



République Algérienne Démocratique Et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR - EL-OUED

Faculté des Sciences Exactes
Department de mathématiques



Laboratoire de Théorie des Opérateurs - et EDP (fondements et applications)

Thèse de Doctorat

Présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques

**Titre: Sur certains problèmes aux limites d'ordre
fractionnaire dans un espace de Banach**

Présenté par: Alaeddine Sahraoui

Soutenue le [jour/mois/année], devant le jury composé de :

Nom	Grade	Affiliation	Rôle
Abdelfeteh Fareh	Pr	Univ. Eloued	Président
Lamine Guedda	Pr	Univ. Eloued	Directeur
Brahim Tellab	Pr	Univ. Ouargla	Examineur
Khaled Saoudi	Pr	Univ. Khenchela	Examineur
Said Beloul	Pr	Univ. Eloued	Examineur
Tidjani Menacer	Pr	Univ. Biskra	Examineur

Année universitaire : 2024-2025 / 1446-1447 AH

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله رب العالمين و الصلاة و السلام على أشرف المرسلين.

Dédicace et remerciement

À la mémoire de mon père - Pour toute la tendresse, pour tous les sacrifices, pour tout l'enseignement qu'il m'a transmis depuis le B-A BA. Qu'il repose en paix, (Rahimahou Allah).

À ma mère, qui a toujours cru en moi, que ce travail soit l'expression de mon amour éternel et de ma profonde reconnaissance.

À mon épouse, sans qui ces pages, après la grâce d'Allah, n'auraient jamais vu le jour. Merci d'être mon étoile et ma force.

À mes trois épis (A. T. S.), qui m'ont rappelé que la patience est une vert ... surtout quand papa « germait » devant son ordinateur !

À mes frères, ma sœur et leurs enfants, ainsi qu'à ma famille et mes amis, pour leur soutien indéfectible et leurs précieux encouragements.

Je dédie également ce travail à toute la communauté de **l'Université Abbès Laghrour - Khenchela**, à celle de **l'Université Hamma Lakhdhar -Eloued** avec une pensée particulière pour leurs **enseignants de mathématiques**.

À mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur **Lamine Guedda**, je tiens à exprimer toute ma gratitude pour sa disponibilité malgré ses lourdes tâches, pour ses précieuses compétences scientifiques, et pour l'accompagnement qui m'a permis de mener ce travail à terme.

À Monsieur le Président du jury, le Professeur **Abdelfateh Fareh**, ainsi qu'aux membres éminents du jury, les Professeurs **Brahim Tellab, Khaled Saoudi, Said Beloul, et Tidjani Menacer**, qui ont accepté d'évaluer ce travail : je leur adresse mes plus sincères remerciements, ainsi que l'expression de mon profond respect. Enfin, à Monsieur le Docteur **Zaid Laadjal**, dont les encouragements et le soutien ont été déterminants dès la première mouture de ce travail. Qu'il trouve ici ma vive gratitude pour sa générosité, même au cœur de ses propres occupations.

Résumé

Cette thèse étudie des équations différentielles fractionnaires avec conditions non locales et opérateurs hybrides, en analysant l'existence, et l'unicité des solutions. Les approches combinent des théorèmes de point fixe (Banach, Dhage, Krasnoselskii et l'alternative de Leray-Schauder) et des techniques d'analyse fonctionnelle pour résoudre des problèmes issus de modèles physiques comme les systèmes thermostatiques. Une attention particulière est portée aux systèmes intégral-différentiels de type Volterra-Fredholm, permettant de modéliser des phénomènes complexes à mémoire longue avec effets non locaux couplés.

Mots clés : Dérivées fractionnaires, problèmes aux limites non locaux, conditions hybrides, espaces de Banach, théorèmes de point fixe, systèmes intégral-différentiels, Volterra-Fredholm.

Abstract

This thesis investigates fractional differential equations with non-local conditions and hybrid operators, analyzing the existence and uniqueness of solutions. The approaches combine fixed-point theorems (Banach, Dhage, Krasnoselskii and Leray-Schauder alternative) and functional analysis techniques to solve problems arising from physical models such as thermostatic systems. Particular attention is given to Volterra-Fredholm type integro-differential systems, which enable the modeling of complex long-memory phenomena with coupled non-local effects.

Keywords : Fractional Derivatives, Nonlocal boundary conditions, Hybrid conditions, Fixed-point theorems, Integro-differential systems, Volterra-Fredholm.

ملخص

تتناول هذه الرسالة دراسة المعادلات التفاضلية الكسرية ذات الشروط غير المحلية والمؤثرات الهجينة، مع تحليل وجود الحلول و وحدانيته. تجمع المنهجية بين نظريات النقطة الصامدة (باناخ، داج، كراسنيلسكي و البديلة لـليراي شوارز) و تقنيات التحليل الدالي لحل المشاكل الناشئة عن نماذج فيزيائية مثل النظم التيرموستاتية. يعطى اهتمام خاص لأنظمة التكاملية التفاضلية من نوع فولتيرا - فريدهلوم، التي تُتيح نمذجة الظواهر المعقدة ذات الذاكرة الطويلة و التأثيرات غير المحلية المزدوجة.

الكلمات المفتاحية : المشتقات برتب كسرية، الشروط الحدية غير المحلية، الشروط الهجينة، نظرية النقطة الصامدة، المعادلات التكاملية - التفاضلية، فولتيرا - فريدهلوم.

Notation

Γ : Fonction Gamma d'Euler.

B : Fonction Bêta.

$Re(.)$: Partie réel d'un nombre complexe.

$L^1[a, b]$: Espace des fonctions mesurables et intégrables sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I_a^ι : Opérateur d'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\iota \in \mathbb{R}^+$.

$^H I_{a+}^\iota$: Opérateur d'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre $\iota \in \mathbb{R}^+$.

$\mathcal{D}^j$: Opérateur de dérivée ordinaire d'ordre $j \in \mathbb{N}$.

$^{RL} \mathfrak{D}_{a+}^\iota$: Opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\iota \in \mathbb{R}^+$.

$^{LC} \mathfrak{D}_{a+}^\iota$: Opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Liouville-Caputo d'ordre $\iota \in \mathbb{R}^+$.

$^{CH}_a \mathfrak{D}_{a+}^\iota$: Opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Caputo Hadamard d'ordre $\iota \in \mathbb{R}^+$.

$^{LC} \mathfrak{D}_{a+}^{\iota, \psi}$: Opérateur de dérivée fractionnaire d'une fonction par apport a une autre fonction au sens de Liouville-Caputo.

$C([a, b], \mathbb{R})$: Espace des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$AC([a, b], \mathbb{R})$: Espace des fonction absolument continues sur $[a, b]$.

$AC^n([a, b], \mathbb{R})$: Espace des fonction dont les dérivées $n - 1$ ème sont absolument continues sur $[a, b]$.

$\|.\|$: Norme infinie.

Table des matières

Introduction	8
1 Préliminaires	9
1.1 Fonctions fondamentales	9
1.1.1 Fonction Gamma	9
1.1.2 Fonction Bêta	10
1.2 Intégration fractionnaire	10
1.2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	11
1.2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Hadamard	15
1.2.3 Intégrales fractionnaire d'une fonction par rapport à une autre fonction	15
1.3 Dérivation fractionnaire	16
1.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	16
1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Liouville-Caputo	19
1.3.3 Relation entre la dérivée fractionnaire de Liouville-Caputo et de Riemann-Liouville	20
1.3.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard	21
1.3.5 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction par rapport à une autre fonction	21
1.3.6 Dérivée fractionnaire de Liouville-Caputo d'une fonction par rapport à une autre fonction	22
1.4 Concepts d'analyse fonctionnelle	23

2	Problème thermostatique fractionnaire de Liouville-Caputo avec conditions aux limites non locales hybrides	27
2.1	La fonction de Green associée au problème et ses propriétés	28
2.2	Inégalité de type de Lyapunov	34
2.3	Analyse d'un problème aux valeurs propres	36
2.4	Résultat d'unicité	37
2.5	Exemples	38
3	Problème fractionnaire hybride de type de Riemann-Liouville	41
3.1	Résultat d'existence	42
3.2	Unicité de la solution	51
3.3	Exemple	54
4	Système d'équations intégral-différentielles fractionnaires de Volterra-Fredholm aux limites non locales non séparées	56
4.1	L'équation intégrale associée au problème	58
4.2	Résultats d'existence	63
4.3	Résultat d'unicité	69
4.4	Exemples	72
	Conclusion	76

Introduction

Le calcul fractionnaire, qui généralise les opérations de dérivation et d'intégration à des ordres non entiers, s'inscrit dans une tradition mathématique aussi féconde que complexe. Si son formalisme n'a été établi que relativement récemment, ses prémices conceptuelles prennent source dans la correspondance fondatrice entre L'Hôpital et Leibniz en 1695. Nourri par plusieurs siècles de contributions théoriques émanant de mathématiciens illustres tels qu'Euler, Liouville et Riemann, ce champ disciplinaire s'est progressivement affirmé comme un instrument incontournable. Loin de se limiter à l'enrichissement des mathématiques pures, cette généralisation a engendré des applications substantielles et diversifiées. On le rencontre désormais en médecine [60, 68], en physique [29], en mécanique et dans les systèmes dynamiques [59], mais aussi en chimie, biologie, économie, traitement du signal et de l'image, ingénierie, optique et électromagnétisme, pour n'en citer que quelques domaines. Pour une étude plus approfondie, nous renvoyons le lecteur aux références [16, 45, 55, 69, 73, 75].

Si plusieurs définitions des intégrales et dérivées fractionnaires coexistent, les formulations de Riemann-Liouville et de Liouville-Caputo demeurent les plus utilisées et reconnues [22, 38]. La recherche dans ce domaine est très active, conduisant à des généralisations toujours plus poussées. Butzer *et al.* [14] ont ainsi proposé un cadre novateur pour la différentiation et l'intégration fractionnaires dans le cadre de Mellin. Katugampola [35] a introduit une intégration fractionnaire unifiant les approches de Riemann-Liouville et de Hadamard. Plus récemment, Almeida [10] a défini la dérivée fractionnaire de Liouville-Caputo d'une fonction par rapport à une autre fonction, offrant une généralisation d'une portée considérable.

C'est dans ce contexte dynamique que s'inscrit cette thèse, qui se consacre à l'étude de

problèmes aux limites d'ordre fractionnaire dans un espace de Banach. Nous porterons une attention particulière aux conditions aux limites non locales et hybrides, ainsi qu'à l'analyse des systèmes intégraux-différentiels.

Considérons l'équation différentielle avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} y''(t) + q(t)y(t) = 0, & a < t < b, \\ y(a) = y(b) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

où $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Lyapunov [53] a démontré que si le problème (1) admet une solution non triviale, alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{4}{b-a}. \quad (2)$$

Cette relation fondamentale, connue sous le nom d'inégalité de Lyapunov, constitue un outil essentiel dans l'analyse qualitative des équations différentielles. De nombreuses améliorations et généralisations de l'inégalité (2) pour les problèmes aux limites d'ordre entier sont apparues voir [17, 70]. Ce n'est que ces dernières années que la recherche sur l'inégalité de Lyapunov pour les problèmes aux limites fractionnaires a commencé, utilisant une dérivée fractionnaire (dérivée de Riemann-Liouville et dérivée de Caputo) au lieu de la dérivée ordinaire classique dans l'équation différentielle. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de Ferreira [24–26]. On observe dans les publications récentes un développement significatif concernant les extensions de l'inégalité de Lyapunov aux équations différentielles fractionnaires. De nombreuses formulations de ces inégalités ont été développées pour différentes classes de problèmes aux limites fractionnaires, selon les travaux dans [57].

Motivés par les travaux mentionnés précédemment, le deuxième chapitre est consacré à l'établissement d'inégalités de type Lyapunov pour un problème de modèle fractionnaire

hybride appliqué à la régulation thermostatique avec conditions aux limites fractionnaires :

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{a^+}^\beta \frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} + q(t)\Psi x(t) = 0, \quad a < t < b, \quad (3)$$

avec les conditions aux limites hybrides

$$\begin{cases} \mathcal{D} \left(\frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} \right) \Big|_a = 0, \\ \omega {}^{LC}\mathfrak{D}_{a^+}^{\beta-1} \left(\frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} \right) \Big|_b + \frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} \Big|_\eta = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Les fondements théoriques des équations différentielles hybrides (ou intégr-différentielles hybrides) ont été établis dans plusieurs travaux. Notamment, Dhage et Lakshmikantham [20] ont étudié l'existence et l'unicité des solutions du problème de Cauchy classique

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{u(t)}{f(t, u(t))} \right) = g(t, u(t)), \quad t \in [0, T], \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (5)$$

où $g \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Dans [21], Dhage a démontré l'existence et les approximations des solutions pour les problèmes de valeur initiale d'équations intégr-différentielles fractionnaires hybrides non linéaires suivants :

$$\begin{cases} {}^{LC}\mathfrak{D}_{0^+}^\beta \left(\frac{u(t) - I_{0^+}^\alpha h(t, u(t))}{f(t, u(t))} \right) = g \left(t, u(t), \int_0^t k(s, u(s)) ds \right), \quad t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (6)$$

où $0 < \beta \leq 1$, $\alpha > 0$ et $h, k : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

Laadjal et Jarad [41] ont étudié l'existence de solutions pour les équations intégr-différentielles fractionnaires proportionnelles hybrides avec conditions aux limites de Dirichlet suivantes :

$$\begin{cases} {}^{LC}_p\mathfrak{D}_{0^+}^{\beta, \sigma} \left(\frac{u(t) - \sum_{i=1}^{i=m} I_{0^+}^{\alpha_i, \sigma} h_i(t, u(t))}{f(t, u(t))} \right) = g(t, u(t)), \quad t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, u(T) = u_T, \end{cases} \quad (7)$$

où $\sigma \in (0, 1]$, $1 < \beta \leq 2$, $\alpha_i > 0$, ($i = 1, \dots, m$), $m \in \mathbb{N}^*$, $u_0, u_T \in \mathbb{R}$ et ${}^{LC}_p \mathfrak{D}_{0+}^{\beta, \sigma}$ représente la dérivée fractionnaire proportionnelle de Caputo-Liouville d'ordre β et $I_{0+}^{\alpha_i, \sigma}$ désigne l'intégrale fractionnaire proportionnelle de Riemann-Liouville d'ordre α_i , et $h_i : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

Motivés par les travaux mentionnés ci-dessus, dans le troisième chapitre, nous traitons l'existence de solutions pour l'équation fractionnaire hybride de type Riemann-Liouville suivante

$${}^{RL}\mathfrak{D}_{0+}^{\beta} \left(\frac{u(t) - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(t, u(t))}{\Psi(t, u(t))} \right) = g(t, u(t)), \quad t \in (0, 1), \quad (8)$$

sous les conditions aux limites :

$$u(0) = \mathcal{D} \left(\frac{u(t) - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(t, u(t))}{\Psi(t, u(t))} \right) \Big|_0 = 0, \quad u(1) = \zeta, \quad (9)$$

où ${}^{RL}\mathfrak{D}_{0+}^{\beta}$ est la dérivée fractionnaire de type Riemann-Liouville d'ordre β , telle que $2 < \beta \leq 3$ et $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$; $I_{e-}^{\gamma_i}$ désigne l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\gamma_i > 0$; $\zeta, \lambda_i \in \mathbb{R}$ où $i = 1, \dots, m$; $h_i : [0, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $\Psi : [0, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et $g : [0, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

Les équations intégrales de Volterra-Fredholm, issues des problèmes aux limites paraboliques, constituent un outil fondamental pour modéliser des phénomènes spatio-temporels complexes. Leur formulation permet de capturer simultanément les effets de mémoire (héritage temporel) et les dépendances spatiales, expliquant leur utilité dans des domaines variés : dynamique épidémique [37], conduction thermique [74], écologie des populations [23] et processus de réaction-diffusion [56]. Cette capacité à unifier temps et espace en fait un cadre puissant pour l'analyse des systèmes complexes [72].

Les avancées récentes sur les équations de Volterra couvrent tant les aspects numériques que théoriques. Katani et al. [34] ont proposé une méthode numérique efficace validé sur un modèle épidémiologique. Hamoud [28] a ensuite établi des théorèmes d'existence et d'unicité via l'analyse de point fixe, résultats qu'Alasadi et Hamoud [7] ont généralisés à des configurations non linéaires avec conditions aux limites mixtes.

Les conditions aux limites non locales et non séparées prennent en compte des interactions ou des dépendances qui s'étendent au-delà des frontières immédiates d'un domaine donné. Ceci est essentiel pour modéliser des systèmes où le comportement en un point est influencé par des conditions réparties sur une zone plus large, comme dans le transfert thermique, la dynamique des fluides ou la dynamique des populations [18]. Récemment, dans [42], les auteurs ont utilisé des théorèmes de point fixe classiques pour analyser et établir l'existence et l'unicité des solutions pour l'équation intégrale-différentielle fractionnaire non linéaire de Volterra-Fredholm suivante avec conditions aux limites :

$$\begin{cases} {}^{LC}\mathfrak{D}_{0+}^{\alpha} x(t) = \varphi(t) + \lambda_1 \int_0^t K_1(t, s) F_1(s, x(s)) ds + \lambda_2 \int_0^1 K_2(t, s) F_2(s, x(s)) ds, \\ \mu x(0) + \nu x(1) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

où ${}^{LC}\mathfrak{D}_{0+}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Liouville-Caputo d'ordre α ; $t \in [0, 1]$; $0 < \alpha \leq 1$; $K_1, K_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues connues; $F_1, F_2 : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues non linéaires; $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue; λ_1, λ_2 sont des paramètres, et μ, ν sont des constantes réelles avec $\mu + \nu \neq 0$.

Le dernier chapitre contribue à ce domaine émergent par l'étude d'une nouvelle classe de systèmes couplés d'équations intégrale-différentielles fractionnaires de Volterra-Fredholm (type Liouville-Caputo) avec conditions aux limites non locales et non séparées. Nous y établissons des conditions rigoureux pour l'existence et l'unicité des solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha_i, \psi_i} x_i(t) = \mathcal{F}_{i, x_1, x_2}(t), \quad i = 1, 2, \quad i - 1 < \alpha_i \leq i, \quad t \in [a, b], \\ x_1(a) = \mu x_2(b), \quad x_1(b) = \nu x_2(\eta), \quad x_2(a) = 0, \quad a < \eta < b, \end{cases} \quad (11)$$

où

$$\mathcal{F}_{i, x_1, x_2}(t) = \varphi_i(t) + \sum_{j=1}^2 \lambda_{i,j} \int_a^{(2-j)t + (j-1)b} K_{i,j}(t, \tau) F_{i,j}(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau)) d\tau, \quad (12)$$

avec $-\infty < a < b < +\infty$; $\psi_i \in C^n[a, b]$ des fonctions croissantes telles que $\psi'_i(t) \neq 0$, $i = 1, 2$ pour tout $t \in [a, b]$; ${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha_i, \psi_i}$ désigne la dérivée fractionnaire de Liouville-Caputo par rapport à une autre fonction ψ_i d'ordre α_i ; $\varphi_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $K_{i,j} : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_{i,j} : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues données et $\mu, \nu \in \mathbb{R}^*$, $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$, pour tout $i, j \in \{1, 2\}$.

Notons que notre système couplé d'équations intégral-différentielles fractionnaires de Volterra-Fredholm (problème 11) généralise la dérivée de Liouville-Caputo via une fonction ψ_i , tandis que le problème (10) utilise l'opérateur de Caputo standard. Cette généralisation ψ -Caputo unifie plusieurs calculs fractionnaires et offre une modélisation plus adaptable des systèmes complexes. Les résultats obtenus sont non seulement originaux dans ce cadre étendu, mais englobent également comme cas particuliers les situations suivantes :

Cas 1. Si $\psi_i(t) = t$ pour tout $t \in [a, b]$, $i \in \{1, 2\}$, le système (11) se réduit à un système d'équations intégral-différentielles de Volterra-Fredholm (VFIDEs) impliquant les dérivées fractionnaires usuelles de Liouville-Caputo.

Cas 2. Si $\psi_i(t) = \ln t$ pour tout $t \in [a, b]$, $a > 0$, $i \in \{1, 2\}$, le système (11) se réduit à un système de VFIDEs impliquant les dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard.

Cas 3. Si $\psi_i(t) = \frac{t^d}{d}$, $d \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $t \in [a, b]$, $i \in \{1, 2\}$, le système (11) se réduit à un système de VFIDEs impliquant les dérivées fractionnaires de Caputo-Katugampola.

De plus, les conditions aux limites non locales non séparées dans (11) sont novatrices, car elles modélisent des interactions ou des dépendances qui s'étendent sur l'ensemble du domaine $[a, b]$, incluant les points de frontière immédiats.

Nous démontrons l'existence de solutions pour le problème (11) en utilisant l'alternative de Leray-Schauder et le théorème de Krasnosel'skii, et prouvons l'unicité via le théorème de Banach. Le choix des points fixes est motivé par leur efficacité pour les problèmes aux limites. En reformulant le problème sous forme opératorielle, cette méthode offre un cadre unifié et puissant pour l'analyse.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré aux fondements mathématiques du calcul fractionnaire. Nous y introduisons les principales fonctions spéciales - notamment les fonctions Gamma et Bêta - en explicitant leurs définitions et propriétés essentielles. Par ailleurs, nous rappelons les concepts de base et les définitions élémentaires qui sous-tendent la théorie du calcul fractionnaire.

