R}^2 \mathbb{I} + 2\mathcal{R}(\mathcal{M}^\dagger \alpha_{\delta \vec{k}} + \alpha_{\delta \vec{k}} \mathcal{M}) + \delta k (\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M})]] (1 + \beta) \quad (107.3)$$

المرحلة القادمة هي حساب أثر المصفوفة \mathbb{X} .

$$\begin{aligned}
 \text{Trace}(\mathbb{X}) &= \hbar^2 c^2 m_e c^2 \text{Trace} \left([8m_e c^2 \mathcal{R}^2 \mathbb{I} \right. \\
 &\quad \left. + \hbar c [4\delta k \mathcal{R}^2 \mathbb{I} + 2\mathcal{R}(\mathcal{M}^\dagger \alpha_{\delta \vec{k}} + \alpha_{\delta \vec{k}} \mathcal{M}) + \delta k (\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M})]] (1 + \beta) \right) \quad (108.3)
 \end{aligned}$$

ومنه، تصبح العبارة (3.108) كالآتي:

$$\begin{aligned}
 \text{Trace}(\mathbb{X}) &= 2\hbar^2 c^2 m_e c^2 \left(8m_e c^2 \mathcal{R}^2 \cdot \text{Trace}(\mathbb{I}) + 4\hbar c \delta k \mathcal{R}^2 \cdot \text{Trace}(\mathbb{I}) \right. \\
 &\quad \left. + 2\hbar c \mathcal{R} \cdot \text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \alpha_{\delta \vec{k}} + \alpha_{\delta \vec{k}} \mathcal{M}) + \hbar c \delta k \cdot \text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}) \right) \\
 &= 2\hbar^2 c^2 m_e c^2 \left(32m_e c^2 \mathcal{R}^2 + 16\hbar c \delta k \mathcal{R}^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2\hbar c \mathcal{R} \cdot \text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \alpha_{\delta \vec{k}} + \alpha_{\delta \vec{k}} \mathcal{M}) + \hbar c \delta k \cdot \text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}) \right) \quad (109.3)
 \end{aligned}$$

الخطوة الموالية هي حساب $\text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \alpha_{\delta \vec{k}} + \alpha_{\delta \vec{k}} \mathcal{M})$.

$$\begin{aligned}
 \text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \alpha_{\delta\bar{k}} + \alpha_{\delta\bar{k}} \mathcal{M}) &= \text{Trace} \left((k\mathcal{M}^\dagger \alpha_k - k' \mathcal{M}^\dagger \alpha_{k'}) + (k\alpha_k \mathcal{M} - k' \alpha_{k'} \mathcal{M}) \right) \\
 &= \text{Trace} \left(\left(k(\alpha_\xi \alpha_{\bar{k}} \alpha_{\xi'} + \alpha_{\xi'} \alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi) \alpha_k - k'(\alpha_\xi \alpha_{\bar{k}} \alpha_{\xi'} + \alpha_{\xi'} \alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi) \alpha_{k'} \right) \right. \\
 &\quad \left. + k\alpha_k (\alpha_{\xi'} \alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi + \alpha_\xi \alpha_{\bar{k}} \alpha_{\xi'}) - k' \alpha_{k'} (\alpha_{\xi'} \alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi + \alpha_\xi \alpha_{\bar{k}} \alpha_{\xi'}) \right) \\
 &= \text{Trace} \left(\delta k (\alpha_{\xi'} \alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi \alpha_{\bar{k}} + \alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi \alpha_{\bar{k}} \alpha_{\xi'}) - k (\alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi \alpha_{\xi'} \alpha_{\bar{k}} + \alpha_{\bar{k}} \alpha_{\xi'} \alpha_\xi \alpha_{\bar{k}}) \right. \\
 &\quad \left. + k' (\alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi \alpha_{\xi'} \alpha_{\bar{k}} + \alpha_{\bar{k}} \alpha_{\xi'} \alpha_\xi \alpha_{\bar{k}}) \right) \\
 &= \text{Trace} \left(\delta k (\alpha_{\xi'} \alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi \alpha_{\bar{k}} + \alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi \alpha_{\bar{k}} \alpha_{\xi'}) - k \alpha_{\bar{k}} \underbrace{(\alpha_\xi \alpha_{\xi'} + \alpha_{\xi'} \alpha_\xi)}_{=2\mathcal{R}} \alpha_{\bar{k}} \right. \\
 &\quad \left. + k' \alpha_{\bar{k}} \underbrace{(\alpha_\xi \alpha_{\xi'} + \alpha_{\xi'} \alpha_\xi)}_{=2\mathcal{R}} \alpha_{\bar{k}} \right)
 \end{aligned} \tag{110.3}$$

ومنه، يمكن تقليص العبارة (110.3) كالآتي :

$$\begin{aligned}
 \text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \alpha_{\delta\bar{k}} + \alpha_{\delta\bar{k}} \mathcal{M}) &= \text{Trace} \left(\delta k (\alpha_{\xi'} \alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi \alpha_{\bar{k}} + \alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi \alpha_{\bar{k}} \alpha_{\xi'}) - 2\mathcal{R}k \underbrace{\alpha_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}}_{=\mathbb{I}} + 2\mathcal{R}k' \underbrace{\alpha_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}}_{=\mathbb{I}} \right) \\
 &= \text{Trace} \left(\delta k (\alpha_{\xi'} \alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi \alpha_{\bar{k}} + \alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi \alpha_{\bar{k}} \alpha_{\xi'}) - 2\mathcal{R}(k - k') \cdot \mathbb{I} \right) \\
 &= \text{Trace} \left(\delta k (\alpha_{\xi'} \alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi \alpha_{\bar{k}} + \alpha_{\bar{k}} \alpha_\xi \alpha_{\bar{k}} \alpha_{\xi'}) - 2\mathcal{R}\delta k \right)
 \end{aligned} \tag{111.3}$$

يمكن كذلك كتابة العبارة (111.3) على الشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
 \text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \alpha_{\delta \vec{k}} + \alpha_{\delta \vec{k}} \mathcal{M}) &= \text{Trace} \left(\delta k \left(\alpha_{\xi'} \alpha_{\vec{k}'} \alpha_{\xi} \alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\xi} \alpha_{\vec{k}'} \alpha_{\xi'} \right) - 2\mathcal{R} \delta k \right) \\
 &= \delta k \text{Trace} \left(\left(\alpha_{\xi'} \alpha_{\vec{k}'} \alpha_{\xi} \alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\xi} \alpha_{\vec{k}'} \alpha_{\xi'} \right) - 2\mathcal{R} \right) \\
 &= \delta k \text{Trace} \left(- \left(\alpha_{\xi'} \alpha_{\vec{k}'} \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\xi} + \alpha_{\xi} \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}'} \alpha_{\xi'} \right) - 2\mathcal{R} \right) \\
 &= -\delta k \text{Trace} \left(2\mathcal{R} + \left(\alpha_{\xi'} \alpha_{\vec{k}'} \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\xi} + \alpha_{\xi} \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}'} \alpha_{\xi'} \right) \right) \quad (112.3) \\
 &= -\delta k \text{Trace} \left(2\mathcal{R} + \left(\alpha_{\xi'} (\hat{k} \cdot \hat{k}' - i\alpha_{n'}) \alpha_{\xi} + \alpha_{\xi} (\hat{k} \cdot \hat{k}' + i\alpha_{n'}) \alpha_{\xi'} \right) \right) \\
 &= -\delta k \text{Trace} \left(2\mathcal{R} + \alpha_{\xi'} \hat{k} \cdot \hat{k}' \alpha_{\xi} - i\alpha_{\xi'} \alpha_{n'} \alpha_{\xi} + \alpha_{\xi} \hat{k} \cdot \hat{k}' \alpha_{\xi'} + i\alpha_{\xi} \alpha_{n'} \alpha_{\xi'} \right) \\
 &= -\delta k \text{Trace} \left(2\mathcal{R} + \underbrace{\hat{k} \cdot \hat{k}'}_{\mathbb{U}=\cos\theta} \left(\alpha_{\xi'} \alpha_{\xi} + \alpha_{\xi} \alpha_{\xi'} \right) - i\alpha_{\xi'} \alpha_{n'} \alpha_{\xi} + i\alpha_{\xi} \alpha_{n'} \alpha_{\xi'} \right)
 \end{aligned}$$

