

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la  
Recherche Scientifique



Université Echahid Hamma Lakhdar d'El-Oued

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**LICENCE ACADEMIQUE**

Domaine : Sciences et Technologies

Spécialité : Génie mécanique

Option : mécanique énergétique

**Thème:**

**DISCRETISATION PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIS  
D'UN PHENOMENE DE TRANSFERT DE CHALEUR**

*"cas d'un champs de température à l'interface d'un contact dynamique en  
régime établi"*

**Encadreur :**

- Mr. Zemmar Nabil

**Présenté par :**

- Ben Moussa Ilyes

- Farhat Brahim

2014/2015

# Dédicace

*Je dédie ce Modest travail :*

*À mes très chers parents, mes frères et mes sœurs et à  
tous ma familles*

*Pour leurs soutiens constant et leurs patiences qu'ils  
nous ont témoigné*

*À tous ce qui est attribue de prés ou de loïn à la  
réalisation de ce mémoire*

Ben Moussa Ilyes

# Dédicace

*Je dédie ce Modest travail :*

*À mes très chers parents, mes frères et mes sœurs et à  
tous ma familles*

*Pour leurs soutiens constant et leurs patiences qu'ils  
nous ont témoigné*

*À tous ce qui est attribue de prés ou de loïn à la  
réalisation de ce mémoire*

Farhat Brahim

# Remerciement

*Nos vifs remerciements s'adressent :*

*À tous nos enseignants de mécanique énergétique*

*À nos encadreur monsieur Lemmar Nabil*

*À nos enseignant Boukhari Ali*

Ben Moussa Ilyes et Farhat Brahim

# Sommaires

Liste des figures .....	ii
Notation générales.....	iv
Introduction.....	1
<b>CHAPITRE I :LE CONTACT SEC : GENERALITES ET ASPECTS THERMIQUES .....</b>	<b>3</b>
1.1.LE FROTTEMENT : PHENOMENE MECANIQUE.....	3
1.2.LE FROTTEMENT : ASPECT TRIBOLOGIQUES .....	5
1.2.1. La mécanique en Tribologie.....	5
1.2.2. Développement de la lubrification hydrodynamique, de la mécanique du frottement et de l'usure.....	5
1.3 LE FROTTEMENT : ASPECT THERMIQUE.....	6
1.3.1. Passage de la chaleur dans les corps en contact .....	6
1.3.2. Modèles thermiques avec contact parfait on lisse.....	8
1.3.3. Modèle thermique avec contact imparfait.....	10
a. Le contact statique.....	10
b. Le contact glissant.....	13
Chapitre III : EXEMPLE APPLICATION .....	34
2.1.introduction.....	20
2.2.Méthodes dediscrétisatio.....	20
2.2.1Méthode des différences finies.....	20
2.2.2.Méthode des éléments finis.....	20
2.2.3.Méthode des volumes finis.....	21
2.2 Classification des équations aux dérivées partielles.....	21
2.3.1. Définitions .....	21
2.3.2. Classification mathématique des E.D.P linéaires du 2ème ordre (cas de deux variables indépendantes).....	21
2.3.3- Classification mathématique dans le cas général (n variables indépendantes.....	22
2.4. Classification physique des E.D.P .....	22
2.5 . Approximation des dérivées par des Différences finies.....	23
2.5.1- Discrétisation du domaine.....	23
2.5.2- Approximation des dérivées .....	24
2.5.2.1- Approximation à l'ordre 1 en h de la dérivée première.....	24
2.5.2.2 Approximation à l'ordre 2 en h de la dérivée première par les différences centrées .....	25
2.5.2.3- Approximation à l'ordre 1 en h de la dérivée seconde .....	25
2.5.2.4 . Approximation à l'ordre 2 en h de la dérivée seconde.....	25
2.5.2.5 .Approximation à l'ordre 2 en h de la dérivée première par les différences à droite ou à gauche .....	26
2.5.2.5 .Approximation de $U_y$ et $U_{yy}$ .....	26
2.5.2.6 .approximation de la dérivée croisée $U_{xy}$ .....	27
2.6.Méthodes de résolution des E.D.P- Paraboliques.....	27
2.6.1 Méthode explicite de résolution .....	28
2.6.2. Méthode implicite .....	29
2.6.3- Schéma explicite inconditionnellement stables .....	31
2.6.4- Application des méthodes explicite et implicite au cas général d'une équation aux dérivées partielles linéaires .....	31

CHAPITRE III : CHAMPS DE TEMPERATURE A L'INTERFACE D' UN CONTACT DYNAMIQUE EN REGIME ETABLI .....	32
3.1 Définition du système thermique.....	32
3.2 Les Equation Du Problème .....	33
3.3 HYPOTHESES DU CONTACT TRIBOLISSE.....	34
3.3.1.Modélisation thermique de l' interface.....	35
3.3. 2. Résolution du système d équations.....	35
3.3. 3. Schématisation bidimensionnelle du système par différences finie .....	35
3.3.3.1.Discrétisation du Domaine.....	35
3.3.3.2.Les équation aux différences fini.....	37
3.3. 3.2.1.discrétisation aux nœuds (i,j).....	39
3.3. 3.2.2.discrétisation au nœuds (i,j) avec $j=1$ .....	40
3.3. 3.2.3.discrétisations aux nœuds (i,j) avec $j_0 < j < j_M$ .....	41
3.3.3.2.4.discrétisations au nœuds (i,j) avec $j = j_M$ .....	41
3.3.3.2.5. III.3.2.5 discrétisations au nœuds (i,j) avec $j = j_0$ .....	42
3.3. 3.3.expression du flux $\Phi_g$ .....	43
VI.Conclusion.....	44

# Table des illustrations

---

## Listes des figures

<b>Figure. . I.1. :</b> Les differences forms d' energies mises en jeu au cours du frottement.....	<b>3</b>
<b>Figure. . I.2 :</b> Etapes du problème de contact thermique .....	<b>6</b>
<b>Figure. . I.3 :</b> Caractérisation de la surface .....	<b>7</b>
<b>Figure . I.4 :</b> Partage du flux de chaleur dans un contact .....	<b>9</b>
<b>Figure. . I.5 :</b> Champ de température a l' interface de contact .....	<b>10</b>
<b>Figure. . I.6 :</b> Effet de constriction des lignes de flux .....	<b>11</b>
<b>Figure. . I.7 :</b> Schematisation par bandes paralleles d'un contact thermique.....	<b>12</b>
<b>Figure. . I.8 :</b> Resistance thermique de contact glissant .....	<b>14</b>
<b>Figure. . I.9 :</b> Modele thermique microscopique du contact glissant .....	<b>15</b>
<b>Figure. . I.11 :</b> Distribution des asperites dans la zone de contact .....	<b>17</b>
<b>Figure. . I.12 :</b> Representation du schema resistif .....	<b>17</b>
<b>Figure. . II.1 :</b> maillage.....	<b>23</b>
<b>Figure. . II.2.a :</b> : Maillage dans le cas general.....	<b>28</b>
<b>Figure. . II.2.b :</b> la méthode explicite .....	<b>28</b>
<b>Figure. . II.3. :</b> la méthode implicite .....	<b>30</b>
<b>Figure. . III.1 :</b> Modélisation DU CONTACT DE DEUX ANNEAU CONCRNTRIQUE....	<b>31</b>
<b>Figure. . III.2 :</b> discrétiser les circonférences .....	<b>36</b>
<b>Figure. . III.3 :</b> discrétiser les circonférences .....	<b>36</b>

## Notation générales

---

# NOTATIONS GENERALES

### Notations grecques:

- $\alpha$  : Coefficient de generation de flux (sans dimension)  
 $\delta$  : Hauteur des asperités (m)  
 $\phi$  : Flux de chaleur (W)  
 $\eta$  : Part du flux dissipée par le phénomène d'usure (sans dimension)  
 $\varphi$  : Flux de chaleur surfacique ( $W.m^2$ )  
 $\lambda$  : Conductivité ( $W.m^{-1}.k^{-1}$ )  
 $\mu$  : Coefficient de frottement (sans dimension)  
 $\rho$  : Densité ( $kg.m^{-3}$ )  
 $\xi$  : Effusivité thermique =  $\sqrt{(\lambda. \rho c)}$  ( $Jm^{-2}k^{-1}s^{-0.5}$ )

### Notations latines:

- $a$  : Diffusivité thermique =  $\lambda/\rho c$  ( $m^2.s^{-1}$ )  
 $c$  : Capacité calorifique massique (chaleur massique) ( $J.kg^{-1}.k^{-1}$ )  
 $d, e$  : Epaisseur (m)  
 $h$  : Coefficient de convection ( $W.m^{-1}.k^{-1}$ )  
 $k_B$  : Constante de Boltzmann  
 $P$  : Coefficient de partage de flux (sans dimension)  
 $p$  : Pression de contact ( $N.m^{-2}$ )  
 $q$  : Flux de chaleur volumique ( $W.m^{-3}$ )  
 $t$ : Temps (s)  
  
 $t_f$ : Temps de freinage (s)  
  
 $R_a$  : Resistance thermique due a la présence d'aspérité ( $k. w^{-1}$ )  
 $R_c$  : Resistance thermique de constriction statique ( $k. w^{-1}$ )  
 $R_{c_g}$  : Resistance thermique de constriction glissant ( $k. w^{-1}$ )  
 $R_p$  : Resistance thermique dans le cas d'un contact parfait ( $k. w^{-1}$ )  
 $R_s$  : Resistance thermique de contact statique ( $k. w^{-1}$ )  
 $R_r$ : Resistance thermique dans le cas d'un contact réel ( $k. w^{-1}$ )  
 $s$  : Surface de contact d'une aspérité ( $m^2$ )  
 $S$  : Surface ( $m^2$ )  
 $T$  : Température ( $^{\circ}C$ )  
 $T_0$  : Température initiale ( $^{\circ}C$ )  
 $V$  : Vitesse ( $m.s^{-1}$ )

### Indice:

- 1,2 : Numéro de face  
 $d$  : Disque  
 $g$  : Garniture

## **CHAPITRE I: LE CONTACT SEC : GENERALITES ET ASPECTS THERMIQUES**

La littérature scientifique regorge de multitudes d'études sur le contact sec frottant et dans des domaines variés. Dans ce chapitre, on s'attachera à faire une synthèse pour en tirer les principales conclusions. Le contact sec frottant est un problème thermomécanique mais on s'attachera principalement à bien comprendre et maîtriser les phénomènes thermiques. Pour cela, une synthèse des différents modèles thermiques analytiques de contact sec sera élaborée. Une discussion sera ensuite menée sur le phénomène de génération de chaleur par frottement qui est un paramètre capital dans la détermination des températures d'un contact frottant.

### **1.1. Le frottement: phénomène mécanisme**

Le frottement est engendré par le déplacement relatif tangentiel de deux surfaces en contact. La résistance au frottement est caractérisée par la force  $T$  qui s'oppose au mouvement. On appelle coefficient de frottement,  $\mu$ , le rapport entre la résistance de frottement  $T$  et la force normale  $F$  appliquée entre les deux surfaces en contact :

$$\mu = \frac{T}{F} \quad (1.1)$$

La résistance au frottement a deux origines principales (Courtel 1978) :

- ❖ La présence des aspérités sur les surfaces de contact. En général, les états de surface des pièces constituant un ensemble mécanique nous apparaissent à l'œil nu relativement lisses. Cependant, les surfaces ont des défauts dont les dimensions sont de l'ordre du dixième de micromètre à quelques dizaines voire quelques centaines de micromètres. L'effort à fournir pour permettre le glissement relatif des solides en contact, même en présence d'aspérités, est celui nécessaire aux déformations élastiques ou plastiques, voire à la rupture d'aspérités, de destruction des couches d'oxydes, etc. Notons que l'énergie élastique n'est pas restituée en totalité sous forme de travail lorsque les solides reprennent leur forme initiale.
  
- ❖ Adhérence entre les surfaces. La mise en contact de deux solides revient à rapprocher de manière significative des atomes. Sous l'action des forces de Van Der Waals (pour des charges faibles, correspondant à des distances entre atomes relativement importantes), puis des forces atomiques (pour des charges plus élevées, correspondant à des distances entre atomes plus petites), des liaisons plus ou moins fortes vont s'établir entre ces atomes. Comme la surface du contact glissant est continuellement renouvelée, il s'ensuit une perte d'énergie qui participe à la résistance au frottement. Suivant la qualité des liaisons créées entre les surfaces en fonction des

conditions de contact, il apparait alors des déformations plastiques et/ou élastiques des solides pouvant aller jusqu'à la rupture, voire au transfert d'un solide vers l'autre. Ces phénomènes, conséquences de l'adhérence, dissipent de l'énergie et participent donc aussi à la résistance au frottement.

La résistance au frottement correspond donc à une dissipation d'énergie. La puissance dissipée correspond au travail de la force de traction  $T$  et s'exprime par la relation suivante :

$$\dot{\phi} = TV \quad (1.2)$$

La densité de flux dissipée est alors égale à :

$$\varphi = \frac{\dot{\phi}}{S} \mu S \quad (1.3)$$

où  $P$  est la pression moyenne dans le contact.

La figure suivante (Figure I-1) donne la proportion des différentes formes sous lesquelles l'énergie dissipée est transformée [Uetz et al. 1978]. Elle permet de mettre en évidence la diversité des réactions ayant lieu au cours du frottement. Plus de 90% de l'énergie mise en jeu est dissipée sous forme de chaleur.

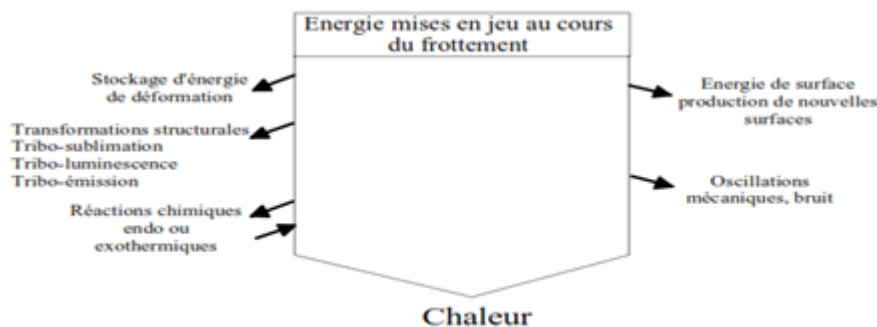


Figure I-1: Les différentes formes d'énergie mises en jeu au cours du frottement

Outre la dissipation d'énergie au cours du frottement, la préoccupation des mécaniciens est la connaissance de la surface de contact  $S_c$  et des contraintes dans les solides en contact. La première théorie a été proposée par Hertz. Pour un contact statique, elle suppose une déformation élastique des solides et, connaissant la force normale au contact, elle permet de calculer la surface de contact ainsi que le champ des contraintes dans les solides. Mindlin (Mindlin 1949) a modifié la théorie de Hertz afin de tenir compte de la vitesse de déplacement dans le cas d'un contact glissant. Johnson et al. [Johnson et al. 1971] ont introduit l'effet d'adhérence dans le contact, qui n'est pas négligeable dans le cas d'efforts normaux très faibles. Ces différentes théories permettent de calculer la surface de contact apparente. Cependant, du fait de la présence d'aspérités, suivant les propriétés des matériaux et des conditions de fonctionnement, la surface réelle de contact peut varier de quelques pour-cents à 100% de la surface apparente de contact, en fonction de la vitesse de déplacement relative, de la pression de contact et des propriétés mécaniques des matériaux [Kennedy 1984]. Un modèle permettant de calculer la surface réelle de contact a été proposé par Greenwood et Williamson [Greenwood et al. 1966] :

$$A = \pi \eta A_a P^{-1} R^{1/2} \sigma^{1/2} F^{1/2} \quad (h) \quad (1.4)$$

où  $A_a$  est l'aire de contact apparente,  
 $\eta$  est la densité d'aspérité  $N = \eta A_a$

N étant le nombre d'aspérités,

P est la résistivité pour un aspérité, R est le rayon de courbure des aspérités,

$\sigma$  est la écart-type,

$$F_n(h) = \int_h^{\infty} (s - h)^n \phi^*(s) ds$$

h, la séparation standard, est égale à  $dI$ , d étant la distance de séparation entre les plans de références des deux solides en contact.