1.1 Fonctions fondamentales

1.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma, dont la formulation moderne remonte aux travaux fondateurs d'Euler (1729), constitue un pilier fondamental du calcul fractionnaire. Les premières traces de la fonction Gamma apparaissent dans la correspondance d'Euler, notamment dans sa célèbre lettre à Christian Goldbach en date du 8 janvier 1730.

Définition 1.1.1 *La fonction Gamma (noté par Γ) est initialement définie pour les nombres complexes ι dont la partie réelle est strictement positive ($\iota \in \mathbb{C}, \text{Re}(\iota) > 0$) au moyen de l'expression intégrale suivante :*

$$\Gamma(\iota) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\iota-1} dt. \quad (1.1)$$

Proposition 1.1.1 ([38]) *On a les propriétés suivantes*

- 1) $\Gamma(\iota) = \frac{\Gamma(\iota+1)}{\iota}$, pour tout $\iota \in \mathbb{C}$ où $\text{Re}(\iota) > 0$.
- 2) $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 3) $\Gamma(0_+) = +\infty$.
- 4) $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5.3.1}{2^n} \sqrt{\pi}, & \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \sqrt{\pi}, & \text{pour } n = 0. \end{cases}$

1.1.2 Fonction Bêta

La fonction Bêta $B(\iota, \kappa)$, intimement liée à la fonction Gamma, est indispensable en mathématiques appliquées. On la rencontre principalement en calcul intégral, dans l'étude des distributions statistiques et pour résoudre certains problèmes probabilistes.

Définition 1.1.2 ([61]) *La fonction Bêta est définie sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ par l'intégrale suivante*

$$B(\iota, \kappa) = \int_0^1 t^{\iota-1} (1-t)^{\kappa-1} dt, \quad \text{Re}(\iota) > 0, \text{Re}(\kappa) > 0. \quad (1.2)$$

Proposition 1.1.2 *Pour tout $(\iota, \kappa) \in \mathbb{C}$, avec $\text{Re}(\iota) > 0$, $\text{Re}(\kappa) > 0$, nous avons*

- 1) $B(\iota, \kappa) = B(\kappa, \iota)$.
- 2) $B(\iota, \kappa) = \frac{\Gamma(\iota)\Gamma(\kappa)}{\Gamma(\iota + \kappa)}$.

1.2 Intégration fractionnaire

Soit $\varphi : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, b pouvant être fini ou infini

$$I_a^1 \varphi(t) = \int_a^t \varphi(\tau) d\tau, \quad (1.3)$$

alors

$$\begin{aligned} I_a^2 \varphi(t) &= I_a^1 (I_a^1 \varphi(t)) \\ &= \int_a^t \left(\int_a^s \varphi(\tau) d\tau \right) ds, \quad (a \leq \tau \leq s \leq t \leq b) \end{aligned}$$

on utilise le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} I_a^2 \varphi(t) &= \int_a^t \left(\int_\tau^t ds \right) \varphi(\tau) d\tau \\ &= \int_a^t (t - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

plus généralement le n-ième itéré de l'opérateur I peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} I_a^n \varphi(t) &= \int_a^t \int_a^{t_1} \dots \int_a^{t_{n-1}} \varphi(t_n) dt_n \dots dt_2 dt_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} \varphi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy.

1.2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.2.1 ([38]) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $(a < b)$ et $\iota \in \mathbb{R}^+$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre ι pour une fonction $\varphi \in L^1([a, b])$ est définie par

$$I_a^\iota \varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{pour } \iota = 0, \\ \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_a^t (t - \tau)^{\iota-1} \varphi(\tau) d\tau, & \text{pour } \iota > 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Proposition 1.2.1 Soient $\iota > 0$ et $\kappa > 0$ deux nombres réels, et φ est une fonction intégrable, on a les propriétés suivantes

- 1) $I_a^\iota (I_a^\kappa \varphi(t)) = I_a^{\iota+\kappa} \varphi(t).$
- 2) $I_a^\iota (t - a)^\kappa = \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\iota + \kappa + 1)} (t - a)^{\iota+\kappa}.$
- 3) $\lim_{\iota \rightarrow 0^+} (I_a^\iota \varphi)(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [a, b].$

Preuve

1) D'après la définition de I_a^ι

$$\begin{aligned} I_a^\iota(I_a^\kappa\varphi(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_a^t (t-s)^{\iota-1} I_a^\kappa\varphi(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_a^t (t-s)^{\iota-1} \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \int_a^s (s-\tau)^{\kappa-1} \varphi(\tau) d\tau ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\iota)\Gamma(\kappa)} \int_a^t \varphi(\tau) \int_\tau^t (t-s)^{\iota-1} (s-\tau)^{\kappa-1} ds d\tau, \end{aligned}$$

on fait un changement de variable tel que $s = \tau + (t-\tau)\mu$ alors $ds = (t-\tau)d\mu$

on obtenir

$$\begin{aligned} \int_\tau^t (t-s)^{\iota-1} (s-\tau)^{\kappa-1} ds &= (t-\tau)^{\iota+\kappa-1} \int_0^1 (1-\mu)^{\iota-1} \mu^{\kappa-1} d\mu \\ &= (t-\tau)^{\iota+\kappa-1} B(\iota, \kappa) \\ &= \frac{\Gamma(\iota)\Gamma(\kappa)}{\Gamma(\iota+\kappa)} (t-\tau)^{\iota+\kappa-1}, \end{aligned}$$

on peut conclure

$$I_a^\iota(I_a^\kappa\varphi(\tau)) = \frac{1}{\Gamma(\iota+\kappa)} \int_a^t (t-\tau)^{\iota+\kappa-1} \varphi(\tau) d\tau,$$

alors

$$I_a^\iota(I_a^\kappa\varphi(t)) = I_a^{\iota+\kappa}\varphi(t). \quad (1.5)$$

2) On définit la fonction φ comme suite

$$\varphi(t) = (t-a)^\kappa, \quad \kappa > 0, \quad t \in [a, b],$$

on a

$$I_a^\iota(t-a)^\kappa = \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_a^t (t-\tau)^{\iota-1} (\tau-a)^\kappa d\tau, \quad (1.6)$$

pour calculer cette intégrale on pose le changement d'un variable

$\tau = a + (t - a)s$ alors $d\tau = (t - a)ds$, on obtient

$$\begin{aligned} I_a^\iota(t - a)^\kappa &= \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_a^t (t - \tau)^{\iota-1} (\tau - a)^\kappa d\tau \\ &= \frac{(t - a)^{\iota+\kappa}}{\Gamma(\iota)} \int_a^t (1 - s)^{\iota-1} s^\kappa ds \\ &= \frac{(t - a)^{\iota+\kappa}}{\Gamma(\iota)} B(\kappa + 1, \iota) \\ &= \frac{(t - a)^{\iota+\kappa}}{\Gamma(\iota)} \frac{\Gamma(\iota)\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\iota + \kappa + 1)}, \end{aligned}$$

on obtient

$$I_a^\iota(t - a)^\kappa = \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\iota + \kappa + 1)} (t - a)^{\iota+\kappa}. \quad (1.7)$$

3) Pour la dernière propriété, on suppose que $\varphi \in C^0([a, b])$, alors on a

$$(I_a^\iota \varphi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_a^t (t - \tau)^{\iota-1} \varphi(\tau) d\tau,$$

et

$$(I_a^\iota 1)(t) = \frac{(t - a)^\iota}{\Gamma(\iota + 1)} \rightarrow 1,$$

lorsque ι tend vers 0^+ , d'où

$$\begin{aligned} \left| (I_a^\iota \varphi)(t) - \frac{(t - a)^\iota}{\Gamma(\iota + 1)} \varphi(t) \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_a^t (t - \tau)^{\iota-1} \varphi(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_a^t (t - \tau)^{\iota-1} \varphi(t) d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_a^t (t - \tau)^{\iota-1} |\varphi(\tau) - \varphi(t)| d\tau \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_a^{t-\epsilon} (t - \tau)^{\iota-1} |\varphi(\tau) - \varphi(t)| d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_{t-\epsilon}^t (t - \tau)^{\iota-1} |\varphi(\tau) - \varphi(t)| d\tau, \end{aligned}$$

d'une part, on a φ est continue sur $[a, b]$ qui nous permet d'écrire

$$\forall t, \tau \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists \epsilon > 0 : |\tau - t| < \epsilon \implies |\varphi(\tau) - \varphi(t)| < \varepsilon,$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_{t-\epsilon}^t (t-\tau)^{\iota-1} |\varphi(\tau) - \varphi(t)| d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_{t-\epsilon}^t (t-\tau)^{\iota-1} \epsilon d\tau \\ &\leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\iota)} \int_{t-\epsilon}^t (t-\tau)^{\iota-1} d\tau \\ &\leq \frac{\epsilon \epsilon^\iota}{\iota \Gamma(\iota)}, \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_a^{t-\epsilon} (t-\tau)^{\iota-1} |\varphi(\tau) - \varphi(t)| d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_a^{t-\epsilon} (t-\tau)^{\iota-1} (|\varphi(\tau)| + |\varphi(t)|) d\tau \\ &\leq \frac{2}{\Gamma(\iota)} \sup_{\epsilon \in [a, t]} |\varphi(\epsilon)| \int_a^{t-\epsilon} (t-\tau)^{\iota-1} d\tau, \quad \forall t \in [a, b] \\ &= \frac{2}{\Gamma(\iota)} C \left(\frac{(t-a)^\iota}{\iota} - \frac{\epsilon^\iota}{\iota} \right), \end{aligned}$$

où

$$C = \sup_{\epsilon \in [a, t]} |\varphi(\epsilon)|,$$

alors

$$\begin{aligned} \left| (I_a^\iota \varphi)(t) - \frac{(t-a)^\iota}{\Gamma(\iota+1)} \varphi(t) \right| &\leq \frac{1}{\iota \Gamma(\iota)} [\epsilon \epsilon^\iota + 2C ((t-a)^\iota - \epsilon^\iota)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\iota+1)} [\epsilon \epsilon^\iota + 2C ((t-a)^\iota - \epsilon^\iota)], \end{aligned}$$

lorsque ι tend vers 0^+ , on a

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{\iota \rightarrow 0^+} \left| (I_a^\iota \varphi)(t) - \frac{(t-a)^\iota}{\Gamma(\iota+1)} \varphi(t) \right| \leq \epsilon,$$

ce qui implique que

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{\iota \rightarrow 0^+} |(I_a^\iota \varphi)(t) - \varphi(t)| \leq \epsilon.$$

Ainsi

$$\lim_{\iota \rightarrow 0^+} (I_a^\iota \varphi)(t) = \varphi(t). \quad (1.8)$$

□

Exemple 1.2.1 Pour $\iota = \frac{1}{2}$, $\kappa = \frac{1}{2}$ et $a = 0$, $I_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} t$.

1.2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Hadamard

Définition 1.2.2 ([3]) Soit φ une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $0 < a \leq b \leq \infty$ et $\iota > 0$. L'intégrale fractionnaire d'ordre ι au sens de Hadamard de φ est définie par

$${}^H I_a^\iota \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\iota-1} \varphi(s) \frac{ds}{s}, \quad \iota > 0. \quad (1.9)$$

Exemple 1.2.2 Soit $\varphi(t) = \ln^\kappa \left(\frac{t}{a} \right)$, alors

$${}^H I_a^\iota \ln^\kappa \left(\frac{t}{a} \right) = \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa + \iota + 1)} \ln^{\kappa+\iota} \left(\frac{t}{a} \right).$$

1.2.3 Intégrales fractionnaire d'une fonction par rapport à une autre fonction

Définition 1.2.3 Soit $\iota > 0$, soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $\psi \in C^n[a, b]$ une fonction strictement croissante telle que $\psi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction φ par rapport à la fonction ψ d'ordre ι est définie par :

$$I_{a^+}^{\iota, \psi} \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_a^t \psi'(\tau) (\psi(t) - \psi(\tau))^{\iota-1} \varphi(\tau) d\tau,$$

où $\Gamma(\cdot)$ désigne la fonction gamma d'Euler.

Exemple 1.2.3 Si $\varphi(t) = [\psi(t) - \psi(a)]^\kappa$, avec $\kappa > 0$, alors

$$I_{a+}^{\iota, \psi} \varphi(t) = \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\iota + \kappa + 1)} [\psi(t) - \psi(a)]^{\iota + \kappa}.$$

Pour calculer l'intégrale fractionnaire par rapport à une autre fonction ψ de cette fonction, on utilise les étapes suivantes. Soit

$$I_{a+}^{\iota, \psi} [\psi(t) - \psi(a)]^\kappa = \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_a^t \psi'(\tau) (\psi(t) - \psi(\tau))^{\iota-1} [\psi(s) - \psi(a)]^\kappa ds, \quad (1.10)$$

on pose $y = \frac{\psi(s) - \psi(a)}{\psi(t) - \psi(a)}$, alors $dy = \frac{\psi'(s)}{\psi(t) - \psi(a)} ds$ on obtient

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\iota, \psi} [\psi(t) - \psi(a)]^\kappa &= \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_0^1 [\psi(t) - \psi(a) - y(\psi(t) - \psi(a))]^{\iota-1} y^\kappa [\psi(t) - \psi(a)]^\kappa [\psi(t) - \psi(a)] dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\iota)} [\psi(t) - \psi(a)]^{\kappa + \iota} \int_0^1 (1 - y)^{\iota-1} y^\kappa dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\iota)} [\psi(t) - \psi(a)]^{\kappa + \iota} B(\iota, \kappa + 1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\iota)} [\psi(t) - \psi(a)]^{\kappa + \iota} \frac{\Gamma(\iota) \Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa + \iota + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa + \iota + 1)} [\psi(t) - \psi(a)]^{\kappa + \iota}. \end{aligned}$$

1.3 Dérivation fractionnaire

1.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1 ([38]) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $(a < b)$ et $\iota \in \mathbb{R}^+$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre ι pour une fonction $\varphi \in L^1([a, b])$ est définie par

$${}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota} \varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{pour } \iota = 0, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^n [I_a^{n-\iota} \varphi(t)], & \text{pour } n = [\iota] + 1 \text{ avec } \iota > 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Lemme 1.3.1 ([38]) Soit $n - 1 < \iota \leq n$, la solution générale de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire ${}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota}\varphi(t) = 0$ est donnée par

$$\varphi(t) = \omega_1(t-a)^{\iota-1} + \omega_2(t-a)^{\iota-2} + \dots + \omega_n(t-a)^{\iota-n}, \quad (1.12)$$

où $\omega_j \in \mathbb{R}$ tel que $j = 1, 2, \dots, n$.

Lemme 1.3.2 ([38]) Soit $\iota > 0$, on a

$$\left(I_a^{\iota} {}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota}\varphi\right)(t) = \varphi(t) + \sum_{j=1}^{\iota-n} \omega_j(t-a)^{\iota-j}, \quad (1.13)$$

où $\omega_j \in \mathbb{R}$ tel que $j = 1, 2, \dots, n$.

Remarque 1.3.1 L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre ι d'une constante est donnée par

$${}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{-\iota}c = I_{a+}^{\iota}c = \frac{c}{\Gamma(\iota+1)}(t-a)^{\iota}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

Proposition 1.3.1 Soient $\iota > 0, \kappa > 0$ et $t \in [a, b]$. On a les deux propriétés suivantes

- 1) $\left({}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\kappa} I_a^{\iota}\varphi\right)(t) = \left(I_a^{\iota-\kappa}\varphi\right)(t), \quad \iota \geq \kappa, \text{ avec } \varphi \in L_p, 1 \leq p \leq +\infty.$
- 2) ${}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota}(t-a)^{\kappa} = \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-\iota+1)}(t-a)^{\kappa-\iota}, \quad \kappa > \iota.$

Preuve

1) Pour faire la démonstration de deuxième propriété, on utilise les étapes suivantes

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\kappa} I_a^{\iota}\varphi(t) &= {}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\kappa} \left(I_a^{\kappa} I_a^{\iota-\kappa}\varphi\right)(t) \\ &= \left({}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\kappa} I_a^{\kappa}\right) \left(I_a^{\iota-\kappa}\varphi\right)(t), \end{aligned}$$

comme ${}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\kappa} I_a^{\kappa} = I_a$, on obtient

$$\left({}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\kappa} I_a^{\iota}\varphi\right)(t) = \left(I_a^{\iota-\kappa}\varphi\right)(t). \quad (1.15)$$

2) Soit la fonction $\varphi(t) = (t - a)^\kappa, t \in [a, b], \kappa > 0$, on a

$${}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^\iota(t - a)^\kappa = \left(\frac{d}{dt}\right)^j (I_a^{j-\iota}(t - a)^\kappa),$$

nous avons

$$I_a^{j-\iota}(t - a)^\kappa = \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa + 1 + j - \iota)}(t - a)^{\kappa+j-\iota}, \quad (1.16)$$

alors

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^\iota(t - a)^\kappa &= \left(\frac{d}{dt}\right)^j \left(\frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa + 1 + j - \iota)}(t - a)^{\kappa+j-\iota} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa + 1 + j - \iota)} \left(\frac{d}{dt}\right)^j (t - a)^{\kappa+j-\iota}, \end{aligned}$$

d'autre part on a

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^j (t - a)^{\kappa+j-\iota} = (\kappa + j - \iota)(\kappa + j - \iota - 1) \dots (\kappa - \iota)(t - a)^{\kappa-\iota}, \quad (1.17)$$

donc

$${}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^\iota(t - a)^\kappa = \frac{\Gamma(\kappa + 1)(\kappa + j - \iota)(\kappa + j - \iota - 1) \dots (\kappa - \iota)(t - a)^{\kappa-\iota}}{\Gamma(\kappa + 1 + j - \iota)}, \quad (1.18)$$

et on a

$$\begin{aligned} \Gamma(\kappa + 1 + j - \iota) &= (\kappa + j - \iota)\Gamma(\kappa + j - \iota) \\ &= (\kappa + j - \iota)(\kappa + j - \iota - 1)\Gamma(\kappa + j - \iota - 1) \\ &= (\kappa + j - \iota)(\kappa + j - \iota - 1) \dots (\kappa - \iota + 1)\Gamma(\kappa - \iota + 1), \end{aligned}$$

on conclure

$${}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^\iota(t - a)^\kappa = \frac{\Gamma(\kappa + 1)(\kappa + j - \iota)(\kappa + j - \iota - 1) \dots (\kappa - \iota)(t - a)^{\kappa-\iota}}{(\kappa + j - \iota)(\kappa + j - \iota - 1) \dots (\kappa - \iota + 1)\Gamma(\kappa - \iota + 1)},$$

alors

$${}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota}(t-a)^{\kappa} = \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-\iota+1)}(t-a)^{\kappa-\iota}. \quad (1.19)$$

□

Exemple 1.3.1 ${}^{RL}\mathfrak{D}_{0+}^1 t^{\kappa}$. La formule de dérivation (1.19) se réduit pour $\iota = 1$ et $a = 0$

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathfrak{D}_{0+}^1 t^{\kappa} &= \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa)} t^{\kappa-1} \\ &= \kappa t^{\kappa-1} \\ &= \frac{d}{dt} t^{\kappa}. \end{aligned}$$

Remarque 1.3.2 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante n'est pas nulle ni constante, mais on a

$${}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota} c = \frac{c}{\Gamma(1-\iota)}(t-a)^{-\iota}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (1.20)$$

Exemple 1.3.2 ${}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota} 1 = \frac{t^{-\iota}}{\Gamma(1-\iota)}.$

1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Liouville-Caputo

Définition 1.3.2 ([38]) Soient $\iota \geq 0$, avec $n-1 < \iota \leq n$, et $\varphi \in AC^n([a, b])$. La dérivée fractionnaire d'ordre ι de φ au sens de Liouville-Caputo est définie par

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota} \varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{pour } \iota = 0, \\ I_a^{n-\iota} \varphi^{(n)}, & \text{pour } \iota > 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Exemple 1.3.3 La dérivée de la fonction $\varphi(t) = (t-a)^{\kappa}$.

Soit $0 < n-1 < \iota \leq n$, avec $\kappa > n-1$, alors on a

$$\varphi^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-n+1)}(\tau-a)^{\kappa-n}, \quad (1.22)$$

d'où

$${}^{LC}\mathfrak{D}_a^\iota(t-a)^\kappa = \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(n-\iota)\Gamma(\kappa-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\iota-1} (\tau-a)^{\kappa-n} d\tau, \quad (1.23)$$

en faisant le changement de variable $\tau = a + z(t-a)$, on obtient

$$\begin{aligned} {}^{LC}\mathfrak{D}_a^\iota(t-a)^\kappa &= \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(n-\iota)\Gamma(\kappa-n+1)} (t-a)^{\kappa-\iota} \int_a^1 (1-z)^{n-\iota-1} z^{\kappa-n} dz \\ &= \frac{\Gamma(\kappa+1)B(n-\iota, \kappa-n+1)}{\Gamma(n-\iota)\Gamma(\kappa-n+1)} (t-a)^{\kappa-\iota} \\ &= \frac{\Gamma(\kappa+1)\Gamma(n-\iota)\Gamma(\kappa-n+1)}{\Gamma(n-\iota)\Gamma(\kappa-n+1)\Gamma(\kappa-\iota+1)} (t-a)^{\kappa-\iota} \\ &= \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-\iota+1)} (t-a)^{\kappa-\iota}, \end{aligned}$$

on déduit que

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^\iota(t-a)^\kappa = \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-\iota+1)} (t-a)^{\kappa-\iota}. \quad (1.24)$$

Remarque 1.3.3 La dérivée d'une fonction constante au sens de Liouville-Caputo est nulle, i.e.,

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^\iota \omega = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.25)$$

Lemme 1.3.3 ([38]) Soit $\iota \geq 0$, et φ est une fonction continue, on a les propriétés de composition entre la dérivée fractionnaire et l'intégrale fractionnaire

- 1) $({}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^\iota I_a^\iota \varphi)(t) = \varphi(t).$
- 2) $(I_a^\iota {}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^\iota \varphi)(t) = \varphi(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(j)}(a)(t-a)^j}{j!}.$

1.3.3 Relation entre la dérivée fractionnaire de Liouville-Caputo et de Riemann-Liouville

La relation entre la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Liouville-Caputo est donnée par

Proposition 1.3.2 ([38]) Soient $\iota \geq 0$, avec $n-1 < \iota \leq n$ avec $\varphi \in C^n([a, b])$, nous avons la propriété suivante

$$\left({}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota}\varphi\right)(t) = \left({}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota}\varphi\right)(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(j)}(a)(t-a)^{j-\iota}}{j!}. \quad (1.26)$$

Remarque 1.3.4 Si $\varphi^{(j)}(a) = 0$ tel que $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$, alors la dérivée au sens de Liouville-Caputo coïncide avec celle de Riemann-Liouville, on obtient

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota}\varphi(t) = {}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota}\varphi(t).$$

1.3.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $AC^n([a, b], \mathbb{R})$.

