جامعة الشهيد حمه لخضر – الـــوادي

كلية العلوم الدقيقة

قسم: الرياضيات والاعلام الآلي

التحليل العددي دروس وتمارين محلولة

الأستـــاذ:

✓بقـاص محمـد

الموسم الدراسي : 2023/2022

فهرس المحتويات

المحتويات

قائمة الأشكال

مقدمة عامة

مقدمة عامة

علم التحليل العددي يختلف على تعريفه الكثير، ولكن الأغلبية يتفقون على أنه علم استخدام الخوارزميات العددية للحصول على حلول تقريبية للمسائل الحسابية المعقدة، على العكس من الحلول التحليلية التي تعطى حلولا صحيحة تامة وغير تقريبية.

لذلك فإن الهدف العام من علم التحليل العددي هو تصميم خوارزميات – طرق– تقريبية لحل المسائل الصعبة التي يصعب حلها يدويا مثل أن تجد حلا لألف من المعادلات في ألف من المجاهيل أو تحسب معكوس مصفوفة مربعة من ألف صف وألف عمود مثلا.

على الرغم من امتداد أصول التحليل العددي في التاريخ إلا أن الطفرة التي حدثت في الحاسبات في نهاية القرن الماضي كان لها أكبر الأثر في استخدام هذا العلم في الكثير من التطبيقات الهندسية والعلمية والطبية والحيوية وشتى نواحي العلوم التي نعرفها هذه الأيام.

هذه الطفرة التي نعيشها الآن لن تمنعنا من إلقاء نظرة سريعة على تاريخ هذا العلم وبالذات على تاريخ كلمة خوارزم – *Algorithm* – التي لا تخلو صفحة تقريبا من صفحات أي كتاب في التحليل العددي من ذكرها ومفهوم الخوارزميات هو :

خطوات حسابية منظمة تعطى في عدد محدد من الخطوات إجابة لسؤال أو حلا لمشكلة.

يعود تاريخ هذا العلم الي القرن التاسع الميلادي بواسطة عالم الرياضيات محمد بن موسى الخوارزمي وهو من خوارزم بجنوب آسيا صاحب كتاب "المختصر في حساب الجبر والمقابلة" ولقد أطلق اسم الخوارزمي – *Algorithm*– نسبة لهذا العالم وهو المنشئ الأساسي لعلم الجبر *algebra* .

هذا الكتاب "التحليل العددي" موجه لطلاب ليسانس رياضيات خاصة وطلاب العلوم والتكنولوجيا عامة ولهذا أولينا للجانب التطبيقي أهمية اكبر وسنقوم بتوجيه الطالب إلي بعض المراجع لمن يريد التعمق في الجانب النظري..

كما يشمل الكتاب علي مجموعة من التمارين المقترحة المحلولة عند نهاية كل فصل.

أما الملحق فقد خصص لتنفيذ بعض الطرق المقدمة من خلال خوارزميات.

فصول الكتاب مرتبة كالتالي

- الفصل الاول يتناول دراسة الاخطاء التعريف بالخطأ والدقة والانضباط والفرق بين كل منها والأنواع المختلفة للأخطاء ومصادرها وكيفية التقليل من آثارها وقد تضمن ايضا الطرق العددية المختلفة لتقريب التوابع بواسطة كثيرات حدود الاستقطاب وأخيرا تناولنا في هذا الفصل الطرق العددية في الاشتقاق والتكامل العددين.
- الفصل الثاني ويتضمن علي الطرق العددية لحل المعادلات الجبرية غير الخطية وكذالك معادلات كثيرات الحدود.
- الفصل الثالث بعد إجراء مراجعة عامة حول المفاهيم الاساسية للمصفوفات تم التطرق للطرق المباشرة لحل جملة معادلات خطية.
- الفصل الرابع و يتضمن هذا الفصل الطرق التكرارية أو غير المباشرة لحل جملة معادلات خطية.
- الفصل الخامس تم بحث مسألة الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية باستخدام طرق التحليل العددي.
- الفصل السادس يتضمن ملحق ماتلاب لقد تم اختيار لغة الماتلاب- *MATLAB* - كلغة مصاحبة لهذا الكتاب والتي سيتم بها تنفيذ كل البرامج المقدمة نتيجة إمكانيات الماتلاب في الرسم وعرض النتائج.
- الفصل السابع والاخير يحتوي على حلول التمارين المقترحة إضافة إلى قائمة المراجع ويختتم هذا الفصل بخلاصة حول المؤلف.

الفصل الأول

I - دراسة الأخطاء

1-تمهيد

2-مصادر الاخطاء

3- أنواع الاخطاء

4-العمليات الجبرية علي الاخطاء

6-**II - تقريب التوابع.**

1- تمهيد

2- تقريب التوابع بواسطة سلسلة تايلور.

7-III - الاستقطاب.

1- تمهيد

1-كثير حدود لاغرانج.

2- طريقة نيوتن.

8-IV- الاشتقاق العددي.

1-تمهيد

2- تقريب المشتق الاول.

3- التقريب المركزي للمشتق الثاني.

4-V - **التكامل العددي**

1-طريقة شبه المنحرف

2-طريقة سبمسون

3-نمارين مقترحة

دراسة الاخطاء

1-تمهيد:

عند استخدام الطرق العددية لحل مسائل لا يمكن حلها تحليليا نحصل على نتائج تقريبية مما يعني وجود أخطاء وعلينا إيجاد تقريب لهذا الخطأ اذ تتلخص مهمتنا في:

- **إيجاد الحل التقريبي للمسألة وتقويم الخطأ.**

2- مصادر الأخطاء: المرجع [3]

يمكن تصنيف هذه الأخطاء المرتكبة الى خمسة أصناف أساسية:

أ - أخطاء ناتجة عن وضعية المسألة:

عند دراسة ظاهرة طبيعية فإننا مرغمين على تبسيط المسألة وقبول بعض الشروط مما يؤدي الى عدة أخطاء (أخطاء المسألة) وقد يصعب حل المسألة فنعوضها بمسألة مقربة مما ينتج عنه أخطاء تسمى (أخطاء الطريقة).

ب- أخطاء البتر:

أخطاء ناتجة عن وضع حدا للمسألة تعتمد عل حسابات غير منتهية (دوال تظهر في مسألة مثل متتاليات وسلاسل او كطريقة تكرارية تقرب المسألة) وبهذا تسبب أخطاء تسمى : أخطاء البتر.

ج- أخطاء ناتجة عند وجود أوسطه عددية في علاقات رياضية حيث قيمتها تكون تقريبية كثوابت فيزيائية تؤدي الى أخطاء تسمى : (أخطاء بدائية)

د- أخطاء ناتجة عن تدوير عدد.

ه- أخطاء متراكمة ناتجة عن الأخطاء السابقة .

التقريب:

يتم التقريب من خلال التدوير او الاقتطاع

- التدوير:

هو استعمال المدورة بدلا من القيمة المضبوطة للعدد.