Avec ce modèle, plusieurs hypothèses sont nécessaires pour caractériser l'état de surface des solides en contact:

- les surfaces sont isotropes,
- le sommet des aspérités est sphérique et le rayon de la sphère (R) est constant pour toutes les aspérités,
- le nombre d'aspérités par unité de surface est connu (D),
- la hauteur des aspérités par rapport au plan moyen est une variable aléatoire et suit une loi de distribution gaussienne d'écart-type a,
- les aspérités sont mécaniquement indépendantes, ce qui signifie que la déformation d'une aspérité ne dépend pas de la déformation des aspérités voisines, la hauteur de chaque aspérité est une variable indépendante, quelle que soit la hauteur des aspérités voisines,
- le contact entre deux surfaces dont les écarts types de la loi de distribution des hauteurs des aspérités sont  $\sigma'$  et  $\sigma''$  est mécaniquement équivalent au contact entre une surface plane parfaitement lisse et une surface rugueuse dont l'écart type de la hauteur des aspérités est  $\sigma = \sqrt{\sigma'^2 + \sigma''^2}$
- le comportement mécanique des matériaux est un comportement élastique caractérisé par le module d'Young,  $E_i$  et le coefficient de Poisson  $\nu_i$  ( $i=1,2$ )

Les trois paramètres R, D, et  $\sigma$  peuvent être déterminés à partir d'un relevé profil métrique classique. Ce modèle montre que la caractérisation des surfaces n'est pas simple et que ce problème reste toujours d'actualité.

## 1.2. Le frottement: aspect tribologiques

La tribologie regroupe la lubrification, le frottement et l'usure. C'est une science pluridisciplinaire qui fait appel à la Mécanique et à la Physique des volumes et des surfaces (*Godet 1983, Berthier 1988*),

### 1.2.1. La mécanique en tribologie

Le rôle de la mécanique en tribologie varie selon le domaine étudié. On peut isoler : la lubrification hydrodynamique, la mécanique du frottement ou frottement sec et de l'usure.

La lubrification hydrodynamique, ou lubrification en film continu, est un domaine privilégié de la mécanique des fluides où une dimension de l'espace, l'épaisseur du film, est petite devant les deux autres. Contrairement à la lubrification hydrodynamique, la mécanique du frottement et de l'usure ne dispose pas d'un formalisme complet. Elle s'appuie sur la mécanique des contacts ou théorie des contraintes dans les massifs en contact.

### **1.2.2.. Développement de la lubrification hydrodynamique, de la mécanique du frottement et de l'usure**

La lubrification hydrodynamique et la mécanique des contacts présentent des degrés d'avancement ou des capacités à décrire la réalité très différents.

La lubrification apporte une solution complète aux problèmes mécaniques qui relèvent de sa compétence en donnant pour une condition de fonctionnement donnée et en tout point du contact:

le profil de vitesse au travers du film visqueux qui sépare les pièces en contact,  
la distribution des contraintes normales et tangentielles,

D'où Ton tire la portance, et le frottement visqueux. On note que la lubrification hydrodynamique considère aussi bien les aspects statiques que dynamiques.

Par contre, la mécanique des contacts donne pour une charge normale, une géométrie et des matériaux donnés, la distribution des contraintes normales et les déplacements correspondants des corps en contact. Le calcul des contraintes tangentielles et des déplacements correspondants, engendrés dans les systèmes glissants repose, quant à lui, sur des hypothèses peu améliorées. On dispose pour le frottement de la loi d'Amontons-Coulomb. La mécanique des contacts est donc performante pour l'analyse des contacts statiques mais, contrairement à la théorie hydrodynamique, elle est quasi-inopérante en dynamique. La mécanique de l'usure dispose d'une formule, la loi d'Achard, qui grâce à un paramètre ajustable peut rendre compte, mais uniquement a posteriori, de résultats obtenus dans le cas stationnaire.

Le décalage entre les aspects formels de la lubrification hydrodynamique et de la mécanique du frottement et de l'usure est donc important.

#### **1.3.1. Le frottement: aspect thermique**

La température maximale atteinte dans le contact est au moins en partie à l'origine des transformations physico-chimiques pouvant induire les dégradations les plus sévères de l'état de surface et de leur comportement tribologique. L'objectif des premières études a donc été de déterminer ces températures.

##### **1.3.1. Passage de la chaleur dans les corps en contact**

Le problème du contact thermique peut être décomposé en deux étapes relativement indépendantes [Saigon et al. 1997] (Figure II-2).

Dans un premier temps, il est nécessaire d'analyser l'état géométrique de l'interface, et à l'aide d'un modèle mécanique, de déterminer les caractéristiques géométriques (hauteur des aspérités, etc.) de la surface. Dans une seconde phase, on utilisera ces résultats de manière à pouvoir établir la relation constitutive des résistances thermiques de contact.

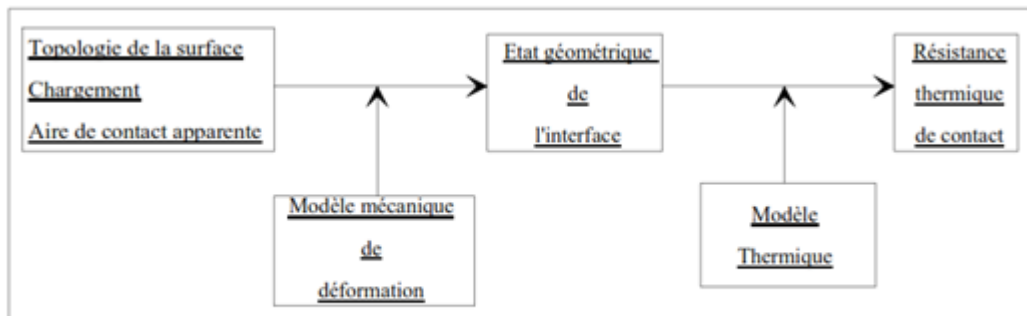


Figure I-2 : Etapes du problème de contact thermique

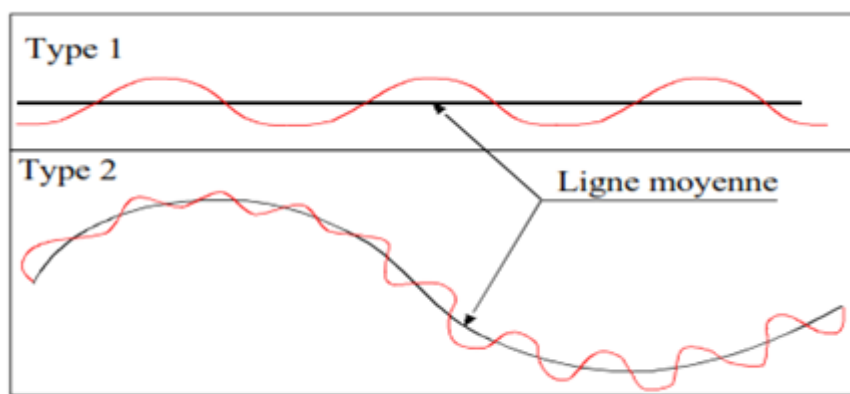
**Etape 1 : Modèle mécanique de déformation**

Figure I-3 : Caractérisation de la surface

L'analyse des surfaces réunit trois étapes : la caractérisation de la surface, la distribution des hauteurs et des rayons de courbures des aspérités de la surface, le mode de déformation des aspérités en contact.

**La caractérisation de la surface :**

L'hétérogénéité du contact résulte des défauts géométriques des surfaces en contact. D'après Mazo, on peut distinguer deux types de surface [Mazo et al. 1978] (Figure II-3) : les surfaces planes ou de type 1 possédant des rugosités uniformément réparties d'amplitudes voisines et dont la ligne moyenne du profil est plane, les surfaces ondulées ou de type 2 qui possèdent des rugosités analogues uniformément réparties mais dont la ligne moyenne présente des ondulations de plus grande longueur d'onde et d'amplitude nettement supérieure à celle des rugosités.

Par cette approche, on néglige les surfaces comprenant des aspérités d'amplitudes différentes.

**La distribution des hauteurs et des rayons de courbure des aspérités :**

Cette étape nécessite tout d'abord une mesure par profil métrique. Le principe retenu quasi-universellement consiste à mesurer, au moyen d'un capteur de déplacement, les variations de l'altitude de la surface des pièces le long d'une génératrice rectiligne. Pour ce faire, on trouve actuellement deux grandes familles d'appareils [Robe-Valloire et al. 1992]

Les profil mètres travaillant par contact. Un stylet, termine par une pointe pyramidale en diamant tronquée par une calotte sphérique de 1 à 10 µm de diamètre, est appliqué sur la pièce avec un effort normal maintenu constant (typiquement de l'ordre du milli newton). La vitesse de déplacement du stylet est, en général, inférieure au millimètre par seconde de manière à limiter les effets dynamiques (décollement du stylet, variation de l'effort normal de contact),

Les profil mètres sans contact. Pour avoir des mesures ponctuelles, la technique optique fait largement appel à des faisceaux convergents qui sont réfléchis par la surface à caractériser. Le principe de mesure consiste à utiliser les effets du changement de chemin optique occasionné par les variations d'altitude du point de réflexion. Du fait de l'absence de contact, cette méthode permet d'avoir d'une part des vitesses de déplacement très supérieures à celles de la profilométrie avec contact et d'autre part d'avoir la garantie de n'obtenir aucune déformation des aspérités.

À partir de cette mesure profilométrique, il est alors possible de déterminer la hauteur à vide, le rayon de courbure ainsi que le nombre d'aspérités en contact par des techniques statistiques (mesure de rehaut-type, de la densité de probabilité, etc.).

### **Le mode de déformation des aspérités en contact:**

On distingue essentiellement deux théories dépendant du mode de chargement que subit le contact. Ces deux théories sont les suivantes :

La théorie de Hertz relative au chargement normal du contact,

La théorie de Mindlin relative au chargement normal et tangentiel du contact.

Cela permet d'obtenir, notamment, l'aire de contact réelle, la hauteur des aspérités sous charge statique ainsi que la valeur de la pression apparente.

### **Etape 2 : Modèle de la résistance thermique de contact:**

De nombreuses études ont porté sur la détermination des températures moyennes des surfaces dans un contact frottant. Ces différents travaux peuvent être classifiés en deux catégories, les contacts parfaits ou lisses et les contacts imparfaits ou avec aspérités.

### **1.3.2. Modèles thermiques avec contact parfait ou lisse**

Blok [Blok 1937], puis Jaeger [Jaeger 1942], proposent tous deux le concept de température flash. Ils considèrent un solide semi-infini soumis à une source thermique en mouvement. La forme de la source peut être circulaire, carrée ou bande, elle dépend de la forme du contact. La répartition de la densité de flux n'est pas forcément uniforme. En utilisant l'équation de la chaleur, ces auteurs ont déterminé le profil de température à la surface du solide semi-infini en régime permanent. La température maximale obtenue est alors appelée température flash. Cette approche est applicable, dans le cas où la pression au contact est telle que la surface réelle de contact est égale à la surface apparente.

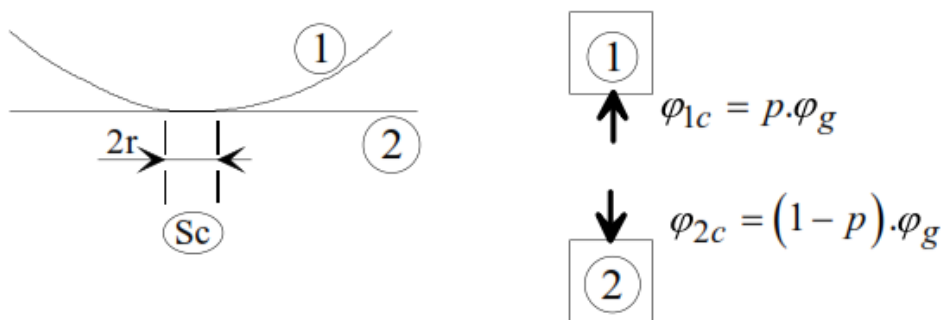
Ling et al. [Ling et al. 1964] proposent une autre démarche pour calculer la température maximale atteinte au contact. Cette analyse est basée sur le fait que la surface réelle de contact n'est pas toujours égale à la surface apparente de contact. Dans ce cas, le contact entre les deux solides a lieu en quelques points et Ling a fait l'hypothèse que ces points sont distribués de manière aléatoire sur la surface apparente de contact. Le flux dû au frottement est généré au niveau de ces points de contact. Pour un même flux généré et la même surface apparente de contact, la température moyenne de contact correspond à la température moyenne qui serait obtenue avec la méthode de Blok et Jaeger et que Ling appelle la température probable. C'est la température que l'on pourrait observer avec l'aide de moyens de mesure classiques. Par contre, la température maximale obtenue, que Ling appelle encore un flash de température, peut être beaucoup plus

importante que la température flash calculée par Blok et Jaeger.

Pour les deux approches, le principal problème est de déterminer la quantité de flux respective entrant dans les deux solides.

Ce dernier point est résolu par V émotte [Ver nolle 1956] qui détermine la fraction de flux entrant dans les solides en contact de telle manière que les températures moyennes des deux surfaces en contact soient identiques. C'est ce que Ton appelle l'hypothèse du contact parfait. Les solides sont modélises indépendamment l'un de l'autre et sont couplés par l'intermédiaire du coefficient de partage des flux  $p$ , qui correspond a la fraction du flux génère  $\langle j \rangle$  entrant dans le solide 1. La fraction complémentaire entre dans le solide 2 (Figure I-4) telle que:

$$\phi_{1c} = p \cdot \phi_g \quad \text{et} \quad \phi_{2c} = (1 - p) \phi_g \quad (1.5)$$



**Figure II-4 : Partage du flux de chaleur dans un contact**

On doit a V émotte [Vemotte 1956], la loi selon laquelle la chaleur, produite par le frottement de deux corps semi-infinis de même surface de contact, se partage proportionnellement aux effusivités, notées  $2$ , de chaque matériau. Le coefficient de partage est alors exprime par :

$$p = \frac{1}{1 + \frac{E_2}{E_1}} \quad (1.6)$$

Ce coefficient de partage est obtenu en exprimant les densités de flux pour les deux solides en contact..

La loi de Vernotte est, pour les milieux finis, applicable dans les premiers instants de frottement ne dépassant pas une fraction de la constante de temps la plus faible des deux matériaux.

Si on considère le cas d'un mur semi-infini soumis a un flux uniforme de chaleur obtenue à partir de l'équation (1.5). En régime transitoire, l'équation de la conduction est donnée dans le cas unidimensionnel par :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{soit} \quad a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Avec une condition initiale et des conditions aux limites en termes températures telles que :

$$T(z, 0) = T_0 ; T(\infty, 0) = T_0 ; \varphi(0, t) = \varphi_0$$

On obtient une distribution des températures telle que [Carslaw et al. 7955]:

$$T(z, t) = T_0 + \frac{2\varphi_0}{\lambda} e^{\left(\frac{-z^2}{4at}\right)} - \frac{\varphi_0 z}{\lambda} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) \quad (1.7)$$

où  $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$  et  $\operatorname{erf}(x)$  est la fonction erreur.

La température de surface ( $z = 0$ ) est alors :

(1.8)

$$T_s = T(0, t) = T_0 + \frac{2\varphi_0}{\lambda} \sqrt{\frac{at}{\pi}}$$

Le cas du contact parfait permet une première évaluation de révolutions de la température d'interface. Elle ne considère qu'un seul des deux corps en contact dans le calcul des températures. Le second solide est pris en compte dans l'évaluation du coefficient de partage de flux.