Définition 1.3.3 ([30]) Soient $0 < a < b < +\infty$, et $\iota > 0$ avec $n-1 < \iota < n$. La dérivée fractionnaire d'ordre ι de $\varphi \in AC^n([a, b], \mathbb{R})$ au sens de Caputo-Hadamard est définie par

$$\begin{aligned} {}^{CH}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota}\varphi(t) &= J_{a+}^{n-\iota}\delta^n\varphi(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\iota)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{n-\iota-1} \delta^n\varphi(s) \frac{ds}{s}, \end{aligned}$$

Si $\iota = n \in \mathbb{N}$, alors ${}^{CH}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota}\varphi(t) = \delta^n\varphi(t)$.

Lemme 1.3.4 ([31]) Soit $\iota > 0$, et $\varphi \in AC^n([a, b], \mathbb{R})$ ou $C^n([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$I_{a+}^{\iota} \left({}^{CH}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota}\varphi\right)(t) = \varphi(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j \left(\ln \frac{t}{a}\right)^j,$$

avec $\omega_j = \frac{\mathcal{D}^j\varphi(a)}{j!}$.

1.3.5 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction par rapport à une autre fonction

Définition 1.3.4 Soit $\iota > 0$ avec $n-1 < \iota \leq n$ où $n \in \mathbb{N}$, soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable et ψ satisfaisant les conditions de la Définition 1.2.2. La dérivée fractionnaire de

Riemann-Liouville d'une fonction φ par rapport à ψ d'ordre ι est définie par

$${}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota,\psi}\varphi(t) = \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{n-\iota,\psi}\varphi(t).$$

1.3.6 Dérivée fractionnaire de Liouville-Caputo d'une fonction par rapport à une autre fonction

Définition 1.3.5 ([10]) Soit $\iota > 0$ avec $n - 1 < \iota < n$ où $n \in \mathbb{N}$, soit $\varphi : C^{n-1}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable et ψ satisfaisant les conditions de la Définition 1.2.2. La dérivée fractionnaire de Liouville-Caputo d'une fonction φ par rapport à ψ d'ordre ι est définie par

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota,\psi}\varphi(t) = {}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota,\psi} \left[\varphi(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varphi_{\psi}^{[j]}(a)(\psi(t) - \psi(a))^j}{j!} \right],$$

avec $n - 1 < \iota \leq n$ pour $\iota \notin \mathbb{N}$, tel que

$$\varphi_{\psi}^{[j]}(t) = \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^j \varphi(t).$$

Si $\varphi \in C^n[a, b]$ et $\iota \notin \mathbb{N}$, alors

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota,\psi}\varphi(t) = I_{a+}^{n-\iota,\psi}\varphi_{\psi}^{[n]}(t).$$

Si $\iota = n \in \mathbb{N}$, alors

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota,\psi}\varphi(t) = \varphi_{\psi}^{[n]}(t).$$

Lemme 1.3.5 Soient $\iota > 0$ et $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, on a

- (1) Si $\varphi \in L^1[a, b]$ alors, ${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota,\psi} I_{a+}^{\iota,\psi}\varphi(t) = \varphi(t)$.
- (2) Si $\varphi \in C^{n-1}[a, b]$ alors, $I_{a+}^{\iota,\psi} {}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota,\psi}\varphi(t) = \varphi(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j [\psi(t) - \psi(a)]^j$,

$$\text{avec } \omega_j = \frac{\varphi_{\psi}^{[j]}(a)}{j!}.$$

Lemme 1.3.6 Soient $\iota, \kappa > 0$ et $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Alors

- (1) $I_{a+}^{\iota, \psi} [\psi(t) - \psi(a)]^{\kappa-1} = \frac{\Gamma(\kappa)}{\Gamma(\iota+\kappa)} [\psi(t) - \psi(a)]^{\iota+\kappa-1}.$
- (2) ${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota, \psi} [\psi(t) - \psi(a)]^{\kappa-1} = \frac{\Gamma(\kappa)}{\Gamma(\kappa-\iota)} [\psi(t) - \psi(a)]^{\kappa-\iota+1}.$
- (3) ${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\iota, \psi} [\psi(t) - \psi(a)]^j = 0, \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, n \in \mathbb{N}.$
- (4) $I_{a+}^{\iota, \psi} I_{a+}^{\kappa, \psi} \varphi(t) = I_{a+}^{\iota+\kappa, \psi} \varphi(t).$

1.4 Concepts d'analyse fonctionnelle

Définition 1.4.1 (Compacité, propriété de Bolzano-Weierstrass [39]) Une partie $S \subset V$ est compacte si de toute suite d'éléments de S , on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de S .

Définition 1.4.2 (Partie relativement compact [39]) Une partie S d'un espace métrique V est dite relativement compacte si son adhérence est une partie compacte de V . Ceci revient à dire que toute suite d'éléments de A admet une sous-suite qui converge dans V .

Définition 1.4.3 (Espace de Banach [66]) On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.4.4 ([39]) Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance induite par la norme.

Définition 1.4.5 (Opérateur compact [39]) Une application $\mathfrak{D} : (V, \|\cdot\|_V) \rightarrow (W, \|\cdot\|_W)$ est dite compacte avec $(V, \|\cdot\|_V)$ et $(W, \|\cdot\|_W)$ sont deux espaces de Banach, si et seulement si, elle est continue et l'image de tous ensemble bornée $S \subset V$ est un ensemble relativement compact de W .

Définition 1.4.6 ([39]) Soit Θ un domaine fermé borné de $C(\Theta)$, tel que $C(\Theta)$ est l'espace des fonctions continues sur Θ , et soit $S \subset C(\Theta)$ un ensemble de fonctions. On dit que S est uniformément borné s'il existe une constante $c > 0$ (indépendante de la fonction) telle que :

$$\forall \varphi \in S, \forall t \in S; |\varphi(t)| \leq c.$$

Autrement dit, S est borné dans $C(\Theta)$ au sens de la norme uniforme.

Définition 1.4.7 (Equicontinuité [39]) *On dit qu'un ensemble $S \subset C(\Theta)$ est équicontinue si, pour tout $\xi > 0$, il existe $\delta = \delta(\xi) > 0$ tel que*

$$\forall t_1, t_2 \in \Theta, \|t_1 - t_2\|_V \leq \delta \Rightarrow \forall \varphi \in S, |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq \xi.$$

L'équicontinuité signifie que toutes les fonctions de S ont des variations contrôlées uniformément par $\delta(\xi)$.

Théorème 1.4.1 (Arzela-Ascoli [39]) *Soit Θ un sous-ensemble dans l'espace normé V ; et soit $C(\Theta)$ un espace de Banach formé de fonctions continues $\varphi(t)$, où $t \in \Theta$. Pour qu'un ensemble $S \subset C(\Theta)$ soit compact, il faut et il suffit que les fonctions de S soient uniformément bornées et équicontinues.*

Définition 1.4.8 (Application contractante [39]) *Soit (V, d_V) un espace métrique, $\mathfrak{D} : V \rightarrow V$ est une application contractante si*

$$\exists L, 0 < L < 1, \forall (u, v) \in V \times V; d(\mathfrak{D}(u), \mathfrak{D}(v)) \leq Ld(u, v).$$

Définition 1.4.9 (Point fixe [39]) *Soit T une application d'un ensemble S dans lui même. On appelle point fixe de T tout point $s \in S$ tel que $T(s) = s$.*

Définition 1.4.10 (Application lipschitzienne [39]) *Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Une application $\varphi : V \rightarrow V$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $L_\varphi \in \mathbb{R}_+$, appelée constante de Lipschitz, telle que :*

$$\forall u, v \in V, \quad \|\varphi(u) - \varphi(v)\| \leq L_\varphi \|u - v\|$$

On distingue deux cas particuliers importants :

I) Lorsque $L_\varphi \leq 1$, l'application est dite non expansive ;

II) Lorsque $L_\varphi < 1$, l'application est qualifiée de contraction.

Théorème 1.4.2 (Théorème de Fubini [39]) Soit φ une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d \varphi(s, \tau) d\tau \right) ds = \int_c^d \left(\int_a^b \varphi(s, \tau) ds \right) d\tau.$$

Théorème 1.4.3 (Principe de contraction de Banach [12]) Soit S espace métrique complet et $T : S \rightarrow S$ une application contractante i.e., il existe $0 < k < 1$ tel que

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|, \quad \forall x, y \in S.$$

Alors T admet un point fixe unique.

Théorème 1.4.4 (l'alternative de Leray-Schauder [27]) Soit $\mathcal{D}$ est un espace de Banach, soit $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ un opérateur complètement continue (i.e. Une application restreinte à tout ensemble borné dans $\mathcal{D}$ est compacte). Soit $M(T) = \{x \in \mathcal{D} : x = mT(x) \text{ pour certains } 0 < m < 1\}$. Alors soit l'ensemble $M(T)$ est non borné, soit T a au moins un point fixe.

Théorème 1.4.5 (Krasnosel'skii [13]) Soit B un ensemble convexe, fermé et non-vide d'un espace X de Banach. Soient $Q : B \rightarrow X$ et $T : X \rightarrow X$ deux opérateurs tels que

- (i) T est contraction,
- (ii) Q est complètement continue,
- (iii) $[u = Tu + Qv \text{ pour tout } v \in B] \implies u \in B$.

Alors il existe $w \in X$ tel que $Tw + Qw = w$.

Théorème 1.4.6 (Dhage [19]) Soit $\mathfrak{B}$ un sous-ensemble non vide, fermé, convexe et borné d'un espace de Banach U , et soit $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} : U \rightarrow U$ et $\mathfrak{D} : \mathfrak{B} \rightarrow U$ trois opérateurs satisfaisant les conditions suivantes.

- (1) $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ sont lipschitziens avec des constantes de Lipschitz $L_{\mathfrak{A}}$ et $L_{\mathfrak{C}}$ respectivement.
- (2) $\mathfrak{D}$ est complètement continu.

(3) $L_{\mathfrak{A}}M_{\mathfrak{D}} + L_{\mathfrak{C}} < 1$, où $M_{\mathfrak{D}} = \|\mathfrak{D}(\mathfrak{B})\| = \sup \{\|\mathfrak{D}u\| : u \in \mathfrak{B}\}$.

(4) $\mathfrak{A}u\mathfrak{D}v + \mathfrak{C}u = u \Rightarrow u \in \mathfrak{B}$ pour tout $v \in \mathfrak{B}$.

Alors, l'équation d'opérateurs

$$\mathfrak{A}u\mathfrak{D}u + \mathfrak{C}u = u,$$

a une solution dans $\mathfrak{B}$.

Chapitre 2

Problème thermostatique fractionnaire de Liouville-Caputo avec conditions aux limites non locales hybrides

Aujourd'hui plus que jamais, les mathématiques appliquées s'imposent comme un levier incontournable pour répondre aux défis environnementaux. Loin d'être une utopie, la modélisation avancée permet désormais de simuler avec précision des processus chimiques complexes, réduisant ainsi le recours aux expérimentations physiques coûteuses et polluantes. Cette révolution numérique repose notamment sur l'exploration des équations intégral-différentielles fractionnaires et des systèmes hybrides, qui offrent une profondeur analytique inégalée pour décrire les phénomènes naturels multiscalaire. Investir dans ces outils mathématiques de pointe n'est plus une option, mais une nécessité pour concevoir des solutions durables.

D'un point de vue dynamique, un thermostat constitue un système de contrôle en boucle fermée qui stabilise la température d'un processus autour d'une valeur cible.

Ce chapitre est consacré à l'analyse d'un modèle fractionnaire hybride appliqué à la régulation thermostatique. Inspiré par [11], en étudiant plus particulièrement l'inégalité de type de

Lyapunov

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{a^+}^\beta \frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} + q(t)\Psi x(t) = 0, \quad a < t < b, \quad (2.1)$$

avec les conditions aux limites hybrides

$$\begin{cases} \mathcal{D} \left(\frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} \right) \Big|_a = 0, \\ \omega {}^{LC}\mathfrak{D}_{a^+}^{\beta-1} \left(\frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} \right) \Big|_b + \frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} \Big|_\eta = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

avec $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$, ${}^{LC}\mathfrak{D}_{a^+}^\beta$ désigne la dérivée fractionnaire de Liouville-Caputo d'ordre β , $1 < \beta \leq 2$, $\omega > 0$ et $a \leq \eta \leq b$; H, Ψ sont des opérateurs (pouvant être non linéaires) tels que $H, \Psi : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$; q est une fonction continue à valeurs réelles sur $[a, b]$; $f : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ est une fonction continue.

2.1 La fonction de Green associée au problème et ses propriétés

Considérons l'espace de Banach $\mathcal{B} = C[a, b]$ muni de la norme $\|x\|_{\mathcal{B}} = \sup \{|x(t)| : t \in [a, b]\}$.

Lemme 2.1.1 *Si la fonction $x \in C[a, b]$ est solution du problème (2.1) -(2.2), alors x satisfait l'équation intégrale :*

$$x(t) = f(t, x(t), Hx(t)) \int_a^b G(t, \tau) q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau, \quad (2.3)$$

avec $G(t, \tau)$ est la fonction de Green donnée par

$$G(t, \tau) = \omega + g_\eta(\tau) - g_t(\tau), \quad (2.4)$$

tels que $g_r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction donnée par

$$g_r(\tau) = \begin{cases} \frac{(r-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \text{pour } a \leq \tau \leq r \leq b, \\ 0, & \text{pour } a \leq r < \tau \leq b, \end{cases} \quad (2.5)$$

où $r \in [a, b]$.

Preuve Commençons par supposer que x résout l'équation (2.1), appliquant l'opérateur I_{a+}^{β} à l'équation (2.1), on obtient :

$$I_{a+}^{\beta} {}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\beta} \frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} = -I_{a+}^{\beta} q(t) \Psi x(t).$$

D'après le Lemme 1.3.3, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} &= -I_{a+}^{\beta} q(t) \Psi x(t) + c_0 + c_1(t - a) \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - \tau)^{\beta-1} q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau + c_0 + c_1(t - a), \end{aligned}$$

avec $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

Donc

$$\mathcal{D} \left(\frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} \right) = -\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (\beta - 1)(t - \tau)^{\beta-2} q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau + c_1,$$

de la condition aux limites $\mathcal{D} \left(\frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} \right) \Big|_a = 0$, il vient

$$c_1 = 0,$$

donc

$$\frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} = -\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - \tau)^{\beta-1} q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau + c_0.$$

Sachant que

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\beta-1} c_0 = 0.$$

d'où :

$$\begin{aligned}
{}^{LC}\mathfrak{D}_{a^+}^{\beta-1} \left(\frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} \right) &= -{}^{LC}\mathfrak{D}_{a^+}^{\beta-1} I_{a^+}^\beta q(t) \Psi x(t) \\
&= -{}^{LC}\mathfrak{D}_{a^+}^{\beta-1} I_{a^+}^{\beta-1} I_{a^+} q(t) \Psi x(t) \\
&= -I_{a^+} q(t) \Psi x(t) \\
&= -\int_a^t q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau,
\end{aligned}$$

alors

$$\omega {}^{LC}\mathfrak{D}_{a^+}^{\beta-1} \left(\frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} \right) \Big|_b = -\omega \int_a^b q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau.$$

En considérant la condition aux limites :

$$\omega {}^{LC}\mathfrak{D}_{a^+}^{\beta-1} \left(\frac{x(t)}{f(t, x(t), Hx(t))} \right) \Big|_b + \frac{x(\eta)}{f(\eta, x(\eta), Hx(\eta))} = 0,$$

on obtient

$$-\omega \int_a^b q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\eta (\eta - \tau)^{\beta-1} q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau + c_0 = 0,$$

ce qui donne

$$c_0 = \omega \int_a^b q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\eta (\eta - \tau)^{\beta-1} q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
x(t) &= f(t, x(t), Hx(t)) \left(\omega \int_a^b q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\eta (\eta - \tau)^{\beta-1} q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - \tau)^{\beta-1} q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau \right) \\
&= f(t, x(t), Hx(t)) \left(\omega \int_a^b q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\eta (\eta - \tau)^{\beta-1} q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_\eta^b 0 \cdot q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - \tau)^{\beta-1} q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b 0 \cdot q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau \right),
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$x(t) = f(t, x(t), Hx(t)) \int_a^b [\omega + g_\eta(\tau) - g_t(\tau)] q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau.$$

□

Remarque 2.1.1 *La fonction de Green peut s'exprimer sous la forme*

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \omega + g_\eta(\tau) - \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \text{pour } a \leq \tau \leq t \leq b, \\ \omega + g_\eta(\tau), & \text{pour } a \leq t \leq \tau \leq b. \end{cases}$$

Dans la proposition suivante, nous établissons quelques propriétés fondamentales de la fonction de Green.

Proposition 2.1.1 *La fonction de Green vérifie*

- (i) $\max_{t, \tau \in [a, b]} G(t, \tau) = \omega + \frac{(\eta-a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}.$
- (ii) $\min_{t, \tau \in [a, b]} G(t, \tau) = \omega - \frac{(b-\eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}.$
- (iii) Si $\omega \Gamma(\beta) \geq (b-\eta)^{\beta-1}$, alors $\max_{t, \tau \in [a, b]} \int_a^b |G(t, \tau)| d\tau = \omega (b-a) + \frac{(\eta-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}.$

Preuve (i) Notons que pour $\tau \in [a, b]$ fixé, on a

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, \tau) = \begin{cases} -\frac{(\beta-1)(t-\tau)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)}, & \text{pour } a \leq \tau \leq t \leq b, \\ 0, & \text{pour } a \leq t \leq \tau, \end{cases}$$

on en déduit que $G(t, \tau)$ est décroissante par rapport à t , ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \max_{t \in [a, b]} G(t, \tau) &= \max_{t \in [a, b]} \begin{cases} \omega + \frac{(\eta-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \text{pour } a \leq \tau \leq \eta \leq b, \\ \omega - \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \text{pour } a \leq \eta \leq \tau \leq b. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \omega + \frac{(\eta-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \text{pour } a \leq \tau \leq \eta \leq b, \\ \omega, & \text{pour } a \leq \eta \leq \tau \leq b. \end{cases} \end{aligned}$$

Par contre, si on considère

$$p(\tau) = \omega + \frac{(\eta - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \quad \text{pour } \tau \in [a, \eta],$$

puisque $p'(\tau) = -\frac{(\beta-1)(\eta-\tau)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} < 0$, p est décroissante, donc

$$\begin{aligned} \max_{\tau \in [a, \eta]} p(\tau) &= p(a) \\ &= \omega + \frac{(\eta - a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} \max_{t, \tau \in [a, b]} G(t, \tau) &= \max \left\{ \omega, \omega + \frac{(\eta - a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \right\} \\ &= \omega + \frac{(\eta - a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}. \end{aligned}$$

(ii) Puisque $G(t, \tau)$ est décroissante par rapport à t , ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \min_{t \in [a, b]} G(t, \tau) &= \min_{t \in [a, b]} \begin{cases} \omega + \frac{(\eta - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \frac{(t - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \text{pour } a \leq \tau \leq \eta \leq b, \\ \omega - \frac{(t - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \text{pour } a \leq \eta \leq \tau \leq b \end{cases} \\ &= \begin{cases} \omega + \frac{(\eta - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \frac{(b - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \text{for } a \leq \tau \leq \eta \leq b, \\ \omega - \frac{(b - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \text{for } a \leq \eta \leq \tau \leq b. \end{cases} \end{aligned}$$

Posons $q(\tau) = \omega - \frac{(b - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$ pour $\tau \in [\eta, b]$. Puisque $q'(\tau) = \frac{(\beta-1)(b - \tau)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \geq 0$, q est croissante, donc

$$\begin{aligned} \min_{\tau \in [\eta, b]} q(\tau) &= q(\eta) \\ &= \omega - \frac{(b - \eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}. \end{aligned}$$

D'autre part, si l'on note $h(\tau) = \omega + \frac{(\eta-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \frac{(b-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$ pour $\tau \in [a, \eta]$,

puisque $h'(\tau) = -\frac{(\beta-1)(\eta-\tau)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} + \frac{(\beta-1)(b-\tau)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} = \frac{(\beta-1)}{\Gamma(\beta)} ((b-\tau)^{\beta-2} - (\eta-\tau)^{\beta-2}) \leq 0$, (car $1 < \beta \leq 2$),

h est décroissante en $[a, \eta]$ ainsi,

$$\begin{aligned} \min_{\tau \in [a, \eta]} h(\tau) &= h(\eta) \\ &= \omega - \frac{(b-\eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\min_{t, \tau \in [a, b]} G(t, \tau) = \omega - \frac{(b-\eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}.$$

iii) On remarque si $\omega\Gamma(\beta) \geq (b-\eta)^{\beta-1}$ alors $G(t, \tau) \geq 0$, donc

$$\begin{aligned} \int_a^b |G(t, \tau)| d\tau &= \int_a^b \omega d\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\eta (\eta-\tau)^{\beta-1} d\tau - \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} d\tau \\ &= \omega(b-a) + \frac{(\eta-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - \frac{(t-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\max_{t, \tau \in [a, b]} \int_a^b |G(t, \tau)| d\tau = \omega(b-a) + \frac{(\eta-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}. \quad (2.6)$$

□

Remarque 2.1.2 Si $\omega\Gamma(\beta) \geq (b-\eta)^{\beta-1}$ alors $G(t, \tau) \geq 0$.