- قاعدة التدوير:

عند تدوير عدد لغاية n رقم معبر نحذف كل الأرقام الموجودة على يمين رقم ذا الرتبة n ولهذا الحذف شروط:

1) اذا كان أول رقم معبر محذوف أكبر من 5 نظيف 1 الى الرقم الأخير المعبر.
2) اذا كان اول رقم اقل تماما من 5 فإن الرقم الأخير يبقى على حاله.
3) اذا كان اول رقم معبر محذوف مساويا الى 5 وكل الأرقام المحذوفة اصفار فإن:
   - الرقم الأخير لا يتغير اذا كان زوجي.
   - نضيف له 1 اذا كان فردي.

مثال: 1) تدوير العدد $\pi=3.141592$ الى 4 ثم 6 ارقام معبر نحصل على:

- 3.142 (اربع ارقام معبرة) تطبيق 01
- 3.14159 (ستة ارقام معبرة) تطبيق 02

1) تدوير العدد 1.2500 الى عددين معيرين نحصل على العدد المقرب 1.2 (تطبيق03)

- الاقتطاع:

تستعمل الآلة الحاسبة او الحاسوب قاعدة الاقتطاع أي الاكتفاء بإظهار عدد منته بعد الفاصلة.

- مثلا $a=0.126748$ تظهر فقط $a'=0.12674$
- الامر *Format* في الماتلاب يحدد كيفية عرض النتيجة على الشاشة وهناك نوعان:

✓ الأول: *Format short* يعرض النتيجة في خمس خانات فقط (خانات عشرية)

✓ الثاني: *Format long* يعرضها في *16* خانة عشرية وهذا اقصى عدد من الخانات في الماتلاب.

وهذا اقصى عدد من الخانات في الماتلاب.

يمكن إدراج الخطأ الناتج عن البتر كخطأ اقتطاع عند استعمال البتر في سلاسل تايلور.

3- أنواع الأخطاء:

من خلال الخطأ نتعرف على مدى دقة وسرعة الطرق العددية والمفاضلة بينهما.

3-1- الخطأ المطلق:

لتكن a القيمة المقربة لقيمة دقيقة A نعرف الخطأ المطلق لـ a على A ورمزه Δ

المقدار: $\Delta = |A - a| \qquad (1.1)$

- تعريف:

نسمي الحد الأعلى للخطأ المطلق كل عدد Δa حيث : $\Delta = |A - a| \leq \Delta a$

أي : $a - \Delta a \leq A \leq a + \Delta a$ وبالتالي :

$$A = a \pm \Delta a \qquad (1.2)$$

مثال: اوجد الحد الأعلى للخطأ المطلق لـ $a = 3.14$ التي تعوض قيمة $A = \pi$

الحل :

- لدينا : $3.14 < \pi < 3.15$

اذن $|a-\pi| \leq 0.01$ ومنه يمكن أخذ $\Delta a = 0.01$

- اذا أخذنا $3.140 < \pi < 3.142$ فإن : $\Delta a = 0.002$

3-2- الخطأ النسبي:

الخطأ المطلق لا يعطي فكرة حقيقية عن دقة القياس، مثلا لو قسنا طول القاعة وطول المسافة بين الوادي والعاصمة وكان الخطأ المطلق نفسه فالسؤال هو أي القياسين أدق؟

طبعا المسافة بين الوادي و العاصمة أدق وبالتالي لمعرفة ذلك تم إدخال الخطأ النسبي المعرف كما يلي : $E = \frac{\Delta}{|A|}$

تعريف: الحد الأعلى للخطأ النسبي Ea لعدد مقرب a معطى هو عدد كيفي يحقق: $E \leq Ea$

أي ان $\frac{\Delta}{|A|} \leq Ea$ أي $\Delta \leq |A|Ea$

ومنه: $\Delta a = |A|.Ea$ اذن

$$Ea = \frac{\Delta}{|A|} \qquad (1.3)$$

مثال: وزن 1 دم^3 من الماء في درجة حرارة $OC°$ هي :

$$P = 999.847 \pm 0.001$$

اوجد حدا للخطأ النسبي.

الحل: $\Delta P = 0.001$ لدينا $P = 999.847$

ومنه : $Ep = \frac{0.001}{999.847} = 10^{-4}\%$

4- العمليات الجبرية على الأخطاء: المرجع [2]

لتكن a و b القيمتان التقريبيتان للعددين A و B على التوالي حيث:

❖ $$\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b \qquad (1.4)$$

$$E_{(a+b)} = \frac{1}{|A+B|}(A.E_a + B.E_b)$$

❖ $$\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b \qquad (1.5)$$

$$E_{(a-b)} = \frac{1}{|A-B|}(A.E_a + B.E_b)$$

❖ $$\Delta(a.b) = b\Delta a + a\Delta b \qquad (1.6)$$

$$E_{(a.b)} = E_a + E_b$$

❖ $$\Delta\left({}^{a}/_{b}\right) = \frac{A}{B}\left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}\right) \qquad (1.7)$$

$$E\left({}^{a}/_{b}\right) = E_a - E_b$$

دراسة خطأ التقريب: أنضر المراجع [2] و[7]

نتيجة: خطأ التقريب يعطي بواسطة العلاقة التالية:

$$|f(x) - p(x)| = \frac{f^{(n+1)}(f)}{(n+1)!}\pi_{i=0}^{n}(x - x_i) \qquad (1.8)$$

II – تقريب التوابع

1–تمهيد

الغرض من تقريب التوابع بواسطة كثير حدود من المرتبة n لكون كثيرات الحدود عبارة عن توابع بسيطة تسمح لنا بإجراء مختلف العمليات (التكامل، الانشقاق،...) لكن التوابع لانعرف صيغتها التحليلية ويكون هذا التقريب في عدد محدود من النقاط ووفق شروط معينة سيتم التعرض لها لاحقا.

2– التقريب بواسطة سلسلة تايلور:

- **تعريف01:**

نرمز بـ $C^n([a,b])$: مجموعة التوابع الحقيقية f والقابلة للاشتقاق n مرة على المجال $[a,b]$

بحيث المشتق من الرتبة n يكون مستمرا على هذا المجال.

من خلال التعريف فإن:

$C([a,b])$: مجموعة التوابع الحقيقية والمستمرة على $[a,b]$.

نظرية تايلور (سلسلة تايلور):

اذا كان $f \in C^n([a,b])$ و $f^{(n+1)}$ موجود ضمن $]a,b[$ اذن:

$\exists\, c \in \,]a,b[$ بحيث : $\quad (1.9)$

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \quad \dots \quad + \frac{f^n(a)}{n!}(b-a)^{\mathrm{n}} + R(f)$$

مع الباقي $R(f)$ معطى على الشكل:

$$R(f) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \qquad (1.10)$$

ملاحظة :

صيغة تايلور مع الباقي على شكل تكامل بالعلاقة التالية:

$$R(f) = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt \qquad (1.11)$$

نتيجة: المرجع [6]

ليكن $f \in C^n([a,b])$ و $x_0 \in [a,b]$، اذا وجد المشتق $f^{(n+1)}$ على المجال $]a,b[$ ووجد عدد حقيقي M بحيث :

$$\forall\, x \in \,]a,b[\,, \left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M$$

فإن كثير الحدود $P_n(x)$ حيث:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(x)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

يحقق المتراجحة التالية:

$$\forall\, x \in \,]a,b[\, : \ |f(x) - P_n(x)| \le M.\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (1.12)$$

البرهان:

بما ان $x, x_0 \in [a,b]$ يمكن تطبيق نظرية تايلور ومنه:

$$|f(x) - P_n(x)| = |R(f)| = \left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right| . \left|f(x)^{(n+1)}\right|$$

لدينا: $\left|\frac{x-x_0}{(n+1)!}\right| \leq \frac{|b-a|}{(n+1)!}$ و $\left|f(x)^{(n+1)}\right| \leq M$

اذن: $|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} . M$

$P_n(x)$: هو تقريب للتابع f و $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} . M$ هو الخطأ المرتكب.