وفقا للحسابات التي قد توصل إليها في العبارة (112.3)، يمكن كتابة $\text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \alpha_{\delta \vec{k}} + \alpha_{\delta \vec{k}} \mathcal{M})$ كالآتي:

$$\text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \alpha_{\delta \vec{k}} + \alpha_{\delta \vec{k}} \mathcal{M}) = -\delta k \text{Trace} \left(2\mathcal{R} + 2\mathbb{U}\mathcal{R} - i\alpha_{\xi'} \alpha_{n'} \alpha_{\xi} + i\alpha_{\xi} \alpha_{n'} \alpha_{\xi'} \right) \quad (113.3)$$

وبتطبيق خاصية "أثر جداء مصفوفات مكونة من عدد فردي أو زوجي من الألفات" على العبارة (113.3)، يتم الحصول

على ما يلي:

$$\begin{aligned}
 \text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \alpha_{\delta \vec{k}} + \alpha_{\delta \vec{k}} \mathcal{M}) &= -\delta k \text{Trace} \left((2\mathcal{R} + 2\mathbb{U}\mathcal{R}) \mathbb{I} \right) = -2\mathcal{R}(1 + \mathbb{U}) \delta k \underbrace{\text{Trace}(\mathbb{I})}_{=4} \\
 &= -8\mathcal{R}(1 + \mathbb{U}) \delta k \quad (114.3)
 \end{aligned}$$

الخطوة الموالية هي حساب $\text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M})$.

$$\begin{aligned}
 \text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}) &= \text{Trace} \left(\underbrace{\alpha_\xi \alpha_{\hat{k}} \alpha_{\xi'} \alpha_{\xi'} \alpha_{\hat{k}} \alpha_\xi}_{\mathbb{I}} + \alpha_\xi \alpha_{\hat{k}} \alpha_{\xi'} \alpha_\xi \alpha_{\hat{k}'} \alpha_{\xi'} + \alpha_{\xi'} \alpha_{\hat{k}'} \alpha_\xi \alpha_{\xi'} \alpha_{\hat{k}} \alpha_\xi \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\alpha_{\xi'} \alpha_{\hat{k}'} \alpha_\xi \alpha_\xi \alpha_{\hat{k}} \alpha_{\xi'}}_{\mathbb{I}} \right) = \text{Trace} \left(2\mathbb{I} + \alpha_\xi \alpha_{\hat{k}} \alpha_{\xi'} \alpha_\xi \alpha_{\hat{k}'} \alpha_{\xi'} + \alpha_{\xi'} \alpha_{\hat{k}'} \alpha_\xi \alpha_{\xi'} \alpha_{\hat{k}} \alpha_\xi \right) \quad (115.3) \\
 &= \text{Trace} \left(2\mathbb{I} + \alpha_\xi \alpha_{\xi'} \alpha_{\hat{k}} \alpha_{\hat{k}'} \alpha_\xi \alpha_{\xi'} + \alpha_{\xi'} \alpha_\xi \alpha_{\hat{k}'} \alpha_{\hat{k}} \alpha_{\xi'} \alpha_\xi \right) \\
 &= \text{Trace} \left(2\mathbb{I} + \alpha_\xi \alpha_{\xi'} (\hat{k} \cdot \hat{k}' + i\alpha_{n'}) \alpha_\xi \alpha_{\xi'} + \alpha_{\xi'} \alpha_\xi (\hat{k} \cdot \hat{k}' - i\alpha_{n'}) \alpha_{\xi'} \alpha_\xi \right)
 \end{aligned}$$

بعد التحليل، تصبح العبارة (115.3) كالآتي :

$$\begin{aligned}
 \text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}) &= \\
 &= \text{Trace} \left(2\mathbb{I} + \mathbb{U} \left((\alpha_\xi \alpha_{\xi'})^2 + (\alpha_{\xi'} \alpha_\xi)^2 \right) \right) \quad (116.3) \\
 &\quad + i(\alpha_\xi \alpha_{\xi'} \alpha_{n'} \alpha_\xi \alpha_{\xi'} - \alpha_{\xi'} \alpha_\xi \alpha_{n'} \alpha_{\xi'} \alpha_\xi)
 \end{aligned}$$

وبتطبيق خاصية "أثر جداء مصفوفات مكونة من عدد فردي أو زوجي من الألفات" على العبارة (116.3)، يتم الحصول

على ما يلي:

$$\begin{aligned}
 \text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}) &= \text{Trace} \left(2\mathbb{I} + \mathbb{U} \left(\frac{(\alpha_\xi \alpha_{\xi'})^2 + (\alpha_{\xi'} \alpha_\xi)^2}{=(4\mathcal{R}^2 - 2\mathbb{I})} \right) \right) \quad (117.3) \\
 &= \text{Trace}(2\mathbb{I} + \mathbb{U}(4\mathcal{R}^2 - 2)) = \text{Trace}(2\mathbb{I} + 2\mathbb{U}(2\mathcal{R}^2 - 1))
 \end{aligned}$$

عليه، يمكن كتابة العبارة (117.3) على الشكل الموالي :

$$\begin{aligned}
 \text{Trace}(\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}) &= \text{Trace}(2\mathbb{I} + 2\mathbb{U}(2\mathcal{R}^2 - 1)) = 2 \cdot \text{Trace}(\mathbb{I}) + 2\mathbb{U} \cdot \text{Trace}(2\mathcal{R}^2 - 1) \quad (118.3) \\
 &= 8 + 8\mathbb{U}(2\mathcal{R}^2 - 1) = 8(1 + \mathbb{U}(2\mathcal{R}^2 - 1))
 \end{aligned}$$

بعد الحسابات التي أُجريت، يمكن كتابة العبارة (109.3) كالآتي:

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\mathbb{X}) &= 2\hbar^2 c^2 m_e c^2 \left(32m_e c^2 \mathcal{R}^2 + 16\hbar c \delta k \mathcal{R}^2 + 2\hbar c \mathcal{R} \cdot (-8\mathcal{R}(1 + \mathbb{U})\delta k) \right. \\ &\quad \left. + \hbar c \delta k \cdot (8(1 + \mathbb{U}(2\mathcal{R}^2 - 1))) \right) \end{aligned} \quad (119.3)$$

بعد تحليل العبارة (119.3)، قد تم التوصل للعبارة (120.3)، وهي تمثل أثر المؤثر \mathbb{X} .

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\mathbb{X}) &= 2\hbar^2 c^2 m_e c^2 (32m_e c^2 \mathcal{R}^2 - 16\hbar c \delta k \mathcal{R}^2 \mathbb{U} + 8\hbar c \delta k (1 - \mathbb{U} + 2\mathbb{U}\mathcal{R}^2)) \\ &= 16\hbar^2 c^2 m_e c^2 (4m_e c^2 \mathcal{R}^2 - 2\hbar c \delta k \mathcal{R}^2 \mathbb{U} + \hbar c \delta k (1 - \mathbb{U} + 2\mathbb{U}\mathcal{R}^2)) \end{aligned} \quad (120.3)$$

الخطوة الآتية هي وضع المقدار $(Y = \frac{\hbar c k}{m_e c^2})$ ، ثم إدراجه في العبارة (120.3).

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\mathbb{X}) &= 16\hbar^2 c^2 (m_e c^2)^2 (4\mathcal{R}^2 - 2\hbar c \delta k \mathcal{R}^2 \mathbb{U} + \hbar c \delta k (1 - \mathbb{U} + 2\mathbb{U}\mathcal{R}^2)) \\ &= 16\hbar^2 c^2 (m_e c^2)^2 \left(4\mathcal{R}^2 + Y \left(1 - \frac{k'}{k} \right) (1 - \mathbb{U}) \right) \end{aligned} \quad (121.3)$$

بتعويض العبارة (121.3) في العبارة (80.3) الخاصة بحساب المقطع التفاضلي للتشتت، يتم الحصول على ما يلي:

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{k}, \vec{k}') d^3 k' &= \frac{r_e^2 d^3 k'}{32\hbar c k' k |E_{\vec{k}}| |E_{\vec{k}'}|} \text{Trace}(\mathbb{X}) \delta(\hbar c k + E_{\vec{k}} - \hbar c k' - E_{\vec{k}'}) \\ &= \frac{r_e^2 d^3 k'}{32\hbar c k' k (m_e c^2) |E_{\vec{k}'}|} \left(16\hbar^2 c^2 (m_e c^2)^2 \left(4\mathcal{R}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + Y \left(1 - \frac{k'}{k} \right) (1 - \mathbb{U}) \right) \right) \delta(\hbar c k + E_{\vec{k}} - \hbar c k' - E_{\vec{k}'}) \end{aligned} \quad (122.3)$$

الخطوة الآتية هي معالجة وتحليل المقدار $(\frac{1}{|E_{\vec{k}'}} \delta(\hbar c k + E_{\vec{k}} - \hbar c k' - E_{\vec{k}'}))$ ، ومن أجل ذلك، سيتم استعمال خاصية

دالة ديراك الموضحة في العبارة (123.3).