Sinon dans le cas $\omega\Gamma(\beta) < (b-\eta)^{\beta-1}$, puisque,

$$\omega - \frac{(b-\eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \leq G(t, \tau) \leq \omega + \frac{(\eta-a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)},$$

on a que

$$|G(t, \tau)| \leq \max \left\{ \omega + \frac{(\eta-a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \frac{(b-\eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \omega \right\}, \text{ pour } t, \tau \in [a, b]. \quad (2.7)$$

2.2 Inégalité de type de Lyapunov

Nous présentons ci-dessous l'inégalité de Lyapunov applicable au problème (2.1)-(2.2).

Théorème 2.2.1 *Supposons que $\|\Psi x\|_{C[a,b]} \leq \zeta \|x\|_{C[a,b]}$ pour tout $x \in C[a,b]$ tel que $\zeta > 0$, et $\mu = \sup_{(t,x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(t, x(t), y)|$. Si x une solution non triviale de problème (2.1)-(2.2) alors nous obtenons*

$$\int_a^b |q(\tau)| d\tau \geq \left(\mu \zeta \max \left\{ \omega + \frac{(\eta - a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \frac{(b - \eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \omega \right\} \right)^{-1}. \quad (2.8)$$

Preuve Soit $\mathcal{B} = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace de Banach muni de la norme

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

D'après le Lemme 2.1.1 on a

$$x(t) = f(t, x(t), Hx(t)) \int_a^b G(t, \tau) q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau,$$

donc

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sup_{t \in [a,b]} \left| f(t, x(t), Hx(t)) \cdot \int_a^b G(t, \tau) q(\tau) \Psi x(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \mu \zeta \|x\| \int_a^b \sup_{t \in [a,b]} |G(t, \tau)| |q(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité 2.7, il s'en suit que pour tout $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \mu \zeta \|x\| \int_a^b \sup_{t \in [a,b]} |G(t, \tau)| |q(\tau)| d\tau \\ &\leq \mu \zeta \|x\| \max \left\{ \omega + \frac{(\eta - a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \frac{(b - \eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \omega \right\} \int_a^b |q(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

étant donné que x est non trivial, alors

$$1 \leq \mu \zeta \max \left\{ \omega + \frac{(\eta - a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \frac{(b - \eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \omega \right\} \int_a^b |q(\tau)| d\tau,$$

donc on a

$$\int_a^b |q(\tau)| d\tau \geq \left(\mu \zeta \max \left\{ \omega + \frac{(\eta - a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \frac{(b - \eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \omega \right\} \right)^{-1}.$$

□

Corollaire 2.2.1 *Supposons que $\|\Psi x\|_{C[a,b]} \leq \xi \|x\|_{C[a,b]}$, pour tout $x \in C[a,b]$ tel que $\xi > 0$, et $\mu = \sup_{(t,x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(t, x(t), y)|$. Si*

$$\int_a^b |q(\tau)| d\tau < \left(\mu \zeta \max \left\{ \omega + \frac{(\eta - a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \frac{(b - \eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \omega \right\} \right)^{-1},$$

avec $1 < \beta \leq 2$, $\omega > 0$, $a \leq \eta \leq b$, et $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alors le problème (2.1)-(2.2) ne possède que la solution triviale.

En tant que cas particulier, nous déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.2 *Supposons que $f(t, x(t), Hx(t)) = 1$, $\Psi x(t) = x(t)$ pour tout $t \in [a, b]$ et $\beta = 2$ alors le problème (2.1)-(2.2) se ramène à*

$$\begin{cases} x''(t) + q(t)x(t) = 0, & a < t < b, \\ x'(a) = 0, & \omega x'(b) + x(\eta) = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

avec $\omega > 0$, $a \leq \eta \leq b$, et $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction continue, si le problème (2.9) admet une solution non triviale alors

$$\int_a^b |q(s)| ds \geq \frac{1}{\max \{ \omega + (\eta - a), (b - \eta) - \omega \}}.$$

Preuve Par l'application du Théorème (2.2.1) pour $\beta = 2$.

□

2.3 Analyse d'un problème aux valeurs propres

Nous mettons en œuvre les résultats obtenus antérieurement pour étudier un problème aux valeurs propres avec $f(t, x(t), Hx(t)) = 1$, $\Psi x(t) = x(t)$ pour tout $t \in [a, b]$.

On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre pour un problème fractionnaire avec conditions aux limites :

$$\begin{cases} {}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\beta} x(t) + \lambda x(t) = 0, & a < t < b, \\ x'(a) = 0, \quad \omega {}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\beta-1} x(b) + x(\eta) = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

avec $1 < \beta \leq 2$, $\omega > 0$ et $a \leq \eta \leq b$, lorsque le problème (2.10) possède une solution continue non trivial x_{λ} , le scalaire λ est appelé valeur propre et x_{λ} fonction propre correspondante.

Corollaire 2.3.1 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre pour le problème (2.10), alors,*

$$|\lambda| \geq \left((b-a) \max \left\{ \omega + \frac{(\eta-a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \frac{(b-\eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \omega \right\} \right)^{-1}.$$

Preuve Puisque λ est une valeur propre pour le problème (2.10), ce dernier admet une solution continue non triviale x_{λ} . D'après le Théorème 2.2.1, on en déduit que

$$\int_a^b |\lambda| ds \geq \left(\max \left\{ \omega + \frac{(\eta-a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \frac{(b-\eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \omega \right\} \right)^{-1}.$$

Par conséquent,

$$|\lambda| \geq \left((b-a) \max \left\{ \omega + \frac{(\eta-a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \frac{(b-\eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \omega \right\} \right)^{-1},$$

ce qui démontre le résultat annoncé. □

Corollaire 2.3.2 *On dit que le problème (2.10) n'admet pas de solution non triviale si la condition suivante est satisfaite.*

$$|\lambda| < \left((b-a) \max \left\{ \omega + \frac{(\eta-a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \frac{(b-\eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \omega \right\} \right)^{-1}.$$

Il en résulte comme cas particulier le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.3 *Considérons λ comme valeur propre d'un problème aux limites standard*

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = 0, & a < t < b, \\ x'(a) = 0, & \omega x'(b) + x(\eta) = 0, \end{cases}$$

avec $\omega > 0$, $a \leq \eta \leq b$ et $\omega \geq (b - a)$, alors

$$|\lambda| \geq ((b - a) \max \{\omega + (\eta - a), (b - \eta) - \omega\})^{-1}.$$

Preuve Par l'application du Corollaire (2.3.1) pour $\beta = 2$ sur le problème (2.10). $\square$

2.4 Résultat d'unicité

Nous nous intéressons ici à l'analyse d'existence et d'unicité des solutions du problème formulé ci-dessous

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\beta} \frac{x(t)}{F(t)} + \Phi(t, x(t)) = 0, \quad a < t < b, \quad (2.11)$$

muni par les conditions aux limites hybrides

$$\begin{cases} \mathcal{D} \left(\frac{x(t)}{F(t)} \right) \Big|_a = 0, \\ \omega {}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\beta-1} \left(\frac{x(t)}{F(t)} \right) \Big|_b + \frac{x(\eta)}{F(\eta)} = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

avec $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$, ${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\beta}$ désigne la dérivée fractionnaire de Liouville-Caputo d'ordre β , $1 < \beta \leq 2$, $\omega > 0$, $a \leq \eta \leq b$; $\Phi : [a, b] \times \mathbb{R}$ et $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ des fonctions continues.

Théorème 2.4.1 *Supposons qu'il existe $L_{\Phi} > 0$ tel que $|\Phi(t, \varkappa_1) - \Phi(t, \varkappa_2)| \leq L_{\Phi} |\varkappa_1 - \varkappa_2|$,*

pour tous $(t, \varkappa_1, \varkappa_2) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et $\sup_{t \in [a, b]} |F(t)| \leq F^*$, si

$$b - a < \frac{1}{\omega L_{\Phi} F^*} - \frac{(\eta - a)^{\beta}}{\Gamma(\beta + 1)}, \quad (2.13)$$

avec $\omega \geq \frac{(b-\eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$, alors le problème (2.11)-(2.12) admet une solution unique sur $[a, b]$.

Preuve Soit $\mathfrak{B} = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace de Banach muni de la norme $\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$, on note

$$\mathfrak{D}(x(t)) = F(t) \int_a^b G(t, \tau) \Phi(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

avec $G(t, \tau)$ est défini par (2.4), notons que la résolution du problème (2.11) revient à trouver un point fixe x de l'opérateur $\mathfrak{D}$. Pour toute $(t, x), (t, y)$ dans l'espace produit $[a, b] \times \mathfrak{B}$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}(x(t)) - \mathfrak{D}(y(t))| &= |F(t)| \int_a^b G(t, \tau) |\Phi(\tau, x(\tau)) - \Phi(\tau, y(\tau))| d\tau \\ &\leq L_{\Phi} F^* |x(t) - y(t)| \int_a^b |G(t, \tau)| d\tau \\ &\leq L_{\Phi} F^* \int_a^b |G(t, \tau)| d\tau \|x - y\|, \end{aligned}$$

d'après la formule (2.6), on obtient

$$\|\mathfrak{D}(x(t)) - \mathfrak{D}(y(t))\| \leq \omega L_{\Phi} F^* \left((b - a) + \frac{(\eta - a)^{\beta}}{\Gamma(\beta + 1)} \right) \|x - y\|.$$

On vérifie facilement que l'hypothèse (2.13) satisfait les conditions du théorème de point fixe pour applications contractantes. L'opérateur $\mathfrak{D}$ étant une contraction, le problème (2.11) admet par conséquent une et une seule solution. $\square$

2.5 Exemples

Cette section est consacrée à l'illustration des résultats antérieurs au travers de deux exemples.

Exemple 2.5.1 *Considérons l'équation différentielle hybride fractionnaire du modèle de thermostat*

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{3}{2}} \left[\frac{x(t)}{t \frac{\cos x(t)}{x^2(t)+1} + 1} \right] + \frac{t \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) \sin(x(t))}{4} = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (2.14)$$

avec les conditions hybrides à trois points

$$\begin{cases} \mathcal{D} \left[\frac{x(t)}{t \frac{\cos x(t)}{x^2(t)+1} + 1} \right] \Big|_{t=0} = 0, \\ \frac{1}{10} {}^{LC}\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{x(t)}{t \frac{\cos x(t)}{x^2(t)+1} + 1} \right] \Big|_{t=1} + \left[\frac{x(t)}{t \frac{\cos x(t)}{x^2(t)+1} + 1} \right] \Big|_{t=\frac{1}{4}} = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

avec $\beta = \frac{3}{2}$, $\beta-1 = \frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{4}$ et $\omega = \frac{1}{10}$. Considérons les fonctions continues $f(t, x(t), Hx(t)) = t \frac{\cos x(t)}{x^2(t)+1} + 1$, $\Psi x(t) = \frac{\sin(x(t))}{4}$, et $q(t) = t \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$, alors, $\mu = 2$ et $\zeta = \frac{1}{2}$, donc

$$\int_0^1 \left| t \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) \right| = 0.31831$$

et

$$\left(\max \left\{ \frac{1}{10} + \frac{(\frac{1}{4} - 0)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}, \frac{(1 - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \frac{1}{10} \right\} \right)^{-1} = 1.1400,$$

par le théorème 2.2.1 on obtient que le problème (2.14-2.15) ne possède pas $x(t)$ comme solution non triviale.

Exemple 2.5.2 *Considérons l'équation différentielle hybride fractionnaire du modèle de thermostat*

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{3}{2}} \left[\frac{3x(t)}{t + \cos t} \right] + t + \frac{\sin(x(t))}{4} = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (2.16)$$

avec les conditions hybrides à trois points

$$\begin{cases} \mathcal{D} \left[\frac{3x(t)}{t + \cos t} \right] \Big|_{t=0} = 0, \\ 2 {}^{LC}\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{3x(t)}{t + \cos t} \right] \Big|_{t=1} + \frac{3x(\frac{1}{4})}{\frac{1}{4} + \cos \frac{1}{4}} = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

avec $\beta = \frac{3}{2}$, $\beta - 1 = \frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{4}$ et $\omega = 2$, donc on a

$$2 = \omega \geq \frac{(b - \eta)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \simeq 0.977\,21.$$

Considérons les fonctions continues $F(t) = \frac{t+\cos t}{3}$, et $\Phi(t, x(t)) = t + \frac{\sin(x(t))}{4}$, alors $\sup_{t \in [0,1]} |F(t)| \leq \frac{2}{3} = F^*$ et $|\Phi(t, \varkappa_1) - \Phi(t, \varkappa_2)| \leq \frac{1}{4} |\varkappa_1 - \varkappa_2|$, alors, $L_\Phi = \frac{1}{4}$, donc

$$\frac{1}{\omega L_\Phi F^*} - \frac{(\eta - a)^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \simeq 2.906\,0 > 1, \quad (2.18)$$

par le Théorème 2.4.1 on obtient que le problème (2.16)-(2.17) admet une solution unique sur $[0, 1]$.

Dans l'exemple suivant, on va étudier le problème de valeur propre

Exemple 2.5.3

$$\begin{cases} {}^{LC}\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{3}{2}}x(t) + \lambda x(t) = 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ x'(0) = 0, & 2^{LC}\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}}x(1) + x(\frac{1}{4}) = 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

avec $\beta = \frac{3}{2}$, $\beta - 1 = \frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{4}$ et $\omega = 2$, donc on a si la condition suivante est satisfaite.

$$|\lambda| < \left(\max \left\{ 2 + \frac{(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}, \frac{(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} - 2 \right\} \right)^{-1} \simeq 0.389\,99,$$

par le Corollaire 2.3.2 on obtient que le problème (2.19) n'admet pas de solution non triviale.

Chapitre 3

Problème fractionnaire hybride de type de Riemann-Liouville

Les équations différentielles fractionnaires hybrides représentent une classe importante de systèmes dynamiques qui combinent les propriétés des opérateurs différentiels fractionnaires avec des termes hybrides non linéaires. Ces équations apparaissent naturellement dans divers domaines appliqués, notamment la modélisation des phénomènes à mémoire longue, les systèmes de contrôle complexes et les processus biologiques. Contrairement aux équations différentielles classiques, les versions hybrides fractionnaires intègrent souvent des perturbations non locales ou des conditions aux limites non standard, ce qui enrichit leur structure mathématique tout en posant des défis analytiques significatifs. Ce chapitre, inspiré par [41], aborde la question de l'existence des solutions pour l'équation fractionnaire hybride de type Riemann-Liouville suivante

$${}^{RL}\mathfrak{D}_{0+}^{\beta} \left(\frac{u(t) - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(t, u(t))}{\Psi(t, u(t))} \right) = g(t, u(t)), \quad t \in [0, 1], \quad (3.1)$$

sous les conditions aux limites :

$$u(0) = \mathcal{D} \left(\frac{u(t) - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(t, u(t))}{\Psi(t, u(t))} \right) \Big|_0 = 0, \quad u(1) = \zeta, \quad (3.2)$$

où ${}^{RL}\mathfrak{D}_{0+}^\beta$ est la dérivée fractionnaire de type Riemann-Liouville d'ordre β , telle que $2 < \beta \leq 3$ et $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$; $I_{e-}^{\gamma_i}$ désigne l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\gamma_i > 0$; $\zeta, \lambda_i \in \mathbb{R}$ où $i = 1, \dots, m$; $h_i : [0, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $\Psi : [0, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et $g : [0, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

De plus, nous analysons l'unicité de ces solutions pour le cas $\Psi(t, u(t)) = 1$, pour tout $t \in [0, 1]$, du problème (3.1)-(3.2).

3.1 Résultat d'existence

Lemme 3.1.1 *Pour $\Theta \in C([0, 1], \mathbb{R})$; u est une solution du problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} {}^{RL}\mathfrak{D}_{0+}^\beta \left(\frac{u(t) - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(t, u(t))}{\Psi(t, u(t))} \right) = \Theta(t), & t \in [0, 1], \\ u(0) = \mathcal{D} \left(\frac{u(t) - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(t, u(t))}{\Psi(t, u(t))} \right) \Big|_0 = 0, & u(1) = \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.3)$$

où $2 < \beta \leq 3$, si et seulement si, u satisfait l'équation intégrale suivante

$$\begin{aligned} u(t) = & \Psi(t, u(t)) \left(t^{\beta-1} \frac{\xi_1 - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(\cdot, u(\cdot))(1)}{\Psi(1, \xi_1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-\tau)^{\beta-1} \Theta(\tau) d\tau \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \Theta(\tau) d\tau \right) + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(t, u(t)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec $t \in [0, 1]$.

Preuve Premièrement, en appliquant l'opérateur I_{0+}^β des deux côtés de l'équation dans l'équation (3.3), nous obtenons

$$\frac{u(t) - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(t, u(t))}{\Psi(t, u(t))} = c_1 t^{\beta-1} + c_2 t^{\beta-2} + c_3 t^{\beta-3} - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \Theta(\tau) d\tau, \quad (3.5)$$

où c_1, c_2 et $c_3 \in \mathbb{R}$. En utilisant $u(0) = 0$ et $\mathcal{D} \left(\frac{u(t) - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(t, u(t))}{\Psi(t, u(t))} \right) \Big|_0 = 0$, nous obtenons

respectivement

$$c_3 = c_2 = 0,$$

par $u(1) = \zeta$ nous obtenons

$$\frac{\zeta - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(., u(.))(1)}{\Psi(1, \zeta)} = c_1 - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\beta-1} \Theta(\tau) d\tau,$$

donc

$$c_1 = \frac{\zeta - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(., u(.))(1)}{\Psi(1, \zeta)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\beta-1} \Theta(\tau) d\tau.$$

En substituant les valeurs de c_1, c_2 et c_3 dans (3.5), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{u(t) - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(t, u(t))}{f(t, u(t))} &= t^{\beta-1} \frac{\xi_1 - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(., u(.))(1)}{\Psi(1, \xi_1)} \\ &\quad + \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\beta-1} \Theta(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} \Theta(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} u(t) &= \Psi(t, u(t)) \left(t^{\beta-1} \frac{\xi_1 - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(., u(.))(1)}{\Psi(1, \xi_1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1 - \tau)^{\beta-1} \Theta(\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} \Theta(\tau) d\tau \right) + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(t, u(t)). \end{aligned}$$

Alternativement, la fonction de (3.4) satisfait l'équation (3.3) et les conditions aux limites prescrites. $\square$

Maintenant, considérons l'espace de Banach défini par $U = C([0, 1], \mathbb{R})$, avec la norme $\|u\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$. Ensuite, nous définissons la multiplication dans U par $(uv)(t) = u(t)v(t)$, pour

tout $u, v \in U$, et l'opérateur $\mathfrak{T} : U \rightarrow U$ par

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}u(t) = & \Psi(t, u(t)) \left(t^{\beta-1} \frac{\xi_1 - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(\cdot, u(\cdot))(1)}{\Psi(1, \xi_1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-\tau)^{\beta-1} g(\tau, u(\tau)) d\tau \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} g(\tau, u(\tau)) d\tau \right) + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{e-}^{\gamma_i} h_i(t, u(t)), \end{aligned} \quad (3.6)$$

Remarque 3.1.1 *Le problème décrit par l'équation (3.1) a une solution $u \in U$, si et seulement si u est un point fixe de l'opérateur $\mathfrak{T}$.*

Avant de présenter nos principaux résultats concernant le problème (3.1), nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H_1) Il existe une fonction continue $\tilde{g}$ de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}_+$ et une fonction continue non décroissante

ψ de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, telles que $|g(t, u(t))| \leq \tilde{g}(t)\psi(\|u\|)$, pour tout $t \in [0, 1]$ avec

$\sup_{0 \leq t \leq 1} \tilde{g}(t) = \|\tilde{g}\|$, où $g : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

(H_2) Il existe $L_\Psi > 0$, telle que $|\Psi(t, u_1) - \Psi(t, u_2)| \leq L_\Psi |u_1 - u_2|$, pour tout $(t, u_1, u_2) \in$

$[0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et $|\Psi(t, 0)| \leq \tilde{\Psi}(t)$, où $\tilde{\Psi}(t)$ est une fonction positive et continue sur $[0, 1]$

avec $\sup_{0 \leq t \leq 1} \tilde{\Psi}(t) = \|\tilde{\Psi}\|$.

(H_3) Il existe $L_{h_i} > 0$, $i = 1, \dots, m$ telles que $|h_i(t, u_1) - h_i(t, u_2)| \leq L_{h_i} |u_1 - u_2|$, pour tout

$(t, u_1, u_2) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $|h_i(t, 0)| \leq \tilde{h}_i(t)$, où $h_i : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sont des fonctions

continues, et $\tilde{h}_i(t)$ sont des fonctions positives et continues sur $[0, 1]$, pour $i = 1, \dots, m$, avec

$\sup_{0 \leq t \leq 1} \tilde{h}_i(t) = \|\tilde{h}_i\|$.

