



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique



UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude
En vue de l'obtention du diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Approximation par différence
finies de l'équation d'advection-
diffusion**

Présenté par : Louth Sabrina
Chouia Sara

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Aissaoui Adel	MCA	Président	Univ. El Oued
Beggas Mohammed	MCB	Rapporteur	Univ. El Oued
Doudi Nadjat	MAA	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2019 – 2020

Dédicaces

Louange à Dieu le Tout-puissant qui nous a aidé à accomplir ce modeste travail.

Nous le dédions :

À ceux qui se sont sacrifiés pour nous mettre sur le chemin de la connaissance : nos chers parents, que Dieu les protège.

nos frères et soeurs.

À tous nos amis et à ceux qui nous accompagnaient pendant nos études à l'université :

Aljia-Sana-Fatima-Ikram-Sonia-Marwa-Asma-Khaoula-Mohammed

Reda-Ayoub-Hocine-Walid.

Enfin nous dédions ce travail à ceux qui nous ont permis d'atteindre ce niveau : nos professeurs que nous remercions sincèrement.

Remerciements

Louange à Dieu Tout-Puissant, qui nous a aidés et nous a donné la force, la patience et le courage pour réaliser ce modeste travail.

Nous tenons à remercier chaleureusement l'encadreur de ce mémoire **Dr.Beggas Mohammed** pour sa patience, sa disponibilité et ses encouragements ainsi que le précieux soutien qu'il nous a apporté tout au long de ce travail.

Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.

Nous voudrions également remercier sincèrement ceux qui ont contribué à notre aide, notamment les professeurs :

Doudi Nadjet et Moumen Bekkouche Mohammed

Nous remercions chaleureusement nos parents pour l'aide et le soutien moral qu'ils nous ont fournis.

Enfin, nous tenons à témoigner toute notre reconnaissance aux personnes qui ont participé directement ou indirectement à l'élaboration de ce travail.

Notations

$C^K([a, b])$	Espace de fonctions k fois Continûment dérivable sur $[a, b]$.
$L^p(\Omega)$	Espaces de Lebesgue.
∇	Gradient.
Δ	Laplacien.
A	Matrice.
λ	Valeur propre.
$M_n(\mathbb{K})$	Ensemble des matrices carrées.
$E.D.P$	Équations aux dérivées partielles.
$E.D.O$	Équations différentielles ordinaires.
$C.I$	Condition initiale.
$C.L$	Condition aux limites.
$D.F$	Différences finies.
P_c	Problème continu.
P_h	Problème discret.
Δx	Le pas en espace.
Δt	Le pas en temps.
R_i	Erreur de consistance.
u	Solution de problème continu.
u_h	Solution de problème discret.

Table des figures

2.1	Advection des fumées par le vent.	15
2.2	Diffusion moléculaire de sucre dans le café.	16
3.1	Discrétisation par D.F en D1.	20
3.2	Discrétisation par D.F en D2.	26
4.1	Schéma explicite décentré pour l'équation d'advection-diffusion.	31
4.2	Schéma explicite centré pour l'équation d'advection-diffusion.	37

Table des matières

1	Préliminaires	1
1.1	Espaces fonctionnels	1
1.1.1	Espace $C^k([a, b])$	1
1.1.2	Espaces des Lebesgue $L^p(\Omega)$	1
1.2	Opérateurs différentiels	2
1.2.1	Gradient d'un vecteur	2
1.2.2	Divergence d'un vecteur	2
1.2.3	Laplacien	3
1.2.4	Combinaison convexe	3
1.3	Formules de Taylor et développements limités	3
1.3.1	Formule de Taylor	3
1.3.2	Généralisation	5
1.4	Rappel sur les matrices	6
1.4.1	Matrices particulières	6
1.4.2	Norme matricielle	8
2	Équation d'advection-diffusion	10
2.1	Généralités sur les équations aux dérivées partielles	10
2.1.1	Équation différentielle ordinaire	11
2.1.2	E.D.P linéaire du premier ordre	11
2.1.3	E.D.P linéaires de second ordre	11
2.1.4	Classification des E.D.P	12
2.1.5	Les problèmes aux limites	13

2.1.6	Condition initiale	13
2.1.7	Problème bien posé	13
2.1.8	Problème mal posé	14
2.2	Problème d'advection-diffusion	14
2.2.1	Advection	14
2.2.2	Diffusion	15
2.3	Différence entre l'advection et la diffusion	16
2.4	L'équation d'advection-diffusion en dimension 1 (D1)	16
2.5	L'équation d'advection-diffusion en dimension 2 (D2)	17
2.6	Advection pure	17
2.7	Diffusion pure	18
2.7.1	La différence entre l'équation advection-diffusion et l'équation de la chaleur	18
3	Principe de la méthode de différences finies	19
3.1	Différences finies en dimension 1	19
3.1.1	Discrétisation de domaine [8]	20
3.2	Quelques formules d'approximation des dérivées	20
3.2.1	La dérivée première	20
3.2.2	La dérivée seconde	22
3.3	Schéma aux D.F en dimension 1	22
3.3.1	Maillage	22
3.3.2	Erreur de troncature	23
3.3.3	Consistance de schéma numérique	23
3.3.4	Ordre de schéma	23
3.3.5	Stabilité du schéma numérique	24
3.3.6	Stabilité en norme L^∞	24
3.3.7	Stabilité au sens de Von-neumann	24
3.3.8	Convergence	25
3.4	Discrétisation de temps	26
3.5	Le schéma classique en temps	27

3.5.1	Les dérivées premières	27
4	Approximation par D.F de l'équation d'advection-diffusion	28
4.1	Problème continu	28
4.2	Existence et unicité de la solution	29
4.3	Principe du maximum	29
4.4	Problème discret	30
4.4.1	Discrétisation	30
4.5	Schéma explicite décentré	30
4.5.1	Consistance	31
4.5.2	Stabilité	33
4.5.3	Convergence	36
4.6	Schéma explicite centré	37
4.6.1	Consistance	38
4.6.2	Stabilité	39
4.6.3	Convergence	42
4.7	Etude comparative	43
5	Application	44
5.1	Problème modèle d'advection-diffusion	44
5.2	Discrétisation	45
5.3	Consistance	45
5.4	Stabilité	45
5.5	Convergence	45
5.6	Forme matricielle	45
5.7	Résolution numérique	46

Introduction générale

Historique

En 1768, **Leonhard Euler** publia la méthode d'Euler pour la résolution des équations différentielles. La convergence de cette méthode ne sera démontrée par **Augustin Louis Cauchy** qu'en 1824. Bien que cette méthode fonctionne, elle ne sera qu'anecdotique à l'époque.

En 1855, **John Couch Adamns** écrit une lettre à **F. Bashforth** dans laquelle il mentionne les méthodes multipas. Pour augmenter la précision de la méthode d'Euler sans en augmenter le nombre de pas, **Carl Runge** publie la première méthode de **Runge-Kutta** en 1895, ce travail sera complété en 1905 par **Martin Kutta**. Il introduira alors la très utilisée et répandue, méthode de **Runge-Kutta** d'ordre 4 (**RK4** pour les intimes).

De son côté, **Vilhelm Bjerkness** avait proposé en 1904 une équation concernant l'atmosphère.

Richardson, qui avait déjà publié sa méthode d'extrapolation en 1910, tenta de démontrer que le calcul permettait d'effectuer des précision météorologiques. Sa méthode fut publiée en 1922.

En 1928, **Richard Courant**, **Kurt Friedrichs** et **Hans Lewy** publient un article concernant les conditions permettant d'assurer la stabilité numérique d'une méthode et ainsi d'éviter la propagation des erreurs. Ces conditions portent le nom de leurs découvreurs : les conditions CFL. Elles sont fréquemment utilisées, notamment sur les équations hyperboliques. Elles imposent généralement un maillage assez fin[14].

Introduction

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles. C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes au travers d'E.D.P que l'on a pu comprendre le rôle de tel paramètre, et sur tout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises.

En vue de passage d'un problème exacte (continu) au problème approché (discret) on dispose plusieurs techniques :

Les différences finies, les éléments finis et les volumes finies.

Nous limiterons ici à l'exposé de technique des D.F.

L'objet de ce mémoire de master est d'étudier différents phénomènes sont responsables du transport de la matière. La matière peut être transportée par le mouvement de fluide, par diffusion de zones concentrées vers des zones concentrations plus faibles (transport diffusif) ou par d'autres phénomènes.

On s'intresse dans ce travail à la résolution d'un problème parabolique par la méthode de différences finies, on prend l'équation d'advection-diffusion comme un modèle.

Ce mémoire se compose de cinq chapitres.

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques définitions.

Dans le deuxième chapitre on va donner une généralité sur les EDP, puis nous représentons le phénomène d'advection-diffusion et sa modélisation mathématique.

Le troisième chapitre consacré à expliquer le principe de la méthode de différences finies, avec clarification quelque schémas de discrétisation.