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (123.3)$$

أي أن:

$$\frac{1}{|E_{\vec{k}'}|} \delta \left(\hbar ck + \underbrace{E_{\vec{k}}}_{=m_e c^2} - \hbar ck' - E_{\vec{k}'} \right) = \delta \left((\hbar c(k - k') + m_e c^2) \frac{|E_{\vec{k}'}|}{Q_1} - \frac{|E_{\vec{k}'}|^2}{Q_2} \right) \quad (124.3)$$

فيما يخص المقدار Q_1 فهو يتعلق بتحويل الطاقة $(\hbar\omega - \hbar\omega')$ إلى الإلكترون، وأما المقدار Q_2 فهو يتعلق بتحويل الدفع

الخطي $(\hbar|\vec{k} - \vec{k}'|)$ إلى الإلكترون، أي أن:

$$\begin{cases} Q_1 = \hbar c(k - k') + m_e c^2 \\ Q_2 = \sqrt{(\hbar c|\vec{k} - \vec{k}'|)^2 + (m_e c^2)^2} \end{cases} \quad (125.3)$$

ومنه، العبارة (124.3) تغدو كالآتي:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|E_{\vec{k}'}|} \delta \left(\hbar ck + \underbrace{E_{\vec{k}}}_{=m_e c^2} - \hbar ck' - E_{\vec{k}'} \right) \\ &= \delta \left((\hbar c(k - k') + m_e c^2)^2 - \left((\hbar c|\vec{k} - \vec{k}'|)^2 + (m_e c^2)^2 \right) \right) \\ &= \delta \left(2\hbar cm_e c^2 (k - k') - 2\hbar^2 c^2 k k' (\cos \theta - 1) \right) \\ &= \frac{1}{2\hbar cm_e c^2} \delta \left((k - k') - \frac{\hbar ck k'}{m_e c^2} (\cos \theta - 1) \right) \\ &= \frac{1}{2\hbar cm_e c^2} \delta \left((k - k') - \frac{\hbar ck k'}{m_e c^2} (\mathbb{U} - 1) \right) \\ &= \frac{1}{2\hbar cm_e c^2} \delta \left(k - k' (1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U})) \right) \\ &= \frac{1}{2\hbar cm_e c^2 (1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))} \delta \left(\frac{k}{(1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))} - k' \right) \\ &= \frac{1}{2\hbar cm_e c^2 (1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))} \delta \left(k' - \frac{k}{(1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))} \right) \end{aligned} \quad (126.3)$$

الجدير بالملاحظة أنه يوجد علاقة بين العبارة (126.3) والعبارة (7.3)، وذلك بمقتضى حفظ الطاقة الدفع الخطي

أثناء التصادم، وذلك بظهور المقدار $\left(\frac{k}{(1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))} \right)$ في عمدة دالة ديراك، مما يدل على ترابط و إنسجام النظري.

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

وبتعويض العبارة (126.3) في العبارة (122.3)، يتم الحصول على مايلي:

$$\begin{aligned}
 \sigma(\vec{k}, \vec{k}') d^3 k' &= \frac{r_e^2 d^3 k'}{32 \hbar c k' k (m_e c^2) |E_{\vec{k}'}|} \left(16 \hbar^2 c^2 (m_e c^2)^2 \left(4 \mathcal{R}^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \Upsilon \left(1 - \frac{k'}{k} \right) (1 - \mathbb{U}) \right) \right) \delta(\hbar c k + E_{\vec{k}} - \hbar c k' - E_{\vec{k}'}) \\
 &= \frac{r_e^2 d^3 k'}{32 \hbar c k' k (m_e c^2)} \left(16 \hbar^2 c^2 (m_e c^2)^2 \left(4 \mathcal{R}^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \Upsilon \left(1 - \frac{k'}{k} \right) (1 - \mathbb{U}) \right) \right) \frac{1}{2 \hbar c m_e c^2 (1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))} \delta \left(k' \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k}{(1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))} \right)
 \end{aligned} \tag{127.3}$$

بنشر وتحليل العبارة (127.3)، يتم الحصول على العبارة (128.3).

$$\begin{aligned}
 \sigma(\vec{k}, \vec{k}') d^3 k' &= \frac{r_e^2 d^3 k'}{4 k' k} \left[4 \mathcal{R}^2 + \Upsilon \left(1 - \frac{k'}{k} \right) (1 - \mathbb{U}) \right] \frac{1}{(1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))} \delta \left(k' \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k}{(1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))} \right)
 \end{aligned} \tag{128.3}$$

بتعويض المقدار $(d^3 k' = k'^2 dk' d\Omega_{\vec{k}'})$ بقيمته، العبارة (128.3) تصبح كالآتي :

$$\begin{aligned}
 & \sigma(\hat{k}, \hat{k}') dk' d\Omega_{\vec{k}'} \\
 &= \frac{r_e^2}{4} dk' d\Omega_{\vec{k}'} \frac{k'}{k} \left[4\mathcal{R}^2 + \Upsilon \left(1 - \frac{k'}{k} \right) (1 - \mathbb{U}) \right] \frac{1}{\underbrace{(1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))}_{=\frac{k'}{k}}} \delta \left(k' \right. \\
 & \quad \left. - \frac{k}{(1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))} \right) \\
 &= \frac{r_e^2}{4} dk' d\Omega_{\vec{k}'} \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \left[4\mathcal{R}^2 + \left(1 - \frac{k'}{k} \right) \frac{\Upsilon(1 - \mathbb{U})}{=(\frac{k}{k'} - 1)} \right] \delta \left(k' \right. \\
 & \quad \left. - \frac{k}{(1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))} \right) \tag{129.3} \\
 &= \frac{r_e^2}{4} dk' d\Omega_{\vec{k}'} \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \left[4\mathcal{R}^2 + \left(\frac{k}{k'} - 1 \right) \left(1 - \frac{k'}{k} \right) \right] \delta \left(k' \right. \\
 & \quad \left. - \frac{k}{(1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))} \right) \\
 &= \frac{r_e^2}{4} dk' d\Omega_{\vec{k}'} \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \left[4\mathcal{R}^2 + \frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} - 2 \right] \delta \left(k' - \frac{k}{(1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))} \right)
 \end{aligned}$$

عليه، المقطع التفاضلي لتشتت فوتون عنيف طاقته ($\hbar\omega \gg m_e c^2$) بإلكترون شبه طليق في المجال الكهرومغناطيسي

للنواة هو:

$$\sigma(\hat{k}, \hat{k}') dk' d\Omega_{\vec{k}'} = \frac{r_e^2}{4} dk' d\Omega_{\vec{k}'} \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \left[4\mathcal{R}^2 + \frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} - 2 \right] \delta \left(k' - \frac{k}{(1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))} \right) \tag{130.3}$$

ويمكن كتابة العبارة (130.3) على الشكل الآتي:

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

$$\sigma(\hat{k}, \hat{k}') dk' d\Omega_{\vec{k}'} \quad (131.3)$$

$$= \frac{r_e^2}{4} dk' d\Omega_{\vec{k}'} \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \left[\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} - 2 + 4(\vec{\varepsilon}_{\sigma\vec{k}} \cdot \vec{\varepsilon}_{\sigma'\vec{k}'})^2 \right] \delta \left(k' - \frac{k}{(1 + \Upsilon(1 - \mathbb{U}))} \right)$$