Maintenant, nous présentons le théorème d'existence suivant pour le problème décrit dans l'équation (3.1) en utilisant le théorème du point fixe de Dhage.

Théorème 3.1.1 *Soit les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) satisfaites. S'il existe un nombre réel $R > 0$ tel que*

$$R \geq \frac{\varrho \|\tilde{\Psi}\| + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| \|\tilde{h}_i\|}{\Gamma(\gamma_i+1)}}{1 - \left(\varrho L_\Psi + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| L_{h_i}}{\Gamma(\gamma_i+1)} \right)}, \quad (3.7)$$

avec

$$\varrho L_\Psi + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| L_{h_i}}{\Gamma(\gamma_i + 1)} < 1, \quad (3.8)$$

et

$$\varrho = \frac{|\xi_1| + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| (L_{h_i} R + \|\tilde{h}_i\|)}{\Gamma(\gamma_i + 1)}}{|\Psi(1, \xi_1)|} + 2 \frac{\|\tilde{g}\| \psi(R)}{\Gamma(\beta + 1)}. \quad (3.9)$$

Alors, l'équation différentielle fractionnaire hybride (3.1) a au moins une solution sur $[0, 1]$.

Preuve Considérons $\mathfrak{B}_R = \{u \in U, \text{ tel que } \|u\| \leq R\}$ et soit

$$\mathfrak{T}u = \mathfrak{A}u\mathfrak{D}u + \mathfrak{C}u, \quad (3.10)$$

où $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} : U \rightarrow U$ et $\mathfrak{D} : \mathfrak{B}_R \rightarrow U$ sont trois opérateurs définis par

$$\mathfrak{A}u(t) = \Psi(t, u(t)),$$

$$\mathfrak{D}u(t) = t^{\beta-1} \frac{\xi_1 - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(\cdot, u(\cdot))(1)}{\Psi(1, \xi_1)} + F_u(t), \quad (3.11)$$

où

$$F_u(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-\tau)^{\beta-1} g(\tau, u(\tau)) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} g(\tau, u(\tau)) d\tau,$$

avec $t \in [0, 1]$, et

$$\mathfrak{C}u(t) = \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{e-}^{\gamma_i} h_i(t, u(t)), \quad (3.12)$$

Assertion 1. Nous prouvons d'abord que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ sont lipschitziens avec des constantes de Lipschitz $L_{\mathfrak{A}}, L_{\mathfrak{C}}$ respectivement.

Soit $u, v \in U$, pour tout $t \in [0, 1]$ nous avons

$$|\mathfrak{A}u(t) - \mathfrak{A}v(t)| = |\Psi(t, u(t)) - \Psi(t, v(t))| \leq L_{\Psi} \|u - v\|,$$

ce qui donne

$$\|\mathfrak{A}u - \mathfrak{A}v\| \leq L_{\mathfrak{A}} \|u - v\|, \text{ où } L_{\mathfrak{A}} = L_{\Psi}.$$

Ensuite nous avons

$$\begin{aligned} |\mathfrak{C}u(t) - \mathfrak{C}v(t)| &\leq \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i|}{\Gamma(\gamma_i)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma_i-1} |h_i(\tau, u(\tau)) - h_i(\tau, v(\tau))| d\tau \\ &\leq \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| L_{h_i}}{\Gamma(\gamma_i)} \|u - v\| \int_0^t (t-\tau)^{\gamma_i-1} d\tau \\ &\leq \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| L_{h_i}}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \|u - v\|, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|\mathfrak{C}u - \mathfrak{C}v\| \leq L_{\mathfrak{C}} \|u - v\|, \text{ où } L_{\mathfrak{C}} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| L_{h_i}}{\Gamma(\gamma_i + 1)}.$$

Ainsi, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ sont lipschitziens avec des constantes de Lipschitz $L_{\mathfrak{A}}$ et $L_{\mathfrak{C}}$ respectivement.

Assertion 2. $\mathfrak{D}$ est complètement continu.

Étape 1. Nous montrons que l'opérateur $\mathfrak{D} : \mathfrak{B}_R \rightarrow U$ est uniformément borné.

Soit $u \in \mathfrak{B}_R$, et $t \in [0, 1]$, nous prouvons que $\mathfrak{D}$ transforme les ensembles bornés en ensembles bornés dans U . D'abord, nous avons

$$|F_u(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-\tau)^{\beta-1} |g(\tau, u(\tau))| d\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} |g(\tau, u(\tau))| d\tau,$$

en utilisant (H_1) nous obtenons

$$\begin{aligned} |F_u(t)| &\leq \frac{\|\tilde{g}\| \psi(R) t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} d\tau + \frac{\|\tilde{g}\| \psi(R)}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} d\tau \\ &\leq \frac{\|\tilde{g}\| \psi(R)}{\Gamma(\beta+1)} t^{\beta-1} + \frac{\|\tilde{g}\| \psi(R)}{\Gamma(\beta+1)} t^{\beta} \\ &\leq 2 \frac{\|\tilde{g}\| \psi(R)}{\Gamma(\beta+1)}, \end{aligned}$$

ensuite, en utilisant (H_3) nous obtenons

$$\begin{aligned}
 |h_i(t, u(t))| &= |h_i(t, u(t)) - h_i(t, 0) + h_i(t, 0)| \\
 &\leq |h_i(t, u(t)) - h_i(t, 0)| + |h_i(t, 0)| \\
 &\leq L_{h_i}R + \|\tilde{h}_i\|,
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 |I_{e^-}^{\gamma_i} h_i(t, u(t))| &\leq \frac{1}{\Gamma(\gamma_i)} \int_0^t (t - \tau)^{\gamma_i-1} (L_{h_i}R + \|\tilde{h}_i\|) d\tau \\
 &= \frac{L_{h_i}R + \|\tilde{h}_i\|}{\Gamma(\gamma_i + 1)} t^{\gamma_i} \\
 &\leq \frac{L_{h_i}R + \|\tilde{h}_i\|}{\Gamma(\gamma_i + 1)},
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 |\mathfrak{D}u(t)| &\leq t^{\beta-1} \left| \frac{\xi_1 - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(., u(.))(1)}{\Psi(1, \xi_1)} \right| + |F_u(t)| \\
 &\leq \frac{|\xi_1| + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| (L_{h_i}R + \|\tilde{h}_i\|)}{\Gamma(\gamma_i + 1)}}{|\Psi(1, \xi_1)|} + 2 \frac{\|\tilde{g}\| \psi(R)}{\Gamma(\beta + 1)} \\
 &= \varrho < +\infty.
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|\mathfrak{D}u\| \leq \varrho < +\infty,$$

ce qui signifie que $\mathfrak{D}(\mathfrak{B}_R)$ est borné. Ainsi, $\mathfrak{D}$ est uniformément borné.

Étape 2. Nous démontrons la continuité de $\mathfrak{D}$ sur $\mathfrak{B}_R$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$ avec $u \in \mathfrak{B}_R$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, en utilisant le théorème de convergence dominé e de Lebesgue, nous

obtenons

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{u_n}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-\tau)^{\beta-1} g(\tau, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\tau)) d\tau \\
 &\quad - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} g(\tau, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\tau)) d\tau \\
 &= F_u(t),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{e^-}^{\gamma_i} h_i(., u_n(.))(1) &= \frac{1}{\Gamma(\gamma_i)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma_i-1} h_i(\tau, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\tau)) d\tau \\
 &= J_{0+}^{\gamma_i} h_i(., u(.))(1),
 \end{aligned}$$

ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{D}u_n(t) &= t^{\beta-1} \left(\frac{\xi_1 - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{e^-}^{\gamma_i} \lim_{n \rightarrow +\infty} h_i(., u_n(.))(1)}{\Psi(1, \xi_1)} \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{u_n}(t) \\
 &= \mathfrak{D}u(t),
 \end{aligned}$$

ce qui donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathfrak{D}u_n - \mathfrak{D}u\| = 0$. Par conséquent, $\mathfrak{D}$ est continu sur $\mathfrak{B}_R$.

Étape 3. Nous prouvons que $\mathfrak{D}(\mathfrak{B}_R)$ est équicontinu. Soit $t_1, t_2 \in [0, 1]$ avec $t_2 > t_1$. Alors,

pour tout $u \in \mathfrak{B}_R$, en utilisant (H_1) , nous obtenons

$$\begin{aligned}
|F_u(t_2) - F_u(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t_2^{\beta-1} (1-\tau)^{\beta-1} g(\tau, u(\tau)) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_2} (t_2 - \tau)^{\beta-1} g(\tau, u(\tau)) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t_1^{\beta-1} (1-\tau)^{\beta-1} g(\tau, u(\tau)) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} (t_1 - \tau)^{\beta-1} g(\tau, u(\tau)) d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (t_2^{\beta-1} - t_1^{\beta-1}) (1-\tau)^{\beta-1} |g(\tau, u(\tau))| d\tau \\
&\quad + \left| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} (t_1 - \tau)^{\beta-1} g(\tau, u(\tau)) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} (t_2 - \tau)^{\beta-1} g(\tau, u(\tau)) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \tau)^{\beta-1} g(\tau, u(\tau)) d\tau \right| \\
&\leq \frac{\|\tilde{g}\| \psi(R)}{\Gamma(\beta+1)} (t_2^{\beta-1} - t_1^{\beta-1}) + \frac{\|\tilde{g}\| \psi(R)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} (t_1 - \tau)^{\beta-1} - (t_2 - \tau)^{\beta-1} d\tau \\
&\quad + \frac{\|\tilde{g}\| \psi(R)}{\Gamma(\beta+1)} (t_2 - t_1)^\beta \\
&= \frac{\|\tilde{g}\| \psi(R)}{\Gamma(\beta+1)} (t_2^{\beta-1} - t_1^{\beta-1}) + \frac{\|\tilde{g}\| \psi(R)}{\Gamma(\beta+1)} (2(t_2 - t_1)^\beta - (t_2^\beta - t_1^\beta))
\end{aligned}$$

donc, $|F_u(t_2) - F_u(t_1)| \rightarrow 0$ lorsque $t_1 \rightarrow t_2$, alors,

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{D}u(t_2) - \mathfrak{D}u(t_1)| &\leq \left| t_2^{\beta-1} - t_1^{\beta-1} \right| \left| \frac{\xi_1 - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{e^-}^{\gamma_i} h_i(\cdot, u(\cdot))(1)}{\Psi(1, \xi_1)} \right| \\
&\quad + |F_u(t_2) - F_u(t_1)|,
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$|\mathfrak{D}u(t_2) - \mathfrak{D}u(t_1)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t_1 \rightarrow t_2.$$

Par conséquent, $\mathfrak{D}u(t)$ est équicontinu sur $[0, 1]$.

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli, $\mathfrak{D}(\mathfrak{B}_R)$ est relativement compact. Ainsi, $\mathfrak{D}$ est un opérateur compact, et par conséquent complètement continu.

Assertion 3. $L_{\mathfrak{A}}M_{\mathfrak{D}} + L_{\mathfrak{C}} < 1$, avec $M_{\mathfrak{D}} = \sup \{ \|\mathfrak{D}u\| : u \in \mathfrak{B}_R \}$.

On a $M_{\mathfrak{D}} = \|\mathfrak{D}(\mathfrak{B}_R)\| = \sup \{ \|\mathfrak{D}u\| : u \in \mathfrak{B}_R \} \leq \varrho$ tel que ϱ est donnée par (3.9). Alors,

$$L_{\mathfrak{A}}M_{\mathfrak{D}} + L_{\mathfrak{C}} \leq \varrho L_{\Psi} + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| L_{h_i}}{\Gamma(\gamma_i + 1)} < 1.$$

Assertion 4. $\mathfrak{A}u\mathfrak{D}v + \mathfrak{C}u = u \Rightarrow u \in \mathfrak{B}_R$ pour tous $v \in \mathfrak{B}_R$.

Soit $v \in \mathfrak{B}_R$, on a

$$\begin{aligned} \|u\| &\leq \|\mathfrak{A}u\| \cdot \|\mathfrak{D}v\| + \|\mathfrak{C}u\| \\ &= \sup_{t \in [0,1]} \left\{ |\Psi(t, u(t))| \cdot \left| t^{\beta-1} \left(\frac{\xi_1 - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{e^-}^{\gamma_i} h_i(\cdot, u(\cdot))(1)}{\Psi(1, \xi_1)} \right) + F_u(t) \right| + \left| \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{e^-}^{\gamma_i} h_i(t, u(t)) \right| \right\} \\ &\leq (L_{\Psi} \|u\| + \|\Psi\|) \varrho + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| (L_{h_i} \|u\| + \|\tilde{h}_i\|)}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \\ &= \|u\| \left(\varrho L_{\Psi} + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| L_{h_i}}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \right) + \|\Psi\| \varrho + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| \|\tilde{h}_i\|}{\Gamma(\gamma_i + 1)}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|u\| \leq \frac{\|\tilde{\Psi}\| \varrho + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| \|\tilde{h}_i\|}{\Gamma(\gamma_i + 1)}}{1 - \left(\varrho L_{\Psi} + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| L_{h_i}}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \right)} \leq R.$$

Par conséquent, $u \in \mathfrak{B}_R$.

Ceci vérifie que toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Dhage sont satisfaites.

Par conséquent, l'opérateur $\mathfrak{T}$ admet un point fixe dans $\mathfrak{B}_R$. Il en résulte que le problème aux limites fractionnaire de type Riemann-Liouville énoncé dans l'équation Eq (3.1) possède au moins une solution sur $[0, 1]$. Ceci achève la démonstration. $\square$

3.2 Unicité de la solution

Dans cette section, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution pour le problème suivant

$$\begin{cases} {}^{RL}\mathfrak{D}_{0+}^{\beta} \left(u(t) - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(t, u(t)) \right) = g(t, u(t)), & t \in [0, 1], \\ u(0) = \mathcal{D} \left(u(t) - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{0+}^{\gamma_i} h_i(t, u(t)) \right) \Big|_0 = 0, & u(1) = \zeta, \end{cases} \quad (3.13)$$

On peut exprimer de façon équivalente le problème (3.13) sous la forme

$$u(t) = \mathfrak{D}_1 u(t) + \mathfrak{E} u(t) := \mathfrak{T}_1 u(t), \quad (3.14)$$

tel que $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}$ est donnée par (3.11), avec $(\Psi(1, \xi_1) = 1)$ et $\mathfrak{E}$ est donnée par (3.12)

L'hypothèse suivante est fondamentale pour la suite de notre analyse

(H_4) Soient $g \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et il existe $L_g > 0$ tel que $|g(t, u_1) - g(t, u_2)| \leq L_g |u_1 - u_2|$, pour tous $(t, u_1, u_2) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $|g(t, 0)| \leq \Upsilon(t)$, tel que $\Upsilon(t)$ est une fonction positive et continue sur $[0, 1]$, avec $\sup_{0 \leq t \leq 1} \Upsilon(t) = \|\Upsilon\|$.

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses (H_3) et (H_4), le problème (3.13) possède une unique solution sur $[0, 1]$ lorsque*

$$\Delta < 1, \quad (3.15)$$

tel que

$$\Delta = 2 \left(\sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| L_{h_i}}{\Gamma(\gamma_i + 1)} + \frac{L_g}{\Gamma(\beta + 1)} \right). \quad (3.16)$$

Preuve Définir $\mathfrak{B}_r = \{u \in U, \text{ s.t. } \|u\| \leq r\}$, tel que $r > 0$ vérifiant

$$r \geq \frac{\overline{\Delta}}{1 - \Delta},$$

avec Δ est donnée par Eq (3.16) et

$$\overline{\Delta} = \frac{2 \|\Upsilon\|}{\Gamma(\beta + 1)} + |\xi_1| + 2 \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| \|\tilde{h}_i\|}{\Gamma(\gamma_i + 1)}. \quad (3.17)$$

On vérifie que $\mathfrak{T}_1(\mathfrak{B}_r) \subset \mathfrak{B}_r$. Pour $u \in \mathfrak{B}_r$ et $t \in [0, 1]$, on a

$$|\mathfrak{D}_1 u(t)| \leq 2 \frac{(L_g r + \|\Upsilon\|)}{\Gamma(\beta + 1)} + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| (L_{h_i} r + \|\tilde{h}_i\|)}{\Gamma(\gamma_i + 1)} + |\xi_1|,$$

Par ailleurs,

$$\|\mathfrak{E}u\| \leq \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| (L_{h_i} r + \|\tilde{h}_i\|)}{\Gamma(\gamma_i + 1)},$$

alors,

$$\begin{aligned} \|\Phi_1 u\| &\leq \|\mathfrak{D}_1 u\| + \|\mathfrak{E}u\| \\ &\leq 2 \frac{(L_g r + \|\Upsilon\|)}{\Gamma(\beta + 1)} + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| (L_{h_i} r + \|\tilde{h}_i\|)}{\Gamma(\gamma_i + 1)} + |\xi_1| + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| (L_{h_i} r + \|\tilde{h}_i\|)}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| L_{h_i}}{\Gamma(\gamma_i + 1)} + \frac{L_g}{\Gamma(\beta + 1)} \right) r + \frac{2 \|\Upsilon\|}{\Gamma(\beta + 1)} + |\xi_1| + 2 \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| \|\tilde{h}_i\|}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \\ &= \Delta r + \overline{\Delta} \\ &\leq r, \end{aligned}$$

ce qui donne que $\mathfrak{T}_1(\mathfrak{B}_r) \subset \mathfrak{B}_r$.

Prouvons maintenant le caractère contractant de $\mathfrak{T}_1$. Pour $u, v \in U$ et pour chaque $t \in [0, 1]$, on a d'abord

$$\begin{aligned} &|F_u(t) - F_v(t)| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-\tau)^{\beta-1} |g(\tau, u(\tau)) - g(\tau, v(\tau))| d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} |g(\tau, u(\tau)) - g(\tau, v(\tau))| d\tau, \end{aligned}$$

en utilisant (H_4) nous obtenons

$$\begin{aligned}
|F_u(t) - F_v(t)| &\leq \frac{L_g \|u - v\|}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-\tau)^{\beta-1} d\tau + \frac{L_g \|u - v\|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} d\tau \\
&= \frac{L_g \|u - v\|}{\Gamma(\beta+1)} t^{\beta-1} + \frac{L_g \|u - v\|}{\Gamma(\beta+1)} t^\beta \\
&\leq 2 \frac{L_g \|u - v\|}{\Gamma(\beta+1)},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{D}_1 u(t) - \mathfrak{D}_1 v(t)| &\leq t^{\beta-1} \left| \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{e^-}^{\gamma_i} h_i(., u(.))(1) - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i I_{e^-}^{\gamma_i} h_i(., v(.))(1) \right| \\
&\quad + |F_u(t) - F_v(t)| \\
&\leq t^{\beta-1} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| L_{h_i} \|u - v\|}{\Gamma(\gamma_i)} \int_0^1 (1-\tau)^{\gamma_i-1} d\tau + 2 \frac{L_g \|u - v\|}{\Gamma(\beta+1)} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| L_{h_i}}{\Gamma(\gamma_i+1)} + \frac{2L_g}{\Gamma(\beta+1)} \right) \|u - v\|.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|\Phi_1 u - \Phi_1 v\| &\leq \|\mathfrak{D}_1 u - \mathfrak{D}_1 v\| + \|\mathfrak{E}u - \mathfrak{E}v\| \\
&\leq 2 \left(\sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| L_{h_i}}{\Gamma(\gamma_i+1)} + \frac{L_g}{\Gamma(\beta+1)} \right) \|u - v\| \\
&= \Delta \|u - v\|.
\end{aligned}$$

De la condition (3.15), nous concluons que l'opérateur $\mathfrak{T}_1$ est une contraction. Ainsi, le problème (3.13) a une solution unique sur $[0, 1]$. La preuve est complète. $\square$

3.3 Exemple

Considérons l'équation différentielle fractionnaire hybride suivante

$$\begin{cases} {}^{RL}\mathfrak{D}_{0+}^{\beta} \left(\frac{u(t) - \sum_{i=1}^3 \frac{3(-1)^i}{2} I_{0+}^{\frac{2i-1}{4}} \frac{\cos|u(t)|}{t+100i}}{\frac{1}{100} \sqrt{(t+|u(t)|^2)}} \right) = \frac{\varepsilon(1-t) \sin|u(t)|}{1+|u(t)|}, t \in [0, 1], \\ u(0) = \mathcal{D} \left(\frac{u(t) - \sum_{i=1}^3 \frac{3(-1)^i}{2} I_{0+}^{\frac{2i-1}{4}} \frac{\cos|u(t)|}{t+100i}}{\frac{1}{100} \sqrt{(t+|u(t)|^2)}} \right) \Big|_0 = 0, \quad u(1) = 1, \end{cases} \quad (3.18)$$

donc $\beta = \frac{5}{2}$, $\gamma_i = \frac{2i-1}{4}$, $\lambda_i = \frac{i}{2}$, $h_i(t, u(t)) = \frac{\cos|u(t)|}{t+100i}$, ($i \in \{1, 2, 3\}$), $g(t, u(t)) = \varepsilon \frac{(1-t) \sin|u(t)|}{1+|u(t)|}$, $\zeta = 1$, $\Psi(t, u(t)) = \frac{1}{100} \sqrt{(t+|u(t)|^2)}$ et $\Psi(1, 1) = \frac{\sqrt{2}}{100}$.