Plus récemment, Abdel-Aal [Abdel-Aal 1999] a établi une autre expression du coefficient de partage de flux dans le cas d'un contact parfait glissant. Il considère le cas d'une surface circulaire de rayon  $R$  glissant sur une surface plane avec une vitesse linéairement décroissante. Le coefficient  $p$  s'exprime : (1.9)

$$p = \frac{\xi_1 \cdot F_1}{\xi_1 \cdot F_1 + \xi_2 \cdot F_2}$$

Avec

$$F = 1 - e^{-\left(\frac{R^2}{2at}\right)} \cdot \left[ I_0\left(\frac{R^2}{2at}\right) + I_1\left(\frac{R^2}{2at}\right) \right] \quad (1.10)$$

La fonction  $F$  reflète la dépendance du coefficient de partage de flux vis-à-vis du paramètre de contact  $R$  et de la durée de contact. Il montre que pour des grandes vitesses, le coefficient de partage est identique à celui obtenu par l'équation (2.6). Il obtient une décroissance importante du coefficient  $p$  lorsque la vitesse de glissement devient faible

### 1.3.3. Modèle thermique avec contact imparfait

De nombreux auteurs se sont intéressés au frottement d'une aspérité sur une surface ainsi qu'à la détermination des températures moyennes de contact [Denape et al. 2000]. L'hypothèse de contact imparfait permet de classer ces études en deux catégories, le contact statique et le contact glissant. Pour chacun de ces types de contact, la littérature nous donne deux sous-catégories, la notion de régime thermique permanent et transitoire

#### a. Le contact statique

##### *i. En régime thermique permanent:*

Quand deux solides sont en contact, les irrégularités des surfaces limitent l'aire de contact réelle. La conductivité du fluide interstitiel est usuellement plus petite que la conductivité des solides (de l'ordre de 100 à 200 fois plus petite). Le champ de température au niveau de l'interface est perturbé.

Notons  $R$ , la résistance thermique dans le cas d'un contact parfait (avec les notations de la figure II-5):

$$R_p = \frac{T_2 - T_1}{\phi} \quad (1.11)$$

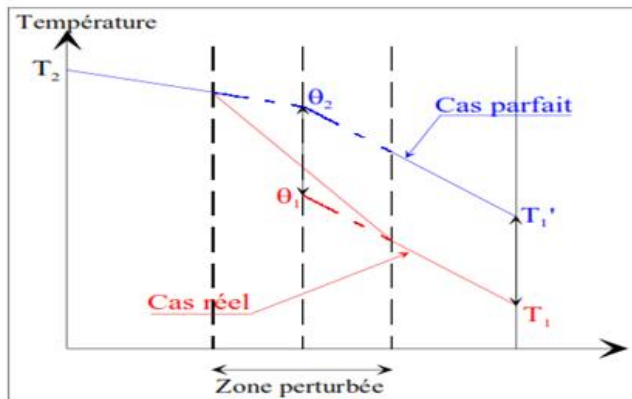


Figure II-5 : Champ de température à l'interface de contact

Si la même densité de flux de chaleur entre à l'intérieur du contact réel alors  $R_t$ , la résistance thermique pour le contact réel, est égale à :

$$R_t = \frac{T_2 - T_1}{\phi} \quad (1.12)$$

La résistance thermique de contact statique représente la perturbation induite par les aspérités. Elle est définie par :

$$R_s = R_t - R_p \quad (1.13)$$

que Ton peut également écrire sous la forme :

$$R_t = (\theta_2 - \theta_1) / \phi \quad (1.14)$$

ou  $\theta_2$  et  $\theta_1$  sont les températures extrapolées respectivement dans le solide 2 et 1, à l'interface géométrique théorique .

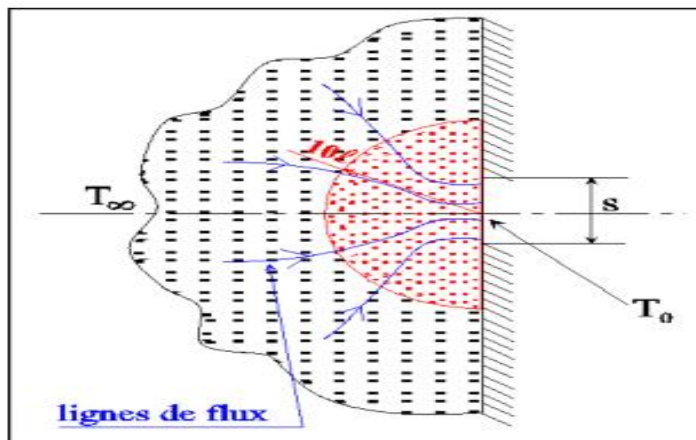
Exprimons la valeur de la résistance thermique de contact,  $R_s = R_a - R_c$  , ou  $R_a$  et résistance due à la présence de l' aspérité :

$$R_a = \delta / (\lambda S) \quad (1.15)$$

et  $R_c$  est la résistance due à la constriction.

Lorsque Fon veut étudier théoriquement le passage de la chaleur d'un matériau à F autre, on est conduit à schématiser la micro géométrie de Interface. On admet en général que les zones de contact sont de surfaces égales et qu'elles sont régulièrement réparties sur toute la surface apparente de contact, ce qui permet de définir des tubes de flux indépendants les uns des autres [Bardon 1994, Vullierme étal. 1979, Laraqi 1995, Salti étal. 1997],

Etant donné la mauvaise conductivité de l'espace interstitiel, on constate une déformation des isothermes et des lignes de courant à proximité d'une aspérité. C'est l'effet de constriction et d'allongement des lignes de courant (Figure II-6).



**Figure II-6 : Effet de constriction des lignes de flux**

Pour déterminer l'expression de  $R_c$ , on prend le cas fondamental d'un milieu semi-infini de conductivité  $\lambda$  limité par un plan supposé isolé, excepté sur une surface  $s$  d'étendue limitée (représentatif d'une aspérité), et sur laquelle on impose une température  $T_0$  uniforme.

À l'infini, la température est  $T_\infty$ . Le champ de température au sein du milieu  $T(x,y,z)$  évolue de  $T_\infty$  à  $T_0$  mais cette évolution est principalement confinée au voisinage de  $s$ . Il a été montré, pour une surface  $s$  circulaire de rayon  $L$ , que 95% de la chute de température est confinée dans une hémisphère de rayon  $10 \times L$  (Bardon 1994) (Figure II-6).

$T_\infty - T_0 = (C \cdot \Phi) / \lambda$  (1.16)  
La fonction  $C$  est la fonction de constriction, dépendant uniquement de la géométrie de  $s$ , et plus particulièrement, elle apparaît inversement proportionnelle à une dimension caractéristique de  $s$  (rayon ou longueur  $L$ ).

Finalement, la résistance de constriction statique est définie par la relation :

$$R_c = \Delta T / \Phi = C / \lambda \quad (1.17)$$

où  $\Delta T$  représente l'écart entre la température moyenne de l'aire de contact et la température à l'infini.

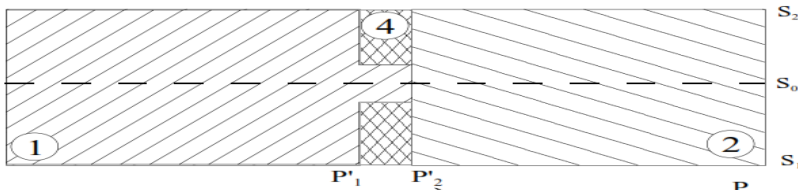
De nombreuses études ont porté sur la détermination théorique de l'expression de cette fonction de constriction  $C$  pour des formes d'aspérités différentes (trapèzes, bandes, circulaires, etc.) ainsi que pour des conditions de flux, ou de températures, imposées sur la surface [Bardon 1994, Laraqi 1996, Larzabal et al. 1999],

La difficulté liée à l'étude de la résistance thermique de contact provient de l'échelle des taches individuelles (points, spots) de contact:  $10^{-5}$  à  $10^{-7}$ . Effectivement, elle se situe entre l'échelle des mesures thermiques (discrétisation spatiale de  $10^{-3}$  à  $10^{-4}$  m) et l'échelle des mesures spécifiques à la physique des surfaces (échelle  $10^{-9}$  à  $10^{-10}$  m). Par ailleurs, le concept d'état de surface reste encore mal défini car ce terme englobe aussi bien l'état géométrique et physico-chimique actuel de la surface que son état historique, défini comme l'ensemble des sollicitations subies par la surface depuis sa fabrication [Belghali et al. 1996].

### ii. En régime thermique transitoire

En dehors des contacts entre solides statiques en régime permanent, il y a lieu de considérer le cas des contacts statiques en régime transitoire. En effet, la validité du schéma de résistance thermique peut être mise en doute en régime transitoire, surtout dans le cas de phénomènes très brutaux (chocs thermiques), car il ne fait absolument pas intervenir l'inertie propre de l'interface. Le problème du régime transitoire n'a été que peu abordé pour les solides accolés. La plupart des études entreprises dans cette direction sont essentiellement expérimentales et semblent prouver l'insuffisance du schéma de résistance thermique pure [Cames-Pointaux *étal.* 1980],

Foucher et al. [Foucher et al. 1975] ont tenté de déterminer si la notion même de résistance thermique de contact conserve un sens en régime transitoire et si elle tient correctement compte de l'énergie interne accumulée dans la zone perturbée. Ils soulignent aussi que la zone hétérogène, bien que de très faible épaisseur, est dotée d'une certaine



résistance et d'une certaine capacité (Figure II-7).

Figure II-7 : Schématisation par bandes parallèles d'un contact thermique

Le problème est traité par la méthode du mur homogène équivalent. Il doit avoir la même épaisseur que la zone hétérogène. Nous nous ramenons ainsi à un problème à trois murs en contact parfait dont les températures sur les plans  $P_1$ ,  $P$ ,  $P_2$  et  $P_2$  sont connues. on donc :

$$\lambda' = \lambda \frac{e_2 (T_{P_1} - T_{P_1'})}{e_1 (T_{P_1'} - T_{P_2'})} \quad (1.18)$$

où  $e_1$  est l'épaisseur du mur  $P_1 P_1'$  et  $e_2$  celle du mur  $P_1 P_2'$  :

On détermine ensuite la capacité thermique ( $\rho c$ ) du mur, en écrivant l'égalité entre l'énergie interne  $Q$  de la zone hétérogène et l'énergie interne du mur équivalent.

Dans la couche hétérogène, l'énergie interne est la somme de deux termes correspondants au milieu 1 et au milieu 4.

$$Q = (\rho c)_4 \int_4 T_4(x, y) dv + (\rho c)_1 \int_1 T_1(x, y) dv \quad (1.19)$$

Pour le mur équivalent, l'énergie interne s'écrit:

$$Q' = (\rho c)' \int_{ik} T'(x) dv$$

Il apparaît, en outre, que la valeur obtenue pour  $(\rho c)$  correspond à la moyenne arithmétique des capacités thermiques de la zone hétérogène, c'est-à-dire que,  $V_1$  et  $V_4$  étant respectivement les volumes de l'aspérité et du fluide interstitiel, on a [Cames-Pintaux et al. 1980]:

$$(\rho c)' = \frac{(\rho c)_1 V_1 + (\rho c)_4 V_4}{V_1 + V_4}$$

(1.20)

***b. Le contact glissant******i. En régime thermique permanent***

De manière générale, les études considèrent un écoulement bidimensionnel de la chaleur en considérant un contact entre une surface lisse (solide 1) et une surface comportant un nombre infini d'aspérités régulièrement réparties (solide 2) (Vullierme *et al.* 1979, Laraqi 1995-1996, Salti *et al.* 1997), Dalverny *et al.* 1999]. Les deux solides sont en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre par une translation rectiligne de vitesse  $V$  constante.

De plus, la géométrie des aspérités est supposée invariante au cours du frottement, c'est-à-dire qu'il est fait abstraction de tout phénomène d'usure du contact.

Enfin, les caractéristiques physiques des matériaux sont considérées comme constantes, elles sont en particulier indépendantes de la température.

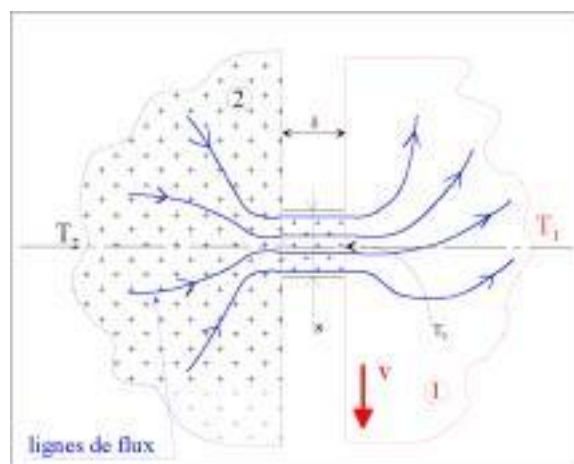
Dans la majorité des études, la température de contact  $T_0$  est considérée identique à la surface du solide 1 et 2. On note  $T_1$  et  $T_2$  les températures au loin des deux milieux semi-infinis,  $\phi_2$  le flux de chaleur provenant de 2 et convergeant sur la surface de l'aspérité  $s$  (Figure II-8) et  $\phi_g$  le flux de chaleur générée par frottement, on a alors la relation :

$$T_2 - T_0 = R_2 \phi_2 \quad (1.21)$$

où

$$R_2 = \frac{1}{\lambda_2} C + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\delta}{s} \quad (1.22)$$

Est la somme des résistances, de constriction statique définie en régime thermique permanent et de l'aspérité de hauteur  $s$ .



**Figure I-8 : Résistance thermique de contact glissant**

De la même manière, on a pour le matériau 1 :  $T_0 - T_1 = R_{gl}^c \phi_1 \quad (1.23)$

Où  $R_{gl}^c$  est la résistance de constriction glissante qui dépend de la vitesse et qui se met sous la forme :

$$R_{gl}^c = \frac{1}{\lambda_1} Cg(V_1^*)$$

dans laquelle  $V_1^*$  est une fonction décroissante :

$$V_1^* = \frac{V}{2a_1}$$

La fonction  $g$  est déterminée à l'aide de la théorie des sources mobiles [Carslaw *étal.* 1958]. Une expression de  $g$  est la suivante [Bardon 1994] :

$$g(V^*) = \frac{1 - e^{-\beta V^*}}{\beta V^*} \quad (\text{avec } \beta = 1.178)$$

La chute globale de température est alors obtenue en additionnant les relations (1.21) et (1.23). Cette chute est confinée au voisinage de  $s$  (rayon  $10 \times L$  pour le milieu 2 et Probablement inférieur à  $10 \times L$  pour le milieu 1).

(1.24)

$$T_2 - T_1 = R_g (\phi_1 + \alpha \phi_g)$$

avec  $R_g = R_2 + R_{gl}^c$ ,  $\alpha = \frac{R_{gl}^c}{R_2 + R_{gl}^c} < 1$ , et  $\phi_g = \phi_1 - \phi_2$

Donc, le mouvement relatif des milieux affecte les mécanismes de constriction. Cette condition thermique de contact introduit deux paramètres pour caractériser le contact thermique glissant: une résistance de contact glissant  $R_g$ , différente de la résistance de Contact statique et dépendant de la vitesse de glissement, et un facteur  $\alpha$  qui caractérise la fraction du flux génère à la surface d'un des deux solides alors que son complément (1 -  $\alpha$ ) est généré à la surface de l'autre solide.

Chantrenne [Chantrenne 1995] a pris en compte, dans ses travaux, une génération de chaleur volumique. Il considère que la chaleur est générée dans le volume  $l_1 \times 2b$  de Aspérité du solide 1 et dans le volume  $h_2 \times 2b$  du solide 2 sous le contact (Figure II-9).