العبرة (131.3) توضح المقطع العرضي التفاضلي $\sigma(\hat{k}, \hat{k}')$ لتشتت كومبتون، وقد تم التوصل إليه باستعمال طريقة الاضطراب المتعلق بالزمن. هذه العلاقة تحدد كمياً احتمالية تشتت فوتون عفيف طاقته ($\hbar\omega \gg m_e c^2$) بالإلكترون شبه طليق في المجال الكهرومغناطيسي للنواة مع تغير محدد في الدفع الخطي والطاقة. تُعد هذه المسألة الفيزيائية ظاهرة كمومية أساسية و لا يمكن تفسيرها وفق الفيزياء الكلاسيكية، و هي إحدى الأدلة التجريبية التي دَعَمَتْ نظرية الحقل الكمومي. كما هو ملاحظ، العبرة (131.3) تحوي المقدار r_e^2 ، و هو مربع نصف القطر الكلاسيكي للإلكترون، علماً أن ($r_e = 2.818 \times 10^{-15} m$)، و هو يمثل مقياساً لطول المدى الذي يُؤثرُ فيه الإلكترون على المجال الكهرومغناطيسي المحيط به، أي أنّ المقطع العرضي التفاضلي لكومبتون يعتمد على الخصائص الأساسية للإلكترون. أما المقدار $\left(\frac{k'}{k}\right)^2$ ، فهو يعكس الحركية النسبية لعملية التشتت مما يضمن تناسب الكثافة الاحتمالية بشكل صحيح مع الطاقة، بما يتماشى مع قوانين الحفظ، حيث يُشير k و k' إلى أشعة الموجة للفوتونات الواردة والمنتشرة، على التوالي، أي أنّ هذا المقدار يحدد مدى احتمال انتشار الفوتون المنتشرة في حالات طاقة وزوايا تشتت معينة بناءً على الخصائص الأساسية للإلكترون والطبيعة الكمومية للعملية.

من أهم ميزات المقطع التفاضلي الذي قد تم التوصلُ إليه، هو وجود المقدار $4(\vec{\varepsilon}_{\sigma\vec{k}} \cdot \vec{\varepsilon}_{\sigma'\vec{k}'})^2$ ، وهو مقدار يعبر عن الترابط بين استقطاب الفوتون قبل وبعد التشتت. ففي الكهروديناميكا الكلاسيكية، يُعالجُ الاستقطاب بشكل ثابت نسبياً، بينما في الديناميكا الكهربائية الكمومية، تُعد الطبيعة الديناميكية والكمومية للاستقطاب مركزية، فالمقدار $4(\vec{\varepsilon}_{\sigma\vec{k}} \cdot \vec{\varepsilon}_{\sigma'\vec{k}'})^2$ يمثل الإسقاط الكمومي لأحد أشعة الاستقطاب على الآخر. وعليه، إذا كان الاستقطاب متماثلاً، يصبح هذا المقدار أعظماً، وإذا كانا متعامدين، يخفتي هذا المقدار. لذلك، فإن محاذاة الاستقطاب تؤثر مباشرة على احتمال التشتت.

أما المقدار $\left(\frac{k}{k'} - 1\right) \left(1 - \frac{k'}{k}\right) = \frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} - 2$ ، فهو يعتمد بشكل غير مباشر على زاوية التشتت θ ، لأنها ترتبط بنسبة طاقتي الفوتون قبل وبعد التشتت، وهاتان الطاقتان تتغيران بدورهما مع تغير θ . في حالة تشتت كومبتون لفوتون عفيف طاقته ($\hbar\omega \gg m_e c^2$) بالإلكترون شبه طليق في المجال الكهرومغناطيسي للنواة، فإن طاقة الفوتون المنتشرة $(E'_p = \hbar\omega' = \hbar ck')$ تتناقص مع زيادة قيم زاوية التشتت وفقاً للعبرة (10.3)، مما يعني أن طاقة الفوتون المنتشرة تكون أعظمية ($E'_p = \hbar\omega_c$) عندما تكون ($\theta = 0^\circ$) "أي حالة تشتت للأمام"، وتتناقص هذه الطاقة تدريجياً مع زيادة زاوية التشتت

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

θ ، لتبلغ أدنى قيمة لها ($E_p' = \frac{1}{2} \hbar \omega_c$) عندما تكون ($\theta = 180^\circ$) "أي حالة تشتت للخلف". لذلك، تعبر هذه الكمية عن مدى فقدان الفوتون لطاقة نتيجة التشتت، وكلما زادت، دل ذلك على انتقال طاقي أكبر إلى الإلكترون.

عليه، حقيقة أن العبارة (3. 131) قد تُحصِلَ عليها من نظرية الاضطراب المتعلق بالزمن تُبرِزُ أساسها الكمومي الدقيق، فقد سمحت هذه النظرية بالتعامل مع كل من الحقل الكهرومغناطيسي للفوتون وحقل الإلكترون كمتغيرات كمومية وسَمَحَتْ بالحساب المباشر لسعة الانتقال الطاقي و كذلك تمكنت من الحساب الدقيق للمقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون.

ومنه، تُجسِّدُ العبارة (3. 131) المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون من المنظور الكمي، وهو ذو بنية دقيقة وغنية بالمعلومات متجاوزة التقريب الكلاسيكي. فالنتيجة التي قد تم الوصول إليها تشمل تأثيرات استقطاب الفوتون، والانحراف الزاوي للفوتون المتشتت، وانتقال الطاقة، وكلها مُضمنة في إطار كمي مُتسق. تُعد هذه الصيغة مفيدة بشكل خاص في الأنظمة ذات الطاقة العالية أو المتفاعلة بقوة حيث تفشل التقريبات البسيطة، كما تسلط الضوء على كيفية تأثير الميزات الدقيقة مثل الاستقطاب والانحراف الزاوي بشكل كبير على ظاهرة التشتت.

3. 3. المقارنة وتأكيد النتائج

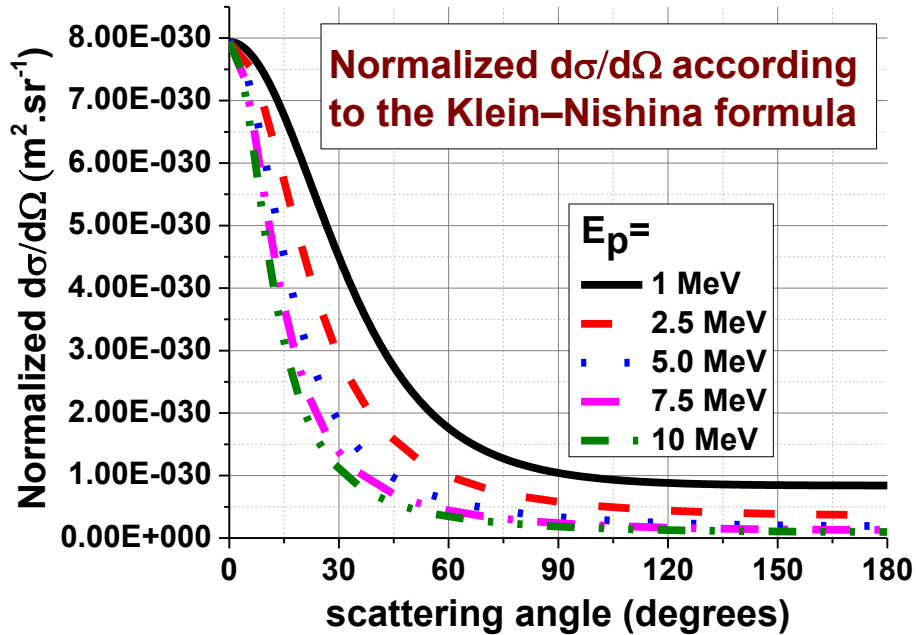
في هذا الجزء، سيتم إجراء مقارنة مفصلة بين عبارة المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون المتحصل عليه في هذه الدراسة مع صيغة كلاين-نيشينا الكلاسيكية ("K.-N.-F") (The Klein–Nishina formula)، والموضحة في العبارة (3. 132). تحوي الصيغة المُتَحَصَلُ عليها العديد من المقادير كما تم الإشارة إليه أعلاه. عليه، من خلال التعبير عن المقطع العرضي المُتَحَصَلُ عليه بصيغة مشابهة لصيغة كلاين-نيشينا، سَيَتِمُّ تحليل مدى توافق النموذج النظري المتحصل عليه مع النتائج المُثبتة أو انحرافه عنها، حيث ستسمح هذه المقارنة بالتحقق من صحة الصيغة الجديدة للمقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون في ظل حدود معروفة، وتُبرِزُ الظروف و الشروط التي قد تنشأ فيها اختلافات جوهرية.