On peut établir que

$$\begin{aligned} |h_i(t, u_1) - h_i(t, u_2)| &\leq \frac{1}{t+100i} |u_1 - u_2|, \quad i = 1, \dots, 3, \\ &\leq \frac{1}{100i} |u_1 - u_2| \quad i = 1, \dots, 3, \end{aligned}$$

$$|h_i(t, 0)| \leq \frac{1}{100i}, \quad i = 1, \dots, 4,$$

$$|g(t, u(t))| \leq \varepsilon(1-t) \frac{\|u\|}{1+\|u\|}.$$

Ainsi, pour tout $(t, \lambda) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |\partial_u g(t, u)| &= |\varepsilon| (1-t) \left| \frac{(1+|u|) \cos|u| - \sin|u|}{(1+|u|)^2} \right| \\ &\leq 2|\varepsilon|, \end{aligned}$$

ce qui donne $L_{h_i} = \frac{1}{10i} = \|\tilde{h}_i\|$, ($i = 1, \dots, 3$), $L_g = 2|\varepsilon|$, pour $\varepsilon = 1$, on obtient $\|\tilde{g}\| = 1$ et $\psi(\|u\|) = \frac{\|u\|}{1+\|u\|}$.

D'autre part on a

$$|\Psi(t, u_1) - \Psi(t, u_2)| \leq \frac{1}{100} |u_1 - u_2| \quad \text{and} \quad |\Psi(t, 0)| \leq \frac{1}{100},$$

c.-à-d., $L_{\Psi} = \frac{1}{100}$ et $\|\tilde{\Psi}\| = \frac{1}{100}$.

Pour illustrer le Théorème 3.1.1, nous utilisons un programme Python qui nous permet de constater que les conditions (3.7) et (3.8) sont satisfaites pour un nombre réel $R \geq 15.791483$.

Remarque 3.3.1 Si $R = 15.791483$; On obtient $\varrho = 89.525644$,

$$\frac{\|\tilde{\Psi}\| \varrho + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| \|\tilde{h}_i\|}{\Gamma(\gamma_i+1)}}{1 - \left(\varrho L_{\Psi} + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| L_{h_i}}{\Gamma(\gamma_i+1)} \right)} = 10.188953 \leq R,$$

$$\text{et } \varrho L_{\Psi} + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{|\lambda_i| L_{h_i}}{\Gamma(\gamma_i+1)} = 0.910626 < 1.$$

Toutes les hypothèses du Théorème 3.1.1 étant vérifiées, on en déduit que le problème (3.18) possède au moins une solution définie sur $[0, 1]$.

Pour illustrer le Théorème 3.2.1, nous considérons la fonction $\Psi(t, u(t)) = 1$ pour tout $(t, u(t)) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

À l'aide de ces paramètres, nous obtenons :

$$\Delta = 0.632542 < 1.$$

D'après le Théorème 3.2.1, le problème (3.18) a une solution unique.

Chapitre 4

Système d'équations intégrro-différentielles fractionnaires de Volterra-Fredholm aux limites non locales non séparées

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication dans un journal international (voir [64]).

Inspiré par les développements récents des équations integro-différentielles de Volterra-Fredholm [7, 18, 28, 42], nous étudions dans ce chapitre l'existence et l'unicité des solutions pour une nouvelle classe de problèmes aux limites d'un système d'équations non-linéaires généralisées de Volterra-Fredholm d'ordre fractionnaire avec des conditions aux limites :

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha_i, \psi_i} x_i(t) = \mathcal{F}_{i, x_1, x_2}(t), \quad i = 1, 2, \quad i - 1 < \alpha_i \leq i, \quad t \in [a, b], \quad (4.1)$$

$$x_1(a) = \mu x_2(b), \quad x_1(b) = \nu x_2(\eta), \quad x_2(a) = 0, \quad a < \eta < b, \quad (4.2)$$

avec

$$\mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(t) = \varphi_i(t) + \sum_{j=1}^2 \lambda_{i,j} \int_a^{(2-j)t+(j-1)b} K_{i,j}(t, \tau) F_{i,j}(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau)) d\tau, \quad (4.3)$$

ou $-\infty < a < b < +\infty$; $\psi_i \in C^n[a, b]$ est une fonction croissante tel que $\psi'_i(t) \neq 0$, $i = 1, 2$ pour tous $t \in [a, b]$; ${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha_i, \psi_i}$ désigne la dérivée fractionnaire de Liouville-Caputo par rapport à une autre fonction ψ_i d'ordre α_i ; $\varphi_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $K_{i,j} : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_{i,j} : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues données et $\mu, \nu \in \mathbb{R}^*$, $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$, pour tous $i, j \in \{1, 2\}$. Les résultats principaux du problème (4.1)-(4.2) sont établis en s'appuyant sur le théorème du point fixe de Banach, le théorème du point fixe de Krasnoselskii et le théorème de Leray-Schauder alternative. Des exemples concrets sont fournis pour mettre en évidence ces résultats.

Certaines dérivées fractionnaires connues sont des cas particuliers de la dérivée fractionnaire de Liouville-Caputo par rapport à une autre fonction ψ_i . Ainsi, nous pouvons obtenir les cas suivants

Cas 1. Si $\psi_i(t) = t$ pour tous $t \in [a, b]$, $i \in \{1, 2\}$, le système (4.1) Réduit à un système d'équations intégrô-différentielles de Volterra-Fredholm (EIDVFs) impliquant les dérivées fractionnaires usuelles de Liouville-Caputo

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha_i} x_i(t) = \mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(t), \quad i = 1, 2, \quad i - 1 < \alpha_i \leq i, \quad t \in [a, b].$$

Cas 2. Si $\psi_i(t) = \ln t$, pour tous $t \in [a, b]$, $a > 0$, $i \in \{1, 2\}$, le système (4.1) Réduit à un système d'(EIDVFs) impliquant les dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard

$${}^{CH}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha_i} x_i(t) = \mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(t), \quad i = 1, 2, \quad i - 1 < \alpha_i \leq i, \quad t \in [a, b].$$

Cas 3. Si $\psi_i(t) = \frac{t^r}{r}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$, pour tous $t \in [a, b]$, $i \in \{1, 2\}$, le système (4.1) Réduit à un système d'(EIDVFs) impliquant les dérivées fractionnaires de Caputo-Katugampola

$${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha_i, \frac{t^d}{d}} x_i(t) = \mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(t), \quad i = 1, 2, \quad i - 1 < \alpha_i \leq i, \quad t \in [a, b].$$

4.1 L'équation intégrale associée au problème

Le premier résultat porte sur la variable linéaire du problème (4.1) et joue un rôle déterminant dans l'obtention des résultats principaux.

Lemme 4.1.1 Soient $X_i \in C([a, b], \mathbb{R})$, $i - 1 < \alpha_i \leq i$, $i = 1, 2$, et

$$\Delta = \mu(\psi_2(b) - \psi_2(a)) - \nu(\psi_2(\eta) - \psi_2(a)) \neq 0. \quad (4.4)$$

Le système linéaire

$$\begin{cases} {}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha_i, \psi_i} x_i(t) = X_i(t), & t \in [a, b], \quad i = 1, 2, \\ x_1(a) = \mu x_2(b), \quad x_1(b) = \nu x_2(\eta), \quad x_2(a) = 0, \quad a < \eta < b, \end{cases} \quad (4.5)$$

est équivalent au système des équations intégrales

$$x_i(t) = I_{a+}^{\alpha_i, \psi_i} X_i(t) + \Theta_i(t) \left\{ \nu I_{a+}^{\alpha_2, \psi_2} X_2(\eta) - I_{a+}^{\alpha_1, \psi_1} X_1(b) - \xi_i I_{a+}^{\alpha_2, \psi_2} X_2(b) \right\}, \quad i = 1, 2, \quad (4.6)$$

tel que

$$\Theta_i(t) = [(2-i)\mu + (i-1)] \frac{\psi_2((i-1)t + (2-i)b) - \psi_2(a)}{\Delta}, \quad (4.7)$$

et

$$\xi_i = (i-1)\mu + (2-i) \nu \frac{\psi_2(\eta) - \psi_2(a)}{\psi_2(b) - \psi_2(a)}. \quad (4.8)$$

Preuve Par application de l'opérateur $I_{a+}^{\alpha_i, \psi_i}$ sur les deux cotés des équations différentielles dans (4.5), on obtient

$$x_i(t) = I_{a+}^{\alpha_i, \psi_i} X_i(t) + [(2-i) + (i-1)(\psi_2(t) - \psi_2(a))] c_i + (i-1)c_3, \quad i = 1, 2, \quad (4.9)$$

tel que $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Par la condition aux limites $x_2(a) = 0$, nous obtenons $c_3 = 0$.

Par utiliser les conditions aux limites $x_1(a) = \mu x_2(b)$ et $x_1(b) = \nu x_2(\eta)$ On arrive à

$$\begin{cases} c_1 = \mu I_{a+}^{\alpha_2, \psi_2} X_2(b) + \mu c_2 (\psi_2(b) - \psi_2(a)), \\ I_{a+}^{\alpha_1, \psi_1} X_1(b) + c_1 = \nu I_{a+}^{\alpha_2, \psi_2} X_2(\eta) + \nu c_2 (\psi_2(\eta) - \psi_2(a)). \end{cases} \quad (4.10)$$

Par résoudre le système précédent, on trouve que :

$$c_i = \frac{(i-1) + (2-i)\mu(\psi_2(b) - \psi_2(a))}{\Delta} \left[\nu I_{a+}^{\alpha_2, \psi_2} X_2(\eta) - I_{a+}^{\alpha_1, \psi_1} X_1(b) - \xi_i I_{a+}^{\alpha_2, \psi_2} X_2(b) \right], \quad i = 1, 2. \quad (4.11)$$

En substituant les valeurs de c_1, c_2 et c_3 dans (4.9), nous obtenons le système des équations intégrales (4.6).

Réciproquement, si x_i est donné par (4.6), alors x_i satisfait le système présenté dans (4.5). Cela peut être prouvé facilement en appliquant ${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha_i, \psi_i}$ ($i = 1, 2$) des deux côtés de (4.6) pour obtenir les équations différentielles ${}^{LC}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha_i, \psi_i} x_i(t) = X_i(t)$, et en substituant t par a, b (pour $i = 1, 2$) et η (avec $i = 2$) pour obtenir les conditions aux limites de (4.5), ce qui achève la preuve. $\square$

Soit $\Upsilon = C([a, b], \mathbb{R})$ un espace de Banach associé à la norme $\|x\|_{\Upsilon} = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$. Alors, l'espace $\Upsilon \times \Upsilon = \{(x_1, x_2), x_i \in \Upsilon, i = 1, 2\}$ associé à la norme $\|(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} = \|x_1\|_{\Upsilon} + \|x_2\|_{\Upsilon}$ est un espace de Banach.

Maintenant, on définit l'opérateur $O : \Upsilon \times \Upsilon \longrightarrow \Upsilon \times \Upsilon$ par

$$O(x_1, x_2)(t) = (O_1(x_1, x_2)(t), O_2(x_1, x_2)(t)), \quad (4.12)$$

avec

$$\begin{aligned}
O_i(x_1, x_2)(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^t \psi'_i(s) (\psi_i(t) - \psi_i(s))^{\alpha_i-1} \mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(s) ds \\
& + \Theta_i(t) \left\{ \frac{\nu}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^\eta \psi'_2(s) (\psi_2(\eta) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} \mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s) ds \right. \\
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi'_1(s) (\psi_1(b) - \psi_1(s))^{\alpha_1-1} \mathcal{F}_{1,x_1,x_2}(s) ds \\
& \left. - \frac{\xi_i}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^b \psi'_2(s) (\psi_2(b) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} \mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s) ds \right\}, \quad i = 1, 2. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Remarquez que, d'après le lemme 4.1.1, les point fixes de l'opérateur O sont des solutions du système (4.1).

Prenons en compte les conditions suivantes.

(H_1) $\exists \gamma_{i,j}, \bar{\gamma}_{i,j} > 0, i, j \in \{1, 2\}$ tels que

$$|F_{i,j}(t, y_1, y_2)| \leq \gamma_{i,j} + \bar{\gamma}_{i,j} (|y_1| + |y_2|), \quad (4.14)$$

pour tous $(t, y_1, y_2) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(H_2) $\exists \omega_{i,j} \in \mathbb{R}_+^*, i, j \in \{1, 2\}$, tels que

$$|F_{i,j}(t, y_1, y_2) - F_{i,j}(t, \bar{y}_1, \bar{y}_2)| \leq \omega_{i,j} (|y_1 - \bar{y}_1| + |y_2 - \bar{y}_2|),$$

pour tous $(t, y_1, y_2), (t, \bar{y}_1, \bar{y}_2) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(H_3) $\exists \varrho_{i,j} \in C([a, b], \mathbb{R}^+), i, j \in \{1, 2\}$ de sorte que

$$|F_{i,j}(t, y_1, y_2)| \leq \varrho_{i,j}(t), \quad \forall (t, y_1, y_2) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (4.15)$$

Pour plus de commodité, nous mettons :

$$\widehat{\psi}_i(t) = \frac{(\psi_i(t) - \psi_i(a))^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}, \quad (4.16)$$

$$\overline{W}_i = (b - a) \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| k_{i,j} \overline{\gamma}_{i,j}, \quad (4.17)$$

$$W_i = (b - a) \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| k_{i,j} \omega_{i,j}, \quad (4.18)$$

$$\overline{S}_i = \|\varphi_i\|_{\Upsilon} + (b - a) \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| k_{i,j} \gamma_{i,j}, \quad (4.19)$$

$$S_i = \|\varphi_i\|_{\Upsilon} + (b - a) \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| k_{i,j} f_{i,j}, \quad (4.20)$$

$$N_i = \|\varphi_i\|_{\Upsilon} + (b - a) \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| k_{i,j} \|\varrho_{i,j}\|_{\Upsilon}, \quad (4.21)$$

$$\overline{\theta}_i(t) = \widehat{\psi}_i(t) \overline{W}_i + |\Theta_i(t)| \left\{ \widehat{\psi}_1(b) \overline{W}_1 + \left(|\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) \right) \overline{W}_2 \right\}, \quad (4.22)$$

$$\theta_i(t) = \widehat{\psi}_i(t) W_i + |\Theta_i(t)| \left\{ \widehat{\psi}_1(b) W_1 + \left(|\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) \right) W_2 \right\}, \quad (4.23)$$

$$\overline{\delta}_i(t) = \widehat{\psi}_i(t) \overline{S}_i + |\Theta_i(t)| \left\{ \widehat{\psi}_1(b) \overline{S}_1 + \left(|\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) \right) \overline{S}_2 \right\}, \quad (4.24)$$

$$\delta_i(t) = \widehat{\psi}_i(t) S_i + |\Theta_i(t)| \left\{ \widehat{\psi}_1(b) S_1 + \left(|\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) \right) S_2 \right\}, \quad (4.25)$$

avec

$$\sup_{t,s \in [a,b]} |K_{i,j}(t,s)| = k_{i,j} < \infty, \quad (4.26)$$

et

$$\sup_{t \in [a,b]} |F_{i,j}(t, 0, 0)| = f_{i,j} < \infty, \quad (4.27)$$

pour $i, j \in \{1, 2\}$.

Dans l'analyse qui suit, on utilise l'estimation suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^t \psi'_i(s) (\psi_i(t) - \psi_i(s))^{\alpha_i-1} ds = \widehat{\psi}_i(t) \leq \widehat{\psi}_i(b); \quad (4.28)$$

Soient $(x_1, x_2) \in \Upsilon \times \Upsilon$ et $t \in [a, b]$. En utilisant (H_1) avec la formule (4.26), on obtient

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(t)| &\leq |\varphi_i(t)| + \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| \int_a^{(2-j)t+(j-1)b} |K_{i,j}(s, \tau)| |F_{i,j}(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau))| d\tau \\
&\leq \|\varphi_i\|_{\Upsilon} + \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| k_{i,j} (\gamma_{i,j} + \bar{\gamma}_{i,j} (\|x_1\|_{\Upsilon} + \|x_2\|_{\Upsilon})) \int_a^{(2-j)t+(j-1)b} d\tau \\
&\leq \|\varphi_i\|_{\Upsilon} + (b-a) \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| k_{i,j} (\gamma_{i,j} + \bar{\gamma}_{i,j} \|(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon}) \\
&= \|(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \bar{W}_i + \bar{S}_i;
\end{aligned} \tag{4.29}$$

De la même manière, en utilisant (H_3) avec la formule (4.26), on obtient

$$|\mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(t)| \leq \|\varphi_i\|_{\Upsilon} + (b-a) \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| k_{i,j} \|\varrho_{i,j}\|_{\Upsilon} = N_i; \tag{4.30}$$

En se servant de l'hypothèse (H_2) avec les formules (4.26) et (4.27), on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(t)| &\leq |\varphi_i(t)| + \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| \int_a^{(2-j)t+(j-1)b} |K_{i,j}(s, \tau)| |F_{i,j}(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau))| d\tau \\
&\leq \|\varphi_i\|_{\Upsilon} + \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| k_{i,j} \int_a^{(2-j)t+(j-1)b} (|F_{i,j}(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau)) - F_{i,j}(\tau, 0, 0)| \\
&\quad + |F_{i,j}(\tau, 0, 0)|) d\tau \\
&\leq \|\varphi_i\|_{\Upsilon} + \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| k_{i,j} \int_a^{(2-j)t+(j-1)b} (\omega_{i,j} (\|x_1\|_{\Upsilon} + \|x_2\|_{\Upsilon}) + f_{i,j}) d\tau \\
&\leq \|\varphi_i\|_{\Upsilon} + (b-a) \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| k_{i,j} (\omega_{i,j} (\|x_1\|_{\Upsilon} + \|x_2\|_{\Upsilon}) + f_{i,j}) \\
&= \|(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} W_i + S_i,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

tels que $W_i, S_i, i = 1, 2$ sont données par (4.18) et (4.20), respectivement ; de même manière, on obtient

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(t) - \mathcal{F}_{i,\bar{x}_1,\bar{x}_2}(t)| &\leq W_i (\|x_1 - \bar{x}_1\|_{\Upsilon} + \|x_2 - \bar{x}_2\|_{\Upsilon}) \\
&= W_i \|(x_1, x_2) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon},
\end{aligned} \tag{4.32}$$

pour tous $(x_1, x_2), (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \Upsilon \times \Upsilon$ et pour tout $t \in [a, b]$.

4.2 Résultats d'existence

Dans cette section, on donne la preuve d'existence des solutions du système (4.1), par appliquée deux théorèmes. La première, dépend en l'alternative de Leray-Schauder [27], par contre la deuxième utilise le point fixe de Krasnosel'skii [13].

Théorème 4.2.1 *Supposons que la condition (H_1) soit vérifiée et*

$$\bar{\theta}_1(b) + \bar{\theta}_2(b) < 1,$$

avec $\bar{\theta}_i, i = 1, 2$ sont définis dans (4.22). Alors, le système (4.1) admet au moins une solution.

Preuve En premier, on démontre que l'opérateur O est complètement continue. Par la continuité de $F_{i,j}$ et $K_{i,j}$, l'opérateur O is continue pour tout $(x_1, x_2) \in \Upsilon \times \Upsilon$.

Soit $\Lambda \subset \Upsilon \times \Upsilon$ non borné. Donc il existe un constant positive $\zeta > 0$ tel que $\|(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \leq \zeta$ pour tout $(x_1, x_2) \in \Lambda$. Maintenant, soit $(x_1, x_2) \in \Lambda$, par (4.29) on a

$$|\mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(t)| \leq \zeta \bar{W}_i + \bar{S}_i. \quad (4.33)$$

Soit $(x_1, x_2) \in \Lambda$ et $t \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} |O_i(x_1, x_2)(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^t \psi'_i(s) (\psi_i(t) - \psi_i(s))^{\alpha_i-1} |\mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(s)| ds \\ & + |\Theta_i(t)| \left\{ \frac{|\nu|}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^\eta \psi'_2(s) (\psi_2(\eta) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} |\mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s)| ds \right. \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi'_1(s) (\psi_1(b) - \psi_1(s))^{\alpha_1-1} |\mathcal{F}_{1,x_1,x_2}(s)| ds \\ & \left. + \frac{|\xi_i|}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^b \psi'_2(s) (\psi_2(b) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} |\mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s)| ds \right\}, \end{aligned}$$

en utilisant les estimations (4.28) et (4.33) on obtient

$$\begin{aligned} |O_i(x_1, x_2)(t)| &\leq \widehat{\psi}_i(b) (\zeta \overline{W}_i + \overline{S}_i) + |\Theta_i(b)| \left\{ |\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) (\zeta \overline{W}_2 + \overline{S}_2) \right. \\ &\quad \left. + \widehat{\psi}_1(b) (\zeta \overline{W}_1 + \overline{S}_1) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) (\zeta \overline{W}_2 + \overline{S}_2) \right\} \\ &= \overline{\theta}_i(b) \zeta + \overline{\delta}_i(b), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|O_i(x_1, x_2)\|_{\Upsilon} \leq \overline{\theta}_i(b) \zeta + \overline{\delta}_i(b),$$

par conséquent

$$\|O(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \leq \sum_{i=1}^2 \overline{\theta}_i(b) \zeta + \overline{\delta}_i(b),$$

alors, l'opérateur O is uniformément borné.