Dans le quatrième chapitre est la résolution de l'équation d'advection-diffusion par la méthode de différences finies et on va vérifier tous les conditions de consistence, stabilité et la convergence.

Le résultat de notre étude est la résolution numérique de l'équation d'advection-diffusion discrétisé par la méthode de différences finies, où on va appliquer par Matlab.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré à un rappel sur les espaces fonctionnels, opérateurs différentiels, formule de Taylor et les matrices que nous utiliserons dans la suite.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espace $C^k([a, b])$

Définition 1.1.1.

$(f \in C^k[a, b]) \Leftrightarrow (f \text{ est dérivable jusqu'à l'ordre } k \text{ et la dérivée d'ordre } k \text{ est continue})$.

1.1.2 Espaces des Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.2. [7]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ l'espace des classes des fonctions mesurables de puissance p -ème intégrable, est définie :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

- Pour $p = 1$

L'espace $L^1(\Omega)$ est un espace de toute fonction intégrable sur Ω .

- Pour $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ f mesurable et } \exists C > 0 \text{ telle que } |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega\}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C; |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega\} = \sup \text{ess} f$$

1.2 Opérateurs différentiels

1.2.1 Gradient d'un vecteur

Soit u une fonction scalaire, $u = u(x, y, z)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(u) = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}$$

1.2.2 Divergence d'un vecteur

Soit U une fonction vectorielle de trois variables (x, y, z) définie sur un domaine Ω de \mathbb{R}^3 et à valeurs U_1, U_2, U_3 dans \mathbb{R} . On appelle divergence du vecteur U et on note $\text{div}(U)$ ou $\nabla \cdot U$ le scalaire :

$$\text{div}(U) = \nabla \cdot U = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z}$$

1.2.3 Laplacien

On appelle Laplacien de u et on note Δu ou $\nabla^2 u$, le scalaire :

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla \cdot \nabla(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

1.2.4 Combinaison convexe

On dit que u_1, u_2, \dots, u_n est une combinaison convexe de u_{n+1} tel que :

$$u_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i u_i$$

si :

1. $a_i \geq 0, \quad \forall i = \overline{1, n}$
2. $\sum_{i=1}^n a_i = 1.$

1.3 Formules de Taylor et développements limités

1.3.1 Formule de Taylor

Si une fonction $f(x)$ est définie et continue sur $[a, b]$, ainsi que ses n premières dérivées, et si elle admet dans l'intervalle $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n + 1$, alors il existe une valeur $c \in]a, b[$ pour laquelle

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Cette égalité peut encore s'écrire avec $h = b - a$

$$f(a+h) = f(a) + (h)f'(a) + \frac{(h)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(h)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(h)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a + \theta h)$$

avec $0 < \theta < 1$.

On prend $a = x_0$ et $h + a = b = x$:

$$f(x) = f(x_0) + (h)f'(x_0) + \frac{(h)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(h)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + O(h^{n+1})$$

et $R(h) = O(h^{n+1})$, $\lim_{h \rightarrow 0} R(h) = 0$.

• **Formule de Maclaurin**

Dans les cas particulier où $0 \in [a, b]$, on a pour tout $x \in]a, b[$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2!}x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} f^{(n+1)}(\theta x).$$

Cette formule est un cas particulier de la formule de Taylor dans laquelle on prend $a = 0$ et $b = x$.

• **Formule de Taylor-Young :**

Considérons maintenant le cas où f est une application d'un intervalle I vers \mathbb{R} , et soit a et x deux points de I . Alors on montre qu'il existe une fonction ϵ définie au voisinage de a telle que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x)$$

avec

$$\epsilon(x) \longrightarrow 0 \text{ pour } x \longrightarrow a$$

Le terme $(x-a)^n \epsilon(x)$ est appelé reste d'ordre n pour $x \longrightarrow a$.

Noter qu'à l'opposé des autres formules données précédemment, cette dernière précise le comportement du reste d'ordre n pour x tend vers a .

Dans le cas particulier où $a = 0$, on obtient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x)^k}{k!} f^{(k)}(0) + (x)^n \epsilon(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2!}x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(0) + (x)^n \epsilon(x)$$

En utilisons les notations de Landau

$$(x)^n \epsilon(x) = O(x^n) \quad (x \longrightarrow 0)$$

et

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2!}x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(0) + O(x^n)$$

On dira que

$$f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0)$$

est le développement limité (noté D.L) d'ordre n de f au voisinage de 0.

1.3.2 Généralisation

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^p(\Omega)$$

Pour $p = 1$:

$$Df(x_0)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i$$

Pour $p = 2$:

$$D^2 f(x_0)(h^2) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(h_{i_1}, h_{i_2})$$

Si on pose :

$$p = n = 2 \quad x_{i_1} = x, \quad x_{i_2} = y, \quad h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$D^2 f(x_0, y_0)(h, h) = D^2 f(x_0)(h^2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) h_1 h_2$$

.

1.4 Rappel sur les matrices

1.4.1 Matrices particulières

On appelle matrices m lignes et n colonnes ($m \times n$), on note dans \mathbb{K} :

$$A = (a_{ij}) \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

- **Matrice carré**

Une matrice carré d'ordre n est une matrice de dimension $n \times n$, autrement dit une matrice à un n lignes et n colonnes.

- **Transposé d'une matrice**

On appelle transposée d'une matrice $A = (a_{ij})$ de type $p \times q$ La matrice $B = (b_{ij})$ de type $q \times p$. Obtenue en échangeant lignes et colonnes de A : $b_{ij} = a_{ji}$.

- **Matrice symétrique**

C'est une matrice A carré telle que : $A = A^t$.

- **Forme quadratique, matrice définie positive**

On appelle forme quadratique associée à la matrice A la forme :

$$Q(x) = X^t A X.$$

Une matrice A est dite définie positive si :

$$X^t A X > 0, \quad \forall X \neq 0.$$

Remarque 1.4.1.

- Une matrice A est positive mais non définie positive si :

$$X^t A X \geq 0, \quad \forall X \neq 0.$$

- Une matrice carré est définie positive si la forme quadratique qui lui est associée est définie positive.

• **Matrice par blocs**

Une matrice par blocs $A = A_{ij}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ est une matrice dont les entrées a_{ij} sont des matrices au lieu d'être des scalaires.

On doit toutefois respecter les deux règles suivantes :

1. Toutes les matrices d'un même ligne (A_{ij} avec $1 \leq j \leq n$) ont le même nombre de lignes.
2. Toutes les matrices d'un même colonne (A_{ij} avec $1 \leq i \leq m$) ont le même nombre de colonnes. Ainsi il existe des nombres entiers n_j et m_i tel que $A_{ij} \in \mathbb{C}^{m_i \times n_j}$.

• **Matrice tridiagonale (bande)**

On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ou $\mathbb{C}^{m \times n}$ est une matrice bande si elle n'admet des éléments non nuls que sur un certain nombre de diagonales autour de la diagonale principale.

Plus précisément :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{quand } i < j + p \text{ c'est une matrice bande-}p \text{ inférieure,} \\ 0 & \text{quand } j > i + q \text{ c'est une matrice bande-}q \text{ supérieure.} \end{cases}$$

• **Matrice tridiagonale par blocs**

Soit A une matrice tridiagonale tel que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On définit la matrice tridiagonale par blocs tel que :

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & A_{n-1,n} & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

où les A_{ij} sont des sous-matrices de B .

1.4.2 Norme matricielle

Définition 1.4.1. [1]

On appelle norme matricielle $\| \cdot \|$ définie de $M_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{R}_+ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) vérifiant les propriétés suivantes, $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$:

1. $\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
2. $\| \alpha A \| = \alpha \| A \| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$. (propriété d'homogénéité)
3. $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$, $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$. (inégalité triangulaire)
4. $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$, $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$.

Exemple 1.4.1.

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$$

où :

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$$

λ_i : les valeurs propres de A .

Si la matrice A est symétrique, alors

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \sqrt{\rho(A^2)} \\ &= \left(\sqrt{\rho(A)}\right)^2 \\ &= \rho(A) \quad (\rho(A) \geq 0).\end{aligned}$$

Chapitre 2

Équation d'advection-diffusion

Les phénomènes de transport, tels que les transferts de chaleur et de masse, jouent un rôle très important dans la vie humaine. Les gaz et les liquides nous entourent, les flux à l'intérieur de notre corps, et ont une influence profonde sur l'environnement dans lequel nous vivons. Les fluides s'écoulent et produisent des vents, des pluies, des inondations et des ouragans. Les processus de transport sont responsables des variations de température et du transport des polluants dans l'air, l'eau et le sol.

On distingue généralement deux processus, l'advection et la diffusion.

L'advection fait référence au processus où la substance se déplace dû au mouvement du fluide porteur comme le vent, les principales composantes du vent sont horizontales. Le vent est d'ailleurs, et de loin, la source essentielle du transport horizontal des polluants.