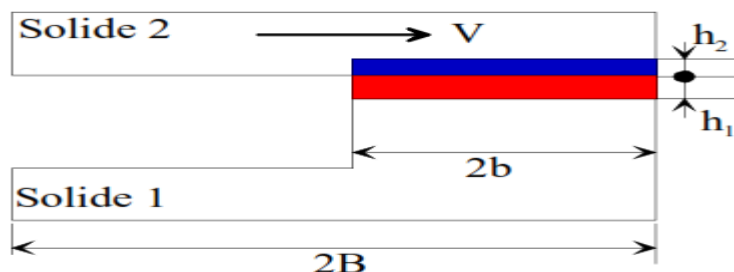


Figure II-9 : Modèle thermique microscopique du contact glissant

Pour caractériser la distribution de la chaleur générée dans chaque solide, deux fonctions,  $g_1$  et  $g_2$  sont introduites. Si elles sont constantes, alors la chaleur est générée de manière uniforme dans chacun des solides.

Le schéma résistif équivalent à ce modèle fait intervenir trois résistances thermiques ( $I_{jsc}$ ,  $R_w$ ,  $R_{2cs}$ )

et quatre paramètres pour décrire la génération de chaleur ( $h_1, h_2, g_1, g_2$ ),

L'originalité de ce modèle réside dans la prise en compte d'une génération de chaleur volumique. Cependant, cela introduit quatre paramètres qui sont physiquement difficiles à identifier et à maîtriser.

Dans leurs travaux, Jiang et al. [Jiang et al. 2001] ont considéré deux solides en contact. La surface d'un des deux corps comprend une aspérité alors que le second solide est composé d'une infinité d'aspérités régulièrement réparties sur la surface de contact, on parle alors de contact multi-aspérités (Figure II-10).

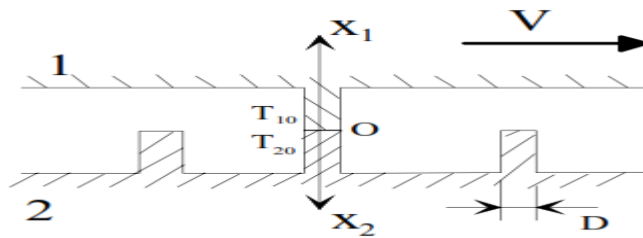


Figure II-10 : Contact multi-aspérités

La jonction de deux aspérités du corps 1 et 2 est modélisée ici comme la jonction de deux petits cylindres de même diamètre  $D$ . Le transfert de chaleur est unidimensionnel suivant  $X_1$  et  $X_2$ .

Pour une aspérité du corps 1, on note sa température initiale de contact par  $T_{10}$ , la température de surface ( $x_1 = 0$ ) après la collision est alors :

$$T_1(\tau) = T_{10} + \varphi_1 \sqrt{\frac{4D}{\pi \rho_1 c_1 \lambda_1 V}}$$

où  $\tau = D/V$

(1.25)

L'évolution de la température d'une aspérité du corps 1, qui est en collisions successives, peut être déterminée. La température initiale de cette aspérité avant sa première collision est égale à la température ambiante  $T_0$ . On suppose que la température initiale de

Cette aspérité, pour des collisions successives, est égale à la température de  $T$  aspérité à la fin de la précédente collision.

$$(1.26) \quad \begin{aligned} T_1^0(\tau) &= T_0 \\ T_1^1(\tau) &= T_0 + \varphi_1^1 B_1 \\ &\vdots \\ T_1^i(\tau) &= T_0 + (\varphi_1^1 + \varphi_1^2 + \dots + \varphi_1^i) B_1 \end{aligned} \quad \text{avec } B_1 = \sqrt{\frac{4D}{\pi \rho_1 c_1 \lambda_1 V}}$$

pour une aspérité du corps 2, sa température initiale est la température ambiante  $T_0$ . Sa température, après avoir touché une aspérité du corps 1, est donnée par

$$T_2^i(\tau) = T_0 + \varphi_2^i B_2 \quad \text{avec } B_2 = \sqrt{\frac{4D}{\pi \rho_2 c_2 \lambda_2 V}}$$

pour un frottement en état stationnaire, la source de chaleur a une intensité constante  $\varphi = \mu PV$  Comme une température source  $T_s$  constante.

La température source  $T_s$  comme  $\varphi$ , reflète la capacité de la source de chaleur à générer de la chaleur. En utilisant une formule donnée par Bowden et Tabour, On peut exprimer le flux de chaleur par unité d'aire :

$$\varphi_1^i = \frac{2D [T_s - T_1^{i-1}(\tau)]}{\pi D^2 / 4} \tag{1.27}$$

Où  $T_1^{i-1}(\tau)$  est la température initiale d'Aspérité a l'i-Emme collision

D'où  $\varphi_1^i = A_1 \left[ (T_s - T_0) + B_1 \sum_{k=0}^{i-1} \varphi_1^k \right]$   $i = 1, 2, \dots$

Avec  $A_1 = \frac{8\lambda_1}{\pi D}$  et  $\varphi_1^0 \equiv 0$

En résolvant cette équation pas a pas, on a :

$$\varphi_1^1 = A_1 (T_s - T_0); \varphi_1^2 = \frac{\varphi_1^1}{(1 + A_1 B_1)}; \dots; \varphi_1^i = \frac{\varphi_1^1}{(1 + A_1 B_1)^{i-1}} \tag{1.28}$$

Même si ce modèle est basé sur une hypothèse de contact parfait au niveau des aspérités, il permet de prendre en compte un contact multi-aspérités et ainsi de considérer un contact imparfait au niveau du plan apparent de contact. D'après Jiang et al., ce modèle rend bien compte de mesures expérimentales. Cependant, ce modèle ne retranscrit pas ce qui se passe lorsque l'aspérité du corps 1 se trouve entre deux aspérités du corps 2. En effet, sous Traction de la charge normale, on devrait tout de même avoir un contact et donner une évolution des températures entre deux collisions.

Laraqi (Laraqi 1992) propose une autre modération d'un contact multi-aspérités. Le principe de modélisation revient à supposer que la hauteur totale des aspérités est constante, mais que la position du contact entre les aspérités suit une répartition aléatoire (Figure II-11).

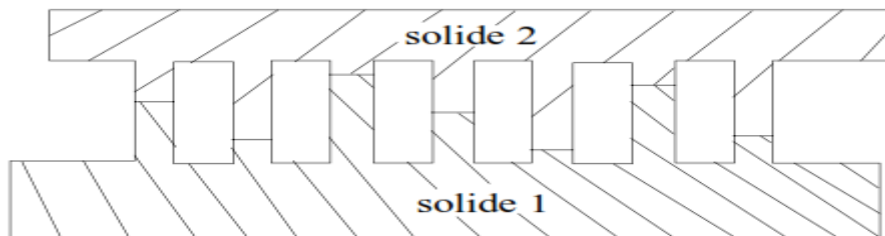


Figure II-11 : Distribution des aspérités dans la zone de contact

Chaque contact entre deux aspérités est le siège d'une génération de flux de chaleur. L'idée de la « stylisation » consiste à supposer que le flux génère est réparti sur  $R_a$  suivant une loi de répartition correspondant à celle des points de contact (Figure 11-12).

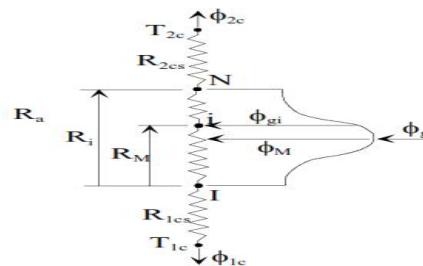


Figure II-12 : Représentation du schéma résistif

Ce modèle suppose donne connus les paramètres de la fonction de répartition statistique des points de contact. Dans le cas d'une distribution gaussienne, il faut donc deux paramètres :

la position du maximum de la gaussienne sur la résistance thermique des aspérités  $R_M$  ainsi que l'écart-type  $R\sigma$ .

Pour obtenir les équations de couplage des solides, reliant les températures de contact ainsi que les flux de chaleur entrant dans chacun des solides, Laraqi considère  $N$  nœuds régulièrement espacés dans la résistance  $R_a$ , chacun de ces nœuds recevant un flux qui s'exprime sous la forme :

$$\phi_{gi} = \phi_M \exp\left(-\frac{(R_i - R_M)^2}{2R_\sigma^2}\right) \quad (1.29)$$

Où  $\phi_M$  est déterminé en égalant le flux de chaleur genere par frottement  $\delta$  de la somme des flux imposes a chaque nœud de discrétisation de la résistance des aspérités :

$$\phi_M = \frac{\phi_g}{\sum_{i=1}^N \exp\left(-\frac{(R_i - R_M)^2}{2R_\sigma^2}\right)} \quad (1.30)$$

En faisant des bilans d'énergie aux nœuds de température  $T_{2c}$  et  $T_{1c}$ , ainsi qu'un bilan d'énergie entre les nœuds I et N de discrétisation de la résistance d'aspérité, et en combinant ces équations, Laraqi propose une expression pour les flux de chaleur  $\phi_{1c}$  et  $\phi_{2c}$  entrant des les solides 1 et 2 par la surface de contact:

$$\begin{aligned} \phi_{1c} &= \frac{T_{2c} - T_{1c}}{R_a + R_{2cs} + R_{1cs}} + \phi_g \frac{R_a + R_{2cs}}{R_a + R_{2cs} + R_{1cs}} - \frac{R_a}{(R_a + R_{2cs} + R_{1cs})(N-1)} \sum_{k=2}^N \sum_{i=k}^N \phi_{gi} \\ \phi_{2c} &= \frac{T_{1c} - T_{2c}}{R_a + R_{2cs} + R_{1cs}} + \phi_g \frac{R_{1cs}}{R_a + R_{2cs} + R_{1cs}} - \frac{R_a}{(R_a + R_{2cs} + R_{1cs})(N-1)} \sum_{k=2}^N \sum_{i=k}^N \phi_{gi} \end{aligned} \quad (1.31)$$

## ii. En régime thermique transitoire

Le fait de considérer un régime thermique transitoire complique nettement la détermination des températures de surfaces. La majorité des études concerne un plan semi- infini soumis a un flux de chaleur de forme imposée (représentant la présence d'un autre corps en contact avec le plan semi-infini).

On considère une source de chaleur de forme carrée de cote  $L$ , placée sur la surface d'un milieu semi-infini initialement a température nulle. La source, mobile par rapport au solide suivant la direction opposée a  $x$ , dissipe un flux de densité uniforme  $q$ . La température au loin est considérée nulle. La surface  $z = 0$  est supposée isolée.

Dans un référentiel lie a la source, le champ thermique dans le milieu considère est traduit par le système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{v}{a} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \\ T &= 0 \quad (t = 0) \\ T &= 0 \quad \begin{cases} x \rightarrow \pm\infty \\ y \rightarrow \pm\infty \\ z \rightarrow \pm\infty \end{cases} \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} &= \begin{cases} \phi & (0 \leq x \leq \ell; 0 \leq y \leq \ell) \\ 0 & (\text{ailleurs}) \end{cases} \end{aligned}$$

La solution de ce système est classique [Arslaw et al. 1955] :

$$T = \frac{\phi a}{4\lambda(\pi a)^{3/2}} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \int_0^\ell dx' \int_0^\ell dy' \exp \left[ -\frac{((x-x')-V(t-\tau))^2 + (y-y')^2 + z^2}{4a(t-\tau)} \right] \quad (1.32)$$

En procédant au changement de variables suivant:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{\ell}; \quad y^* = \frac{y}{\ell}; \quad z^* = \frac{z}{\ell}; \quad x'^* = \frac{x'}{\ell}; \quad y'^* = \frac{y'}{\ell}; \quad t^* = \frac{t\ell^2}{a}; \quad \tau^* = \frac{\tau\ell^2}{a} \\ u &= t^* - \tau^*; \quad v^* = \frac{V\ell}{a}; \quad T^* = T / (q\ell/\lambda) \end{aligned}$$

et en effectuant les deux intégrations portant les variables d'espace  $x'$  et  $y'$  de l'équation, on obtient l'expression [Laraqi 1996] :

$$T^* = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{t^*} \frac{e^{[-z^{*2}/4a]}}{\sqrt{u}} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{y^*}{2\sqrt{u}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{y^*-1}{2\sqrt{u}} \right) \right) \cdot \left( \operatorname{erf} \left( \frac{x^*-v^*u}{2\sqrt{u}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x^*-v^*u-1}{2\sqrt{u}} \right) \right) du \quad (1.33)$$

On constate aisément que l'évaluation analytique des températures dans le cas d'un régime transitoire en contact imparfait et glissant n'est pas simple. Il nécessite de passer par des méthodes numériques pour évaluer les différentes intégrales présentes dans les équations. De plus, comme dans le cas du régime transitoire en contact statique, la notion de résistance thermique pure est abandonnée car insuffisante pour représenter les effets de capacité thermique des corps en contact.

## Chapitre 02 : PROCEDURE NUMERIQUE

### 2.1 Introduction

La discrétisation d'une équation différentielle est le remplacement de l'information continue qui contient sa solution par une information discrète. Le domaine de calcul continu doit être divisé ou discrétisé. Cette discrétisation systématique des variables dépendantes et de l'espace permet de remplacer les équations différentielles très compliquées par des équations algébriques faciles à résoudre.

### 2.2 Méthodes de discrétisation

Pour une équation différentielle donnée, plusieurs méthodes de discrétisation sont possibles:

#### 2.2.1 Méthode des différences finies

Elle consiste à approximer les dérivées de l'équation différentielle par des troncatures de séries de Taylor. La substitution de ces approximations dans l'équation différentielle donne les équations aux différences finies.

Cette méthode est très simple dans sa formulation, mais elle donne des résultats non satisfaisants, surtout en présence des variations exponentielles.

#### 2.2.2 Méthode des éléments finis

Cette méthode peut être appliquée de deux façons :

##### *A- Formulation variationnelle:*

La résolution de certaines équations différentielles est équivalente à la minimisation d'une quantité dite fonctionnelle. Si elle est minimisée par rapport aux valeurs discrètes d'une variable dépendante, le résultat donne l'équation de discrétisation .

Cette méthode est limitée car le fonctionnel n'existe pas dans la majorité des cas d'intérêt pratique.

##### *B- Méthode des résidus pondérés*

Cette méthode propose une approximation de la solution qui contient un nombre d'inconnues. La substitution de cette solution dans l'équation différentielle donne naissance à un résidu. Le but donc, est de minimiser ce résidu. En choisissant plusieurs fonctions dites 'fonctions pondérées', on génère le nombre d'équations nécessaires pour trouver les inconnues.

Les deux méthodes précédentes sont très puissantes, spécialement dans les géométries complexes. Leur inconvénient est que leur formulation est assez difficile.

**2.2.3 Méthode des volumes finis**

Le principe de cette méthode est de subdiviser le domaine de calcul en un nombre de volumes de contrôle juxtaposés. Chacun de ces derniers englobe un nœud dit «nœud principal». L'équation différentielle est intégrée sur ce volume de contrôle.

Le profil de variation des paramètres entre les nœuds doit être choisi pour pouvoir évaluer les intégrales. Le résultat est l'équation de discrétisation qui a comme inconnues les variables recherchées.

**Choix de la méthode de discrétisation**

Dans cette étude, la formulation des différences finies est adaptée puisque :

- Elle a une grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.
- Elle est largement utilisée dans le domaine de transfert de chaleur .