Ensuite, on détermine que l'opérateur O est équicontinue. Pour tous $t_1, t_2 \in [a, b]$ avec $t_1 < t_2$

on a

$$\begin{aligned} &|O_i(x_1, x_2)(t_1) - O_i(x_1, x_2)(t_2)| \\ \leq &\left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{t_1} [\psi'_i(s)(\psi_i(t_1) - \psi_i(s))^{\alpha_i-1} - \psi'_i(s)(\psi_i(t_2) - \psi_i(s))^{\alpha_i-1}] \mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(s) ds \right. \\ &\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_{t_1}^{t_2} \psi'_i(s)(\psi_i(t_2) - \psi_i(s))^{\alpha_i-1} \mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(s) ds \right| \\ &+ |\Theta_i(t_1) - \Theta_i(t_2)| \left| \frac{\nu}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^\eta \psi'_2(s)(\psi_2(\eta) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} \mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s) ds \right. \\ &\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi'_1(s)(\psi_1(b) - \psi_1(s))^{\alpha_1-1} \mathcal{F}_{1,x_1,x_2}(s) ds \right. \\ &\left. - \frac{\xi_i}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^b \psi'_2(s)(\psi_2(b) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} \mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s) ds \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{t_1} |\psi'_i(s)(\psi_i(t_1) - \psi_i(s))^{\alpha_i-1} - \psi'_i(s)(\psi_i(t_2) - \psi_i(s))^{\alpha_i-1}| |\mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(s)| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_{t_1}^{t_2} |\psi'_i(s)(\psi_i(t_2) - \psi_i(s))^{\alpha_i-1}| |\mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(s)| ds \\
&\quad + |\Theta_i(t_1) - \Theta_i(t_2)| \left\{ \frac{|\nu|}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^\eta |\psi'_2(s)(\psi_2(\eta) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1}| |\mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s)| ds \right. \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b |\psi'_1(s)(\psi_1(b) - \psi_1(s))^{\alpha_1-1}| |\mathcal{F}_{1,x_1,x_2}(s)| ds \\
&\quad \left. + \frac{|\xi_i|}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^b |\psi'_2(s)(\psi_2(b) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1}| |\mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s)| ds \right\},
\end{aligned}$$

en utilisant l'estimation (4.33) on obtient

$$\begin{aligned}
&|O_i(x_1, x_2)(t_1) - O_i(x_1, x_2)(t_2)| \\
&\leq (\zeta \overline{W}_i + \overline{S}_i) \left[\left| \widehat{\psi}_i(t_1) - \widehat{\psi}_i(t_2) \right| + \frac{|\psi_i(t_2) - \psi_i(t_1)|^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \right] \\
&\quad + |\Theta_i(t_1) - \Theta_i(t_2)| \left\{ \widehat{\psi}_1(b) (\zeta \overline{W}_1 + \overline{S}_1) + \left(|\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) \right) (\zeta \overline{W}_2 + \overline{S}_2) \right\},
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} |O_i(x_1, x_2)(t_1) - O_i(x_1, x_2)(t_2)| = 0, \quad i = 1, 2,$$

ce qui signifie que O est équicontinue indépendamment de $(x_1, x_2) \in \Lambda$, donc l'opérateur O est complètement continue.

Enfin, on démontre que l'ensemble $\mathcal{A} = \{(x_1, x_2) \in \Upsilon \times \Upsilon : (x_1, x_2) = \epsilon O(x_1, x_2), 0 \leq \epsilon \leq 1\}$ est borné. Soit $(x_1, x_2) \in \mathcal{A}$, avec $(x_1, x_2) = \epsilon O(x_1, x_2)$. Pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$x_i(t) = \epsilon O_i(x_1, x_2), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
|x_i(t)| &\leq \widehat{\psi}_i(b) (\|(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \overline{W}_i + \overline{S}_i) + \Theta_i(b) \left\{ |\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) (\|(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \overline{W}_2 + \overline{S}_2) \right. \\
&\quad \left. + \widehat{\psi}_1(b) (\|(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \overline{W}_1 + \overline{S}_1) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) (\|(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \overline{W}_2 + \overline{S}_2) \right\} \\
&= \overline{\theta}_i(b) \|(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} + \overline{\delta}_i(b),
\end{aligned}$$

alors

$$\|x_i\|_{\Upsilon} \leq \bar{\theta}_i(b) \|(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} + \bar{\delta}_i(b),$$

ce qui donne

$$\sum_{i=1}^2 \|x_i\|_{\Upsilon} \leq \sum_{i=1}^2 (\bar{\theta}_i(b) \|(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} + \bar{\delta}_i(b)).$$

Par conséquent

$$\|(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \leq \frac{\bar{\delta}_1(b) + \bar{\delta}_2(b)}{1 - (\bar{\theta}_1(b) + \bar{\theta}_2(b))},$$

pour tout $t \in [a, b]$, avec $\bar{\theta}_i, \bar{\delta}_i, i = 1, 2$ sont définis en (4.22) et (4.24) respectivement, ce qui prouve que $\mathcal{A}$ est borné. Donc par l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, l'opérateur O admet au moins un point fixe. Alors le problème (4.1) admet au moins une solution. $\square$

Théorème 4.2.2 *Supposant que les conditions (H_2) et (H_3) sont satisfaites et*

$$\sum_{i=1}^2 \widehat{\psi}_i(b) W_i < 1,$$

avec $\widehat{\psi}_i, W_i$ sont définis en (4.18) et (4.16) respectivement. Alors, le problème (4.1) a au moins une solution.

Preuve Considérez le sous-ensemble $B_R = \{(x_1, x_2) \in \Upsilon \times \Upsilon, \|(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \leq R\}$ avec

$$R \geq \sum_{i=1}^2 \widehat{\psi}_i(b) N_i + |\Theta_i(b)| \left\{ \widehat{\psi}_1(b) N_1 + \left(|\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) \right) N_2 \right\},$$

on définit les opérateurs $T : \Upsilon \times \Upsilon \longrightarrow \Upsilon \times \Upsilon$ et $Q : B_R \longrightarrow \Upsilon \times \Upsilon$ par

$$T(x_1, x_2)(t) = (T_1(x_1, x_2)(t), T_2(x_1, x_2)(t)), \quad Q(x_1, x_2)(t) = (Q_1(x_1, x_2)(t), Q_2(x_1, x_2)(t)),$$

avec

$$\begin{aligned}
T_i(x_1, x_2)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^t \psi'_i(s) (\psi_i(t) - \psi_i(s))^{\alpha_i-1} \mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(s) ds, \quad i = 1, 2, \\
Q_i(x_1, x_2)(t) &= \Theta_i(t) \left\{ \frac{\nu}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^\eta \psi'_2(s) (\psi_2(\eta) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} \mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s) ds \right. \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi'_1(s) (\psi_1(b) - \psi_1(s))^{\alpha_1-1} \mathcal{F}_{1,x_1,x_2}(s) ds, \\
&\quad \left. - \frac{\xi_i}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^b \psi'_2(s) (\psi_2(b) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} \mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s) ds \right\}, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Clairement, $O(x_1, x_2)(t) = T(x_1, x_2)(t) + Q(x_1, x_2)(t)$. Dans les étapes suivantes, nous prouvons que les hypothèses du Théorème 1.4.5 sont satisfaites.

Étape 1. L'opérateur T est une application contractante. Pour $(x_1, x_2), (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \Upsilon \times \Upsilon$, on a

$$|T_i(x_1, x_2)(t) - T_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^t \psi'_i(s) (\psi_i(t) - \psi_i(s))^{\alpha_i-1} |\mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(s) - \mathcal{F}_{i,\bar{x}_1,\bar{x}_2}(s)| ds,$$

par utilisation des estimations (4.28) et (4.32) on trouve

$$\begin{aligned}
|T_i(x_1, x_2)(t) - T_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(t)| &\leq \widehat{\psi}_i(t) W_i \|(x_1, x_2) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \\
&\leq \widehat{\psi}_i(b) W_i \|(x_1, x_2) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon},
\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\|T(x_1, x_2) - T(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \leq \sum_{i=1}^2 \widehat{\psi}_i(b) W_i \|(x_1, x_2) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon}.$$

Alors, T est une application contractante.

Étape 2. On démontre que Q est complètement continue sur B_R , puisque $F_{2,j}$, $K_{2,j}$, $j = 1, 2$ sont continues, donc Q est continue, de plus on a

$$\begin{aligned} |Q_i(x_1, x_2)(t)| \leq & |\Theta_i(t)| \left\{ \frac{|\nu|}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^\eta \psi'_2(s)(\psi_2(\eta) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} |\mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s)| ds \right. \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi'_1(s)(\psi_1(b) - \psi_1(s))^{\alpha_1-1} |\mathcal{F}_{1,x_1,x_2}(s)| ds \\ & \left. + \frac{|\xi_i|}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^b \psi'_2(s)(\psi_2(b) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} |\mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s)| ds \right\}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Par utilisation des estimations (4.28) et (4.30), on trouve

$$\begin{aligned} |Q_i(x_1, x_2)(t)| & \leq |\Theta_i(t)| \left\{ \widehat{\psi}_1(b) N_1 + \left(|\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) \right) N_2 \right\} \\ & \leq |\Theta_i(b)| \left\{ \widehat{\psi}_1(b) N_1 + \left(|\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) \right) N_2 \right\}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|Q(x_1, x_2)\|_{\mathcal{T} \times \mathcal{T}} \leq \sum_{i=1}^2 |\Theta_i(b)| \left\{ \widehat{\psi}_1(b) N_1 + \left(|\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) \right) N_2 \right\}. \quad (4.34)$$

D'où, l'opérateur Q est uniformément borné sur B_R .

Puis, on prouve que Q est équicontinue. Pour $a < t_1 < t_2 < b$ on a

$$\begin{aligned} & |Q_i(x_1, x_2)(t_1) - Q_i(x_1, x_2)(t_2)| \\ \leq & |\Theta_i(t_1) - \Theta_i(t_2)| \left\{ \frac{|\nu|}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^\eta \psi'_2(s)(\psi_2(\eta) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} N_2 ds \right. \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi'_1(s)(\psi_1(b) - \psi_1(s))^{\alpha_1-1} N_1 ds \\ & \left. + \frac{|\xi_i|}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^b \psi'_2(s)(\psi_2(b) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} N_2 ds \right\} \\ \leq & |\Theta_i(t_1) - \Theta_i(t_2)| \left\{ \widehat{\psi}_1(b) N_1 + \left(|\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) \right) N_2 \right\}, \end{aligned}$$

puisque $\lim_{t_1 \rightarrow t_2} |\Theta_i(t_1) - \Theta_i(t_2)| = 0$, alors

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} |Q_i(x_1, x_2)(t_1) - Q_i(x_1, x_2)(t_2)| = 0. \quad (4.35)$$

Cela implique que Q est équicontinue. Par conséquent, d'après le théorème d'Arzelà–Ascoli, Q est compact sur B_R , et donc l'opérateur Q est complètement continu.

Étape 3. Nous démontrons que la troisième condition du Théorème 1.4.5 est satisfaite. Pour tous $(x_1, x_2) \in \Upsilon \times \Upsilon$, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in B_R$, on a par l'estimations (4.28) et (4.30)

$$\begin{aligned} \|(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} &= \|T(x_1, x_2) + Q(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} |T(x_1, x_2)(t) + Q(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(t)| \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} \sum_{i=1}^2 |T_i(x_1, x_2)(t) + Q_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(t)| \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} \sum_{i=1}^2 \left\{ \widehat{\psi}_i(t) N_i + |\Theta_i(t)| \left\{ \widehat{\psi}_1(t) N_1 + \left(|\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) \right) N_2 \right\} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \widehat{\psi}_i(b) N_i + |\Theta_i(b)| \left\{ \widehat{\psi}_1(b) N_1 + \left(|\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) \right) N_2 \right\} \right\} \\ &= R. \end{aligned}$$

Donc $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in B_R$.

D'après les étapes 1, 2 et 3, les hypothèses du Théorème 1.4.5 sont vérifiées. Par conséquent, le problème (4.1) admet au moins une solution. $\square$

4.3 Résultat d'unicité

Dans cette section, nous présentons le résultat d'existence et d'unicité de la solution du système (4.1) via le principe de la contraction de Banach.

Théorème 4.3.1 *Supposons que la condition (H_2) soit satisfaite. Donc, le système (4.1)*

admet une solution unique si

$$\theta_1(b) + \theta_2(b) < 1, \quad (4.36)$$

tel que θ_i , $i = 1, 2$ sont définis par (4.23).

Preuve On choisi $R > 0$ de sorte que

$$R \geq \frac{\delta_1(b) + \delta_2(b)}{1 - (\theta_1(b) + \theta_2(b))},$$

avec θ_i , δ_i , $i = 1, 2$ sont définis dans (4.23) et (4.25), respectivement.

D'abord on démontre que $O(B_R) \subset B_R$, avec $B_R = \{(x_1, x_2) \in \Upsilon \times \Upsilon \text{ tel que } \|(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \leq R\}$.

Soit $(x_1, x_2) \in B_R$, pour tout $t \in [a, b]$ on a

$$\begin{aligned} |O_i(x_1, x_2)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^t \psi'_i(s) (\psi_i(t) - \psi_i(s))^{\alpha_i-1} |\mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(s)| ds \\ &\quad + |\Theta_i(t)| \left\{ \frac{|\nu|}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^\eta \psi'_2(s) (\psi_2(\eta) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} |\mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s)| ds \right. \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi'_1(s) (\psi_1(b) - \psi_1(s))^{\alpha_1-1} |\mathcal{F}_{1,x_1,x_2}(s)| ds \\ &\quad \left. + \frac{|\xi_i|}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^b \psi'_2(s) (\psi_2(b) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} |\mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s)| ds \right\}, \end{aligned}$$

par les estimations (4.28) et (4.31) on obtient

$$\begin{aligned} |O_i(x_1, x_2)(t)| &\leq \widehat{\psi}_i(t) (RW_i + S_i) + |\Theta_i(t)| \left\{ |\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) (RW_2 + S_2) \right. \\ &\quad \left. + \widehat{\psi}_1(b) (RW_1 + S_1) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) (RW_2 + S_2) \right\} \\ &= R \left(\widehat{\psi}_i(t) W_i + |\Theta_i(t)| \left\{ \widehat{\psi}_1(b) W_1 + \left(|\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) \right) W_2 \right\} \right) \\ &\quad + \widehat{\psi}_i(t) S_i + |\Theta_i(t)| \left\{ \widehat{\psi}_1(b) S_1 + \left(|\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) \right) S_2 \right\} \\ &\leq R \theta_i(b) + \delta_i(b), \end{aligned}$$

par conséquent

$$|O(x_1, x_2)(t)| \leq R [\theta_1(b) + \theta_2(b)] + \delta_1(b) + \delta_2(b) \leq R,$$

ce qui implique que $\|O(x_1, x_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \leq R$. Donc $O(B_R) \subset B_R$.

Ensuite, on prouve que O est un opérateur contractant. Pour cela, soient $(x_1, x_2), (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \Upsilon \times \Upsilon$ et $t \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} & |O_i(x_1, x_2)(t) - O_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(t)| \\ \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^t \psi'_i(s) (\psi_i(t) - \psi_i(s))^{\alpha_i-1} |\mathcal{F}_{i,x_1,x_2}(s) - \mathcal{F}_{i,\bar{x}_1,\bar{x}_2}(s)| ds \\ & + |\Theta_i(t)| \left\{ \frac{|\nu|}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^\eta \psi'_2(s) (\psi_2(\eta) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} |\mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s) - \mathcal{F}_{2,\bar{x}_1,\bar{x}_2}(s)| ds \right. \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi'_1(s) (\psi_1(b) - \psi_1(s))^{\alpha_1-1} |\mathcal{F}_{1,x_1,x_2}(s) - \mathcal{F}_{1,\bar{x}_1,\bar{x}_2}(s)| ds \\ & \left. + \frac{|\xi_i|}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^b \psi'_2(s) (\psi_2(b) - \psi_2(s))^{\alpha_2-1} |\mathcal{F}_{2,x_1,x_2}(s) - \mathcal{F}_{2,\bar{x}_1,\bar{x}_2}(s)| ds \right\}, \end{aligned}$$

par les estimations (4.28) et (4.32), on obtient

$$\begin{aligned} |O_i(x_1, x_2)(t) - O_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(t)| & \leq \widehat{\psi}_i(t) W_i \|(x_1, x_2) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \\ & + |\Theta_i(t)| \left\{ |\nu| \widehat{\psi}_i(\eta) W_2 \|(x_1, x_2) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \right. \\ & + \widehat{\psi}_i(b) W_1 \|(x_1, x_2) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \\ & \left. + |\xi_i| \widehat{\psi}_i(b) W_2 \|(x_1, x_2) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \right\} \\ & = \left(\widehat{\psi}_i(t) W_i + |\Theta_i(t)| \left\{ \widehat{\psi}_1(b) W_1 + \left(|\nu| \widehat{\psi}_2(\eta) + |\xi_i| \widehat{\psi}_2(b) \right) W_2 \right\} \right) \\ & \quad \times \|(x_1, x_2) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \\ & \leq \theta_i(b) \|(x_1, x_2) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|O(x_1, x_2) - O(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon} \leq (\theta_1(b) + \theta_2(b)) \|(x_1, x_2) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_{\Upsilon \times \Upsilon}.$$

Par la condition (4.36), L'opérateur O est contraction. Alors, d'après le théorème de point fixe de Banach, le système (4.1) admet une solution unique sur $[a, b]$. $\square$

4.4 Exemples

Cette section est consacrée à l'illustration des résultats antérieurs au travers de deux exemples.

Exemple 4.4.1 *Considérez le système suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{LC}\mathfrak{D}_{0+}^{0.75, \frac{t^{0.5}}{0.5}} x_1(t) \\ = 1 + \cos \pi t + \sum_{j=1}^2 \lambda_{1,j} \int_0^{(2-j)t+(j-1)} K_{1,j}(t, \tau) F_{1,j}(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau)) d\tau, \\ \\ {}^{LC}\mathfrak{D}_{0+}^{1.25, \sin t} x_2(t) \\ = \frac{1}{1+t} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{2,j} \int_0^{(2-j)t+(j-1)} K_{2,j}(t, \tau) F_{2,j}(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau)) d\tau, \\ \\ x_1(0) = -0.25x_2(1), \quad x_1(1) = 0.75x_2(0.5), \quad x_2(0) = 0, \end{array} \right. \quad (4.37)$$

tel que $t \in [0, 1]$, $\lambda_{1,1} = \frac{1}{16}$, $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{64}$, $\lambda_{2,1} = -\frac{1}{7}$, $\lambda_{2,2} = -\frac{1}{5}$, $K_{1,1}(t, \tau) = \frac{2}{t\tau+3}$, $K_{1,2}(t, \tau) = \frac{1}{\tau^2+t+2}$,
 $K_{2,1}(t, \tau) = t\sqrt{2\tau}$, $K_{2,2}(t, \tau) = \frac{\cos(\pi t + \tau)}{\pi}$, $F_{1,1}(\tau, \varkappa_1, \varkappa_2) = \tau + \frac{|\varkappa_1|}{4} + \frac{|\varkappa_1|}{2+|\varkappa_1|} + \frac{3 \sin \pi \varkappa_2}{4\pi}$,
 $F_{1,2}(\tau, \varkappa_1, \varkappa_2) = e^\tau + \frac{\tau}{5} \sin(\varkappa_1 + \varkappa_2)$, $F_{2,1}(\tau, \varkappa_1, \varkappa_2) = \frac{\tau}{3} + \frac{2\tau}{3} \ln(1 + |\varkappa_1|) + \frac{|\varkappa_2|}{3} + \frac{|\varkappa_2|}{3+|\varkappa_2|}$, and
 $F_{2,2}(\tau, \varkappa_1, \varkappa_2) = \frac{\tau}{5} + \frac{\tau}{2} \ln(1 + |\varkappa_1 + \varkappa_2|)$.

Ici $\alpha_1 = 0.75$, $\alpha_2 = 1.25$, $\psi_1(t) = \frac{t^{0.5}}{0.5}$, $\psi_2(t) = \sin t$, $\varphi_1(t) = 1 + \cos \pi t$, $\varphi_2(t) = \frac{1}{1+t}$,
 $\mu = -0.25$, $\nu = 0.75$, $\eta = 0.5$.

Par des calculs simples, on obtient $\|\varphi_1\| = 2$, $\|\varphi_2\| = 1$, $k_{1,1} = \frac{2}{3}$, $k_{1,2} = \frac{1}{2}$, $k_{2,1} = \sqrt{2}$,
 $k_{2,2} = \frac{1}{\pi}$.

Évidemment, $|F_{1,1}(\tau, \varkappa_1, \varkappa_2) - F_{1,1}(\tau, \bar{\varkappa}_1, \bar{\varkappa}_2)| \leq \omega_{1,1} (|\varkappa_1 - \bar{\varkappa}_1| + |\varkappa_2 - \bar{\varkappa}_2|)$ avec $\omega_{1,1} = \frac{3}{4}$,
ainsi on a $\omega_{1,2} = \frac{1}{5}$,
 $\omega_{2,1} = \frac{2}{3}$, et $\omega_{2,2} = \frac{1}{2}$, de plus on a $|F_{1,1}(\tau, \varkappa_1, \varkappa_2)| \leq 1 + \frac{5}{4}|\varkappa_1| + \frac{3}{4\pi}|\varkappa_2| \leq 1 + \frac{5}{4}(|\varkappa_1| + |\varkappa_2|)$
(c.-à-d $\bar{\gamma}_{1,1} = \frac{5}{4}$),

$$|F_{1,2}(\tau, \varkappa_1, \varkappa_2)| \leq e + \frac{1}{5} (|\varkappa_1| + |\varkappa_2|) \quad (c.-à-d. \quad \bar{\gamma}_{1,2} = \frac{1}{5}), \quad |F_{2,1}(\tau, \varkappa_1, \varkappa_2)| \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{3}|\varkappa_1| + \frac{4}{3}|\varkappa_2| \leq \frac{1}{3} + \frac{4}{3} (|\varkappa_1| + |\varkappa_2|) \quad (c.-à-d. \quad \bar{\gamma}_{2,1} = \frac{4}{3}), \quad \text{et } |F_{2,2}(\tau, \varkappa_1, \varkappa_2)| \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{2} (|\varkappa_1| + |\varkappa_2|) \quad (c.-à-d. \quad \bar{\gamma}_{2,2} = \frac{1}{2}).$$

À l'aide d'un programme Python et des valeurs fournies, nous obtenons $\Theta_1(1) \simeq 0.36910708$, $\Theta_2(1) \simeq -1.47642833$, $\xi_1 \simeq 0.42731022$, $\xi_2 = -0.25$, $W_1 = 0.0328125$, $W_2 \simeq 0.16651799$, $\bar{W}_1 \simeq 0.05364583$, $\bar{W}_2 \simeq 0.30120500$, $\widehat{\psi}_1(1) \simeq 1.82990034$, $\widehat{\psi}_2(1) \simeq 0.71132461$, $\widehat{\psi}_2(0.5) \simeq 0.35210351$, $\theta_1(1) \simeq 0.11711917$, $\theta_2(1) = 0.31574254$, $\bar{\theta}_1(1) \simeq 0.19755274$, $\bar{\theta}_2(1) \simeq 0.55571057$, donc

$$\bar{\theta}_1(1) + \bar{\theta}_2(1) \simeq 0.75326331 < 1,$$

Le Théorème 4.2.1 permet de conclure à l'existence d'au moins une solution pour le problème (4.37)

sur $[0, 1]$. Par application du Théorème 4.3.1, nous obtenons alors

$$\theta_1(1) + \theta_2(1) \simeq 0.43286171 < 1,$$

ce qui prouve l'existence d'une solution unique au problème (4.37) sur $[0, 1]$.