$$\sigma(\hat{k}, \hat{k}') dk' d\Omega_{\hat{k}'} = \frac{r_e^2}{2} dk' d\Omega_{\hat{k}'} \left(\frac{k'}{k}\right)^2 \left[\left(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} - \sin^2 \theta\right) \right] \quad (3. 132)$$

عند مقارنة العبارة (3. 131) و العبارة (3. 132)، يُلاحظُ أن الشكل البنيوي الأساسي للعبارتين متطابق تقريباً، لكن العبارة (3. 131) تُعَبَّرُ أكثر تعبيراً عن البنية الميكروسكوبية الكمية لظاهرة التشتت المدروسة، خاصة من حيث التبعيات الدقيقة لاتجاهات واستقطاب الفوتونات، كما أنها تشمل دالة دلنا التي تحفظ الطاقة ضمن الوصف الطيفي. أما صيغة كلاين-نيشينا فهي ناتجة عن حساب متوسط احتمالي عبر حالات الاستقطاب المختلفة، ما يجعلها صيغة مختصرة وشاملة تُستخدم عادة في التطبيقات الفيزيائية العامة.

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

لكن لتقديم مقارنة عادلة و معمقة بين العبارتين، قد تم إجراء محاكاة عددية تسمح برسم تغير المقطع العرضي التفاضلي لكومبتون بدلالة تغير زاوية التشتت θ . عليه، الشكل 3. 8 يعرض التغير في المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون وفق صيغة كلاين-نيشينا لفوتونات تتغير طاقة وُرودها من $(E_p = 1 \text{ MeV})$ إلى $(E_p = 10 \text{ MeV})$. من الملاحظ أنه مهما كانت القيمة الابتدائية لطاقة الفوتونات الواردة، فإن النسبة $(\frac{d\sigma}{d\Omega} = 7.94079 \times 10^{-30} \text{ m}^2 \cdot \text{sr}^{-1})$ عند زاوية تشتت قدرها $(\theta = 0^\circ)$ ، و بعدها تندهور هذه النسبة حتى تصل قيمها الدنيا عند زاوية تشتت $(\theta = 180^\circ)$ لتتغير في مجال من $(\frac{d\sigma}{d\Omega} = 9.89774 \times 10^{-32} \text{ m}^2 \cdot \text{sr}^{-1})$ ، ويمثل النسبة التي تتناسب مع طاقة الفوتون الوارد بطاقة $(E_p = 10 \text{ MeV})$ ، إلى $(\frac{d\sigma}{d\Omega} = 8.41454 \times 10^{-31} \text{ m}^2 \cdot \text{sr}^{-1})$ ، و المتمثلة في النسبة التي تتناسب مع طاقة الفوتون الوارد بطاقة $(E_p = 1 \text{ MeV})$ ، وذلك لأنه عندما يَرُدُّ الفوتون بطاقة عالية، يصبح التشتت شديد التوجّه و الفوتونات تُفضّل التشتت نحو الأمام، لأنها تَفْقِدُ جزءًا أكبر من طاقتها في التشتت الخلفي، مما يؤدي إلى فرق كبير في الطاقة، وبالتالي يُلاحظ سلوك عكسي بين قيم المقطع العرضي و طاقة ورود الفوتون عند زوايا تشتت كبيرة، فكلما كانت طاقة ورود الفوتون عالية كلما تم تسجيل مقطع عرضي أقل عند زوايا تشتت كبيرة.

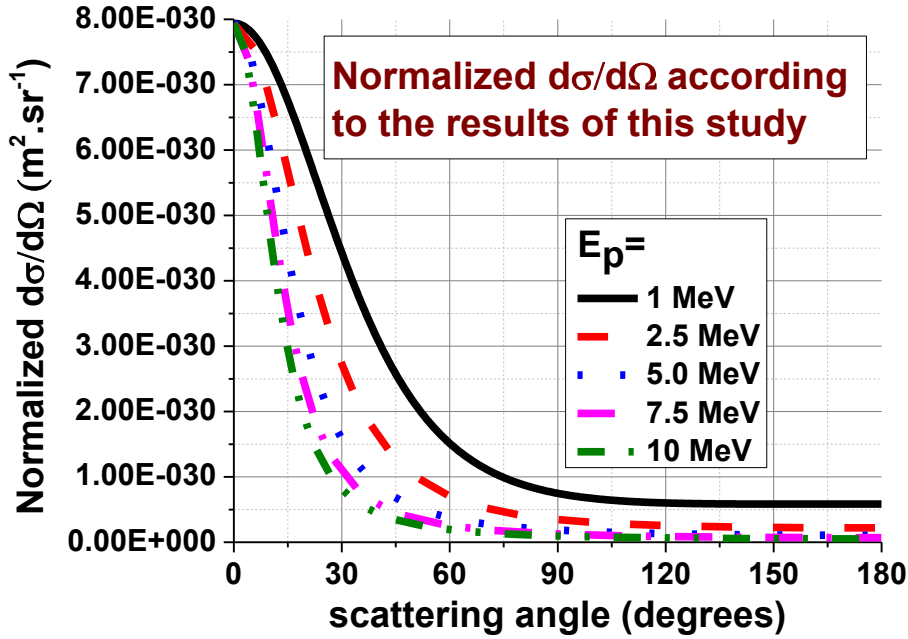


الشكل 3. 8: التغير في المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون وفق صيغة كلاين-نيشينا.

أما الشكل 3. 9، فهو يُبيِّن التغير في المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون، كما تُحدده نتائج هذه الدراسة (العبارة (3. 131))، لفوتونات تختلف طاقة وُرودها من $(E_p = 1 \text{ MeV})$ إلى $(E_p = 10 \text{ MeV})$. يُلاحظ أنه بغض النظر عن

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

طاقة الفوتون الوارد، فإن القيمة القصوى للمقطع العرضي التفاضلي تبلغ ($\frac{d\sigma}{d\Omega} = 7.94079 \times 10^{-30} m^2 \cdot sr^{-1}$) عند زاوية تشتت قدرها ($\theta = 0^\circ$). بعد ذلك، تبدأ هذه القيمة في الانخفاض تدريجياً لتصل إلى قيمها الدنيا عند زاوية ($\theta = 180^\circ$)، حيث تتراوح بين ($\frac{d\sigma}{d\Omega} = 5.19531 \times 10^{-32} m^2 \cdot sr^{-1}$) للفوتونات ذات الطاقة ($E_p = 10 MeV$)، و ($\frac{d\sigma}{d\Omega} = 5.85157 \times 10^{-31} m^2 \cdot sr^{-1}$) للفوتونات ذات الطاقة ($E_p = 1 MeV$).



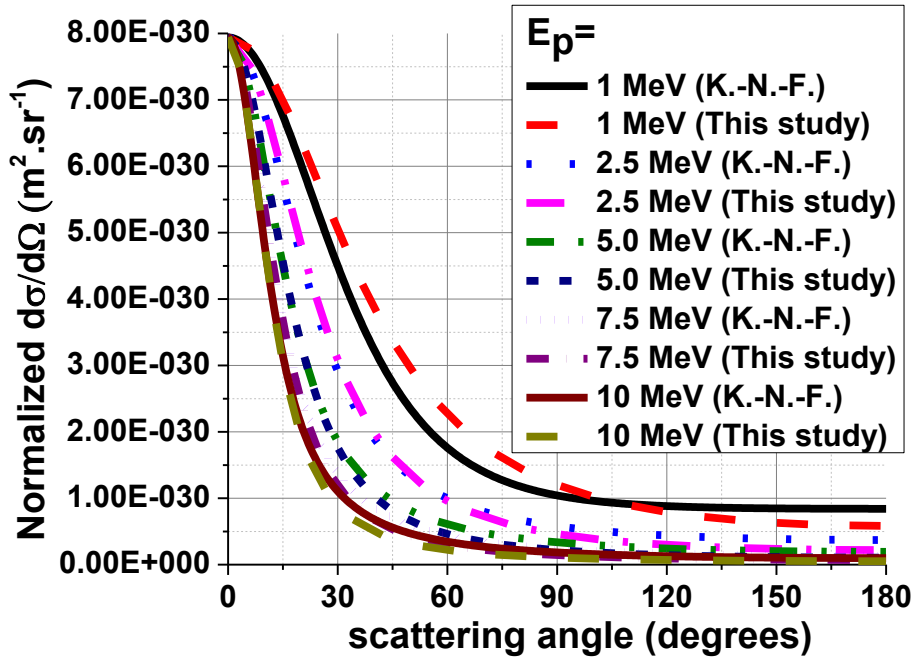
الشكل 3. 9: التغير في المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون وفق نتائج هذه الدراسة.