**2.3 Classification des équations aux dérivées partielles**

**2.3.1- Définitions :**

- Une équation aux dérivées partielles (E.D.P) est une relation faisant intervenir les variables indépendantes  $x_1, \dots, x_n$ , à la fonction  $u$  et ses dérivées partielles. Par exemple, si  $u$  est une fonction de deux variables, une E.D.P peut s'écrire par la relation :

$$f(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, u_{x^2y}, u_{xy^2}, u_{x^3}, u_{y^3}, \dots) = 0$$

- On appelle ordre de l'E.D.P l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'E.D.P, par exemple :

$$u_{x^2y} + 3u_{xx} + xu_{yy} + u_x + u + c = 0 \quad \text{est d'ordre 3}$$

$$(u_{xx} - u_{yy})^2 + 4(u_{xy})^2 - c = 0 \quad \text{est d'ordre 2}$$

- L'E.D.P est dite linéaire si f est linéaire par rapport à ses arguments  $u$  et ses dérivées partielles, et si les coefficients qui les lient ne dépendent que de  $(x, y)$ , sinon elle est non linéaire. Par exemple, l'E.D.P du second ordre :

$$a_1 u_{xx} + a_2 u_{xy} + a_3 u_{yy} + a_4 u_x + a_5 u_y + a_6 u + a_7 = 0 \tag{2.1}$$

Est linéaire si les  $a_i$  ne dépendent que de  $(x, y)$ .

**2.3.2- Classification mathématique des E.D.P linéaires du 2ème ordre (cas de deux variables indépendantes)**

De très nombreux phénomènes physiques se traduisent par des E.D.P linéaires du second ordre du type (5.1) qui peuvent s'écrire sous forme :

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d \tag{2.2}$$

Où  $a$ ,  $b$  et  $c$  ne dépendent que de  $(x, y)$  et  $d$  est une fonction linéaire de  $(x, y, u, u_x, u_y)$

Il y a trois types d'équation de dérivées partielles représentés par l'équation (2.2). Lorsque la quantité  $\Delta (=b^2 - 4ac) < 0$  l'équation (2.2) est dite du **type elliptique**. Lorsque  $\Delta = 0$ , elle est dite du **type parabolique**. Lorsque  $\Delta > 0$ , elle est dite du **type hyperbolique**. Cette appellation est faite par analogie avec l'équation générale du second ordre en géométrie analytique :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d \quad (2.3)$$

Ainsi, selon le signe du discriminant  $b^2 - 4ac$ , nous obtenons différentes formes géométriques :

$$b^2 - 4ac < 0 \rightarrow \text{Ellipse.}$$

$$b^2 - 4ac = 0 \rightarrow \text{Parabole}$$

$$b^2 - 4ac > 0 \rightarrow \text{Hyperbole}$$

### 2.3.3- Classification mathématique dans le cas général (n variables indépendantes)

Si  $u$  est une fonction de  $n$  variables indépendantes, les E.D.P. linéaires du second ordre sont du type :

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_1, \dots, x_n)u + d(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (2.4)$$

- Si tous les  $a_i$  sont non nul et de même signe, l'E.D.P est de type **elliptique**.
- Si tous les  $a_i$  sont non nuls et sont ; à une exception près, de même signe, l' E.D.P est de type **hyperbolique**.
- Si un seul des  $a_i$  est nul (noté  $a_{i0}$ ) et tous les autres de même signe et si  $b_{i0}$  est non nul l'E.D.P et de type **parabolique**.

Les fonctions  $a_i$  et  $b_i$  étant dépendantes des variables  $(x_1, \dots, x_n)$ , la classification est évidemment fonction du point  $(x_1, \dots, x_n)$  considéré. Une E.D.P peut être de différents types suivant les points considérés : on dit qu'elle est de **type mixte**.

### 2.4 Classification physique des E.D.P :

De nombreux phénomène physique se rangent dans l'une des classes suivantes :

- Les problèmes d'équilibre étudient l'état stationnaire d'un phénomène (champ, chaleur, etc...) dans un domaine borné ou non. Ils sont gouvernés par des E.D.P elliptiques.
- Les problèmes de valeurs propres sont en général des extensions des problèmes d'équilibre dans lesquels les valeurs critique de certains paramètres doivent être déterminées. C'est le cas par exemple de la résonance des circuits électriques.
- les problèmes d'évolution étudient l'évolution avec le temps d'un phénomène (champ, chaleur, vibration, etc..) à partir d'un état initial donné. Ils sont gouvernés par des E.D.P hyperbolique ou des E.D.P paraboliques.

## 2.5 Approximation des dérivées par des Différences finies

Nous avons vu au chapitre précédent qu'un problème aux dérivées partielles nécessite la donnée :

- d'un domaine D.
- d'une équation aux dérivées partielles (E.D.P).
- de conditions aux limites.
- de conditions initiales (pour les problèmes d'évolution).

Pour obtenir une approximation numérique de la solution de ce problème nous devons approcher les dérivées partielles de l'E.D.P en chaque nœud du domaine discrétisé (maillage) en utilisant les valeurs de la variable dépendante en ce nœud et aux nœuds avoisinants.

### 2.5.1- Discrétisation du domaine.

Les calculs par différences finies sont effectués suivant un maillage obtenu par un double réseau de parallèles aux axes et régulièrement espacés.

L'intersection de 2 droites du maillage définit un nœud M de coordonnées  $(x_M, y_M)$ . Si les parallèles à l'axe  $x$  sont espacées de  $\Delta x = h$  et les parallèles à l'axe  $y$  de  $\Delta y = k$ , le nœud a comme coordonnées  $x_M = i \Delta x = ih$ , et  $y_M = j \Delta y = jk$  ou d'une manière condensée  $(i, j)$

Ainsi la fonction  $U(x, y)$  prend au point  $M(x_M, y_M)$  la valeur  $U(i \Delta x, j \Delta y) = U(ih, jk)$  ou  $U_i^j$

Ou même  $U_{i,j}$ .

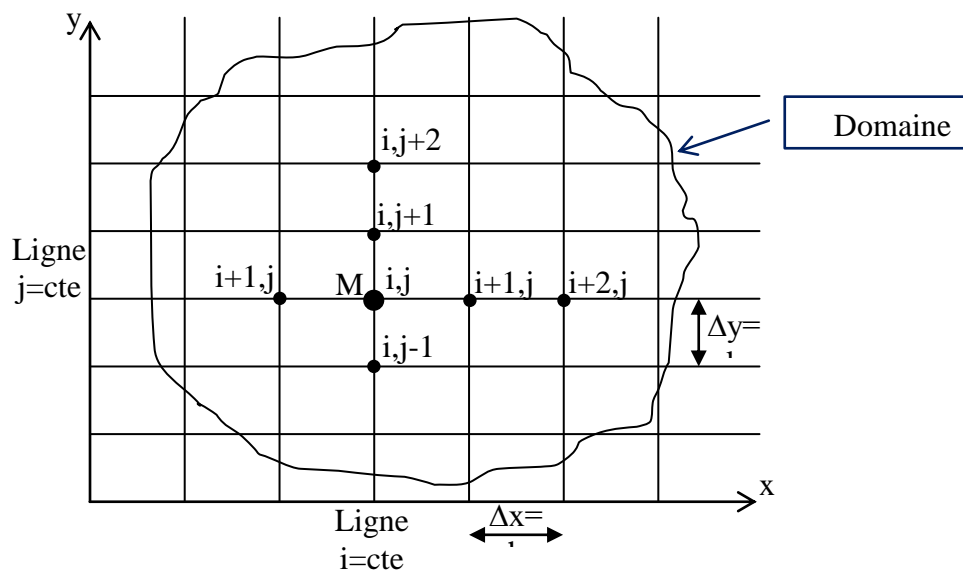


Fig 2.1 Maillage

**2.5.2- Approximation des dérivées :**

Soit  $U(x, y)$  une fonction de deux variables indépendante que nous supposons suffisamment différentiables. Si nous écrivons son développement en séries de Taylor en un point  $(x + h, y + k)$  nous avons :

$$U(x + h, y + k) = U(x, y) + h \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + k \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n-1)} U(x, y) + R_n \tag{2.12}$$

Avec le résidu  $R_n$  donné par

$$R_n = \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n U(x + \xi h, y + \eta k) \quad \xi \in ]0, 1[, \eta \in ]0, 1[ \tag{2.13}$$

Ou encore  $R_n = O\left[ (|h| + |k|)^n \right]$  (5.14)

L'équation (2.3) signifie qu'il existe un nombre positif constant  $M$  tel que :

$$|R_n| \leq M (|h| + |k|)^n$$

Le nœud  $(i \Delta x, j \Delta y)$  est entouré par les nœuds avoisinant montrés sur la figure 2.1. en développant en série de Taylor  $U_{i-1,j}$  ;  $U_{i+1,j}$  ;  $U_{i-2,j}$  et  $U_{i+2,j}$  autour de la valeur centrale  $U_{i,j}$  nous obtenons

$$U_{i-1,j} = U_{i,j} - hU_x + \frac{h^2}{2!}U_{xx} - \frac{h^3}{3!}U_{xxx} + \frac{h^4}{4!}U_{xxxx} + R_5 \tag{2.15}$$

$$U_{i+1,j} = U_{i,j} + hU_x + \frac{h^2}{2!}U_{xx} + \frac{h^3}{3!}U_{xxx} + \frac{h^4}{4!}U_{xxxx} + R'_5 \tag{2.16}$$

$$U_{i-2,j} = U_{i,j} - 2hU_x + 2h^2U_{xx} - \frac{8}{6}h^3U_{xxx} + \frac{2}{3}h^4U_{xxxx} + R''_5 \tag{2.17}$$

$$U_{i+2,j} = U_{i,j} + 2hU_x + 2h^2U_{xx} + \frac{8}{6}h^3U_{xxx} + \frac{2}{3}h^4U_{xxxx} + R'''_5 \tag{2.18}$$

Ici  $U_x = \frac{\partial U}{\partial x}$  ;  $U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ , etc... et toutes les dérivées sont évaluées aux nœud  $(i, j)$

**2.5.2.1- Approximation à l'ordre 1 en h de la dérivée première :**

En négligeant les termes d'ordre 2 et plus dans les équations (5.15) et (5.16) nous obtenons :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} + O(h) \tag{2.19}$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h} + O(h) \quad (2.20)$$

Nous avons donc approché  $U_x$  par des différences finies d'ordre 1 **progressives (ou à droite)** et **régressive (ou à gauche)** respectivement.

### 2.5.2.2 Approximation à l'ordre 2 en h de la dérivée première par les différences centrées :

En soustrayant (5.15) et (5.16) et en négligeant les termes d'ordre 3 et plus nous obtenons :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} + O(h^2) \quad (2.21)$$

C'est l'approximation de  $U_x$  par des **différences finies centrées** d'ordre 2.

### 2.5.2.3- Approximation à l'ordre 1 en h de la dérivée seconde :

En multipliant l'équation (2.16) par (- 2), en ajoutant le résultat à l'équation (2.18) et en négligeant les termes d'ordre 3 et plus, nous obtenons :

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{U_{i,j} - 2U_{i+1,j} + U_{i+2,j}}{h^2} + O(h) \quad (2.22)$$

C'est l'approximation de la dérivée seconde à l'ordre 1 en h par les différences à droites. De même, en utilisant les équations (2.15) et (2.17), nous obtenons l'approximation à l'ordre 1 en h et de  $U_{xx}$  par les **différences à gauche** :

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{U_{i,j} - 2U_{i-1,j} + U_{i-2,j}}{h^2} + O(h) \quad (2.23)$$

### 2.5.2.4 Approximation à l'ordre 2 en h de la dérivée seconde :

En ajoutant les équations (5.15) et (5.16) et en négligeant les termes d'ordre 4 et plus, nous obtenons :

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2) \quad (2.24)$$

C'est l'approximation de la dérivée seconde à l'ordre 2 en h par les **différences centrées**.

**2.5.2.5 Approximation à l'ordre 2 en h de la dérivée première par les différences**

**à droite ou à gauche :**

De l'équation (2.16) Nous pouvons tirer :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} - \frac{h}{2} U_{xx} \Big|_{i,j} - \frac{h^2}{6} U_{xxx} \Big|_{i,j} + O(h^3) \quad (2.25)$$

En substituant pour  $U_{xx} \Big|_{i,j}$  de l'équation (2.22) nous obtenant :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{-3U_{i,j} + 4U_{i+1,j} - U_{i+2,j}}{2h} + O(h^2) \quad (2.26)$$

C'est l'approximation à l'ordre 2 en h de la dérivée première  $U_x$  par les différences à droite.

De même en utilisant les équations (2.15) et (2.23), nous obtenons l'approximation à l'ordre 2 en h de  $U_x$  par les différences à gauche :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{3U_{i,j} - 4U_{i-1,j} + U_{i-2,j}}{2h} + O(h^2) \quad (2.27)$$

**2.5.2.6 Approximation de  $U_y$  et  $U_{yy}$  :**

Les approximations de  $U_y$  et  $U_{yy}$  sont obtenues de la même façon que celle de  $U_x$  et  $U_{xx}$  et sont données ci-

dessous :

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} + O(k) \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{k} + O(k) \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2k} + O(k^2) \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{-3U_{i,j} + 4U_{i,j+1} - U_{i,j+2}}{2k} + O(k^2) \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{3U_{i,j} - 4U_{i,j-1} + U_{i,j-2}}{2k} + O(k^2) \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{U_{i,j} - 2U_{i,j+1} + U_{i,j+2}}{k^2} + O(k) \quad (2.33)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{U_{i,j} - 2U_{i,j-1} + U_{i,j-2}}{k^2} + O(k) \quad (2.34)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2) \quad (2.35)$$

**2.5.2.7 approximation de la dérivée croisée  $U_{xy}$ :**

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j+1} - \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j-1}}{2k} + O(k^2)$$

Or  $\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j+1} = \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1}}{2h} + O(h^2)$  d'après (2.21)

et  $\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j-1} = \frac{U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j-1}}{2h} + O(h^2)$  d'après (2.21)

Donc :  $\left. \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right|_{i,j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} = \frac{1}{4hk} [U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}] + O[(h+k)^2]$  (2.36)

**2.6 Méthodes de résolution des E.D.P- Paraboliques-**

Il existe essentiellement deux types de méthodes de base pour résoudre les E.D.P paraboliques : méthodes explicite et implicites.

Nous exposons chacune d'elle en prenant l'exemple d'une équation linéaire à une variable d'espace x.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\begin{cases} U(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\begin{cases} U(0, t) = g_0(t) & 0 < t \leq T \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\begin{cases} U(1, t) = g_1(t) & 0 < t \leq T \end{cases} \quad (2.40)$$

Où T est le temps où on veut la solution.

L'équation (2.37) décrit par exemple, en coordonnées adimensionnelles, la conduction transitoire de la chaleur dans une barre isolée avec une distribution de température au temps  $t = 0$  et ayant les extrémités maintenues à des températures qui peuvent être fonction du temps.

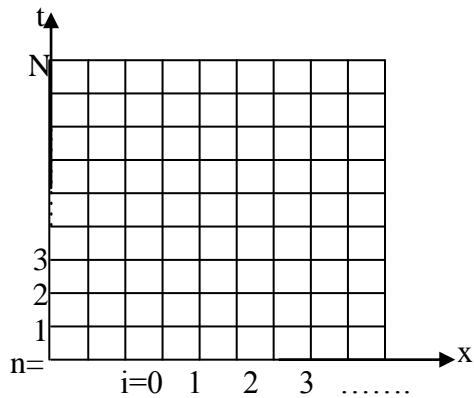
Dans les équations 2.38 – 2.40,  $f(x)$  est la condition initiale et  $g_0(t)$  et  $g_1(t)$  sont les conditions aux limites qui sont du type Dirichlet.