يمكن كتابة $P_n(x)$ على الشكل:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (1.13)$$

حيث $P_n(x)$ يمثل كثير حدود تايلور النوني من أجل f حول النقطة x_0 و $R(f)$ يسمى الحد الباقي (او الخطأ) المرافق لـ $P_n(x)$ السلسلة اللانهائية التي نحصل عليها من النهاية $\lim_{n\to+\infty} P_n(x)$ تسمى سلسلة تايلور لـ f حول x_0.

- **حالة خاصة:**

اذا كان $x_0 = 0$ كثير حدود تايلور يسمى كثير حدود " ماك لوران" أيضا سلسلة تايلور تسمى سلسلة " ماك لوران".

III- الاستقطاب

1- تمهيد

يحتاج المتعاملون مع البيانات ان يمثلوا العلاقة بين متغيرين او اكثر مثلا يتم تسجيل درجة الحرارة على مدار الساعة كل نصف ساعة في صورة جدول في عملية صناعية.

المطلوب عادة هو إيجاد علاقة بين درجة الحرارة والزمن بحيث يمكن تقدير درجة الحرارة عند ازمنة غير مدرجة في الجدول وهنا تكمن الحاجة الى علاقة في صورة كثير حدود لمعرفة معلومات وسلوك هذه العلمية وهذا ما نسميه: **الاستقطاب** بحيث يمكننا رسم منحني تقريبي يمر بأغلب هذه النقاط مع نسبة خطأ معينة وهذا ما نسميه: **تقريب المنحنيات.**

هناك عدة طرق للاستقطاب لكن في عرضنا سنكتفي بكثيري حدود: لاغرانج ونيوتن

2- كثير حدود لاغرانج المرجع [15]

لتكن $x_0, x_1, \dots x_n$ $(n+1)$ نقطة مختلفة f دالة حيث قيمها في هذه النقاط هي:

$f(x_0), f(x_1), \dots f(x_n)$ فإنه يوجد كثير حدود وحيد درجته n حيث:

$f(x_k) = P_n(x_k) \;\; k = 0,1, \dots n$ ويعطي على الشكل:

$$P_n(x_k) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x) \qquad (1.14)$$

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k-1})\dots(x_k-x_n)} \quad k = 0,1,\dots,n$$

ملاحظات:

- ترتيب النقاط عند حساب $L_k(x)$ لايؤثر على النتيجة.
- يمكن كتابة على الشكل التالي:

من اجل $k = 0$:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}$$

من اجل $k = 1$:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}$$

من اجل $k = n$:

$$L_n(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} \qquad (1.15)$$

من خلالا التعريف نستنتج أن :

$$L_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq j \\ k, j = 1,2, \dots n \end{cases}$$

مثال:

عين كثير حدود لاغرانج للاستقطاب الذي يمر بالنقاط التالية:

$$(x_i, y_i) = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{-5}{4}\right); (-1, -2); (0, -2) \quad y_i = f(x_i), i = 0,1,2 \right\}$$

الحل

نقوم أولا بحساب $L_k(x)$ من اجل $k = 0,1,2$:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(0+1)\left(0-\frac{1}{2}\right)}=-2x^2-x+1$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{1}{3}(2x^2-x)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{4}{3}(x^2+3)$$

بما ان $n=2$ اذن كثير حدود الاستقطاب يكون على الشكل:

$$P_2(x)=\sum_{k=0}^{2} f\,(x_k).L_k(x)$$

$$P_2(x)=-2L_0(x)-2L_1(x)-\frac{5}{4}L_2(x)$$

ومنه: $$P_2(x)=x^2+x-2$$

3 – طريقة نيوتن

الفروق المقسمة المتقدمة

لدينا مجموعة نقاط (x_i,y_i) ونريد إيجاد كثير حدود حيث:

$$P(x_i)=y_i \quad i=0,1,\dots,n.$$

سوف نتعرض لحالات بسيطة من أجل $n=1,2$ ثم نقوم بالعتميم بإستعمال الفروق المقسمة لإيجاد كثير الحدود $P(x)$.

- $n=1$:

أي إيجاد مستقيم يمر بالنقطتين (x_1,y_1) ; (x_0,y_0) ويعطى على الشكل التالي:

$$P(x)=y_0+(x-x_0)\frac{(y_1-y_0)}{(x_1-x_0)}$$

- $n = 2$:

إيجاد كثير حدود من المرتبة الثانية ويمر بالنقاط : (x_2, y_2) ; (x_1, y_1) ; (x_0, y_0) وتعطى معادلته بالشكل التالي:

$$P(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} + a(x - x_0)(x - x_1) \qquad (1.16)$$

حيث :
$$a = \frac{1}{(x_2 - x_0)}\left(\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}\right)$$

- التعميم

الفروق المقسمة

نعرف الفروق المقسمة لدالة f معرفة على النقاط:

$i = 0,1, \dots, n$ (x_i) . ب : $[x_i] = y_i = f(x_i)$.

- الفروق المقسمة الاولي:

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad (1.17)$$

مثلا:

$$[x_0 - x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

- الفروق المقسمة الثانية:

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \qquad (1.18)$$

مثلا:

$$[x_0,x_1,x_2]=\frac{[x_1,x_2]-[x_0,x_1]}{x_0-x_0}=\frac{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} \qquad (1.19)$$

- الفروق المقسمة من الرتبة n:

الفروق المقسمة من الرتبة n تستنتج من سابقتها أي من الرتبة $(n-1)$:

$$[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+n}]=\frac{[x_{i+1},\dots,x_{i+n}]-[x_i\ ,\dots,x_{i+n-1}]}{x_{i+n}-x_i} \qquad (1.20)$$

مثلا:

$$[x_0,x_1,\dots,x_n]=\frac{[x_1,\dots,x_n]-[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

جدول الفروق المقسمة

$x_0 \quad y_0$
$\dots\dots\dots\dots\,[x_0,x_1]$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,[x_0,x_1,x_2]$
$x_1 \quad y_1$
$\dots\dots\dots\dots\,[x_1,x_2]$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,[x_0,x_1,x_2,x_3]$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,[x_1,x_2,x_3]$
$x_2 \quad y_2$
$\dots\dots\dots\dots\,[x_2,x_3]$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
$x_3 \quad y_3$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,[x_1,x_2,x_3,x_4]$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,[x_2,x_3,x_4]$
$\dots\dots\dots\dots\,[x_3,x_4]$
$x_4 \quad y_4$

نظرية: المرجع [1]

كثير الحدود الذي يستقطب الدالة f في النقاط المنفصلة مثني مثني (x_i,y_i) يسمي كثير حدود في أساس نيوتن وهو وحيد ويكتب على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}(1.21)\qquad & P(x)\\ &=[x_0]+[x_0,x_1](x-x_0)+[x_0,x_1,x_2](x_0,x_1)(x-x_1)\\ &+[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\cdots\\ &+[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots([x-x_{n-1}])\end{aligned}$$