أما الشكل 3. 10، فهو يُظهر مقارنة بين النتائج المتحصل عليها في هذه الدراسة (العبارة (3. 131)) وتلك المستخرجة من صيغة كلاين-نيشينا (العبارة (3. 132)). وقد كشفت المقارنة عن تقارب كبير بين النتائج، حيث بلغت نسب التوافق بين المعادلتين 96.5%، 92.16%، 90.49%، و89.6%، وذلك للفوتونات الواردة بطاقات قدرها ($E_p = 2.5 MeV$)، ($E_p = 5 MeV$)، ($E_p = 7.5 MeV$)، و ($E_p = 10 MeV$)، على التوالي، مع أفضلية لصيغة كلاين-نيشينا. أما بالنسبة للفوتونات الواردة بطاقة ($E_p = 1 MeV$)، فقد تميزت المعادلة النظرية لهذه الدراسة بنتيجة تفوق بنسبة 105.93%. وتُعد هذه النسب مرضية جداً، مع الإشارة إلى أن الفارق بين نتائج العبارتين يعود أساساً إلى اختيار القيمة المثلى للكمية $(\mathcal{R} = \vec{e}_{\sigma\vec{k}} \cdot \vec{e}_{\sigma'\vec{k}'})$.

عليه، يُعد حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون أمراً أساسياً لفهم كيفية تفاعل الفوتونات عالية الطاقة (مثل الأشعة السينية وأشعة جاما) مع المادة، خاصة الإلكترونات الحرة أو ضعيفة الارتباط. فالمقطع التفاضلي ($\frac{d\sigma}{d\Omega}$) يحدد احتمالية أن

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

يتشتت الفوتون في اتجاه بزاوية θ ، مما يسمح بتحديد توزيع الفوتونات بعد التفاعل، فتزايد مقطع تشتت كومبتون يعني أن عملية التشتت في تلك الزاوية أكثر احتمالاً، لكنه لا يعني بالضرورة أن كمية الطاقة المنقولة أكبر. في الواقع، أكبر انتقال للطاقة إلى الإلكترون يحدث عند زوايا التشتت الكبيرة، حيث يكون المقطع أقل. وبالتالي، احتمالية التشتت ومقدار الطاقة المنقولة ليسا متلازمين دائماً. ورغم أن الطاقة المنقولة إلى الإلكترون تزداد مع زاوية التشتت، فإن المقطع يتناقص عند الزوايا الكبيرة، ما يعني أن التشتت بزاوية كبيرة أقل احتمالاً. لذا، فإن فائدة حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون تكمن في توقع أنماط التشتت، وتقدير مدى فقدان الطاقة للفوتونات، وهو أمر ضروري في تصميم أجهزة الكشف عن الإشعاع، وتحليل المواد بالأشعة، وفهم البنية الذرية والنوية بدقة.



الشكل 3. 10: مقارنة المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون لهذه الدراسة مع نتائج صيغة كلاين-نيشينا.

4.3. الخاتمة

في هذا الفصل قد تم إجراء دراسة نظرية مُفصَّلة لتشتت فوتون عالي الطاقة بواسطة إلكترون شبه حرّ يقع في المجال الكهرومغناطيسي للنواة، وهي عملية ذات أهمية محورية في الديناميكا الكهربائية الكمومية عالية الطاقة وتفاعلات الفوتون والمادة. وقد تم حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون وهو دالة تحوي العديد من المعاملات من أهمها التغير في زاوية انحراف شعاع موجة الفوتون الوارد بعد تصادمه مع الإلكترون، وكذلك حالات الاستقطاب \mathcal{R} للفوتونات المشاركة في عملية التشتت.

الفصل الثالث: حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون

عليه، يُعد حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون مسألةً بالغة الأهمية لأنها تحدد كميًا احتمالية تشتت الفوتون الوارد بزواوية معينة عند تفاعله مع إلكترون شبه حر (أي عند تصادمه مع الهدف)، مما يوفر فهمًا دقيقًا للتوزيع الزاوي وطاقة الفوتونات المتشتتة. ويلعب هذا دورًا أساسيًا في اختبار الديناميكا الكهربائية الكمية، وتفسير النتائج التجريبية، ونمذجة تفاعلات الإشعاع والمادة. وهو أساسي في مجالات مثل التصوير الطبي، والحماية من الإشعاع، والفيزياء الفلكية، وتصميم كواشف الجسيمات، حيث تتطلب تنبؤات دقيقة لسلوك تشتت الفوتون. بالإضافة إلى ذلك، يُشكل أساسًا لنماذج تشتت أكثر تطورًا تتضمن الإلكترونات المقيدة، والتصحيحات النسبية، والوسائط المعقدة.

الخاتمة العامة

هذا العمل هو عبارة دراسة شاملة لتشتت فوتون عنيف طاقته ($\hbar\omega \gg m_e c^2$) بإلكترون شبه طليق في المجال الكهرومغناطيسي للنواة من خلال فحص دقيق للمبادئ الأساسية للإشعاع الكهرومغناطيسي، وميكانيكا الكم النسبية، وتفاعلات الفوتون والإلكترون. بدءاً من الإطار الكلاسيكي، قد تمت مناقشة معادلات ماكسويل ومفهوم تكميم المجال الكهرومغناطيسي لسد الفجوة بين الأوصاف الكلاسيكية والكمية للضوء، مما وضع حجر الأساس لفهم الإشعاع كموجة وجسيم في نفس الوقت. ثم تم الانتقال إلى ميكانيكا الكم النسبية من خلال تحليل معمق لمعادلة ديراك، مع تسليط الضوء على دورها المحوري في وصف الجسيمات ذات اللف الذاتي والحركة النسبية، مما سمح بتقديم رؤى رئيسية معمقة حول طبيعة الجسيمات المضادة، والتيارات الاحتمالية، وتفاعل الجسيمات المشحونة مع المجالات الكهرومغناطيسية. وأخيراً، طُبقت هذه الأدوات النظرية لحساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون، وهو معلمة حاسمة في دراسات تفاعل الفوتون والمادة، مما سمح بالتنبؤ بدقة بزوايا انحراف الفوتون الوارد بعد تصادمه بالهدف، (الإلكترون الشبه الحر الموجود في الحقل الكهرومغناطيسي للنواة)، وطاقات الفوتونات المنتشرة، مما يُقدم طريقة فعّالة للتحقق من صحة الديناميكا الكهربائية الكمومية ودعم تطبيقات عملية متنوعة.

عند مقارنتها مع الصيغة المعروفة بصيغة "كلاين-نيشينا"، للمقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون، أظهرت النتائج المتحصل عليها في هذه الدراسة، باستخدام نظرية الاضطراب المتعلق بالزمن، نسب تقارب بلغت 105.93%، و 96.5%، و 92.16%، و 90.49%، و 89.6% للفوتونات الواردة بطاقة ($E_p = 1 \text{ MeV}$)، ($E_p = 2.5 \text{ MeV}$)، ($E_p = 5 \text{ MeV}$)، ($E_p = 7.5 \text{ MeV}$)، و ($E_p = 10 \text{ MeV}$)، على التوالي. وتُعدّ هذه النسب مقبولة جداً، ويُعزى الفارق المسجل بين نتائج الدراسة و نتائج الصيغة المرجعية إلى الاختيار الدقيق لقيمة المقدار ($\mathcal{R} = \vec{\epsilon}_{\sigma\vec{k}} \cdot \vec{\epsilon}_{\sigma'\vec{k}'}$)، الذي ينبغي تحديده بعناية لضمان توافق جيد بين النتائج النظرية والتجريبية.