**2.6.1 Méthode explicite de résolution :**

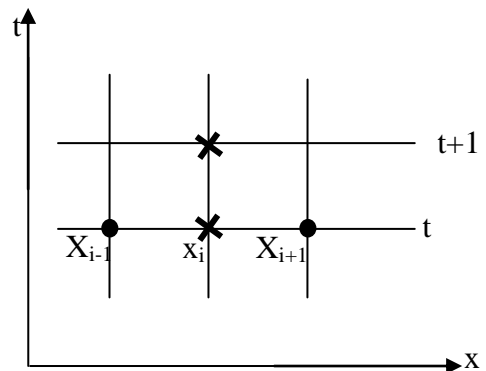
Afin de résoudre l'équation (2.37) par les différences finies, nous diviserons l'intervalle  $[0, 1]$  en  $M$  intervalles  $\Delta x = h = \frac{1}{M}$  par les points  $x_0 = 0, x_1, \dots, x_M = 1$  et l'intervalle  $[0, T]$

en  $N$  intervalles  $\Delta t = k = \frac{1}{N}$  par les points où  $M$  et  $N$  sont des nombres entiers arbitrairement choisis.

Le maillage obtenu est représenté sur la figure 2.2a.



**Fig 2.2a :** Maillage dans le cas général ;



**Fig2.2b :** La méthode explicite

Pour chaque nœud intérieur au domaine (c'est-à-dire les nœuds qui n'ont pas  $i = 0, i = M$  ou  $n = 0$ ) les dérivées de l'équation (2.37) sont remplacées par les approximations suggérées dans le chapitre 2. ainsi, en désignant par  $v_{i,n}$  (ou  $v_i^n$ ) la valeur approchée de la fonction  $U$  au nœuds  $(i, n)$  et en utilisant les différences à droite pour la dérivée par rapport à  $t$  et les différences centrées pour la dérivée spatiale, nous obtenons :

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{k} = \frac{v_{i-1}^n - 2v_i^n + v_{i+1}^n}{h^2} \tag{2.41}$$

Ou, en définissant  $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{k}{h^2}$ , alors

$$v_i^{n+1} = \lambda v_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)v_i^n + \lambda v_{i+1}^n \tag{2.42}$$

Dans la figure 2.2b, les croix et les cercles indiquent les nœuds intervenant dans la discrétisation de  $U_t$  et  $U_{xx}$  respectivement

Si tous  $v_i^n$  sont connus à l'instant  $t_n$ , l'équation (5.42) permet à  $v_i^{n+1}$  d'être calculé directement (c'est-à-dire explicitement) à l'instant  $t_{n+1}$  pour  $1 \leq i \leq M-1$ .

Pour les nœuds des frontières  $i = 0, i = M$ , nous avons d'après les conditions aux limites (5.39) et (5.40).

$$v_0^{n+1} = g_0(t_{n+1}) \tag{2.43}$$

$$v_M^{n+1} = g_1(t_{n+1})$$

Puisque les conditions initiales de  $v$  sont imposées au temps  $t = 0$  par l'équation (2.38)

$$v_i^0 = f(x_i)$$

Les valeurs de  $v$  peuvent être obtenues dans tous les nœuds par l'application répétée de (2.42) et (2.43). Nous devons calculer toutes les valeurs de  $v$  à l'instant  $n$  avant d'avancer à l'instant  $n + 1$ .

**Condition de convergence de la méthode explicite :**

L'erreur de discrétisation locale  $w_i^n$  est la différence de valeur exacte  $U_i^n$  au nœud  $i, n$  et la valeur approchée  $v_i^n$  obtenue par la méthode des différences finies

$$w_i^n = U_i^n - v_i^n \tag{2.44}$$

Nous dirons que le schéma des différences (2.42) converge si l'erreur  $w_i^n$  tend vers 0 lorsque  $\Delta x$  et  $\Delta t$  tendent vers zéro.

La méthode explicite converge pour  $\lambda \leq \frac{1}{2}$  car l'erreur tend vers zéro quand  $\Delta x$  et  $\Delta t$  tendent toutes les deux vers zéro.

L'inconvénient de la méthode explicite est donc qu'elle nécessite de choisir

$\Delta t$  suffisamment petit (de telle façon à satisfaire la condition  $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ ) sinon la solution de

l'équation 2.37 devient instable. A cause de ce risque d'instabilité, il est préférable d'utiliser des méthodes suivantes.

**2.6.2- Méthode implicite :**

L'équation explicite (2.42) à été obtenue en écrivant les deux membres de (2.37) à l'instant  $t_n$  où la solution est connue. Nous obtenons une équation implicite en écrivant les deux membres de (2.37) à l'instant  $t_{n+1}$  où la solution n'est pas connue, ce qui donne :

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{k} = \frac{v_{i-1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i+1}^{n+1}}{h^2} \quad (2.45)$$

Ou encore :

$$-\lambda v_{i-1}^{n+1} + (1+2\lambda)v_i^{n+1} - \lambda v_{i+1}^{n+1} = v_i^n \quad (2.46)$$

Les nœuds intervenant dans la discrétisation de  $U_t$  et  $U_{xx}$  sont montré sur la figure 2.3 :

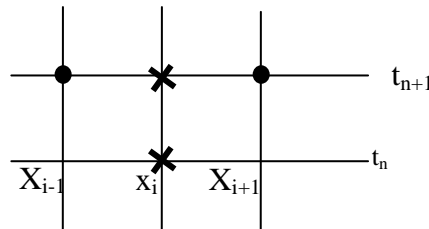


Fig 2.3 : La méthode implicite

L'équation (2.46) écrite pour chaque point  $1 \leq i \leq M-1$  résulte en un système de  $M-1$  équations simultanées à  $M+1$  inconnues  $v_0^{n+1}, \dots, v_M^{n+1}$ . Le nombre d'inconnues est ensuite réduit à  $M-1$  en incorporant les conditions aux limites :

$$v_0^{n+1} = g_0(t_{n+1})$$

$$v_M^{n+1} = g_1(t_{n+1})$$

On obtient alors le système à matrice tri-diagonale :

$$(1+2\lambda)v_1^{n+1} - \lambda v_2^{n+1} = v_1^n + \lambda g_0(t_{n+1}) \quad \text{Pour } i = 1$$

$$-\lambda v_{i-1}^{n+1} - (1+2\lambda)v_i^{n+1} - \lambda v_{i+1}^{n+1} = v_i^n \quad \text{Pour } 2 \leq i \leq M-2$$

$$-\lambda v_{M-2}^{n+1} + (1+2\lambda)v_{M-1}^{n+1} = v_{M-1}^n + \lambda g_1(t_{n+1}) \quad \text{Pour } i = M-1$$

Ce système peut être résolu par une méthode quelconque de résolution des systèmes algébriques linéaires. La méthode la plus adaptée pour ce type de systèmes est en fait le double balayage de Choleski.

L'algorithme (2.46) permet de déterminer de proche en proche des approximations de la solution du problème (2.37) aux divers instants  $t_n, n = 1, \dots, N$ .

**Convergence de la méthode implicite :**

On peut montrer, en procédant comme dans le cas de la méthode explicite, que la méthode implicite est inconditionnellement stable, c'est-à-dire qu'elle converge qu'elle que soit la valeur de  $\lambda$ .

**2.6.3- Schéma explicite inconditionnellement stables :**

Alors que la méthode explicite familière de la section 2.1 n'est stable que pour  $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ , ils existent plusieurs autres méthodes explicites qui sont libres de cette restriction. Des exemples de telles méthodes sont illustrés ci-dessous pour la résolution de l'équation  $Ut = Uxx$ , mais toutes peuvent être généralement à plus d'une dimension d'espace.

**2.6.4- Application des méthodes explicite et implicite au cas général d'une équation aux dérivées partielles linéaires :**

Soit, à résoudre l'E.D.P.

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = A(x) \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + C(x) f(x,t) + D(x) \quad (2.50)$$

La discrétisation par la méthode explicite donne :

$$\frac{1}{\Delta t} (f_i^{n+1} - f_i^n) = \frac{A_i}{\Delta x^2} (f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n) + \frac{B_i}{2\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + C_i f_i^n + D_i$$

Ou :

$$f_i^{n+1} = \left[ \frac{A_i \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{B_i \Delta t}{2\Delta x} \right] f_{i-1}^n + \left[ 1 - \frac{2A_i \Delta t}{\Delta x^2} + C_i \Delta t \right] f_i^n + \left[ \frac{A_i \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{B_i \Delta t}{2\Delta x} \right] f_{i+1}^n + D_i \Delta t \quad (2.51)$$

On peut montrer que la condition de ce schéma est :

$$\left( \frac{2A_i}{\Delta x^2} - C_i \right) \Delta t \leq 1 \quad (2.52)$$

La méthode s'applique sans aucune modification de principe, aux équations dont les coefficients A,B,C,D dépend non seulement de x, mais aussi de t et de f, ainsi qu'au fonctions de plusieurs variables d'espace.

L'application de la méthode implicite à l'équation (2.50) donne :

$$\frac{1}{\Delta t} (f_i^{n+1} - f_i^n) = \frac{A_i}{\Delta x^2} (f_{i-1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}) + \frac{B_i}{2\Delta x} (f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}) + C_i f_i^{n+1} + D_i \quad (2.53)$$

Ou encore :

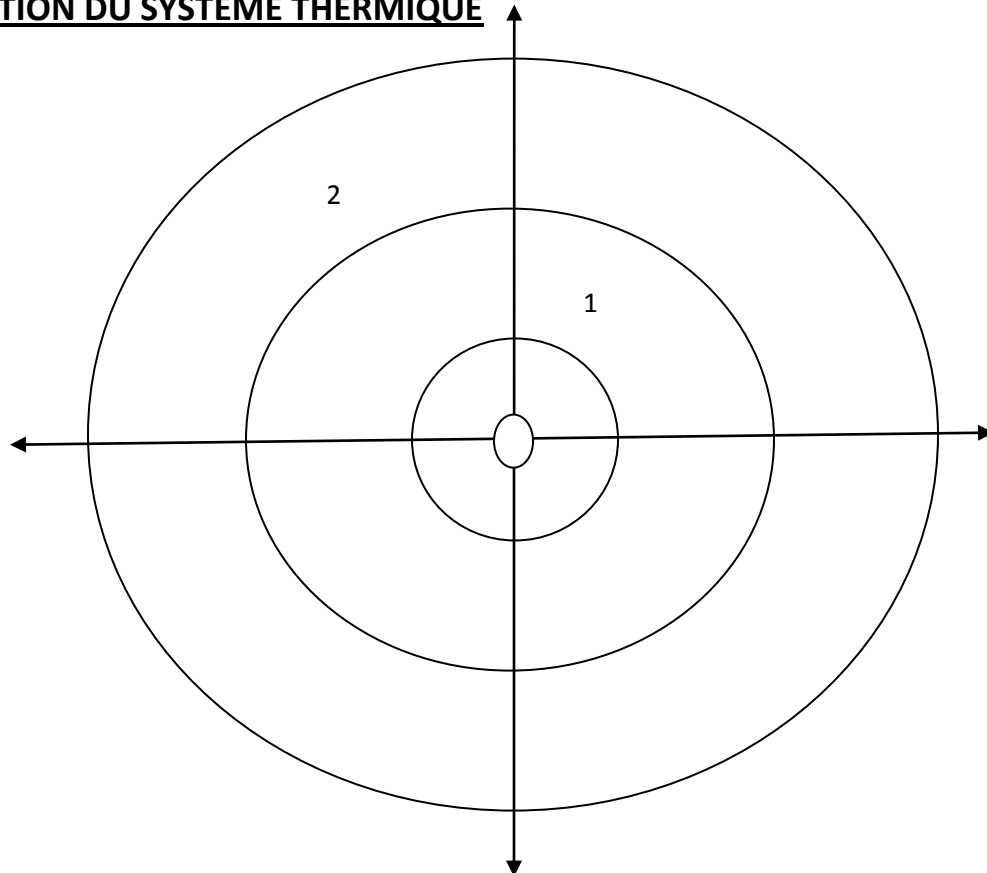
$$\left[ \frac{A_i}{\Delta x^2} - \frac{B_i}{2\Delta x} \right] f_{i-1}^{n+1} - \left[ \frac{1}{\Delta t} + \frac{2A_i}{\Delta x^2} - C_i \right] f_i^{n+1} + \left[ \frac{A_i}{\Delta x^2} + \frac{B_i}{2\Delta x} \right] f_{i+1}^{n+1} = - \left[ \frac{f_i^n}{\Delta t} + D_i \right] \quad (2.54)$$

Ce schéma est universellement stable. Il peut facilement être généralisé au cas où les coefficients A, B, C, D, dépend de t.

Aussi, on peut l'adapter aux cas où ces coefficients dépend de f : il faut dans ce cas résoudre à chaque instant  $t_k$  l'équation (3.45) par itération : on se donne une fonction  $f_0(x)$  qu'on injecte dans A, B, C, D, la résolution de (3.45) donne alors une autre fonction  $f_1(x)$ , etc... jusqu'à la convergence.

## CHAPITRE III : CHAMPS DE TEMPERATURE A L'INTERFACE D' UN CONTACT DYNAMIQUE EN REGIME ETABLI

### 3.1. DEFINITION DU SYSTEME THERMIQUE



**FIGURE : III-1 :Modélisation DU CONTACT DE DEUX ANNEAU CONCRNTRIQUES**

Le dispositif modélisé i ci est composé de deux anneaux cylindriques concentrique définis dans le repère cartésien orthonormé  $R (O, X_i)$  de la figure III-1

Ces anneaux d égale épaisseur « e », sont isolés axialement. Le problème thermique plan que nous allons définir sera traité en coordonnées polaires de rayon  $r$  et d'angle  $\phi$ . Le repère curviligne est représenté par les axes  $X_r$  et  $X_\phi$

Le premier anneau 1 est limité par les rayons intérieur  $r_o$  et extérieur  $R_o$  .

Le deuxième anneau 2 est limité par les rayons intérieurs  $R_o$  et extérieur  $R$ .

L'anneau 1 est refroidi au centre par un fluide de température  $T_1$ .

L'anneau 2 est refroidi à l'extérieur par un fluide de température  $T_2$ .

On retient en  $r=r_0$  et  $r=R$ , frontières extérieures interne et externe une condition de troisième espace.

Les températures du fluide ambiant sont  $T_1$  en  $r_0$  et  $T_2$  en  $R$ .

Les coefficients d'échange par convection sont respectivement  $h_1$  et  $h_2$  en  $r=R_0$ .

Les deux anneaux sont en contact, un flux de chaleur stable est génère à l'interface, ce qui nous amène a proposé deux conditions de liaison pour modéliser la frontière intérieur du système .cette modélisation sera traitée dans les paragraphes suivants.

Les anneaux sont en notation relative, le référentiel.  $R(o,x_i)$  est lie à l'anneaux 2 fixe ,l'anneau 1 tourne que rapport à l'anneau 2 autour de l'axe  $X_3$  à la vitesse angulaire  $\omega$

Les grondeurs thermo physiques utilisées sont :

L'anneau 1 en notation ;  $k_1, \rho_1, c_1$

L'anneau 2 en fixe ;  $k_2, \rho_2, c_2$

Ou  $k, \rho, c$  sont respectivement le conductivité thermique , la mass volumique et la chaleur massique du matériau

### 3.2. Les Equation Du Problème

le transfert de chaleur par conduction est régi par l'équation de Fourier (II.1) qui s'écrit en coordonnées polaires dans l' un repère fixe ( $O.X_i$ ) en présence d' un source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + P(r, \varphi) / k = \frac{1}{D} \frac{DT}{Dt} \quad (\text{III.1})$$

Ou  $r$  et  $\varphi$  sont les coordonnées polaire.

$P(r, \varphi)$  peut être source ou puis dans la position  $(r, \varphi)$  / unité de v

$\frac{DT}{Dt}$  : la dérive particulière de la température par rapport au temps.

$D$  : la diffusivité thermique .du matériau définie par.  $D = \frac{k}{\rho c}$

considérons un second repère (O, X<sub>r</sub>, X<sub>θ</sub>) lié à l'anneau en rotation dont les coordonnées polaires sont r et θ .