مثال:

اوجد كثير الحدود الذي يستقطب الدالة f في النقاط التالية:

$$\left(x_i, y_i\right) = \{(2,3), (3,2), (4,-1), (5,-6)\}$$

حيث $i = 0,1,2,3$

اذن جدول الفروق المقسمة يكون على النحو التالي:

			3	2
		1−		
	1−		2	3
0		3−		
	1−		1−	4
		5−		
			6−	5

ومنه كثير الحدود المطلوب يكون على الشكل التالي:

$$P(x) = 3 - 1(x-2) - 1(x-2)(x-3) + 0(x-2)(x-3)(x-4)$$

اذن :

$$P(x) = -x^2 + 4x - 1$$

IV- الاشتقاق العددي

1- تمهيد

عند حل مسائل تطبيقية تصادفنا أحيانا حساب المشتقات من رتبة معينة لدالة f التي لا تعرف عنها سوى قيمها المعطاة بجدول او تكون عبارتها معقدة حيث يكون من الصعب حساب دالتها المشتقة وفي هذه الحالة نلجأ الى الاشتقاق العددي المقرب عند قيم معينة. لمن يريد التوسع في الجانب النضري عليه بالمراجع التالية [2] و[14].

2- تقريب المشتق الأول:

الهدف الأساسي يكمن في تقريب المشتق الأول للدالة f عند القيمة x حيث:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

من اجل h قريب من الصفر وغير معدوم، ومنه نحصل على تقريب الدالة f عند x:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

اذا كانت $f \epsilon C^2([0,1])$ يمكننا استنتاج التعريف السابقة من خلال نشر تايلور.

حيث:

$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2} f"(x)$$

من اجل $\vartheta \epsilon [x, x+h]$ نحصل على:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| \leq Ch$$

اين: $$C = \underset{x\epsilon[0,1]}{Sup} |f''(x)|$$

من اجل $\vartheta \epsilon [x-h, x]$

وبالتالي نحصل على التقريبات التالية:

المتقدم: $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

المتأخر: $f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$

الخطأ المترتب عند هذا التقريب من الرتبة الأولى: (Ch^1)

التقريب المركزي:

اذا اردنا تحسين التقريب فنلجأ الى التقريب المركزي شريطة ان تكون الدالة f من الصنف $C^3([0,1])$ من خلال نشر تايلور عند $(x-h)$ و $(x+h)$

نجد:

$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(\theta_1)$$

$$f(x-h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(\theta_2)$$

$$\theta_1 \epsilon [x, x+h] \ ; \ \theta_2 \ \epsilon [x-h, x]$$

أين الطرح نحصل على:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{2}(f'''(\theta_1) + f'''(\theta_2)$$

ومنه نجد:

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x)\right| \leq C4h^2$$

حيث:

$$C' = Sup|f'''(y)|$$

$$y\epsilon[0,1]$$

إذن:

التقريب المركزي : $f'^{(x)} \approx \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

خطأ التقريب من الرتبة الثانية وهو اكثر دقة من المتأخر والمتقدم.

3– التقريب المركزي للمشتق الثاني:

اذا كانت الدالة f من الصف $C^4 = ([0,1])$ بمكننا تقريب المشتق الثاني عند القيمة x من المجال $[0,1]$فمن خلال نشر تايلور عند $(x-h)$ و $(x+h)$ نجد:

$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2}f"(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\theta_1)$$

$$f(x-h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2}f"(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\theta_2)$$

ومنه نجد:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + (x-h)}{h^2}$$

$$\left|\frac{f(x+h)-2f(x)+(x-h)}{h^2}-f''(x)\right|\leq\frac{h^2}{12}Sup\left|f^{(4)}(\theta)\right|,\qquad \theta\epsilon[0,1]$$

من اجل $x\epsilon[h,1-h]$

التقريب المركزي هو الأكثر استعمالا لأنه الأكثر دقة حيث رتبة الخطأ هي من الرتبة الثانية.

التكامل العددي

في هذا المحور نحاول إعطاء بعض الطرق العددية لحساب التكامل لدالة قد لا نعرف عنها سوى القيم عند نقاط معينة وبالتالي يكون من الصعب حساب تكاملها او لدالة معروفة لكن من الصعب أيضا حساب تكاملها.

سوف نستعرض في هذا الدرس طريقة شبه المنحرف البسيطة والمركبة ثم نتناول طريقة سيمسون البسيطة والمركبة أو الموسعة . لمن يريد التوسع في الجانب النضري والبراهين عليه بالمراجع التالية [3] , [14] و[15].

1. طريقة شبه المنحرف

- طريقة شبه المنحرف البسيطة:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[a,b]$

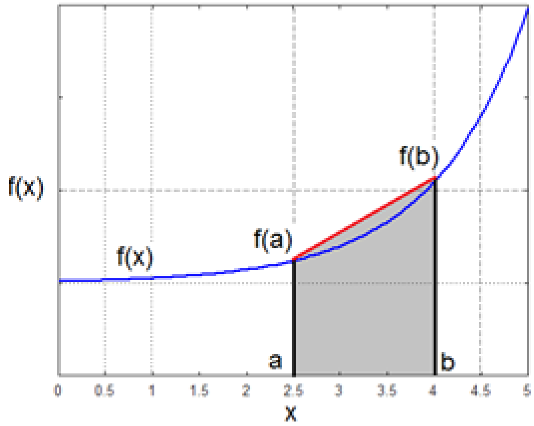
تمثيلها البياني يشمل النقطتين $(a,f(a)),(b,f(b))$.

الطريقة تعتمد على تقريب مساحة الحيز المعرف بـ: $\int_a^b f(x)dx$ بواسطة مساحة شبه منحرف كما هو مبين في الشكل (1.1)

إرتفاع شبه المنحرف هو $b-a$

قاعدته الصغرى $f(a)$

قاعدته الكبرى $f(b)$



الشكل (1.1)

فنحصل على التقريب التالي

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\{f(a)+f(b)\} \qquad (1.22)$$

لاحظ أننا نستخدم علامة التساوي التقريبي $(\approx)$ مما يعني أن هناك نسبة خطأ في هذا التكامل.