إجمالاً، أظهر هذا العمل كيف يُؤدي التكامل المُتماسك بين المبادئ الكلاسيكية والكمية إلى فهم أعمق للعمليات الفيزيائية الأساسية وتداعياتها التكنولوجية. وعليه، هناك العديد من التحديات والآفاق المستقبلية الواعدة لهذه الدراسة، حيث تفتح آفاقاً واسعة للبحث المتقدم والتطبيقات العملية. ومن بين التوسعات المباشرة تحسين نموذج تشتت كومبتون ليشمل تصحيحات نسبية للإلكترونات المقيدة بالنواة، مما يتيح تنبؤات أكثر دقة في الأنظمة الذرية المعقدة. إضافةً إلى ذلك، دمج تأثيرات الاستقطاب ودراسة التشتت المعتمد على اللف المغزلي (السينيور) يمكن أن يعمق الفهم لتفاعلات الفوتون مع الإلكترون على مستوى كمومي أدق.

الخاتمة العامة

من الناحية التطبيقية، يُرسي هذا العمل الأساس لتحسين تقنيات التصوير في التشخيص الطبي، كما هو الحال في أنظمة التصوير المتقدمة بالأشعة السينية وأشعة جاما، ويُساهم في تطوير كاشفات إشعاع أكثر حساسية تُستخدم في البعثات الفضائية وتجارب فيزياء الجسيمات. علاوةً على ذلك، يُمكن للإطار النظري المُنشأ هنا أن يدعم التطورات المستقبلية في نظرية المجال الكمي ومحاكاة الديناميكا الكهربائية الكمومية، مُوفراً رؤيَّةً ثاقبة حول تفاعلات الضوء والمادة في الظروف القصوى، مثل تلك الموجودة في المصادمات عالية الطاقة أو البيئات الفيزيائية الفلكية.

المراجع

- [1] Hussein, E. M. A., 2007, "CHAPTER ONE - MECHANISMS," Radiation Mechanics, E. M. A. Hussein, ed., Elsevier Science Ltd, Oxford, pp. 1-65. <https://doi.org/10.1016/B978-008045053-7/50002-1>.
- [2] Friedrich, H., 2016, Scattering Theory, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. 978-3-662-48526-2. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48526-2_1.
- [3] Davydov, A. V., 2015, Advances in Gamma Ray Resonant Scattering and Absorption: Long-Lived Isomeric Nuclear States, Springer International Publishing, Cham. 97 .6-10524-319-3-8 https://doi.org/10.1007/978-3-319-10524-6_1.
- [4] Xie, X.-Y., and Liu, X.-B., 2020, "Elastic and inelastic collisions of the semirational solutions for the coupled Hirota equations in a birefringent fiber," Applied Mathematics Letters, 105 ,p. 106291. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106291>.
- [5] Johnson, R. E., and Bowman, J. M., 2003, "Atomic and Molecular Collisions," Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition), R. A. Meyers, ed., Academic Press, New York, pp. 721-7 .44<https://doi.org/10.1016/B0-12-227410-5/00040-5>.
- [6] Armbruster, D., Martin, S., and Thatcher, A., 2017, "Elastic and inelastic collisions of swarms," Physica D: Nonlinear Phenomena, 344, pp. 45-57. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2016.11.008>.
- [7] Fan ,X.-H., Yang, Z.-X., Chen, P.-H., Li, Z.-P., Zuo, W., Kimura, M., and Nishimura, S., 2025, "Exploring the nuclear momentum anisotropy based on intermediate-energy heavy-ion collisions," Physics Letters B, 866, p. 139503. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2025.139503>.
- [8] Kumar, S., Kumar, K., Jain, D., and Singh, M., 2024, "Investigation of elastic scattering cross-sections of electron with neon atoms," Chemical Physics Impact, 8, p. 100503. <https://doi.org/10.1016/j.chphi.2024.100503>.
- [9] Salvat, F., Llosa, J., Lallena, A. M., and Almansa, J., 2022, "ECCPA: Calculation of classical and quantum cross sections for elastic collisions of charged particles with atoms," Computer Physics Communications, 277, p. 108368. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2022.108368>.
- [10] Chu, X., and Dalgarno, A., 2005, "Polarizabilities of 3P Atoms and van der Waals Coefficients for Their Interaction with Helium Atoms," Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics, H. H. Stroke, ed., Academic Press, pp. 83-91. [https://doi.org/10.1016/S1049-250X\(05\)51014-0](https://doi.org/10.1016/S1049-250X(05)51014-0).
- [11] Samokhin, A. P., 2018, "Correlations among elastic and inelastic cross-sections and slope parameter," Physics Letters B, 786, pp. 100-105. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.09.032>.
- [12] L'Annunziata, M. F., 2020" ,Chapter 1 - The atomic nucleus, nuclear radiation, and the interaction of radiation with matter," Handbook of Radioactivity Analysis (Fourth Edition), M. F.

- L'Annunziata, ed., Academic Press, pp. 1-243. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-814397-1.00001.7->
- [13] Macchi, A., Moruzzi, G., and Pegoraro, F., 2023, "Radiation Emission and Scattering," Problems in Classical Electromagnetism: 203 Exercises with Solutions, A. Macchi, G. Moruzzi, and F. Pegoraro, eds., Springer International Publishing, Cham, pp .98-89 . https://doi.org/10.1007/978-3-031-22235-1_10.
- [14] Kneipp, K., Moskovits, M., and Kneipp, H., 2006, Surface-Enhanced Raman Scattering: Physics and Applications, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. 978-3-540-33567-2. https://doi.org/10.1.1_6-33567-540-3/007
- [15] Sébilleau, D., Hatada, K., and Ebert, H., "Multiple Scattering Theory for Spectroscopies," Proc. Multiple Scattering Theory for Spectroscopies, D. Sébilleau, K. Hatada, and H. Ebert, eds., Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-73811-6>.
- [16] Povh, B., and Rosina, M., 2017, Scattering and Structures: Essentials and Analogies in Quantum Physics, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. 978-3-662-54515-7.
- [17] Saull, P. R. B., 2023, "Compton Scattering," Encyclopedia of Color Science and Technology, R. Shamey, ed., Springer International Publishing, Cham, pp. 669-677. https://doi.org/10.1007/978-3-030-89862-5_199.
- [18] Murakami, Y., and Ishihara, S., 2017, Resonant X-Ray Scattering in Correlated Systems, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. 978-3-662-53227-0. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53227-0_1.
- [19] Compton, A. H., 1925, "On the Mechanism of X-Ray Scattering," Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 11(6), pp. 303-306. <https://www.jstor.org/stable/84908>.
- [20] Santamaria, R., 2023, "Wave-Particle Duality of Matter," Molecular Dynamics, R. Santamaria, ed., Springer Nature Switzerland, Cham, pp. 149-157. https://doi.org/10.1007/978-3-031-3.7_7-7042
- [21] Sartori, L., 2024, "Relativistic Nature of Wave-particle Duality," International Journal of Theoretical Physics, 63(8), p. 204. <https://doi.org/10.1007/s10773-024-05736-2>.
- [22] Chang, D. C., 2024, "A New Understanding on Wave-Particle Duality: Comparing the Quantum Wave Model with the Copenhagen Interpretation and Other Alternative Models," On the Wave Nature of Matter: A New Approach to Reconciling Quantum Mechanics and Relativity, D. C. Chang, ed., Springer Nature Switzerland, Cham, pp. 1 .139-23https://doi.org/10.1007/978-3-031-48777-4_10.
- [23] Makarov, D. N., 2023, "General quantum theory of Thomson scattering," Results in Physics, 52, p. 106790. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2023.106790>.