θ et ϕ sont liés par la rotation.

$$\phi = \theta + \omega t \Rightarrow \phi = \phi(t) \quad (\text{III.2})$$

la dérivée particulaire s'écrit sous la forme .

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial T}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt}$$

On sur fait l'étude à stationnaire ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) la dérivée particulaire devient :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial T}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} = \omega \frac{\partial T}{\partial \phi} \quad (\text{III.3})$$

Donc pour le corps 1 l'équation de fourier s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = \frac{\omega}{D_1} \frac{\partial T}{\partial \phi} - \frac{1}{k_1} P_1(r, \phi) \quad (\text{III.4})$$

où P<sub>1</sub>(r,ϕ) représente la source volumique de chaleur dans l'anneau 1.

Pour le corps 2 qui est fixe. l'équation de Fourier devient .

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = - \frac{1}{k_2} P_2(r, \phi) \quad (\text{III.5})$$

où P<sub>2</sub>(r,ϕ) : c'est le source volumique de l'anneau 2.

L'équation (III.5) peut être réécrite sous la forme.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} - \frac{\omega}{D_1} \frac{\partial T}{\partial \phi} = - \frac{1}{k_1} P_1(r, \phi) \quad (\text{III.6})$$

où le terme  $\frac{\omega}{D_1} \frac{\partial T}{\partial \phi}$  représente le terme de transport lié à la rotation. De (1) par rapport au référentiel.

### 3.3 . HYPOTHESES DU CONTACT TRIBOLISSE

1/ - le contact est tribolisse lorsque la surface de contact apparente est égale à la surface de contact réelle . Le saut de température n'est pas pris en considération. ( $\Delta T = 0$ )  $\Rightarrow T_1(R_0, \phi) = T_2(R_0, \phi)$  (III.7)

Avec T<sub>1</sub> et T<sub>2</sub> sont les températures de deux points en regard appartenant à chaque surface frottant.

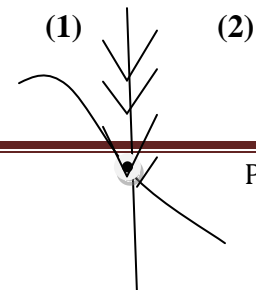
2 /- La barrière thermique introduite par la présence d'un troisième corps au Film. de transport est négligée. (pas de la bri fiante) .

3/ - La chaleur q(M') en gendre en un point double M' de la surface

De contact est entièrement dissipée en ces mêmes points, il vient

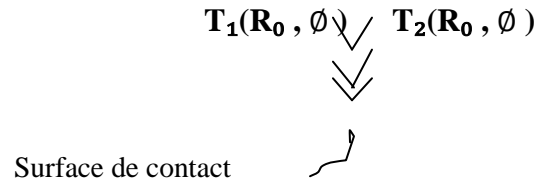
$$q_1(M') + q_2(M') = q(M') \quad (\text{III.8})$$

Cette condition suppose que le refroidissement de



la surface de contact, par convection est nul.

4/ - Les pertes par rayonnement sont négligées.



5/ - Tous les matériaux sont supposés homogène, c.e. d , leurs conductivité thermique , chaleur massique et mass volumique .sont indépendantes des coordonnées géométriques est aussi isotropes ice . (  $K_x=K_y = K_z$  )

### 3.3 .1 .Modélisation thermique de l' interface

Cette modélisation. implique deux conditions, à droit et à gauche de l'interface de contact, l' une sur la température , l' autre sur la densité de flux.

La condition de contact tribalise suppose la continuité des température et le bilan des densité de flux de chaleur en un point  $M(R_0 , \varnothing )$  de l' interface de contact s écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1(R_0 , \varnothing ) = T_2(R_0 , \varnothing ) \\ \Phi_g(\varnothing) = K_1 \frac{\partial T_1(R_0 , \varnothing)}{\partial r} - K_2 \frac{\partial T_2(R_0 , \varnothing)}{\partial r} \end{array} \right. \quad (\text{III.10})$$

$- K_1 \frac{\partial T_1(R_0 , \varnothing)}{\partial r}$  et  $- K_2 \frac{\partial T_2(R_0 , \varnothing)}{\partial r}$  sont les flux à gauche et à droit de l' interface.

$\Phi_g(\varnothing)$  est le flux surfacique [  $W/m^2$  ] généré à l' interface et dû a la présence de source de chaleur dues au frottement .

### 3.3.2.Résolution du système d équations

De nombreuses publication traitent du cas le plus simple de .l' échauffement d'un corps cylindrique tournant unique , la source de chaleur étant ponctuelle .

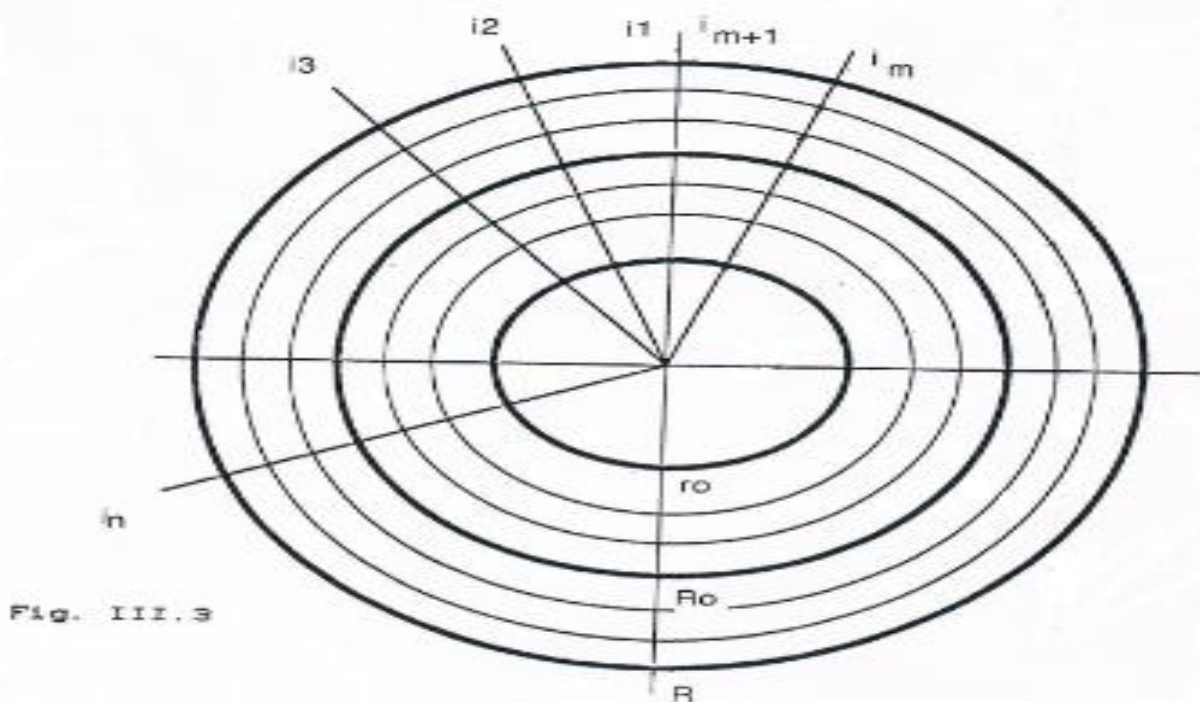
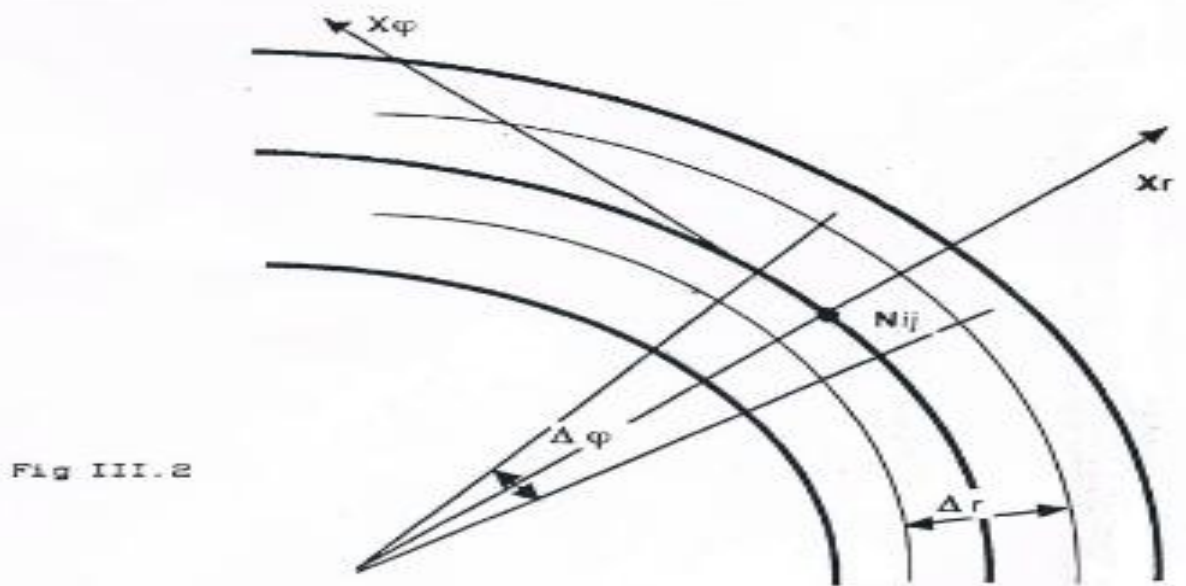
Nous développons dans ce qui suit , une solution du problème thermique global . pour l'ensemble des deux anneaux modélises par les équations précédentes en se basant sur la méthode proposés par " Badie lvet " .

### 3.3.3. Schématisation bidimensionnelle du système par différences finie

#### 3.3.3.1 Discrétisation du Domaine

Pour tout nœud  $N_{i,j}$  du domaine discrétisé par un maillage, nous déterminons la température  $T_{i,j}$ .

Nous allons discrétiser les circonférences par l'indice  $i$  et les rayons par l'indice  $j$  (figure III.2 et III.3)



La continuité de champs de températures à la frontière  $i=IM$  est de type périodique  $T_{IM+1,j} = T_{1,j}$

Selon un rayon d'indice  $j$ , variant de 1 pour  $r=r_0$  à  $jM$  pour  $r=R$ , L'interface sera

Indicée par  $j=j_0$ .

Les paramètres du schéma bidimensionnel employé sont les suivants

- Le pas circonférentiel  $\Delta\phi = \frac{2\pi}{iM}$  identique pour les deux anneaux.
- Le pas radial de l'anneau 1 noté  $\Delta r_1$  est égale à :

$$\Delta r_1 = \frac{R_0 - r_0}{j_0 - 1}$$

Tout rayon est exprimé par  $r = (\varepsilon_1 + j - 1) \Delta r_1$

Avec  $j \in (1, j_0)$  et  $\varepsilon_1 = r_0 / \Delta r_1$

De même manière on définit le pas radial de l'anneau 2 :

$$\Delta r_2 = \frac{R - R_0}{jM - j_0}$$

Tout rayon est exprimé par relation :

$$r = (\varepsilon_2 + j - j_0) \Delta r_2 \text{ avec } j \in (j_0, jM) \text{ et } \varepsilon_2 = R_0 / \Delta r_2.$$

### 3.3.3.2. Les équation aux différences fini

Les équations aux différences fini sont établies, pour tout nœud  $N_{i,j}$  en écrivant l'équation de conservation de l'énergie dans la maille entourant ce Nœud.

De température seront normalisées .

$$T_{i,j}^* = \frac{T_{i,j} - T_0}{T_0} \text{ à } T_0 \text{ est une température de référence .}$$

Pour écrire les équation aux différences finies , nous définissons les grandeur suivantes :

$$\text{Les nombres de Biot } B_1 = \frac{h_1 r_0}{k_1}, \text{ et } B_2 = \frac{h_1 R}{k_2}$$

Les nombre de Fourier :

$$FO = \frac{D_1 \Delta\phi}{\omega \Delta r_1^2}$$

Pour écrire les équations aux différences finies , nous définissons les grandeurs suivantes :

$$\text{Les nombres de Biot} \quad B1 = \frac{h1 \ r0}{k1} \quad \text{et} \quad B2 = \frac{h2 \ R}{K2}$$

$$\text{Le nombre de Fourier} \quad F0 = \frac{D1 \ \Delta\theta}{\omega \ \Delta r1^2}$$

Posons :

$$\gamma_{1,j} = \frac{1}{(\varepsilon_{1+j-1})^2 \Delta\theta^2}$$

$$\gamma_{2,j} = \frac{1}{(\varepsilon_{2+j-1})^2 \Delta\theta^2}$$

$$a_{1,j} = \gamma_{1,j} + \frac{1}{2 \ F0}$$

$$b_{1,j} = \gamma_{1,j} - \frac{1}{2 \ F0}$$

$$c = \gamma_{1,j0} + \frac{1}{2 \ F0} + \frac{k2}{k1} \frac{1}{\varepsilon_{2} \ \Delta\theta^2 (\varepsilon_{1+j0-1})}$$

$$d = \gamma_{1,j0} - \frac{1}{2 \ F0} + \frac{k2}{k1} \frac{1}{\varepsilon_{2} \ \Delta\theta^2 (\varepsilon_{1+j0-1})}$$

$$\alpha_{1,j} = \frac{\varepsilon_{1+j-3/2}}{(\varepsilon_{1+j-1})}$$

$$\beta_{1,j} = \frac{\varepsilon_{1+j-1/2}}{(\varepsilon_{1+j-1})}$$

$$\alpha_{2,j} = \frac{\varepsilon_2 + j - j_0 - 1/2}{(\varepsilon_2 + j - j_0)}$$

$$\beta_{2,j} = \frac{\varepsilon_2 + j - j_0 + 1/2}{(\varepsilon_2 + j - j_0)}$$

*S1*  $j=1$

$$L_1 = \beta_{1,1} + \gamma_{1,1} + B_1/\varepsilon_1$$

*S1*  $1 < j < j_0$

$$z_{1,j} = 2(1 + \gamma_{1,j})$$

*S1*  $j=j_0$

$$S = \alpha_{1,j_0} + \gamma_{1,j_0} + \frac{k_2}{k_1} \frac{1}{\varepsilon_2 \Delta\theta^2 (\varepsilon_1 + j_0 - 1)} + \frac{k_2}{k_1} \beta_{2,j_0}$$

*Si*  $j_0 < j < JM$

$$Z_{2,j_0} = 2(1 + \gamma_{2,j_0})$$

*Si*  $j = JM$

$$L_2 = \alpha_{2,jM} + \gamma_{2,jM} + \frac{B_2}{(\varepsilon_2 + jM - j_0)}$$

On peut alors écrire les équations aux différences finies. en grandeurs réduites l'indice \* sera supprimé par commodité d'écriture.