- **طريقة شبه المنحرف المركبة:**

نقوم بتقسيم المجال $[a,b]$ الى n مجال جزئ

حيث: $a=x_0, x_1, \dots, x_n=b$

ثم نطبق الطريقة البسيطة على كل مجال جزئ ومن ثم نقوم بجمعها أي:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\{f(x_i)+f(x_{i+1})\}$$

- الخطوة الأولى:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=x_0}^{x_i} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)dx$$

- الخطوة الثانية:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{x_1 - x_0}{2}\{f(x_0) + f(x_1)\} + \frac{x_2 - x_1}{2}\{f(x_0) + f(x_1)\} + \cdots + \frac{x_n - x_{n-1}}{2}\{f(x_{n-1}) + f(x_n)\}$$

نعتبر ان التقسيم منظم أي: $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$ ومنه نحصل على:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\big(f(x_1)\big) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \qquad (1.23)$$

يمكن كتابة العبارة السابقة على النحو التالي:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left\{f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_i)\right\}$$

مثال:

احسب التكامل التالي مستعملا طريقة شبه المنحرف المركبة: $I = \int_0^\pi \sin x dx$

الحل:

أولا الحل التحليلي لهذا التكامل هو:

$$I = [-\cos\pi]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$$

ثانيا: طريقة شبه المنحرف المركبة نضع $h = \frac{\pi}{2}$

$$x_0 = 0, x_1 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

ومنه نجد:

$$\int_0^\pi sin\, xdx = \frac{\frac{\pi}{2}}{2}\left\{sin(0) + sin(\pi) + 2sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

ومنه:

$$I \approx \frac{\pi}{4}\{0+0+2\} = \frac{\pi}{2}$$

خطأ التقريب: المرجع [10] و [14]

يعطي خطأ تقريب تكامل دالة f معرفة على مجال $[a,b]$ بواسطة المتراجحة التالية:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \times M \qquad (1.24)$$

حيث:

$$T_n(f) = \frac{h}{2}\left\{f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_i)\right\}$$

و

$$M = max_{[a,b]}|f''(x)|$$

2- طريقة سمبمسون

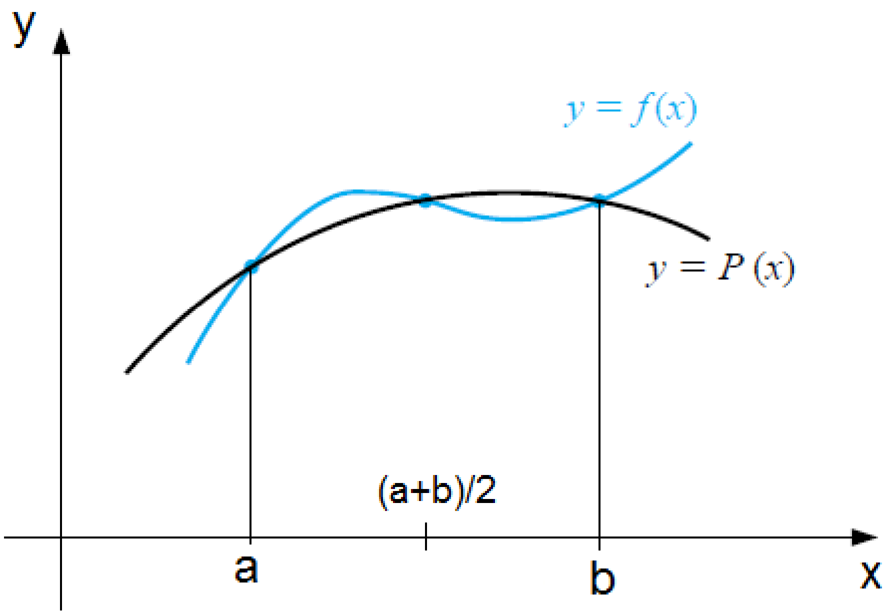
- **طريقة سيمسون البسيطة:**

حساب التكامل بطريقة سيمسون يستدعي وجود ثلاث نقاط اذا كانت الدالة f معرفة على المجال $[a,b]$ مما يعني أن كثير حدود الاستقطاب للدالة من الدرجة الثانية – كما هو مبين في الشكل (1.2)

بينما كثير حدود الاستقطاب في طريقة شبه المنحرف البسيطة من الدرجة الاولى

نضع:

$$x_0 = a \;\; ; \;\; x_1 = \frac{b+a}{2} = c \;\; ; \;\; x_2 = b.$$



الشكل (1.2)

ثم نقرب منحنى الدالة f بواسطة كثير حدود من الدرجة الثانية يمر بالنقاط الثلاث حيث نستعمل كثير حدود الاستقطاب (لانغرانج) نجد:

$$P_2(x) = f(a)L_0(x) + f(c)L_1(x) + f(b)L_2(x)$$

ومنه: $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx$

بما ان:

$$\int_a^b P_2(x)dx = f(a)\int_a^b L_0(x)dx + f(c)\int_a^b L_1(x)dx + f(b)\int_a^b L_2(x)dx$$

ومن خلال قيم L_0, L_1, L_2 المعرفة سابقا نحصل على :

$$\int_a^b L_0(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}$$

$$\int_a^b L_1(x)dx \approx 4\frac{(b-a)}{6}$$

$$\int_a^b L_2(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}$$

بعد التعويض فإننا نحصل على التقريب التالي:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}[f(a)+4f(c)+f(b)] \qquad (1.25)$$

ملاحظة: اذا أعطيت ثلاث نقاط x_i, x_{i+1}, x_{i+2} حيث:

$$x_{i+2}-x_{i+1}=x_{i+1}-x_i=h$$

فإن التقريب يكون على الشكل التالي:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_i)+4f(x_{i+1})+f(x_{i+2})] \qquad (1.26)$$

مثال:

حساب التكامل المعطى في المثال السابق باستعمال طريقة سيمسون:

$$I=\int_0^\pi sinxdx$$

نضع $x_0=0, x_1=\frac{\pi}{2}, x_2=\pi$ أي: $h=\frac{\pi}{2}$

ومنه نحصل على التقريب التالي:

$$I \approx \frac{x_{i+2}-x_i}{6}\left[sin(0)+4sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+sin(\pi)\right]$$

اذن:

$$I \approx \frac{2\pi}{3}$$

من خلال النتيجتين نلاحظ ان طريقة سمبسون أدق أي اقرب للقيمة الحقيقية لـ I.

- **طريقة سيمسون المركبة:**

لزيادة الدقة يمكن تقسيم مجال التكامل الى مجالات جزئية كما في طريقة شبه المنحرف المركبة وتجميع هذه التكاملات مع الاخذ في الاعتبار ان كل مجال جزئ يكون من الشكل: $[x_{i-1}, x_{i+1}]$

لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

حيث:

$$x_n = b,\ x_0 = a \ \text{و}\ x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_{i+1} - x_i = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$$

بتطبيق التقريب على كل التكاملات الجزئية نجد:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \cdots + \frac{h}{3}[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})] + \frac{h}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

إذن:

(1.27)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\left(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k+1})\right) + 2\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k})\right)\right]$$

لاحظ ان الصيغة تفترض ان عدد نقاط التقسيم تكون عدد فردي (عدد) لكي يكون هناك عدد زوجي من المجالات، اما اذا كان عدد نقاط التقسيم زوجي أي هناك عدد فردي من المجالات

الجزئية فلا يمكن تطبيق هذه الصيغة وبالتالي نلجأ الى طريقة لسمبسون على اول اربع نقاط ثم نطبق الصيغة السابقة على ما تبقى من النقاط (سنتعرض لهذه الحالة في التمارين المقترحة).

خطأ التقريب: المرجع [10] و [14]

يعطي خطأ تقريب تكامل دالة f معرفة على مجال $[a,b]$ بواسطة المتراجحة التالية:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_n(f)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \times M_1 \qquad (1.28)$$

حيث:

$$S_n(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\left(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k+1})\right) + 2\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k})\right)\right]$$

و $M_1 = max_{[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$

تمارين مقترحة

التمرين الاول:

دور الاعداد التالية الى اربع ارقام معبرة دقيقه واذكر الخطأ المرتكب.

c =0.0023417 , b =−5.357500 , a =456.872

التمرين الثاني:

إذا كان كل الارقام المعبرة للعددين 476.6 و 3.11918 دقيقة

ما هو الخطأ المطلق والنسبي لمجموعهما.