Exemple 4.4.2 Prenons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{LC}\mathfrak{D}_{1+}^{0.5, \frac{t^{0.3}}{0.3}} x_1(t) \\ = 1 + t^2 + \sum_{j=1}^2 \lambda_{1,j} \int_1^{(2-j)t+(j-1)e} K_{1,j}(t, \tau) F_{1,j}(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau)) d\tau, \\ {}^{LC}\mathfrak{D}_{1+}^{1.5, \ln t} x_2(t) \\ = 1 + \sqrt{t} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{2,j} \int_1^{(2-j)t+(j-1)e} K_{2,j}(t, \tau) F_{2,j}(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau)) d\tau, \\ x_1(1) = -0.5x_2(e), \quad x_1(e) = 0.5x_2(1.5), \quad x_2(1) = 0, \end{array} \right. \quad (4.38)$$

tel que $t \in [1, e]$, $\lambda_{1,1} = \frac{1}{9}$, $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{5}$, $\lambda_{2,1} = -\frac{1}{4}$, $\lambda_{2,2} = -\frac{1}{6}$, $K_{1,1}(t, \tau) = e^{-t\tau}$, $K_{1,2}(t, \tau) = e^{-(t+\tau)}$,

$K_{2,1}(t, \tau) = e^{-t^2\tau}$, $K_{2,2}(t, \tau) = e^{-2(t+\tau)}$, $F_{1,1}(\tau, \varkappa_1, \varkappa_2) = \frac{1}{5\tau+|\varkappa_1|+|\varkappa_2|}$, $F_{1,2}(\tau, \varkappa_1, \varkappa_2) = \frac{\cos \pi \varkappa_1}{16\pi\tau} + \frac{1}{4\tau+|\varkappa_2|}$,

$F_{2,1}(\tau, \varkappa_1, \varkappa_2) = \frac{1}{3\tau+|\varkappa_1|} + \frac{\sin \pi \varkappa_2}{9\pi\tau}$ et $F_{2,2}(\tau, \varkappa_1, \varkappa_2) = \frac{1}{2\tau+|\varkappa_1|} + \frac{\tan^{-1} \varkappa_2}{4\tau}$.

Dans ce cas $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 1.5$, $\psi_1(t) = \frac{t^{0.3}}{0.3}$, $\psi_2(t) = \ln t$, $\varphi_1(t) = 1 + t^2$, $\varphi_2(t) = 1 + \sqrt{t}$, $\mu = -0.5$, $\nu = 0.5$, $\eta = 1.5$.

Par des calculs simples, on obtient $\|\varphi_1\| = 1 + e^2$, $\|\varphi_2\| = 1 + \sqrt{e}$, $k_{1,1} = e^{-1}$, $k_{1,2} = e^{-2}$, $k_{2,1} = e^{-1}$, $k_{2,2} = e^{-4}$.

Les fonctions non-linéaires $F_{i,j}$ satisfaisaient

$$|F_{1,1}(\tau, \varkappa_1, \varkappa_2) - F_{1,1}(\tau, \bar{\varkappa}_1, \bar{\varkappa}_2)| \leq \omega_{1,1} (|\varkappa_1 - \bar{\varkappa}_1| + |\varkappa_2 - \bar{\varkappa}_2|), \quad (\text{ici } \omega_{1,1} = \frac{1}{25}),$$

on trouve aussi $\omega_{1,2} = \frac{1}{16}$, $\omega_{2,1} = \frac{1}{9}$, $\omega_{2,2} = \frac{1}{4}$, de plus

$$|F_{1,1}(\tau, \varkappa_1, \varkappa_2)| \leq \varrho_{1,1}(\tau),$$

avec $\varrho_{1,1}(\tau) = \frac{1}{25\tau}$, nous pouvons également obtenir que $\varrho_{1,2}(\tau) = \frac{4\pi+1}{16\pi\tau}$, $\varrho_{2,1}(\tau) = \frac{3\pi+1}{9\pi\tau}$ et $\varrho_{2,2}(\tau) = \frac{4+\pi}{8\tau}$.

À l'aide d'un programme Python et des valeurs fournies, nous obtenons $\Theta_1(e) \simeq 0.71150824$, $\Theta_2(e) \simeq -1.42301647$, $\xi_1 \simeq 0.20273255$, $\xi_2 = -0.5$, $W_1 \simeq 0.00571623$, $W_2 \simeq 0.01887021$, $\widehat{\psi}_1(e) \simeq 1.21854294$, $\widehat{\psi}_2(e) \simeq 0.75225278$, $\widehat{\psi}_2(1.5) \simeq 0.19422004$, $\theta_1(e) \simeq 0.01527288$, $\theta_2(e) \simeq 0.03681479$, donc

$$\widehat{\psi}_1(e)W_1 + \widehat{\psi}_2(e)W_2 \simeq 0.02116064 < 1.$$

D'après le Théorème 4.2.2, on déduit que le problème (4.38) possède au moins une solution sur

l'intervalle $[1, e]$. D'un autre côté, nous obtenons

$$\theta_1(e) + \theta_2(e) \simeq 0.05208767 < 1.$$

D'après le Théorème 4.3.1, on déduit que le problème (4.38) admet une unique solution sur l'intervalle $[1, e]$.

Conclusion

Ce travail a approfondi l'étude des équations différentielles fractionnaires avec conditions non locales et opérateurs hybrides, en établissant des résultats fondamentaux concernant l'existence et l'unicité des solutions. Notre approche méthodologique a combiné de manière synergique :

- Des théorèmes de point fixe (Banach, Dhage, Krasnoselskii et L'alternative de Leray-Schauder)
- Des techniques avancées d'analyse fonctionnelle

Ces outils nous ont permis de résoudre des problèmes complexes issus de modèles physiques, notamment dans l'analyse des systèmes thermostatiques.

Contributions majeures

Nous avons notamment :

1. Démontré l'existence de solutions pour un système couplé d'équations intégral-différentielles non linéaires de type Volterra-Fredholm
2. Étudié des conditions aux limites non locales non séparées, plus générales que celles considérées dans la littérature

Notre cadre unificateur englobe plusieurs types de dérivées fractionnaires selon le choix de la fonction $\psi_i(t)$:

Cas 1. Pour $\psi_i(t) = t$, on retrouve le système standard de Liouville-Caputo.

Cas 2. Avec $\psi_i(t) = \ln t$, on obtient les dérivées de Caputo-Hadamard.

Cas 3. Le choix $\psi_i(t) = \frac{t^r}{r}$, $r \in \mathbb{R}^+$ conduit aux dérivées de Caputo-Katugampola.

Cette étude représente une avancée significative à plusieurs niveaux. La comparaison avec les travaux antérieurs, notamment ceux de [\[42\]](#), met en évidence :

- Une analyse plus exhaustive des conditions d'existence
- Une généralisation des résultats à une classe plus large d'opérateurs

Ces résultats posent les bases pour de futures recherches sur les applications pratiques de ces systèmes généralisés, notamment en physique mathématique et en ingénierie des systèmes complexes.

Bibliographie

- [1] B. Ahmad, A. Alsaedi, A. S. Aljahdali, *On a coupled system of nonlinear generalized fractional differential equations with nonlocal coupled Riemann-Stieltjes boundary conditions*, Qual. Theory Dyn. Syst., 23(5), 2024, 215.
- [2] B. Ahmad, A. Alsaedi, A. Broom, S. K. Ntouyas, *Nonlinear integro-differential equations involving mixed right and left fractional derivatives and integrals with nonlocal boundary data*, Mathematics, 8(3), 2020, 336.
- [3] B. Ahmad, A. Alsaedi, S. K. Ntouyas, J. Tariboon, *Hadamard-Type Fractional Differential Equations : Inclusions and Inequalities*, Springer, Cham, 2017.
- [4] B. Ahmad, A. Alsaedi, S. K. Ntouyas, *Fractional order differential systems involving right Caputo and left Riemann-Liouville fractional derivatives with nonlocal coupled conditions*, Bound. Value Probl., 2019, 2019, 109.
- [5] B. Ahmad, M. Alnahdi, S. K. Ntouyas, *Existence results for a differential equation involving the right Caputo fractional derivative and mixed nonlinearities with nonlocal closed boundary conditions*, Fractal Fract., 7(2), 2023, 129.
- [6] I. Ahmed, P. Kumam, F. Jarad, P. Borisut, W. Jirakitpuwapat, *On Hilfer generalized proportional fractional derivative*, Adv. Differ. Equ., 2020, 2020, 329.
- [7] I. Alasadi, A. Hamoud, *Existence and stability results for fractional Volterra-Fredholm integro-differential equation with mixed conditions*, Adv. Dyn. Syst. Appl., 16(1), 2021, 217-236.

- [8] S. Aljoudi, B. Ahmad, A. Alsaedi, *Existence and uniqueness results for a coupled system of Caputo-Hadamard fractional differential equations with nonlocal Hadamard type integral boundary conditions*, Fractal Fract., 4(2), 2020, 13.
- [9] H. H. Alsulami, S. K. Ntouyas, R. P. Agarwal, B. Ahmad, A. Alsaedi, *A study of fractional-order coupled systems with a new concept of coupled non-separated boundary conditions*, Bound. Value Probl., 2017, 2017, 68.
- [10] R. Almeida, *A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 44, 2017, 460-481.
- [11] D. Baleanu, S. Etemad, S. Rezapour, *A hybrid Caputo fractional modeling for thermostat with hybrid boundary value conditions*, Bound. Value Probl., 2020, 2020, 64.
- [12] B. Bollobas, W. Fulton, A. Katok, F. Kirwan, P. Sarnak, *Fixed Point Theory and Application*, 2004.
- [13] T. A. Burton, *A fixed-point theorem of Krasnosel'skii*, Appl. Math. Lett., 11(1), 1998, 85-88.
- [14] P. L. Butzer, A. A. Kilbas, J. J. Trujillo, *Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals*, J. Math. Anal. Appl., 269(1), 2002, 1-27.
- [15] I. J. Cabrera, J. Rocha, K. B. Sadarangani, *Lyapunov type inequalities for a fractional thermostat model*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat., 112, 2018, 17-24.
- [16] W. Cai, W. Chen, W. Xu, *Fractional modeling of Pasternak-type viscoelastic foundation*, Mech. Time-Depend. Mat., 21(1), 2017, 119-131.
- [17] D. Çakmak, *Lyapunov-type integral inequalities for certain higher order differential equations*, Appl. Math. Comput., 216, 2010, 368-373.
- [18] S. Ceballes, K. Larkin, E. Rojas, S. S. Ghaffari, A. Abdelkefi, *Nonlocal elasticity and boundary condition paradoxes : a review*, J. Nanopart. Res., 23, 2021, 27.
- [19] B. C. Dhage, *A fixed point theorem in Banach algebras involving three operators with applications*, Kyungpook Math. J., 44, 2004, 145-155.

- [20] B. C. Dhage, V. Lakshmikantham, *Basic results on hybrid differential equations*, Nonlinear Anal. Hybrid Syst., 4, 2010, 414-424.
- [21] B. C. Dhage, G. T. Khrpe, A. Y. Shete, J. N. Salunke, *Existence and approximate solutions for nonlinear hybrid fractional integro-differential equations*, Int. J. Anal. Appl., 11, 2016, 157-167.
- [22] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations : An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, Springer, Heidelberg, 2010.
- [23] P. Dunnimit, A. Wiwatwanich, D. Poltem, *Analytical solution of nonlinear fractional Volterra population growth model using the modified residual power series method*, Symmetry, 12(11), 2020, 1779.
- [24] R. A. C. Ferreira, *A Lyapunov-type inequality for a fractional boundary value problem*, Fract. Calc. Appl. Anal., 16(4), 2013, 978-984.
- [25] R. A. C. Ferreira, *On a Lyapunov-type inequality and the zeros of a certain Mittag-Leffler function*, J. Math. Anal. Appl., 412, 2014, 1058-1063.
- [26] R. A. C. Ferreira, *Lyapunov-type inequalities for some sequential fractional boundary value problems*, Adv. Dyn. Syst. Appl., 11(1), 2016, 33-43.
- [27] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer, New York, 2003.
- [28] A. Hamoud, *Existence and uniqueness of solutions for fractional neutral Volterra-Fredholm integro differential equations*, Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl., 4(4), 2020, 321-331.
- [29] R. Hilfer (Editor), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2000.
- [30] F. Jarad, T. Abdeljawad, D. Baleanu, *Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives*, Adv. Differ. Equ., 2012, 2012, 142.
- [31] F. Jarad, T. Abdeljawad, J. Alzabut, *Generalized fractional derivatives generated by a class of local proportional derivatives*, Eur. Phys. J. Spec. Top., 226, 2017, 3457-3471.

- [32] F. Jarad, M. A. Alqudah, T. Abdeljawad, *On more general forms of proportional fractional operators*, Open Math., 18(1), 2020, 167-176.
- [33] A. Kassymov, B. T. Torebek, *Lyapunov-type inequalities for a nonlinear fractional boundary value problem*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat., 115, 2021, 1-10.
- [34] R. Katani, *Numerical solution of a system of Volterra integral equations in application to avian-human influenza epidemic model*, Iran. J. Numer. Anal. Optim., 12(1), 2022, 37-53.
- [35] U. N. Katugampola, *New approach to generalized fractional integral*, Appl. Math. Comput., 218(3), 2011, 860-865.
- [36] U. N. Katugampola, *A new approach to generalized fractional derivatives*, Bull. Math. Anal. Appl., 6(4), 2014, 1-15.
- [37] F. Khan, G. Mustafa, M. Omar, H. Komal, *Numerical approach based on Bernstein polynomials for solving mixed Volterra-Fredholm integral equations*, AIP Adv., 7(12), 2017, 125123.
- [38] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [39] A. Kolmogorov, S. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle* (2nd ed.), Éditions Mir, Moscou, 1973.
- [40] T. Kosztolowicz, A. Dutkiewicz, *Subdiffusion equation with Caputo fractional derivative with respect to another function*, Phys. Rev. E, 104(1), 2021, 014118.
- [41] Z. Laadjal, F. Jarad, *Existence, uniqueness and stability of solutions for generalized proportional fractional hybrid integro-differential equations with Dirichlet boundary conditions*, AIMS Math., 8(1), 2023, 1172-1194.
- [42] Z. Laadjal, Q. Ma, *Existence and uniqueness of solutions for nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equation of fractional order with boundary conditions*, Math. Methods Appl. Sci., 44(11), 2021, 8215-8227.

- [43] S. F. Lacroix, *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* (3rd ed., Vol. 3), Courcier, Paris, 1819.
- [44] P. S. Laplace, *Théorie Analytique des Probabilités*, Courcier, Paris, 1812.
- [45] Z. Li, H. Wang, R. Xiao, S. Yang, *A variable-order fractional differential equation model of shape memory polymers*, Chaos Solitons Fract., 102, 2017, 473-485.
- [46] J. Liouville, *Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions*, J. l'Ecole Roy. Polytechn., 13(Sect. 21), 1832, 1-69.
- [47] J. Liouville, *Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques*, J. l'Ecole Roy. Polytechn., 13(Sect. 21), 1832, 71-162.
- [48] J. Liouville, *Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires*, J. für reine und angew. Math., 11, 1834, 1-19.
- [49] J. Liouville, *Mémoire sur une formule d'analyse*, J. für reine und angew. Math., 12(4), 1834, 273-287.
- [50] J. Liouville, *Mémoire sur l'usage que l'on peut faire de la formule de Fourier, dans le calcul des différentielles à indices quelconques*, J. für reine und angew. Math., 13(1-3), 1835, 219-232.
- [51] J. Liouville, *Mémoire sur le changement de la variable indépendante dans le calcul des différentielles à indices quelconques*, J. l'Ecole Roy. Polytechn., 15(Sect. 24), 1835, 17-54.
- [52] J. Liouville, *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles à indices fractionnaires*, J. l'Ecole Roy. Polytechn., 15(55), 1837, 58-84.
- [53] A. M. Lyapunov, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, 2, 1907, 203-474.
- [54] I. Mallah, I. Ahmed, A. Akgul, F. Jarad, S. Alha, *On ψ -Hilfer generalized proportional fractional operators*, AIMS Math., 7(1), 2022, 82-103.

- [55] L. Marinangeli, F. Alijani, S. H. HosseinNia, *Fractional-order positive position feedback compensator for active vibration control of a smart composite plate*, J. Sound Vib., 412, 2018, 1-16.
- [56] M. Mohammad, A. Trounev, M. Alshbool, *A novel numerical method for solving fractional diffusion-wave and nonlinear fredholm and volterra integral equations with zero absolute error*, Axioms, 10(3), 2021, 165.
- [57] S. K. Ntouyas, B. Ahmad, T. P. Horikis, *Recent developments of Lyapunov-type inequalities for fractional differential equations*, in : Differential and Integral Inequalities, Springer, 2019, pp. 619-686.
- [58] K. B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [59] V. Pandey, S. Holm, *Connecting the grain-shearing mechanism of wave propagation in marine sediments to fractional order wave equations*, J. Acoust. Soc. Am., 140(5), 2016, 4225-4236.
- [60] C. M. A. Pinto, A. R. M. Carvalho, *A latency fractional order model for HIV dynamics*, J. Comput. Appl. Math., 312, 2017, 240-256.
- [61] I. Podlubny, *Fractional Differential Equation*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [62] B. Ross, *A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus*. In B. Ross (Ed.), *Fractional calculus and its applications : proceedings of the international conference held at the University of New Haven, June 1974* (pp. 1-36). Springer Berlin Heidelberg, 2006. (Original work published 1974)
- [63] I. A. Rus, *Ulam stabilities of ordinary differential equations in a Banach space*, Carpath. J. Math., 26, 2010, 103-107.
- [64] A. Sahraoui, Z. Laadjal, Q. Ma, L. Guedda, *On a Coupled System of ψ -Liouville-Caputo-Type Fractional Nonlinear Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations With Non-local Nonseparated Boundary Conditions*, Math. Meth. Appl. Sci., 48(13), 2025, 13028-13038.

- [65] J. Salah, M. Hashmi, H. U. Rehman, K. Mashrafi, *Modified Mathematical Models in Biology by the Means of Caputo Derivative of a Function with Respect to Another Exponential Function*, Math. Stat., 10(6), 2022, 1194-1205.
- [66] L. Schwartz, *Analyse : Topologie générale et analyse fonctionnelle*, 2008.
- [67] J. V. C. Sousa, K. D. Kucche, E. C. De Oliveira, *Stability of ψ -Hilfer impulsive fractional differential equations*, Appl. Math. Lett., 88, 2019, 73-80.
- [68] H. M. Srivastava, *Diabetes and its resulting complications : Mathematical modeling via fractional calculus*, Public Health Open Access, 4(3), 2020, 1-5.
- [69] H. M. Srivastava, *Fractional-order derivatives and integrals : Introductory overview and recent developments*, Kyungpook Math. J., 60, 2020, 73-116.
- [70] A. Tiryaki, *Recent developments of Lyapunov-type inequalities*, Adv. Dyn. Syst. Appl., 5(2), 2010, 231-248.
- [71] H. A. Wahash, S. Panchaly, M. S. Abdo, *Positive solutions for generalized Caputo fractional differential equations with integral boundary conditions*, J. Math. Model., 8(4), 2020, 393-414.
- [72] A. M. Wazwaz, *A reliable treatment for mixed Volterra-Fredholm integral equations*, Appl. Math. Comput., 127(2-3), 2002, 405-414.
- [73] R. Xiao, H. Sun, W. Chen, *A finite deformation fractional viscoplastic model for the glass transition behavior of amorphous polymers*, Int. J. Non-Linear Mech., 93, 2017, 7-14.
- [74] A. Yang, Y. Han, Y. Zhang, L. Wang, D. Zhang, X. Yang, *On local fractional Volterra integro-differential equations in fractal steady heat transfer*, Therm. Sci., 20, 2016, 789-793.
- [75] G. Zhang, Y. Zhu, J. Liu, Y. Chen, *Image segmentation based on fractional differentiation and RSF model*, Proc. ASME 2017 Int. Des. Eng. Tech. Conf. Comput. Inf. Eng. Conf., 2017, 1-7.