Dans ce chapitre, on va d'abord citer des notions générale sur les E.D.P, puis on va présenter l'étude mathématique du problème d'advection-diffusion, ainsi sa signification physique.

2.1 Généralités sur les équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles pour la variable u dépend de n variables indépendantes $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Toute relation entre u , x_k ($k = 1, \dots, n$) et des dérivées de u par rapport aux x_k :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots) = f \quad (2.1)$$

constitue une équation aux dérivées partielles (EDP). [15]

2.1.1 Équation différentielle ordinaire

Une équation différentielle ordinaire est une relation entre la variable réelle x , une fonction inconnu $x \rightarrow u(x)$ et ses dérivées $u', u'', \dots, u^{(n)}$, on point x définie par

$$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = f$$

Remarque 2.1.1.

1. Si $n = 1$, alors l'E.D.P devient une équation différentielle ordinaire (E.D.O).
2. Si $f = 0$, on dit que l'équation (2.1) est homogène.

2.1.2 E.D.P linéaire du premier ordre

On a la forme générale d' E.D.P linéaire du premier ordre est :

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = D(x, y)$$

2.1.3 E.D.P linéaires de second ordre

Elles sont sous la forme :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (2.2)$$

Exemple 2.1.1.

- L'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

est une EDP linéaire d'ordre 1 homogène.

- L'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

est une EDP non-linéaire d'ordre 1 homogène.

- L'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

est une EDP linéaire d'ordre 2 non-homogène.

2.1.4 Classification des E.D.P

Le type de l'E.D.P dépend de signe de $B^2 - 4AC$.

- Si $B^2 - 4AC > 0$, alors l'E.D.P est dit hyperbolique .
- Si $B^2 - 4AC = 0$, alors l'E.D.P est dit parabolique.
- Si $B^2 - 4AC < 0$, alors l'E.D.P est dit elliptique.

Exemple 2.1.2.

- Si $\Delta = 0$ est dite parabolique :

Exemple :

Equation d'advection-diffusion : $\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f.$

Equation Shrodinger : $\frac{\partial U}{\partial t} = -i(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U).$

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation est hyperbolique :

Exemple :

Propagation d'onde : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$

- Si $\Delta < 0$ l'équation est dite elliptique :

Exemple :

Equation de poisson : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f.$

2.1.5 Les problèmes aux limites

Soient u et une E.D.P définie sur un ouvert Ω , les trois principaux types de conditions aux frontières sont :

1. On impose la valeur de u sur $\partial\Omega$, c'est la condition de Dirichlet.
2. On impose la valeur de $\frac{\partial u}{\partial n}$; $\frac{\partial u}{\partial n} = (gradu) \cdot \vec{n}$ c'est la condition de Neumann.
3. On impose ces deux condition sur $\partial\Omega$ c'est la condition de Mixte.

Remarque 2.1.2.

Si l'E.D.P est valide dans tout l'espace, il n'y a pas de frontière, on impose souvent des conditions à l'infini.

2.1.6 Condition initiale

Si l'E.D.P modélise un problème d'évolution on ajoute la condition initiale qui dépende du temps.

Remarque 2.1.3.

(E.D.P+condition aux limite) \Rightarrow Problème aux limite.

2.1.7 Problème bien posé

Soit (P) un problème aux limite.

Proposition 2.1.1.

On dit que (P) bien posé si :

1. Il existe une solution de (P) satisfaisant les conditions aux frontières .
2. La solution doit-être unique.
3. La solution doit-être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées.

2.1.8 Problème mal posé

Un problème qui n'est pas bien posé est dit mal posé.

Exemple 2.1.3.

Soit le problème (p) :

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) - 1 & x > 0, \\ u(0) = 0 & C.I. \end{cases}$$

Le problème (p) admet une solution unique : $u(x) = e^x - 1$.

Si la condition initiale est donné par : $u(0) = 0.01$, la solution est alors : $v(x) = (1+0.01)e^x - 1$.

De sorte que la différence s'écrit :

$$v(x) - u(x) = 0.01e^x.$$

On remarque que la solution n'est pas stable par rapport au donné initiale.

Donc : le problème (p) est instable et par la suite mal posé.

2.2 Problème d'advection-diffusion

L'équation d'advection-diffusion est une combinaison de l'équation d'advection et de diffusion, elle décrit des phénomènes physiques, où les particules, l'énergie, ou d'autres grandeurs physiques sont transférés dans un système physique en raison de deux processus : advection et diffusion. De la définition ci-dessus, il s'ensuit que l'équation d'advection-diffusion combine à la fois des équations paraboliques (diffusion) et hyperboliques (advection) aux dérivées partielles.

2.2.1 Advection

L'advection correspond au transport d'une propriété telle que l'humidité, la température, la pollution, par un fluide, tel que l'air ou l'eau, en générale selon un mouvement à

dominante horizontale.

Phénomène d'advection :

Le transport des fumées dégagées d'une usine à l'aide de l'air (vent). L'advection est due au mouvement de l'air, qui disperse le polluant. Ce phénomène est un phénomène macroscopique (mélange de masses d'air).

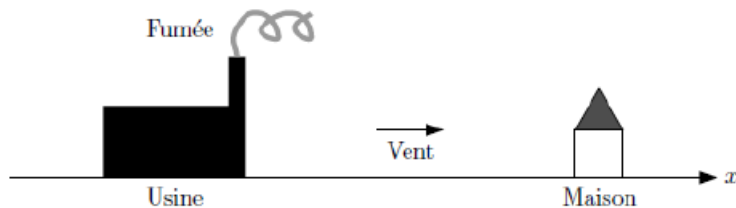


FIGURE 2.1 – Advection des fumées par le vent.

2.2.2 Diffusion

Un processus de transport fondamental dans la mécanique des fluides environnementale est la diffusion. La diffusion est un phénomène microscopique qui désigne la tendance naturelle d'un système à rendre homogènes les concentrations des espèces chimiques en son sein. Elle se diffère de l'advection parce qu'elle est un processus aléatoire dans la nature (ne suit pas nécessairement une particule fluide).

Phénomènes de diffusion :

Première phénomène : La diffusion d'un parfum dans une chambre vide. Si une bouteille de parfum est ouverte et laissée évaporer dans l'air, rapidement on va sentir ce parfum dans la chambre entière. Ainsi, la diffusion a deux principales propriétés : elle est aléatoire dans la nature, et le transport est des régions de fortes concentrations vers les faibles concentrations. On sait aussi par expérience que l'odeur sera plus forte près de la source et de moins en moins forte en éloignant.

Deuxième phénomène : Le processus de fusion du sucre dans le café nous permet de regarder la simple propagation. Les molécules de sucre vont dans toutes les directions avec

la même densité, et il n'y a aucune raison pour laquelle une direction est préférée à l'autre, elles se combinent donc avec les particules de café, ce qui les rend sucrées. Mais si nous mettons une cuillère à café, le processus ira plus vite. D'où la particularité des schémas d'advection. Ils sont étroitement liés à la direction de l'écoulement.



FIGURE 2.2 – Diffusion moléculaire de sucre dans le café.

2.3 Différence entre l'advection et la diffusion

Les deux processus advection et diffusion déplacent le polluant d'un endroit à un autre, mais chacun accomplit les choses différemment, la différence essentielle est la suivante :

- L'advection va dans un sens.
- La diffusion va dans les deux sens (indépendamment du sens du courant). Cela se voit dans les expressions mathématiques respectives :
- L'advection $\alpha \frac{\partial u}{\partial x}$ est une dérivée du premier ordre, ce qui signifie que si (x) est remplacé par $(-x)$ le terme change de signe (antisymétrie).
- La diffusion $\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est une dérivée de deuxième ordre, ce qui signifie que si (x) est remplacé par $(-x)$, le terme ne change pas de signes (symétrie).

2.4 L'équation d'advection-diffusion en dimension 1 (D1)

On appelle équation d'advection-diffusion (linéaire) en dimension 1 l'E.D.P parabolique, du premier ordre en temp (t) , premier et second ordre en espace :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f.$$

Les deux termes sur le côté gauche représentent les différents processus physiques : le premier correspond à l'advection tandis que le second décrit la diffusion normale.

1. u : c'est la variable d'intérêt (concentration de l'espèce de transfert de masse).
2. La constante γ est la diffusivité pour la masse.
3. $\alpha; \beta$: les composantes de la vitesse du fluide porteur selon l'axe x .
4. f : La source.[16]

2.5 L'équation d'advection-diffusion en dimension 2 (D2)

On appelle équation d'advection-diffusion (linéaire) en dimension 2 l'E.D.P parabolique, du premier ordre en temp (t), premier et second ordre en espace tel que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f.$$

2.6 Advection pure

La notion d'advection pure, signifie le transport d'une propriété par un seul processus qui est l'advection et sans l'intervention d'aucun autre processus comme la diffusion. L'équation de l'advection pure s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f.$$

2.7 Diffusion pure

La notion de diffusion pure, signifie le transport d'une propriété par un seul processus qui est la diffusion et sans l'intervention d'aucun autre processus comme l'advection. L'équation de la diffusion pure s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f.$$

2.7.1 La différence entre l'équation advection-diffusion et l'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f.$$

Les deux équations sont de type parabolique.