### 3.3.3.3 discrétisation aux nœuds (i,j) :

On va faire la discrétisation dans les domaines, suivants :

Pour :  $j=1$  ,  $2 \leq j < j_0$  ,  $j = j_0$  ,  $j_0 < j < jM$  ,  $j = jM$

Pour  $2 \leq j \leq j_0$  :

Dans l'anneau 1 pour  $r \in ]r_0, R_0[$ , en annulant le terme de la source volumique, l'équation de Fourier (III.7) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} - \frac{\omega}{D_1} \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

En utilisant des différences centrées, qui ont pour expression

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \Big|_{i,j} &= \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta\varphi} & , \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \Big|_{i,j} &= \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{2\Delta\varphi^2} \\ \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{i,j} &= \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta r} & , \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \Big|_{i,j} &= \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{2\Delta r^2} \end{aligned}$$

Après substitution dans l'équation (III.11) multiplication de tout les termes par  $\Delta r^2$  et regroupement on aura : l'expression suivante.

$$\begin{aligned} T_{i-1,j} \left[ \frac{\Delta r^2}{r_j^2 \Delta \varphi^2} + \frac{\omega}{D_1} \frac{\Delta r^2}{2\Delta \varphi} \right] + T_{i,j-1} \left[ \frac{\Delta r^2}{\Delta r_1^2} - \frac{1}{r_j} \frac{\Delta r^2}{2\Delta r_1} \right] - T_{i,j} \left[ \frac{2\Delta r^2}{\Delta r_1^2} + \frac{1}{r_j^2} \frac{2\Delta r^2}{\Delta \varphi^2} \right] + T_{i,j+1} \\ + T_{i+1,j} \left[ \frac{\Delta r^2}{\Delta r_1^2} - \frac{1}{r_j} \frac{\Delta r^2}{2\Delta r_1} \right] + T_{i+1,j} \left[ \frac{\Delta r^2}{r_j^2 \Delta \varphi^2} - \frac{\omega}{D_1} \frac{\Delta r^2}{2\Delta \varphi} \right] = 0 \quad (\text{III.12}) \end{aligned}$$

En remplaçant les coefficients prédéfinis par leurs valeurs, on aura :

$$a_{1,j} T_{i-1,j} + \alpha_{1,j} T_{i,j-1} - z_{1,j} T_{i,j} + \beta_{1,j} T_{i,j+1} - b_{1,j} T_{i+1,j} = 0$$

### 3.3.3.4. discrétisation au nœuds (i,j) avec j=1 :

Sur la frontière extérieur interne (pour  $r=r_0$ ), une condition de troisième type est imposée .

$$K_1 \frac{\partial T}{\partial \varphi} \Big|_{r=r_0} = h_1 (T_{i,1} - T_1) \quad (\text{III.14})$$

En utilisant des différences à droite d'ordre 2 en  $\Delta r_1$ , la condition au limite discrétisée aura la forme .

$$\left[ \frac{-3T_{i,j+2} + 4T_{i,j+1} - T_{i,j}}{2\Delta r_1} \right] = \frac{h_1}{K_1} (T_{i,j} - T_1) \quad (\text{III.15})$$

$$\text{à encore } T_{i,j+2} = -\frac{2\beta_1}{\varepsilon_1} [T_{i,j} - T_1] - 3T_{i,j} + 4T_{i,j+1} \quad (\text{III.16.a})$$

Pour l'équation de transfert qui garde la même forme que celle écrite précédemment (III.11) on emploie des différences à droite, d'ordre 1, suivant j et différences centrées suivant i, ce qui donne

$$T_{i-1,j} \left[ \frac{1}{r_j^2} \frac{1}{\Delta\phi^2} + \frac{\omega}{D_1} \frac{1}{2\Delta\phi} \right] - T_{i,j} \left[ -\frac{1}{\Delta r_1^2} + \frac{1}{\Delta r_1} \frac{1}{r_j} + \frac{1}{r_j^2} \frac{2}{\Delta\phi^2} \right] + T_{i,j+2} \left[ \frac{1}{\Delta r_1^2} \right] \\ + T_{i,j+1} \left[ \frac{-2}{\Delta r_1^2} + \frac{1}{r_j} \frac{1}{\Delta r_1^2} \right] + T_{i+1,j} \left[ \frac{1}{r_j^2} \frac{1}{\Delta\phi^2} - \frac{\omega}{D_1} \frac{1}{2\Delta\phi} \right] = 0 \quad (\text{III.16.b})$$

Substitué l'équation (III.16.a) dans (III.16.b) on aura l'équation le linéaire.

$$1/2 a_{1,1} T_{i-1,1} - L_1 T_{i,1} + \beta_{1,1} T_{i,2} + 1/2 b_{1,1} T_{i+1,1} = -\frac{\beta_1}{\varepsilon_1} T_1 \quad (\text{III.17})$$

### 3.3.3.5. discrétisations aux nœuds (i,j) avec $j_0 < j < j_M$ :

Dans l'anneau 2 (pour  $r \in ]R_0, R[$ ) le terme, de l'équation d'énergie, lié au transport est nul, l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\text{III.18.a})$$

En utilisant des différences centrées suivant i et j alors l'équation (III.18.a) aura la forme réduite .

$$\gamma_{2,j} T_{i-1,j} + \alpha_{2,j} T_{i,j-1} - Z_{2,j} T_{i,j} + \beta_{2,j} T_{i,j+1} + \gamma_{2,j} T_{i+1,j} = 0$$

### 3.3.3.6. discrétisations au nœuds (i,j) avec $j = j_M$ :

Sur la frontière extérieure de l'anneau 2 on a aussi une condition de troisième type . En employant des différences à gauche d'ordre 1 en  $\Delta r_2$ , pour l'équation(III.18)et les différences à gauche d'ordre 2 en  $\Delta r_2$ , pour la condition aux limite

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{h_2}{k_2} ( T_{i,j_M} - T_2 ) .$$

A près la combinaison. entre les deux expression obtenue on aura l'expression final.

$$\frac{1}{2} \gamma_{2,jM} T_{i-1,jM} + \alpha_{2,jM} T_{i,jM} - L_2 T_{i,jM} + \frac{1}{2} \gamma_{2,jM} T_{i+1,jM}$$

$$=$$

$$- \frac{B_2}{(\epsilon_2 + jM - j_0)} T_2 \quad (\text{III.19})$$

### 3.3.3.7. discrétisations au nœuds (i,j) avec j = j0 :

A l'interface de contact en R = R0 , on a :

$$\Phi_{g(\emptyset)} = K_1 \frac{\partial T_1(R_0, \emptyset)}{\partial r} - K_2 \frac{\partial T_2(R_0, \emptyset)}{\partial r} \quad (\text{III.20})$$

pour discrétiser l'équation (III.11)   l'interface , on utilise des différence à gauche d'ordre 1 suivant j et des différences centrées suivant i et en multipliant par  $\Delta r_1^2$

$$\Delta r_1^2 \left[ \frac{T_{i,j_0} - 2 T_{i,j_0-1} + T_{i,j_0-2}}{(\Delta r_1)^2} \right] + \frac{1}{r_j} \Delta r_1^2 \left[ \frac{T_{i,j_0} - T_{i,j_0-1}}{\Delta r_1} \right]$$

$$+ \frac{1}{r_j^2} \Delta r_1^2 \left[ \frac{T_{i-1,j_0-2} - T_{i,j_0} + T_{i+1,j_0}}{\Delta \emptyset^2} \right] - \frac{\omega}{D_1} \Delta r_1^2 \left[ \frac{T_{i+1,j_0} - T_{i,j_0-1}}{2 \Delta \emptyset} \right] = 0 \quad (\text{III.21.a})$$

En utilisant des différences à droite , d'ordre 1 , suivant j et des.

différences centrées suivant i et en multipliant par  $\left(\frac{\Delta r_1}{\Delta r_2}\right) (\Delta r_1)^2 \left(\frac{K_2}{K_1}\right)$

Tous les termes, l'équation (III.18.a) discrétisée s'écrit.

$$\Delta r_1^2 \left[ \frac{T_{i,j_0} - 2 T_{i,j_0+1} + T_{i,j_0+2}}{(\Delta r_2)^2} \right] \frac{\Delta r_1}{\Delta r_2} \frac{K_2}{K_1}$$

$$+ \frac{K_2}{K_1} \frac{1}{r_j^2} \Delta r_1^2 \left[ \frac{T_{i-1,j_0-2} - T_{i,j_0} + T_{i+1,j_0}}{\Delta \emptyset^2} \right] \frac{\Delta r_1}{\Delta r_2}$$

$$+ \frac{K_2}{K_1} \frac{1}{r_j} \Delta r_1^2 \left[ \frac{T_{i-1,j0} - T_{i,j0-1}}{2\Delta\phi} \right] \frac{\Delta r_1}{\Delta r_2} = 0 \quad (\text{III.21.b})$$

La condition de liaison (III.20) discrétisée, en utilisant des différences à gauche, d'ordre 2, dans l'anneau 1 et des différences à droite, d'ordre 2, dans l'anneau 2, aura pour forme.

$$\left[ \frac{3 T_{i,j0} - 4 T_{i,j0-1} + T_{i,j0-2}}{2\Delta r_1} \right] - \frac{K_2}{K_1} \left[ \frac{3 T_{i,j0} - 4 T_{i,j0-1} + T_{i,j0-2}}{2\Delta r_1} \right] = \Phi_g(\phi)/K_1 = 0 \quad (\text{III.21.c})$$

Au encore sous forme discrétisée

$$T_{i,j0-2} + \frac{K_2}{K_1} \frac{\Delta r_1}{\Delta r_2} T_{i,j0+2} = 2\Delta r_1 \Phi_g(\phi) - 3T_{i,j0} + 4T_{i,j0-1} - 3\frac{K_2}{K_1} \frac{\Delta r_1}{\Delta r_2} T_{i,j0+4} + \frac{K_2}{K_1} T_{i,j0+1} \quad (\text{III.21.d})$$

$$\frac{1}{2} C T_{i-1,j0} + \alpha_{1,j0} T_{i,j0-1} - S T_{i,j0} + \frac{K_2}{K_1} \alpha_{2,j0} T_{i,j0+1} + \frac{1}{2} d T_{i+1,j0} = -\frac{\Phi_g}{T_0} \frac{\Delta r_1}{K_1} \quad (\text{III.22})$$

### 3.3.4. expression du flux $\Phi_g$

Cinq fonctions de transfert, gouvernant le flux de chaleur générée le long d'un contact, ont été utilisées par plusieurs auteurs [8,9] :

$$\Phi = \Phi_g + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \quad (\text{III.23.a})$$

$$\Phi = \Phi_g \cos \phi \quad (\text{III.23.b})$$

$$\Phi = \Phi_g \frac{4\sqrt{2}}{\pi+2} \cos^2 \phi \quad (\text{III.23.c})$$

$$\Phi = \Phi_g + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} [1 + \sin \phi] \quad (\text{III.23.d})$$

$$\Phi = \Phi_g + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} [1 - \sin \phi] \quad (\text{III.23.e})$$

Où  $\Phi_g$  représente le flux de chaleur maximal généré à l'interface de contact et il est donné par [10] :

$$\Phi_g = \frac{f p v}{A_r} \quad (\text{III.24})$$

Avec :

f : coefficient de frottement

p : charge normale en [Newton]

v : vitesse de glissement en [m/s]

$A_r$  : surface de contact réel

En liant les équations (III.21.a) et (III.21.b) et en faisant intervenir l'expression (III.21.b) pour éliminer les termes de température  $T_{i, j0 - 2}$  et  $T_{i, j0 + 2}$ , avec des pas radiaux égaux ( $\Delta r_1 = \Delta r_2$ ) nous pouvons écrire en définitif :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} C T_{i-1, j0} + \alpha_{1, j0} T_{i, j0 - 1} - S T_{i, j0} + \frac{K_2}{K_1} \alpha_{2, j0} T_{i, j0 + 1} + \frac{1}{2} d T_{i+1, j0} \\ & = - \frac{\Phi_g \Delta r_1}{T_0 K_1} \quad (\text{III.22}) \end{aligned}$$

Après toutes ces discrétisations on aura un système d'équation.

$$\text{I} : a_{1, j} T_{i-1, j} + \alpha_{1, j} T_{i, j-1} - z_{1, j} T_{i, j} + \beta_{1, j} T_{i, j+1} + b_{1, j} T_{i+1, j} = 0$$

$$\text{II} : \frac{1}{2} a_{1, 1} T_{i-1, 1} - L_1 T_{i, 1} + \beta_{1, 1} T_{i, 2} + \frac{1}{2} b_{1, 1} T_{i+1, 1} = - \frac{\beta_1}{\epsilon_1} T_1$$

$$\text{III} : \gamma_{2, j} T_{i-1, j} + \alpha_{2, j} T_{i, j-1} - Z_{2, j} T_{i, j} + \beta_{2, j} T_{i, j+1} + \gamma_{2, j} T_{i+1, j} = 0$$

$$\text{IV} : \frac{1}{2} \gamma_{2, jM} T_{i-1, jM} + \alpha_{2, jM} T_{i, jM-1} - L_2 T_{i, jM} + \frac{1}{2} \gamma_{2, jM} T_{i+1, jM} = - \frac{B_2}{(\epsilon_2 + jM - j_0)} T_2$$

$$\begin{aligned} \text{V} : \frac{1}{2} C T_{i-1, j0} + \alpha_{1, j0} T_{i, j0 - 1} - S T_{i, j0} + \frac{K_2}{K_1} \alpha_{2, j0} T_{i, j0 + 1} + \frac{1}{2} d T_{i+1, j0} \\ = - \frac{\Phi_g \Delta r_1}{T_0 K_1} \end{aligned}$$

### 3.3.5. expression du flux $\Phi_g$ :

La différence maximale de température introduite par les différentes fonctions de flux est inférieure à 3°C quand c'est l'arbre intérieur qui est tournant et avoisine 10 °C quand c'est le moyeu

qui est animé d'un mouvement de rotation , mais la différence de température s'élève à 20 °C dans le cas d'un mouvement oscillatoire .

Faute de pouvoir prédire la distribution de chaleur  $\Phi_g(\varnothing)$  dans le contact, nous supposons donc que la température de contact est indépendante de la distribution de chaleur.

Dans le calcul, nous considérons uniquement la répartition de chaleur donnée par l'expression (III.23.b→23.a d'après distance).

### CONCLUSION GENERALE

Le contact sec frottant est un problème thermomécanique. on a essayé principalement a bien comprendre et maitriser les phénomènes thermiques. Pour cela, une synthèse des différents modèles thermiques analytiques de contact sec est élaborée. Une discussion est menée sur le phénomène de génération de chaleur par frottement qui est un paramètre capital dans la détermination des températures d'un contact frottant.

Dans le domaine industriel, on cherche toujours à bien comprendre et maitriser les phénomènes génération de chaleur par frottement.

Le sujet de notre étude, consiste à discrétiser par la méthode des différences finis l'équation de transfert de chaleur d'un champs de température à l'interface d'un contact dynamique en régime établi afin de bien comprendre le phénomène de génération de chaleur par frottement.

D'après le plan de travail élaboré d'avance. Nous avons commencé premièrement par une brève description sur la mécanique de contact (Le contact sec : généralités et aspects thermiques). Une attention particulière est portée sur l'importance du phénomène thermique.

Dans le deuxième chapitre, on a exposé en détail la procédure numérique choisie (méthode des différences finis).

Le troisième chapitre est consacré à l'exposition de l'équations du phénomène de transfert de chaleur par conduction ainsi que la discrétisation de cette dernière par la méthode des différences finis.

On aurait voulu compléter ce travail par une étude d'un cas bien déterminer, ou on peut réaliser un programme sous MATLAB pour résoudre les équations algébriques obtenues par discrétisation traité dans le troisième chapitre ,mais le temps disponible n'était pas suffisant pour réaliser le volume de calculs et des analyses tellement grand.

Tous ces calculs peuvent être l'objet d'un autre projet

### BIBLIOGRAPHIE

- [Abdel-Aal 1999] **H. A. Abdel-Aal** ; *Division of fictional heat : the dépendance on sliding parameters* ; Int. Comm. Heat Mass Transfer ; Vol. 26; N°2 ; 1999 ; pp. 279-288.
- [Anderson et al. 1989] **A.E. Anderson et R.A. Knapp** ; *Hot spotting in automotive friction systems* ; International Conference on Wear of Materials ; 1989 ; pp. 673-680.
- [Archard 1955] **J.F. Archard** ; *The temperature of rubbing surfaces* ; Wear ; Vol. 2 ; 1958 ; pp. 438-455.
- [Bardon 1994] **J.P. Bardon** ; Bases physiques des conditions de contact thermique imparfait entre milieux en glissement relatif; Rev. Gen. Therm. Fr. ; N° 386 ; Fevrier 1994 ; pp. 85-91.