- [24] Hashimoto, T., 2022, "Response of Electrons to X-ray and Visible Light: Thomson Scattering and Rayleigh Scattering," Principles and Applications of X-ray, Light and Neutron Scattering, T. Hashimoto, ed., Springer Nature Singapore, Singapore, pp. 53-72. https://doi.org/10.1007/978-981-16-1645-7_5.
- [25] Hutchinson, I. H., 2002, "Scattering of electromagnetic radiation," Principles of Plasma Diagnostics, I. H. Hutchinson, ed., Cambridge University Press, Cambridge, pp. 273-321. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511613630.009>.
- [26] Kragh, H., 2009, "Bohr—Kramers—Slater Theory," Compendium of Quantum Physics, D. Greenberger, K. Hentschel, and F. Weinert, eds., Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 62-64. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70626-7_19.
- [27] P.-N.Favennec, Sakho, I., Sizun, H., and Blot, J.-P., 2021, Electromagnetic Waves 1: Maxwell's Equations, Wave Propagation, John Wiley & Sons, Inc.
- [28] Bao, G., and Li, P., 2022, Maxwell's Equations in Periodic Structures, Springer Singapore.
- [29] Difallah, M., 2023, "Atomic spectra and radiation transfers (lectures)".
- [30] Saâdallah, B., 2024, "Radiation Quantization Lessons".
- [31] Difallah, M., and Bedida, N., 2024, Lectures in Quantum Physics, Dar Basma Ilmiya, Ouargla, Algeria. 978-9969-02-193-6.
- [32] Saâdallah, B., 2024, "Dirac equation lessons".
- [33] Thaller, B., 1992, The Dirac Equation, Springer Berlin, Heidelberg. 978-3-662-02753-0.
- [34] Duck, I., and Sudarshan, E. C. G., 1998, "From Hole Theory to Positrons," Pauli and the Spin-Statistics Theorem, World Scientific Publishing Company, p. 526. <https://doi.org/10.1142/3457>.
- [35] Barone, V., and Sodano, P., 2005, "Relativity," Encyclopedia of Condensed Matter Physics, F. Bassani, G. L. Liedl, and P. Wyder, eds., Elsevier, Oxford, pp. 134-145. <https://doi.org/10.1016/B0-12-369401-9/00.5-635>
- [36] Kalsoom, H., and Khan, Z. A., 2025, "Compton scattering induced ultra-high-resolution two-dimensional atomic localization," Chinese Journal of Physics. <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2025.03.036>.
- [37] Mijnaerends, P. E., and Bansil, A., 2005, "Scattering Techniques, Compton," Encyclopedia of Condensed Matter Physics, F. Bassani, G. L. Liedl, and P. Wyder, eds., Elsevier, Oxford, pp. 182-193. <https://doi.org/10.1016/B0-12-369401-9/00646-X>.
- [38] Wissmann, F., 2004, Compton Scattering: Investigating the Structure of the Nucleon with Real Photons, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. 978-3-540-45183-9. https://doi.org/10.1007/978-3-540-45183-9_2.

المخلص

ملخص

تقدم هذه الدراسة فحصاً معمقاً لظاهرة تشتت كومبتون للفوتونات عالية الطاقة ($\hbar\omega \gg m_e c^2$) بواسطة إلكترون شبيه تطبيق في المجال الكهرومغناطيسي للنواة. فقد أُفتِّحَ هذا العمل بربط الكهرومغناطيسية الكلاسيكية بالنظرية الكمومية من خلال معادلات ماكسويل وكَمَّ المجال، مما يُرسِّخ الفهم المزدوج للضوء كجسيم وموجة. ثم تمَّ الانتقال بعد ذلك إلى ميكانيكا الكم النسبية من خلال تحليل مفصل لمعادلة ديراك، والتي توفر رؤى مهمة حول اللف الذاتي (السبين)، الجسيمات المضادة، وتفاعلات الجسيمات المشحونة مع الحقول، حيث أُسْتُخْدِمَت هذه الأسس النظرية لاحقاً لحساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت كومبتون باستخدام نظرية الاضطرابات المعتمدة على الزمن. النموذج الناتج قد تنبأ بدقة بزوايا وأطوال موجات الفوتونات المتشتتة، وعند مقارنته بصيغة كلاين-نيشينا، أظهرت نتائج الدراسة توافقاً كبيراً، مع نسب تقارب تتراوح بين 105.93% و 89.6% لطاقة فوتونية واردة من 1 إلى 10 MeV. ويُعزى أساساً هذا التباين الطفيف بين النتائج المتحصل عليها والمرجع إلى الاختيار الدقيق للحد (\mathcal{R}) المسؤول على الاستقطاب. عليه، لا تثبت هذه الدراسة المبادئ الأساسية للإلكتروديناميكا الكمومية فحسب، بل إستغلالها يفتح أيضاً آفاقاً جديدة لتحسين أنظمة التصوير عالية الدقة، وكاشفات الإشعاع الحساسة، ومحاكاة الحقول الكمومية. أما التوجهات المستقبلية للبحث، فتشمل الأخذ بالاعتبار تأثيرات الإلكترونات المرتبطة بالنواة، التفاعلات المعتمدة على السبينور، واستكشاف تفاعلات الضوء مع المادة في البيئات القسوى مثل الفيزياء الفلكية ومسرعات الجسيمات.

الكلمات المفتاحية: ميكانيكا الكم النسبية؛ معادلة ديراك؛ تشتت كومبتون؛ المقطع العرضي التفاضلي؛ تفاعل الفوتون-إلكترون.

Abstract

This study presents a thorough investigation of the Compton scattering of high-energy photons ($\hbar\omega \gg m_e c^2$) by quasi-free electrons within the electromagnetic field of a nucleus. It begins by linking classical electromagnetism and quantum theory through Maxwell's equations and field quantization, establishing a dual wave-particle view of light. The transition to relativistic quantum mechanics is achieved through a detailed analysis of the Dirac equation, which offers vital insights into spin, antiparticles, and charged particle-field interactions. These theoretical foundations are then used to derive the differential cross-section of Compton scattering using time-dependent perturbation theory. The resulting model accurately predicts photon scattering angles and energies. Therefore, when benchmarked against the Klein–Nishina formula, the study's outcomes show strong agreement, with convergence rates of 105.93% to 89.6% for photon energies from 1 MeV to 10 MeV. This minor discrepancy is primarily due to the precise selection of the polarization-dependent term (\mathcal{R}). The research not only validates key principles of quantum

electrodynamics but also opens new avenues for improvements in high-resolution imaging systems, sensitive radiation detectors, and quantum field simulations. Future directions include accounting for bound electron effects, spinor-dependent interactions, and exploring light-matter interactions in extreme environments like astrophysics and particle accelerators.

Keywords: Relativistic Quantum Mechanics; Dirac Equation; Compton Scattering; Differential Cross-Section; Photon-Electron Interaction.

Résumé

Cette étude propose une analyse approfondie de la diffusion Compton de photons de haute énergie ($\hbar\omega \gg m_e c^2$) par des électrons quasi libres au sein du champ électromagnétique d'un noyau. Elle débute par l'établissement d'un lien entre l'électromagnétisme classique et la théorie quantique, à travers les équations de Maxwell et la quantification du champ, offrant ainsi une vision duale onde-particule de la lumière. La transition vers la mécanique quantique relativiste est assurée par une analyse détaillée de l'équation de Dirac, qui fournit des informations essentielles sur le spin, les antiparticules et l'interaction des particules chargées avec les champs. Ces bases théoriques sont ensuite exploitées pour dériver la section efficace différentielle de la diffusion Compton à l'aide de la théorie des perturbations dépendantes du temps. Le modèle obtenu permet de prédire avec précision les angles de diffusion ainsi que les énergies des photons diffusés. Comparés à la célèbre formule de Klein-Nishina, les résultats de cette étude montrent une concordance remarquable, avec des taux de convergence allant de 105,93 % à 89,6 % pour des énergies de photons comprises entre 1 MeV et 10 MeV. Les écarts observés s'expliquent principalement par le choix rigoureux du facteur de polarisation (\mathcal{R}). Cette recherche valide non seulement les principes fondamentaux de l'électrodynamique quantique, mais ouvre également la voie à l'amélioration des systèmes d'imagerie haute résolution, des détecteurs de rayonnement de haute sensibilité, ainsi qu'aux simulations de champs quantiques dans des conditions extrêmes comme celles rencontrées en astrophysique ou dans les accélérateurs de particules.

Mots-clés : Mécanique quantique relativiste ; Équation de Dirac ; Diffusion Compton ; Section efficace différentielle ; Interaction photon-électron.