Si :

$\alpha = 0$ et $\gamma = k$ l'équation d'advection-diffusion coïncide avec l'équation de la chaleur.

Chapitre 3

Principe de la méthode de différences finies

Pour le passage d'un problème continu où la solution est précisée à un problème approché (discret), il y a plusieurs techniques : les différences finies, les éléments finis et les volumes finis.

Dans ce chapitre on va prendre en étude la technique des différences finies, les différences finies consistent à la compensation des dérivées dans le problème continu au différences finies sur des points finis et précisés.

Cette méthode fait partie de plusieurs travaux des mathématiciens du siècle 18.

3.1 Différences finies en dimension 1

La méthode de différences finies consiste à remplacer les dérivées par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre finis de points discrètes.

Il passe également d'un problème persistant à un inconnu sans fin à un problème distinct sans nombre spécifique d'inconnues.

3.1.1 Discrétisation de domaine [8]

On discrétise le segment $[a, b]$ et on approche les dérivées aux points de discrétisation, par des opérateurs aux différences. Plus précisément, on se donne un entier N à partir duquel on définit le pas de discrétisation $h = \frac{b-a}{N+1}$, on introduit les $N+2$ points $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N+1$ qui forment alors une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$. On définit Ω_h le maillage intérieur à (a, b) par

$$\Omega_h = \{x_i, 1 \leq i \leq N\}$$

et $\overline{\Omega}_h$ le maillage complet de $[a, b]$ par

$$\overline{\Omega}_h = \{x_i, 0 \leq i \leq N+1\}$$

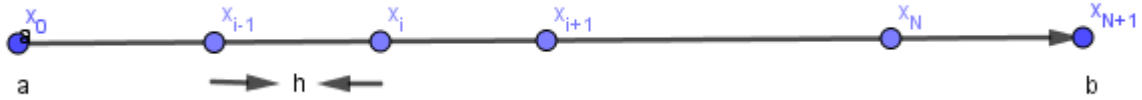


FIGURE 3.1 – Discrétisation par D.F en D1.

3.2 Quelques formules d'approximation des dérivées

3.2.1 La dérivée première

On note u_i la valeur discrète de $u(x)$ au point x_i , soit $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée de $u(x)$ au noeud x_i , on note $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = u'_i$. Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur u .

Soit u une fonction d'une variable de classe C^2 . Si h tend vers 0, en utilisant le développement limité de Taylor de la fonction u jusqu'à l'ordre 2 au point (x_i+h) , (x_i-h) , on obtient

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + O(\Delta x^2), \quad (3.1)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^2). \quad (3.2)$$

• **Notation indicielle-cas D1 :**

différence progressive d'ordre 1 "en avant" ou "décentré à droite" :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (3.3)$$

De la même manière on obtient la différence régressive d'ordre 1 "en arrière" ou "décentré à gauche" :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

• **Différence finie centré :**

Différences finies d'ordre 3 peuvent être construits en manipulant des développement de Taylor au voisinage de x_i . On écrit :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^3),$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^3).$$

La soustraction de ces deux relations donne :

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^3).$$

Différence centrée d'ordre 2

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

Remarque 3.2.1.

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs noeuds voisins de x_i .

Par exemple, différences finies d'ordre 3 pour la dérivée première s'écrit :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6\Delta x} + O(\Delta x^3).$$

3.2.2 La dérivée seconde

Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i à l'ordre 4.

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + O(\Delta x^4),$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + O(\Delta x^4).$$

En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à :

$$u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i = \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^4).$$

Ce qui permet d'obtenir la différence centrée d'ordre deux pour approximer la dérivée seconde de u :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2).$$

Il existe aussi une formulation "avant" et "arrière" pour la dérivée seconde :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) [3].$$

3.3 Schéma aux D.F en dimension 1

3.3.1 Maillage

Un maillage est un ensemble de points isolés (noeuds) situés dans le domaine de définition ou en veut résoudre notre EDP.

Le maillage comprend aussi les noeuds situés sur la frontière du domaine pour pouvoir imposer les conditions aux limites et les conditions initiales.

Pas de maillage :

On appelle pas de maillage la distance entre deux noeuds voisins situés sur une droite parallèle à l'un des axes.

3.3.2 Erreur de troncature

L'erreur de troncature est l'erreur commise lors de la discrétisation de termes de dérivées. Cette erreur est générée lors du choix de l'ordre de précision de la discrétisation, c'est-à-dire du terme à partir duquel nous négligeons le reste du développement limité :

$$u_{i+1} = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \frac{\Delta x^2}{2} + (\dots) \Delta x^3.$$

L'erreur commise suite à la troncature des termes à partir d'un certain rang $(2, 3, \dots)$ est nommée erreur de troncature.

3.3.3 Consistance de schéma numérique

L'erreur de consistance du schéma aux D.F du l'erreur de troncature :

Soit :

$$R_i u(x) = (P) - (P_h),$$

en dit que (p_h) est consistance d'ordre p par rapport à (p) si :

$$\max_{i=1, \dots, N} (R_i) \rightarrow 0,$$

tel que :

$$\|R_i\| \leq Ch^p.$$

3.3.4 Ordre de schéma

On dit qu'un schéma numérique à N points de discrétisation est d'ordre $p \in \mathbb{N}$ s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$, indépendante de la solution exacte telle que l'erreur de consistance vérifie :

$$\max_{i=1, \dots, N} (R_i) \leq Ch^p.$$

Où R_i est l'erreur de troncature et h est le pas de maillage (c'est à dire le maximum de $x_{i+1} - x_i$). [4]

3.3.5 Stabilité du schéma numérique

Une méthode est dite instable si elle est sujette à une propagation importante des erreurs numériques de discrétisation et d'arrondi.

Un problème peut être bien conditionné alors que la méthode numérique choisie pour le résoudre est instable.

Dans ce cas, il est impératif de changer de méthode numérique. Par contre, si le problème de départ est mal conditionné, aucune méthode numérique ne pourra y remédier. Il faudra alors essayer de trouver une formulation mathématique différente du même problème, si on sait que le problème physique sous-jacent est stable.[3]

3.3.6 Stabilité en norme L^∞

$\exists C > 0$ tel que pour tous $\Delta t, \Delta x$ assez petits :

$$\|U^n\|_\infty \leq C\|U^0\|_\infty, \quad \forall n, 0 \leq n\Delta t \leq T.$$

3.3.7 Stabilité au sens de Von-neumann

Pour cela, commençons par définir la transformation de fourier discrète.

On a la transformation de fourier d'une fonction u :

$$\hat{u} = F(u) = \int_{\mathbb{R}} u e^{-2i\pi t} dt,$$

où ($i^2 = -1$).

Alors on peut définir la transformation de fourier discrète comme suite :

$$\hat{U}^n = \sum_j u_j^n e^{\frac{-2i\pi k j}{N}},$$

Et aussi

$$\begin{aligned} \sum_j u_{j+1}^n e^{\frac{-2i\pi k j}{N}} &= \sum_j u_j^n e^{\frac{-2i\pi k(j-1)}{N}} \\ &= \left(\sum_j u_j^n e^{\frac{-2i\pi k j}{N}} \right) e^{\frac{2i\pi k}{N}} \\ &= e^{\frac{2i\pi k}{N}} \widehat{U}^n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_j u_{j-1}^n e^{\frac{-2i\pi k j}{N}} &= \sum_j u_j^n e^{\frac{-2i\pi k(j+1)}{N}} \\ &= \left(\sum_j u_j^n e^{\frac{-2i\pi k j}{N}} \right) e^{\frac{-2i\pi k}{N}} \\ &= e^{\frac{-2i\pi k}{N}} \widehat{U}^n \end{aligned}$$

après compensation, nous obtenons la relation suivante :

$$\widehat{U}^{n+1} = A(k) \widehat{U}^n$$

Proposition 3.3.1.

Le schéma est stable au sens de Von-neumann si $|A(k)| < 1$. [6]

3.3.8 Convergence

L'erreur globale est définie par :

$$e = \sup_{i,n} |u_i^n - u(x_i, t_n)|.$$

Un schéma est convergent si l'erreur globale tend vers 0 (ou si la solution numérique u_i^n tend vers la solution exacte $u(x_i, t_n)$) quand les pas de discrétisation tendent vers 0. [10]

Théorème 3.3.1. (Lax)

Pour un problème linéaire et bien posé, on a l'équivalence suivante :

$$\text{Convergence} \Leftrightarrow \text{Consistance} + \text{Stabilité.}$$

3.4 Discrétisation de temps

La discrétisation consiste à donner un ensemble de points t^n , $n = 0, \dots, M$ de l'intervalle $]0, T[$ et un ensemble de points x_i , $i = 0, \dots, N + 1$. Pour simplifier, on considère un pas constant en temps et en espace.