التمرين الثالث:

أوجد تقريب للدالة $f(x) = e^{x} \sin x$ علي المجال $[0,1]$ مستعملا كثير حدود تايلور من المرتبة الثالثة.

التمرين الرابع:

برهن ان كثيرات الحدود $(\mathrm{P_i(x)})_{\mathrm{i=0.1.2}}$ متعاضدة علي المجال $[-1,1]$ من أجل

$w(x) = 1$ حيث $P_1(x) = x$; $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$; $P_0(x) = 1$

تعريف

تكون P_i حيث $i = 1, \dots, n$ كثيرات حدود متعامدة علي المجال $[a, b]$ إذا تحقق

$$\int_a^b w(x)\, P_i(x) P_j\,(x)\, dx = 0 \qquad i \neq j$$

$$\int_a^b w(x)\, P_i(x) P_j\,(x)\, dx \neq 0 \qquad i = j$$

التمرين الخامس

1-أوجد كثير حدود الاستقطاب للاغرانج للدالة المعرفة علي النقاط التالية :

8	6	2	1	x_i
5	7	5	2	y_i

2- أحسب $P_3(3)$

التمرين السادس

أوجد كثير حدود الاستقطاب لنيوتن ولاغرانج للدالة $f(x) = cosx$

عند النقاط التالية $0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$

التمرين السابع

مستعملا قيم الجدول المعطي أحسب $\int_{1.1}^{1.5} f(x)\ dx$ بواسطة :

1-طريقة شبه المنحرف البسيطة.

2-طريقة سمبسون البسيطة

1.5	1.3	1.1	x
4.4817	3.6693	3.0042	$f(x)$

التمرين الثامن

من خلال المعطيات المجدولة كما يلي:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
f(x)	1.500	2.000	2.000	1.6364	1.250	0.9565

أحسب تكامل الدالة علي المجال $[0, 2.5]$ مستخدما طريقة سمبسون مع مراعاة عدد النقاط.

التمرين التاسع

ليكن التكامل $\int_0^2 e^x \; dx$

- أحسب القيمة الحقيقية للتكامل.
- **أحسب التكامل مستعملا**
- 1- طريقة شبه المنحرف البسيطة
- 2- طريقة سمبسون البسيطة
- 3- طريقة شبه المنحرف المركبة وسمسون المركبة من أجل h=0.5
- أي تقسيم يعطينا نتيجة أدق؟

التمرين العاشر

- أحسب التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ باستعمال طريقة شبه المنحرف المركبة من أجل $n = 5$
- أحسب الخطأ المرتكب
- أوجد عدد التقسيمات n حتي يكون الخطأ ب10^{-2}

الفصل الثاني

I– الحل التقريبي لمعادلة غير خطية

1– مقدمة

2– طريقة النقطة الثابتة

3– طريقة نيوتن

4– تمارين مقترحة

الحل التقريبي للمعادلات غير الخطية

1- مقدمة

غالبا ما يجد الطالب صعوبة في إيجاد حلول معادلة غير خطية ولهذا نلجأ للطرق العددية لنحصل عن حل تقريبي.

هناك عدة طرق عددية للبحث عن الحل التقريبي لمعادلة غير خطية ، في هذا الفصل سوف نستعرض طريقتين عدديتين وهما:

- **طريقة النقطة الثابتة**
- **طريقة نيوتن**

2- طريقة النقطة الثابتة: المرجع [7] و [4]

قبل تناول هده الطريقة سوف نتطرق الى تعريف عام للنقطة الثابتة لدالة .

تعريف النقطة الثابتة: نسمي العدد الحقيقي α نقطة ثابتة لدالة g اذا تحقق: $g(\propto) = \propto$ اي: صورة $\propto$ بواسطة الدالة g هي نفسها .

تعيين النقطة الثابتة نعرف المتتالية (x_n)على النحو التالي

$$\begin{cases} x_0 \text{ معطى} \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases} \qquad (2.1)$$

من خلال المتتالية السابقة نستطيع حل المعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ وذلك بتحويلها الى معادلة مكافئة من الشكل $x = g(x)$

ملاحظة: الكتابة $x = g(x)$ ليست وحيدة وبالتالي اختيار الدالة g يخضع لمعايير سيتم تحديدها من خلال النظرية التالية :

نظرية التقارب لطريقة النقطة الثابتة : المرجع [7]

لتكن $g: [a,b] \to [a,b]$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$ حيث:

$$\forall x \in [a,b]: \ |g'(x)| \le k < 1$$

اذن المتتالية (x_n) المعرفة ب: $x_{n+1} = g(x_n)$ حيث: $n = 0,1, \dots n$

تتقارب مستقلة عن القيمة الابتدائية x_0 نحو النقطة الثابتة الوحيدة $\overline{x}$ للدالة g.

مثال

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{[a,b] = [2,4]}$$

هناك عدة إمكانيات لتحويل هذه المعادلة إلي الشكل

$$x = g(x)$$

$$1 \qquad x = g(x) = \sqrt{2x+3}$$

$$2 \qquad x = h(x) = \frac{3}{x+2}$$

$$3 \qquad x = k(x) = \frac{x^2-3}{2}$$

بين الدالة التي تحقق شروط النقطة الثابتة مع التعليل

1 لدينا $4 \le 2x \le 8 \to 7 \le 2x+3 \le 11$

ومنه $\to \quad \sqrt{7} \le g(x) \le \sqrt{11}$

إذن $g([2,4]) € [2,4]$ و

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \leq 0.30 = k < 1$$

شروط النظرية محققة ومنه المتتالية تتقارب نحو الحل التقريبي.

2 حيث $x \neq 2$ $h(x) = \frac{3}{x-2}$

أحد الشروط غير محقق ومنه المتتالية ليست متقاربة

3 لدينا $\frac{1}{2} \leq k(x) \leq 6.5$

أحد الشروط غير محقق ومنه المتتالية ليست متقاربة

اذن حسب النظرية يجب اختيار الدالة الاولى.

نتيجة

إذا كانت g تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة فإن

$$n \geq 1 \qquad |x_n - \bar{x}| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0| \qquad (2.2)$$

هذه العلاقة تسمح لنا بإيجاد عدد التكرارات اللازمة من أجل تقريب الحل بالدقة المعطاة.

برهان هذه النتيجة يعتمد على فكرة مجموع حدود متتالية هندسية ويمنك الرجوع للمرجع التالي[] لمعرفة المزيد.

3- طريقة نيوتن: المرجع [7] و [4]

الخطية وتمتد ايضا هذه الطريقة غير المعادلات لحل استعمالا الاكثر الطرق احدى هي نيوتن طريقة لحل جمل المعادلات غير الخطية. تعتمد هذه طريقة على نظرية تايلور انطلاقا من القيمة الابتدائية للحل نبحث عن الارتياب على النحو التالي:

$$f(x_0 + \Delta x) = 0$$

نقوم بنشر تايلور بجوار القيمة الابتدائية اي:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\ \Delta x f'(x_0)+\ldots$$

يكفي ان نهمل الرتب اكبر من او تساوي 2 نجد:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\ \Delta x f'(x_0)=0$$

$$\Delta x=-\ \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad\qquad f'(x_0)\ \neq 0$$

Δxالمقدار الذي نضيفه للقيمة الابتدائية x_0حتى تنعدم الدالة f

نضع $x_1=\ \ (x_0\ +\Delta x)$

ثم نعيد البحث عن الجذور التقريبية للدالة بخطأ جديد فنحصل على العلاقة التكرارية التالية:

$$x_{n+1}\ =x_n-\ \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (2.3)$$

ملاحظات:

1/طريقه نيوتن هي حالة خاصة من طريقه النقطة الثابتة

2/بما اننا اهملنا الحدود ذات الرتب الاكبر من او يساوي 2 في نشر تايلور فان هذا الارتياب ليس الاحسن

نظريه التقارب لطريقه نيوتن: المرجع []

اذا كانت fداله معرفه على المجال $[a,b]$ حيث تحقق الشروط التالية:

أ/ f مستمرة

ب/ $f(a).f(b)\ <0$

ج/ الدالة المشتقة الاولى والدالة المشتقة الثانية للدالة f غير معدومتين واشارتهما ثابتة على المجال $[a,b]$.

فان طريقه نيوتن تشكل متتاليه تتقارب نحوى الحل الوحيد للمعادلة انطلاقا من القيمة الابتدائية التي تحقق

$$f'(x_0).f''(x_0) > 0$$

اختبار التوقف:

توقف عملية التكرار يتم عندما يتحقق ما يلي:

$$||x_{n+1} - x_n|| < \varepsilon \qquad (2.4)$$

ε: درجه دقة معطاة

مثال $f(x) = x - e^{-x} \qquad x \in [-6, 1]$

بين أن شروط طريقة نيوتن محققة

لدينا f مستمرة علي المجال المعطي و $f(-6).f(1) < 0$

$f''(x) = -e^{-x} < 0$ دوما و $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$ دوما.

من اجل $x_0 = -6$ فان: $f'(-6).f''(-6) > 0$

ومنه طريقه نيوتن تتقارب.

نضع $\begin{cases} x_0 = -6 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}} \end{cases}$ المتتالية تتقارب نحو حل للمعادلة

3-تمارين مقترحة

تمرين1/

لتكن المعادلة المعرفة على المجال $[1,2]$ كما يلي:

$$x^3 - x - 1 = 0$$

أ/ نضع: $x = x^3 - 1 = h(x)$

$$x = \sqrt[3]{x+1} = g(x)$$

اي الدالتين تحقق شروط النقطة الثابتة ؟برر اجابتك.

ب/نضع $x_0 = 1.5$

اوجد عدد التكرارات اللازمة برتبة خطا مقدارها $\varepsilon = 0.5 * 10^{-2}$

ج/ اوجد الجذر التقريبي

التمرين2/ لتكن المعادلة : $2x - \cos x\, 0$ على المجال $[0, 0.5]$

أ/بين ان الدالة $g(x)$حيث:

$$x = 0.5 \cos x = g(x)$$

تحقق شروط طريقة النقطة الثابتة.

التمرين3/ لتكن المعادلة $x^4 - 8x + 1 = 0$ على المجال $[1.6, 2]$

أ/ بين ان شروط تطبيق طريقة نيوتن محققة

ب/ باستعمال تكرارين متتاليين اوجد القيمة المقربة للجذر مع اخذ $x_0 = 2$

التمرين4/ اوجد الجذر لمقرب للمعادلة $x^3 + x^2 - 11 = 0$ على المجال $[1, 2]$

بخطأ $\varepsilon = 0.5 * 10^{-2}$

بطريقة نيوتن بعد التحقق من شروط تطبيقهما.

التمرين 5/

باستعمال نشر تايلور أوجد تقريبا للدالة المشتقة الاولي حسب الحالات

1-الفروق المتقدمة.

2-الفروق المتأخرة.

3-الفروق المركزية.

ثم أوجد تقريبا للدالة المشتقة الثانية في حالة الفرق المركزي.

تطبيق

$$f(x) = lnx \quad , \quad x = 1 \;, \qquad h = 0.1$$

الفصل الثالث

I- مراجعة حول المصفوفات

1- مقدمة

2 - مفاهيم أساسية

3- العمليات علي المصفوفات

4- المحددات

5- القيم الذاتية والشعاع الطيفي

6- النظيم المصفوفي

5- II - الطرق المباشرة لحل جملة معادلات خطية

1- مقدمة

2- طرق الحذف

3- طرق التفكيك

4- تمارين مقترحة

I- مراجعة حول المصفوفات

1- مقدمة:

سنتناول في هذا الفصل العمليات التي يتم إجراؤها على المصفوفات او المحددات إضافة الى تعريف بعض المصفوفات الخاصة.

مما يسهل علينا التعامل مع الطرق المباشرة او التكرارية لحل جمل معادلات خطية كون المصفوفات تلعب دورا رئيسيا في هذ العملية وقد اكتفينا بعرض النتائج الاساسية ومكن للطالب الرجوع للمراجع التالية للتوسع أكثر [8] و[4].

1- مفاهيم أساسية:

تعريف المصفوفة

كل تطبيق خطي l معرف من الفضاء الشعاعي E وبعده n نحو الفضاء الشعاعي F وبعده m يمكن ان يمثل بواسطة جدول مستطيل A مكون من n سطر و m عمود، على النحو التالي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{13} & \dots\dots & a_{1m} \\ a_{21} & \ddots & & & \ddots & a_{2m} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \dots\dots & & \dots\dots & & a_{nm} \end{bmatrix}$$

نسمي A: المصفوفة المرفقة للتطبيق الخطي l .

وتكتب :

$$A = \left(a_{i,j}\right) \ : \quad \begin{cases} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m \end{cases}$$

$a_{i,j}$: يمثل العنصر ذو الرتبة i بالنسبة للأسطر وذو الرتبة j بالنسبة للأعمدة.

- اذا كانت : m=n

A تسمى مصفوفة مربعة.

- اذا كانت : n=1

نحصل على سطر شعاع : $A = [a_{11}, \quad a_{12}, \quad \cdots\cdots \quad a_{1m}]$

- اذا كانت : m=1

نحصل على عمود شعاع : $A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix}$

3- العمليات على المصفوفات:

ستقدم على شكل تمارين للمراجعة في حصة الاعمال الموجهة.

1-بعض الخواص الأساسية:

لتكن $A \left(a_{i,j}\right)$ مصفوفة مربعة $1 \le i,j \le n$

أ- المصفوفة A متناظرة اذا وفقط اذا تحقق :

$$\forall_{\, i,j} \ : \ 1 \le i,j \le n \quad : \quad a_{i,j} = a_{j,i} \qquad (3.1)$$

ب- منقول المصفوفة A ورمزها A^t حيث :

$$A^t = \left(a_{j,i}\right)$$

نتيجة : المرجع [6].

اذا كانت A مصفوفة متناظرة، فإن: $A^t = A$

ت- المصفوفة العكسية للمصفوفة A ورمزها A^{-1} بحيث : $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$

ث- تكون المصفوفة A معرفة موجبة اذا تحقق :

$$X^t\,AX > 0 \ : \ X \neq 0 \ : \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

اذا كانت : $X^t\,AX \geq 0$ فإن المصفوفة A في هذه الحالة موجبة لكن غير معرفة.