Soit $h = \frac{b - a}{N + 1} = \Delta x$ le pas de discrétisation en espace et $k = \Delta t = \frac{T}{M}$, le pas de discrétisation en temps.

On pose : $t^n = nk$ pour $n = 0, \dots, M$ et $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N + 1$. $\Omega_{h,k} = \{(ih, nk)\}$.

Les inconnues discrètes sont notées : u_i^n , $i = \overline{1, N}$ et $n = \overline{1, M}$

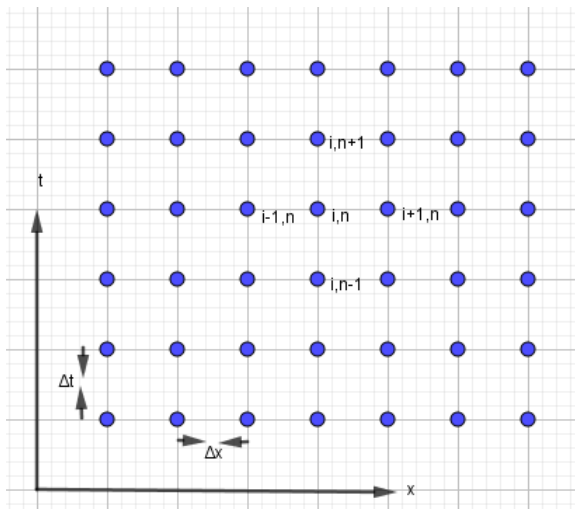
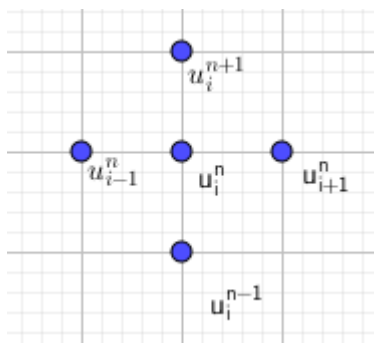


FIGURE 3.2 – Discrétisation par D.F en D2.



3.5 Le schéma classique en temps

3.5.1 Les dérivées premières

Par le développement limité de Taylor par rapport à la variable de temps (x_i étant fixé) on obtient :

$$u(x_i, t^{n+1}) = u(x_i, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi^+) \quad , \xi^+ \in [t^n, t^{n+1}],$$

$$u(x_i, t^{n-1}) = u(x_i, t^n) - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi^-) \quad , \xi^- \in [t^{n-1}, t^n].$$

De la même manière on obtient :

- **Schéma centré :**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2).$$

Ce schéma appelé schéma saute-mouton est à la fois explicite et d'ordre 2 en temps. Cependant, il est toujours instable, donc numériquement inutilisable.

- **Schéma explicite :**

Nous utilisons un schéma (en avant) d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et en espace :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

- **Schéma implicite :**

Nous utilisons un schéma (en arrière) d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et en espace :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n+1} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

On constate que les inconnues à l'itération, $(n + 1)$ sont reliées entre elles par une relation implicite (d'où le nom de la méthode).

Chapitre 4

Approximation par D.F de l'équation d'advection-diffusion

Dans ce chapitre, on va étudier quelques schéma aux D.F, dans le but de la discrétisation du problème continu (P) d'advection-diffusion pour avoir notre le problème approchée (P_h) et faire l'étude de la consistance, stabilité et la convergence du schémas étudiées.

4.1 Problème continu

Domaine borné :

Le problème d'advection-diffusion est donnée par :

Trouver $u : [0, L] \times [0, T] \rightarrow [0, L]$, vérifier

$$(P_c) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 & x \in [0, L], t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) & C.I., \\ u(0, t) = u(L, t) & C.L. \end{cases}$$

On suppose que le paramètre α et γ est positive et ($f = 0$).

Remarque 4.1.1.

Dans un domaine non borné ce problème consiste à chercher :

$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifier

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{conditions initiales.} \end{cases}$$

4.2 Existence et unicité de la solution

Théorème 4.2.1. [9]

Si, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, Le problème (P_c) admet une solution unique u , tel que $u \in C^4([0, L] \times [0, T])$ de plus u vérifie :

$$\|u\|_{L^\infty([0, L] \times [0, T])} \leq \|u_0\|_{L^2([0, L])}.$$

Remarque 4.2.1.

Si v est solution de l'E.D.P la chaleur $\frac{\partial v}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

Alors :

la solution u de (P_c) est définie par :

$$u(t, x) = v(t, x - \alpha t).$$

4.3 Principe du maximum

Soit $f \in C^0([0, L])$ et $u \in C^2([0, L])$ solution de (P_c) , alors on a :

- $(f \geq 0) \Rightarrow (u \geq 0)$ sur $\partial\Omega$.
- $(f \leq 0) \Rightarrow (u \leq 0)$ sur $\partial\Omega$.
- Si $f = 0$ alors : $\inf u \leq u \leq \sup u$.

4.4 Problème discret

4.4.1 Discrétisation

Une première méthode pour résoudre numériquement ce problème d'évolution consiste à discrétiser l'équation du second ordre par différences finies. Plaçons nous dans le cas mono-dimensionnel d'une corde de longueur L pour simplifier. On choisit une discrétisation régulière de $[0, L] \in \mathbb{R}$ en intervalles de longueur Δx tels que $L = N\Delta x$ et une discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T] \in \mathbb{R}^+$ en pas de temps de longueur Δt tels que $T = M\Delta t$. Notons x_i le point $i\Delta x$ et t^n le temps $n\Delta t$. Notons u_i^n la valeur de la solution approchée au point x_i et au temps t^n .

4.5 Schéma explicite décentré

Le problème continu (p_c) s'écrit en utilisant le schéma explicite décentré sous la forme suivante :

$$(P_h) \begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} - \gamma \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i \in \{0, \dots, N+1\}, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad n \in \{1, \dots, M\}, \end{cases} \quad (4.1)$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) &= \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) &= \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

C'est un schéma explicite qui calcule la valeur inconnue u_i^{n+1} à l'étape t^{n+1} en fonction des valeurs connues $\{u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n\}$ à l'étape t^n .

C'est un schéma explicite en temps et décentré (arrière) en espace alors :

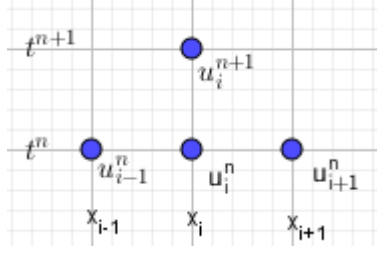


FIGURE 4.1 – Schéma explicite décentré pour l'équation d'advection-diffusion.

$$u_i^{n+1} = \left(\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{i-1}^n + \left(-\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 1 \right) u_i^n + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1}^n,$$

alors :

$$U^{n+1} = AU^n,$$

$$A = \begin{pmatrix} (-\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 1) & \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} & \dots & 0 \\ (\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}) & (-\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ 0 & \dots & (\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}) & (-\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 1) \end{pmatrix}$$

où A matrice tridiagonale par bloc.

$$A \left(\left(\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right), \left(-\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 1 \right), \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right).$$

4.5.1 Consistance

Par définition, l'erreur de consistance en (x_i, t^n) s'écrit :

On s'intéresse ici à l'ordre du schéma au sens des différences finies.

L'erreur de consistance en (x_i, t^n) est définie par :

$$R_i = \frac{1}{\Delta t} (u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{\alpha}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{\gamma}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n). \quad (4.2)$$

En utilisant des développement de Taylor :

$$u_i^{n+1} = u(x_i, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi_1), \quad \xi_1 \in [t^n, t^{n+1}], \quad (4.3)$$

$$u_{i-1}^n = u(x_i, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi_2, t^n), \quad \xi_2 \in [x_{i-1}, x_i], \quad (4.4)$$

$$u_{i-1}^n = u(x_i, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_3, t^n), \quad \xi_3 \in [x_{i-1}, x_i], \quad (4.5)$$

$$u_{i+1}^n = u(x_i, t^n) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_4, t^n), \quad \xi_4 \in [x_i, x_{i+1}], \quad (4.6)$$

et en deduit :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi_1),$$

$$\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi_2, t^n),$$

$$\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4}(u(\xi_3, t^n), (\xi_4, t^n)),$$

on noté :

$$C_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi_1),$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi_2, t^n),$$

$$C_3 = \frac{1}{12} \sup \left| \frac{\partial^4}{\partial x^4}(u(\xi_3, t^n), u(\xi_4, t^n)) \right|.$$

Alors l'erreur de consistance :

$$\begin{aligned} |R_i| &\leq C_1 \Delta t + \alpha C_2 \Delta x - \gamma C_3 \Delta x^2 \\ &\leq C_4 (\Delta t + \alpha \Delta x - \gamma \Delta x^2), \end{aligned}$$

tels que :

$$C_4 = \max(C_1, C_2, C_3)$$

$$\begin{aligned} &\leq C_4(\Delta t + \Delta x(\alpha - \gamma\Delta x)) \\ &\leq C_4\Delta t + C_4(\alpha - \gamma\Delta x)\Delta x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |R_i| \leq C_5(\Delta t + \Delta x)$$

$$C_5 = \max(C_4, C_4(\alpha - \gamma\Delta x)).$$

Le schéma (4.1) est donc consistant d'ordre 1 en temps et en espace.

• **Ordre :**

Ce schéma explicite est d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 et 2 en espace tels que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) &= \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) &= \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

4.5.2 Stabilité

Stabilité en norme L^∞

On va étudier la stabilité en norme L^∞ .

$$u_i^{n+1} = \left(-\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 1 \right) u_i^n + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1}^n + \left(\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{i-1}^n.$$

Pour avoir la combinaison convexe :

$$-\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 1 + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1$$

et que $\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0, \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$.

Il reste à vérifier que : $1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$; pour cela, il faut que $\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$.

Cette condition s'écrit encore :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta x + 2\gamma}. \quad (4.7)$$

$$U^{n+1} \leq \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) U^n,$$

en norme L^∞ :

$$\| U^{n+1} \|_\infty \leq \| U^n \|_\infty .$$

On a de même :

$$\| U^n \|_\infty \leq \| U^{n-1} \|_\infty .$$

⋮

$$\| U^1 \|_\infty \leq \| U^0 \|_\infty .$$

Par récurrence, on obtient :

$$\| U^n \|_\infty \leq \| U^0 \|_\infty .$$

Donc, sous la condition (4.7) on a $\| U^{n+1} \|_\infty \leq \| U^n \|_\infty$ et donc $\| U^n \|_\infty \leq \| U^0 \|_\infty$, pour tout $n = 1, \dots, N$.

Stabilité de Von-Neumann

On part l'équation (P_h)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} - \gamma \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

On multiplie cette équation par $e^{-\frac{2\pi i k j}{N}}$, et on somme sur j , on a alors grâce aux propriétés de transformé de fourier :

$$\frac{\widehat{U}^{n+1} - \widehat{U}^n}{\Delta t} + \alpha \frac{\widehat{U}^n - e^{-\frac{2\pi i k}{N}} \widehat{U}^n}{\Delta x} - \gamma \frac{e^{\frac{2\pi i k}{N}} \widehat{U}^n - 2\widehat{U}^n + e^{-\frac{2\pi i k}{N}} \widehat{U}^n}{\Delta x^2} = 0, \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$\widehat{U}^{n+1} = \left[1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 - e^{-\frac{2\pi i k}{N}} \right) + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(e^{\frac{2\pi i k}{N}} - 2 + e^{-\frac{2\pi i k}{N}} \right) \right] \widehat{U}^n$$

alors on a :

$$\widehat{U}^{n+1} = A(k) \widehat{U}^n$$

où :

$$A(k) = 1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 - e^{-\frac{2\pi ik}{N}}\right) + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(e^{\frac{2\pi ik}{N}} - 2 + e^{-\frac{2\pi ik}{N}}\right)$$

$A(k)$ est appelé la facteur d'amplification

or on sait que comme suit :

$$\begin{aligned} A(k) &= 1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \left(\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) e^{-\frac{2\pi ik}{N}} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} e^{\frac{2\pi ik}{N}} \\ &= 1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \left(\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right) + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right) \\ &= 1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - i\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \\ &= 1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right) + 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right) - i2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{\pi k}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right) \\ &= 1 - 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) - 4\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) - 2i\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{\pi k}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right) \end{aligned}$$

Calculons $|A(k)|^2$

$$\begin{aligned} |A(k)|^2 &= \left(1 - 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) - 4\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right)^2 + 4\alpha^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) \cos^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) \\ &= \left(1 - 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) - 4\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right)^2 + 4\alpha^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) (1 - \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)) \\ &= 1 - 4\left(\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) + 16\left(\gamma^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^4} + \alpha\gamma \frac{\Delta t^2}{\Delta x^3}\right) \sin^4\left(\frac{\pi k}{N}\right) + 4\alpha^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) \\ &= 1 + 16(\lambda^2 + \lambda\mu) \sin^4\left(\frac{\pi k}{N}\right) + 4(\mu^2 - 2\lambda - \mu) \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) \end{aligned}$$

tel que :

$$\lambda = \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad \mu = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

sous la condition

$$\lambda < -\mu < 2\lambda - \mu^2,$$

$$|A(k)|^2 < 1,$$

donc :

$$|A(k)| < 1.$$

Alors, le schéma est stable au sens de Von-Neumann.

4.5.3 Convergence

D'après le théorème de Lax, on obtient la convergence (consistance et stabilité implique la convergence).

• **Estimation d'erreur :**

$$|e_i^n(u)| = |u(x_i, t^n) - u_i^n|$$

$u(x_i, t^n)$ solution exacte.

u_i^n solution approchée.

En retranchant l'égalité (4.2) au schéma (4.1), on obtient l'équation suivante sur e_i^n :

$$\frac{1}{\Delta t}(e_i^{n+1} - e_i^n) + \frac{\alpha}{\Delta x}(e_i^n - e_{i-1}^n) - \frac{\gamma}{\Delta x^2}(e_{i+1}^n - 2e_i^n + e_{i-1}^n) = R_i,$$

ce qu'on peut encore écrire :

$$e_i^{n+1} = \left(\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) e_{i-1}^n + \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) e_i^n + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} e_{i+1}^n + \Delta t R_i, \quad (4.8)$$

sous la condition de stabilité (4.6), on obtient donc :

$$\| e^{n+1} \|_{\infty} \leq \| e^n \|_{\infty} + C_5(\Delta t + \Delta x)\Delta t,$$

$$\| e^n \|_{\infty} \leq \| e^{n-1} \|_{\infty} + C_5(\Delta t + \Delta x)\Delta t,$$

⋮

$$\| e^1 \|_\infty \leq \| e^0 \|_\infty + C_5(\Delta t + \Delta x)\Delta t.$$

Puis que $e^0 = 0$, alors on déduit des inégalités précédentes que $\| e^n \|_\infty \leq C_5 T(\Delta t + \Delta x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $n\Delta t = T$.

Le schéma est donc convergent.

4.6 Schéma explicite centré

Le problème continu (p_c) s'écrit en utilisant le schéma explicite centré sous la forme suivante :

$$(P_h) \begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \gamma \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i \in \{0, \dots, N+1\}, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad n \in \{1, \dots, M\}, \end{cases}$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) &= \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) &= \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

C'est un schéma explicite qui calcule la valeur inconnue u_i^{n+1} à l'étape t^{n+1} en fonction des valeurs connues $\{u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n\}$ à l'étape t^n .

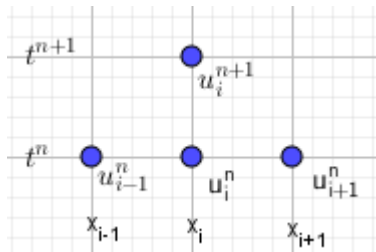


FIGURE 4.2 – Schéma explicite centré pour l'équation d'advection-diffusion.

C'est un schéma explicite en le temps et centré en l'espace alors :

$$u_i^{n+1} = \left(\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{i-1}^n + \left(1 - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_i^n + \left(-\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{i+1}^n,$$

alors :

$$U^{n+1} = AU^n,$$

$$A = \begin{pmatrix} (1 - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}) & (-\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}) & \dots & 0 \\ (\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}) & (1 - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (-\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}) \\ 0 & \dots & (\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}) & (1 - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}) \end{pmatrix}$$

où A matrice tridiagonale par bloc.

$$A \left(\left(\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right), \left(1 - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right), \left(-\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \right).$$

4.6.1 Consistance

En utilisant les développements de Taylor :

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_5, t^n), \xi_5 \in [x_{i-1}, x_i],$$

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_6, t^n), \xi_6 \in [x_i, x_{i+1}],$$

on obtient maintenant :

$$|R_i| \leq C_1 \Delta t + \alpha C_6 \Delta x^2 - \gamma C_3 \Delta x^2.$$

où

$$C_6 = \alpha \frac{1}{3} \sup \left| \frac{\partial^3}{\partial x^3} (u(\xi_5, t^n), u(\xi_6, t^n)) \right|.$$

On en déduit que :

$$|R_i| \leq M(\Delta t + \Delta x^2),$$

où

$$M = \max(C_1, C_3, C_6)$$

l'erreur de consistance est d'ordre 1 en le temps et d'ordre 2 en espace.

4.6.2 Stabilité

Stabilité en norme L^∞

On va étudier la stabilité en norme L^∞ .

$$u_i^{n+1} = \left(\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{i-1}^n + \left(1 - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_i^n + \left(-\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{i+1}^n.$$

Remarquons que l'on a bien :

$$1 - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1.$$

Pour que u_i^{n+1} soit combinaison convexe de u_i^n, u_{i+1}^n et u_{i-1}^n , il faut et il suffit donc que

$$1 - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0, \quad \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} \geq 0, \quad \text{et} \quad \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0.$$

L'inégalité $\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$ est toujours vérifiée. Les deux conditions qui doivent être

vérifiées par Δt et Δx s'écrivent donc :

1. $1 - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$, cette condition s'écrit encore :

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{2\gamma}. \tag{4.9}$$

2. $\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} \geq 0$, soit encore :

$$\Delta x < \frac{2\gamma}{\alpha}. \tag{4.10}$$

$$U^{n+1} \leq \left(1 - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) U^n$$

en norme L^∞ :

$$\| U^{n+1} \|_\infty \leq \| U^n \|_\infty.$$

On a de même :

$$\| U^n \|_\infty \leq \| U^{n-1} \|_\infty.$$

⋮

$$\| U^1 \|_\infty \leq \| U^0 \|_\infty .$$

Par récurrence, on obtient :

$$\| U^n \|_\infty \leq \| U^0 \|_\infty .$$

Le schéma centré est donc stable sous les deux conditions (4.9) et (4.10), donc :

$$\| U^n \|_\infty \leq \| U^0 \|_\infty , \text{ pour tout } n = 1, \dots, N.$$

Stabilité de Von-Neumann

On part l'équation (P_h)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \gamma \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

On multiplie cette équation par $e^{\frac{-2\pi i k j}{N}}$ et on somme sur j , on a alors grâce aux propriétés de la transformé de fourier :

$$\begin{aligned} & \frac{\widehat{U}^{n+1} - \widehat{U}^n}{\Delta t} + \alpha \frac{e^{\frac{2\pi i k}{N}} \widehat{U}^n - e^{\frac{-2\pi i k}{N}} \widehat{U}^n}{2\Delta x} - \gamma \frac{e^{\frac{2\pi i k}{N}} \widehat{U}^n - 2\widehat{U}^n + e^{\frac{-2\pi i k}{N}} \widehat{U}^n}{\Delta x^2} = 0, \forall k \in \mathbb{Z}, \\ \widehat{U}^{n+1} &= \left[1 - \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(e^{\frac{2\pi i k}{N}} - e^{\frac{-2\pi i k}{N}} \right) + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(e^{\frac{2\pi i k}{N}} - 2 + e^{\frac{-2\pi i k}{N}} \right) \right] \widehat{U}^n, \end{aligned}$$

alors on a :

$$\widehat{U}^{n+1} = A(k) \widehat{U}^n.$$

Il reste à voir que $| A(k) |^2$

$$A(k) = 1 - \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(e^{\frac{2\pi i k}{N}} - e^{\frac{-2\pi i k}{N}} \right) + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(e^{\frac{2\pi i k}{N}} - 2 + e^{\frac{-2\pi i k}{N}} \right),$$

$$\begin{aligned}
A(k) &= 1 - 2\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} + \left(-\alpha\frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) e^{\frac{2\pi ik}{N}} + \left(\alpha\frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) e^{-\frac{2\pi ik}{N}} \\
&= 1 - 2\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} + \left(-\alpha\frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) (\cos(\frac{2\pi k}{N}) + i\sin(\frac{2\pi k}{N})) + \left(\alpha\frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) (\cos(\frac{2\pi k}{N}) - i\sin(\frac{2\pi k}{N})) \\
&= 1 - 2\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} + 2\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} \cos(\frac{2\pi k}{N}) - i\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\frac{2\pi k}{N}) \\
&= 1 - 2\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} + 2\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} (1 - 2\sin^2(\frac{\pi k}{N})) - i2\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\frac{\pi k}{N}) \cos(\frac{\pi k}{N}) \\
&= 1 - 4\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{\pi k}{N}) - i\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x} \sin(\frac{\pi k}{N}) \cos(\frac{\pi k}{N}),
\end{aligned}$$

calculons $|A(k)|^2$:

$$\begin{aligned}
|A(k)|^2 &= \left(1 - 4\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{\pi k}{N})\right)^2 + 4\frac{\alpha^2\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{\pi k}{N}) \cos^2(\frac{\pi k}{N}) \\
&= 1 + 16\frac{\gamma^2\Delta t^2}{\Delta x^4} \sin^4(\frac{\pi k}{N}) - 8\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{\pi k}{N}) + 4\frac{\alpha^2\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{\pi k}{N}) (1 - \sin^2(\frac{\pi k}{N})) \\
&= 1 + 16\frac{\gamma^2\Delta t^2}{\Delta x^4} \sin^4(\frac{\pi k}{N}) - 8\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{\pi k}{N}) + 4\frac{\alpha^2\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{\pi k}{N}) - 4\frac{\alpha^2\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^4(\frac{\pi k}{N}) \\
&= 1 + 4\left(4\frac{\gamma^2\Delta t^2}{\Delta x^4} - \frac{\alpha^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\right) \sin^4(\frac{\pi k}{N}) + 4\left(\frac{\alpha^2\Delta t^2}{\Delta x^2} - 2\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}\right) \sin^2(\frac{\pi k}{N}) \\
&= 1 + 4(4\lambda^2 - \mu^2) \sin^4(\frac{\pi k}{N}) + 4(\mu^2 - 2\lambda) \sin^2(\frac{\pi k}{N}),
\end{aligned}$$

tel que :

$$\lambda = \gamma\frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad \mu = \alpha\frac{\Delta t}{\Delta x},$$

sous la condition

$$4\lambda^2 < \mu^2 < 2\lambda,$$

$$|A(k)|^2 < 1,$$

donc :

$$|A(k)| < 1,$$

Alors, le schéma est stable au sens de Von-Neumann.

4.6.3 Convergence

On vient de voir que le schéma est consistant à l'ordre 1 en le temps et l'ordre 2 en espace, de plus le schéma est stable au sens de Von-Neumann.

Donc il est convergent :

$$\widehat{e}^{n+1} = A(k)\widehat{e}^n.$$

4.7 Etude comparative

Ce tableau montre la différence entre les deux méthodes :

Schéma	Schéma explicite décentré	Schéma explicite centré
Erreur de consistance	$O(\Delta t + \Delta x)$	$O(\Delta t + \Delta x^2)$
Stabilité en norme L^∞	Stable L^∞ si condition C.F.L $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta x + 2\gamma}$	Stable L^∞ si conditions C.F.L $\Delta t < \frac{\Delta x^2}{2\gamma},$ $\Delta x < \frac{2\gamma}{\alpha}$
Stabilité de Von-Neumann	stable en Von-Neumann si condition $\lambda < -\mu < 2\lambda - \mu^2$	stable en Von-Neumann si condition $4\lambda^2 < \mu^2 < 2\lambda$

Remarque 4.7.1.

Le schéma explicite centré est plus consistant que le schéma explicite décentré. Ce qui implique une meilleur approximation.

Chapitre 5

Application

5.1 Problème modèle d'advection-diffusion

On considère l'équation d'advection-diffusion sans terme de forçage.

On se place sur un segment $[0, 6]$ en cm, avec conditions au bord homogène, et on considère une condition initiale.

On va choisir de valeurs pour α et γ qui vérifie les conditions de stabilité, ainsi que le temps d'intégration $T = 1s$.

Notre problème d'advection-diffusion est le suivant :

$$(P_c) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 & x \in [0, 6], t \in [0, 1], \\ u(x, 0) = u_0(x) = a & C.I., \\ u(0, t) = u(6, t) = 0 & C.L. \end{cases}$$

D'après le théorème (4.2.1) le (Pc) admet une solution unique.

5.2 Discrétisation

Prendre $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\Delta x = 0.6$, $\Delta t = 0.2$:

$$(P_h) \begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0, \\ u_i^0 = a, \quad i \in \{0, \dots, 11\}, \\ u_0^n = u_{11}^n = 0, \quad n \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases} \quad (5.1)$$

5.3 Consistance

Le schéma est consistant à l'ordre 1 en temps et l'ordre 2 en espace.

5.4 Stabilité

Le schéma est stable sous les conditions de CFL $\left(\Delta t < \frac{\Delta x^2}{2\gamma} \quad \text{et} \quad \Delta x < \frac{2\gamma}{\alpha} \right)$.
Car : $0.2 < 0.36$ et $0.6 < 1$ alors le schéma est stable.

5.5 Convergence

D'après le théorème de Lax on obtient la convergence.

5.6 Forme matricielle

$$u_i^{n+1} = \left(\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{i-1}^n + \left(1 - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_i^n + \left(-\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{i+1}^n \quad (5.2)$$

On pose :

$$K = \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} = \frac{0.2}{1.2} = \frac{1}{6},$$

et

$$R = \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{0.2}{0.72} = \frac{5}{18},$$

alors :

$$u_i^{n+1} = \frac{4}{9}u_{i-1}^n + \frac{4}{9}u_i^n + \frac{1}{9}u_{i+1}^n,$$
$$\Downarrow$$
$$U^{n+1} = AU^n,$$

tel que :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{9} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

où A matrice tridiagonale.

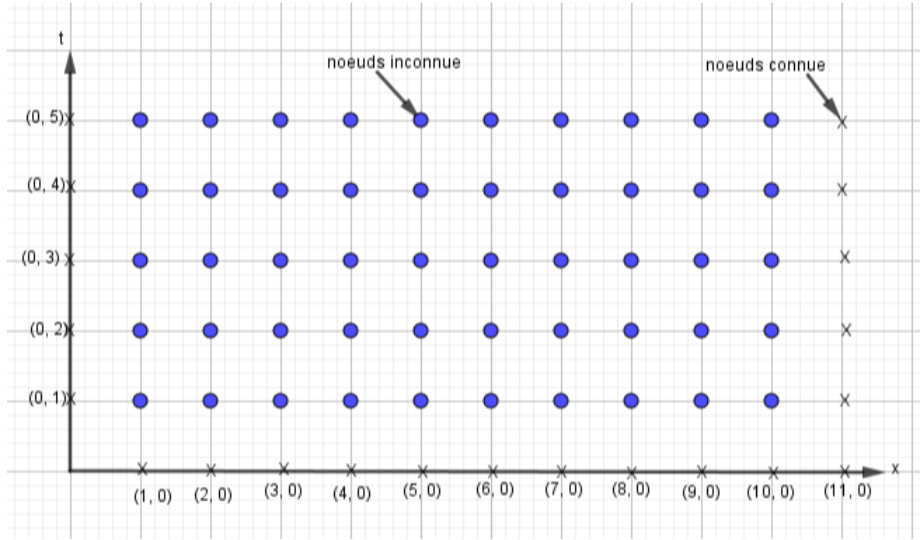
5.7 Résolution numérique

Les composantes de vecteur solution U est donné à partir le schéma suivant :

Remarque 5.7.1.

Numération du bas vers haut et de la gauche vers la droite :

$$\text{On a : } U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \end{pmatrix}$$



$$\text{Tel que : } u^1 = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ u_5^1 \\ u_6^1 \\ u_7^1 \\ u_8^1 \\ u_9^1 \\ u_{10}^1 \end{pmatrix} ; u^2 = \begin{pmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \\ u_5^2 \\ u_6^2 \\ u_7^2 \\ u_8^2 \\ u_9^2 \\ u_{10}^2 \end{pmatrix} ; u^3 = \begin{pmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \\ u_4^3 \\ u_5^3 \\ u_6^3 \\ u_7^3 \\ u_8^3 \\ u_9^3 \\ u_{10}^3 \end{pmatrix} ; u^4 = \begin{pmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \\ u_3^4 \\ u_4^4 \\ u_5^4 \\ u_6^4 \\ u_7^4 \\ u_8^4 \\ u_9^4 \\ u_{10}^4 \end{pmatrix} ; u^5 = \begin{pmatrix} u_1^5 \\ u_2^5 \\ u_3^5 \\ u_4^5 \\ u_5^5 \\ u_6^5 \\ u_7^5 \\ u_8^5 \\ u_9^5 \\ u_{10}^5 \end{pmatrix}$$

On utilise maintenant un programme Matlab pour la résolution de (5. 1) sous les conditions aux limites et initiales données.

% Ce programme qui calcul la solution approchée de la problème d'advection-diffusion :

clc

clear all;

a=input('a=');

L=input('L=');

T=input('T=');

Nx=input('Nx=');

Nt=input('Nt=');

```

% les valeurs d'entrée
dt=0.2; % pas de temps
t=0 : 0.2 : T;
dx=0.6; % pas d'espace
x=0 : 0.6 : L;
alpha=1;
gamma=0.5;
CI=a; % condition initiale
CL=0; % condition aux limites
% calculon K, R
K=((alpha*dt)/(2*dx));
R=((gamma*dt)/(dx^2));
% Dimension de la géometrie
L=6; % la longueur
T=1; % le temps
% le maillage
Nx=abs(L/dx); % nombre des noeuds selon x
Nt=abs(T/dt); % nombre des noeuds selon t
% Définition les condition aux limites et la condition initial
U(1 :Nx, 1)=CI;
U(1, 1 :Nt)=CL;
U(Nx+1, 1 :Nt)=CL;
%Résolution du problème
for i=2 :abs(Nx)
for j=1 :abs(Nt)
U(i, j+1) = (K+R)*U(i-1, j)+(1-2*R)*U(i, j)+(-K+R)*U(i+1, j)
end
end
disp(U)

```

Les résultats

Un tableau montrant les résultats du programme Matlab en donnant la valeur $a=1$ à la condition initiale

$x \backslash t$	$u^1(t^1 = 0.2)$	$u^2(t^2 = 0.4)$	$u^3(t^3 = 0.6)$	$u^4(t^4 = 0.8)$	$u^5(t^5 = 1)$
$x_1 = 0.6$	0.5556	0.2469	0.1097	0.0488	0.0217
$x_2 = 1.2$	1.0000	0.6914	0.4170	0.2341	0.1257
$x_3 = 1.8$	1.0000	0.8889	0.7023	0.4975	0.3252
$x_4 = 2.4$	1.0000	0.8889	0.7901	0.6633	0.5159
$x_5 = 3$	1.0000	0.8889	0.7901	0.7023	0.6070
$x_6 = 3.6$	1.0000	0.8889	0.7901	0.7023	0.6243
$x_7 = 4.2$	1.0000	0.8889	0.7901	0.7023	0.6243
$x_8 = 4.8$	1.0000	0.8889	0.7901	0.7023	0.6243
$x_9 = 5.4$	1.0000	0.8889	0.7901	0.7023	0.6243
$x_{10} = 6$	0.8889	0.8395	0.7682	0.6926	0.6200

Bibliographie

- [1] Alfio. Quarteroni, Riccardo. Sacco, Fausto. Saleri, *Méthodes Numériques Algorithmes, analyse et applications*, Springer-Verlag Italia, Milano 2004.
- [2] Dr Harnane. Yamina, *Méthodes numériques I-Méthodes des différences finies*, Cours, Université- Larbi Ben M'hidi-Oum El-Bouaghi, 2015-2016.
- [3] Eric Goncalvès, *Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO*, septembre 2005.
- [4] Fatima ezzahra El yahyaoui, *Résolution numérique des équation aux dérivées partielles elliptiques*, Université Sidi Mohammed Ben Abdellah, 09 juin 2016.
- [5] Francois Cuvelier, *Méthodes numériques, Notes de cours*, Université Paris XIII.
- [6] G.stoltz, *Intégration des équations aux dérivées partielles*, paris, 12 février 2015.
- [7] Haim Brezis, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, paris, 1987.
- [8] J-F. Scheid, *Méthodes numériques pour la dynamique des fluides*, Université Lorraine Master 2 IMoi, 2011-2012.
- [9] J.L.Lions, *E.Magenes-Problème aux limites non homogènes et applications*, Vol 12, 1968.
- [10] Laurène.Jouve, *Introduction aux méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP)*, octobre 2017.
- [11] P.A. Raviart, *J.M. Thomas-introduction à l'analyse numérique des équation au dérivées partielles*, Masson, 1983.
- [12] P.G.Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique Matricielle et à l'optimisation*, Masson paris, 1988.
- [13] Raphaèle Herbin, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Université Aix Marseille 1, 26 octobre 2011.

- [14] R. B. Kellogg, A. Tsan, *Analysis of some difference approximations for a singularly perturbed problem without turning points*, Math Comp, 32(1978), 1025-1039.
- [15] Sébastien. Charnoz et Adrian. Daerr, *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*, Univ Paris 7.
- [16] S.S. Suthersan, *Remedication engineering : design concepts*. CRC Press, 1996.

Résumé

Le but de ce mémoire est la présentation de l'équation d'advection-diffusion et l'application de la méthode de D.F pour la résolution numérique, dans le but d'avoir le meilleur schéma, en prenant en considération la consistance, la stabilité et la convergence.

Mots clés :

diffusion - advection - différences finies - stabilité - consistance - convergence.

Abstract

the purpose of this thesis is to present the advection-diffusion equation by applying the method of finite differences to achieve the best method relying on consistency, stability and convergence.

Keys words:

diffusion - advection - finite differences - stability - consistency - convergence.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة يتمثل في عرض معادلة الانتشار-التأفق بتطبيق طريقة الفروق المنتهية بهدف الوصول الى أفضل طريقة بالاعتماد على الملائمة، الاستقرار و التقارب.

الكلمات المفتاحية:

الانتشار - التأفق - الفروق المحدودة - الاستقرار - الملائمة - التقارب.