ج- تكون المصفوفة A ذات قطر مسيطر بالنسبة للأسطرأوالاعمدة اذا تحقق :

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{i,j}| \quad \forall_{\,i,j} \qquad (3.3)$$

اذا كانت العلاقة $(>)$ نقول ان A ذات قطر مسيطر تماما .

المصفوفات المثلثية والقطرية :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

A : مصفوفة قطرية

B : مصفوفة مثلثية سفلية

C : مصفوفة مثلثية علوية

4- المحددات:

نرمز لمحدد مصفوفة بالرمز : det A أو $|A|$ المحدد هو عبارة عن ثابت يستعمل في الكثير من التطبيقات وخاصة في حل جمل المعادلات الخطية.

بالنسبة للمصفوفة المربعة $A(2 \times 2)$ حيث :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad |A| = \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

بالنسبة للمصفوفة المربعة الثلاثية $A(3 \times 3)$ يمكن حساب محددها عن طريق تكرار أول عمودين كما يلي :

$$A=\left[\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\right]$$

حيث :

$$|A| = \det A = (a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} + \quad a_{12} \quad a_{23} \quad a_{31} + \quad a_{13} \quad a_{21} \quad a_{32}) \\ - (a_{31} \quad a_{22} \quad a_{13} + \quad a_{32} \quad a_{23} \quad a_{11} + \quad a_{33} \quad a_{22} \quad a_{12})$$

حساب المحدد باستعمال المحددات المساعدة:

$$|A| = \det A = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ + a_{13} \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

يمكن اختيار أي سطر او عمود حسب سهولة الحساب.

5- القيم الذاتية والشعاع الطيفي:

لتكن : $y = AX$ حيث :

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \;;\; A(n \times n)\,; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

نضع : $y = \lambda X$ حيث λ عدد حقيقي أو مركب.

نجد : $(y = \lambda X = AX) \leftrightarrow (A - \lambda I)\, X = 0$

فنحصل على جملة معادلات خطية متجانسة.

الجملة $(A - \lambda I)\, X = 0$ تقبل حل غير معدوم اذا وفقط اذا كان :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad (3.4)$$

- هذه المعادلة تسمى : المعادلة المميزة.
- جذور هذه المعادلة تسمى القيم الذاتية لـ A.
- الاشعة التي تمثل حلول الجملة تسمى :

الاشعة الذاتية لـ A وكل قيمة ذاتية مرفقة بشعاع ذاتي.

- الشعاع الطيفي :

نرمز للشعاع الطيفي للمصفوفة A بالرمز $\rho(A)$ حيث :

$$\rho(A) = max|\lambda_i| : 1 \leq i \leq n \qquad (3.5)$$

λ_i : القيم الذاتية لـ A

ملاحظة:

الشعاع الطيفي يلعب دورا هاما في معرفة تقارب الطرق التكرارية.

6- النظيم المصفوفي :

سوف نذكر ثلاث نظيمات :

$$\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right) \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

1) $\|A\|_1 = \max_j \quad \sum_{j=1}^{j=n} |a_{i,j}|$

2) $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{i,j}|$

3) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$

II – الطرق المباشرة لحل جملة معادلات خطية

1- مقدمة

الكثير من التطبيقات يتم تمثيلها بعدد من المعادلات الخطية وعندما يكون عدد هذه المعادلات صغيرا، أقل من ثلاثة أو أربعة، فإنه يمكن حل هذه المعادلات يدويا أو بطرق تحليلية أو يدوية وإيجاد قيم لهذه المجاهيل بشرط أن يكون عدد المجاهيل مساويا لعدد المعادلات.

أما عندما يصل عدد هذه المجاهيل وبالتالي عدد المعادلات إلى العشرات أو المئات فإنه في هذه الحالة يستحيل الحل التحليلي ولابد من استخدام الحاسب وبالتالي الطرق التكرارية لحل جملة المعادلات الخطية هذه الطرق سنتعرض لها في الفصل الموالي.

توجد نظم المعادلات الخطية في الكثير من التطبيقات الهندسية مثل الأبنية والتركيبات، والجوامد المرنة، والتدفق الحرارى، والمجالات الكهرومغناطيسية والدوائر الكهربائية وغيرها الكثير .

تعتمد الطرق المباشرة على تحويل مجموعة المعادلات المعطاة إلى مجموعة أخرى من المعادلات التي يسهل حلها كما سنرى.

هذا التحويل يتم عن طريق إجراء بعض العمليات الأولية على مصفوفة المعاملات وهذه العمليات ليس لها أي تأثير على محددة هذه المصفوفة ولذلك فهي لن تؤثر على الحل النهائي و هي:

1 – تبديل معادلتين بين بعضهما البعض.

2 – ضرب معادلة في ثابت لا يساوى الصفر.

3 – ضرب معادلة في ثابت لا يساوى الصفر ثم طرحها من معادلة أخرى.

4– تفكيك مصفوفة المعاملات الى جداء مصفوفتين مثلثيتين .

وهذه العمليات كلها سنستخدمها في هذه الطرق المباشرة لحل جمل المعادلات.

للمزيد من التعمق في هذا الفصل يمكن الاستفادة من المراجع التالية: [6], [8], [9] و[15]

تذكير:

لحل جملة معادلات خطية تعرضنا سابقا لطريقة كرامر والمصفوفة العكوس وسيتم التطرق لهما في الاعمال الموجهة أما في هذا الفصل فسوف نتعرض للطرق التالية:

- طرق الحذف
- طرق التفكيك

2- - طرق الحذف

أ- **طريقة غوص:** المراجع [6] و[15].

تعتمد طريقة غوص على تبديلات تخص الجملة الخطية (AX = b) بحيث يتم في كل مرة حذف متغير من معادلة الى ان نصل الى جملة خطية تتحول من خلالها A الى مصفوفة علوية او سفلية ثم يتم استنتاج الحلول بالتعويض.

مثال:

لتكن الجملة التالية:

$$(3.4) \qquad (S) \quad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\; x_2 + a_{13}\, x_3 \;+\; a_{14}\, x_4 = \;\; y_1 \;(1) \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\; x_2 + a_{23}\, x_3 \;+\; a_{24}\, x_4 = \;\; y_2 \;(2) \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\; x_2 + a_{33}\, x_3 \;+\; a_{34}\, x_4 = \;\; y_3 \;(3) \\ a_{41}\, x_1 + a_{42}\; x_2 + a_{43}\, x_3 \;+\; a_{44}\, x_4 = \;\; y_4 \;(4) \end{cases}$$

المرحلة الأولى: (للحذف)

أ- $a_{11} \neq 0$: نقوم بقسمة المعادلة (1) على a_{11} .

فنحصل على:

$$(1) \qquad : x_1 + a_{12}^1\, x_2 + a_{13}^1\, x_3 + a_{14}^1\, x_4 = y_1$$

$$a_{i,j}^1 = a_{i,j} / a_{11} \quad ; \quad y_1^1 = y_1/a_{11} \quad j=1,2,3,4$$

ثم نقوم بحذف المتغير x_1 من المعادلات (2)، (3)، و (4) نجد:

$$(3.4) \qquad (S1)\begin{cases} x_1 + a_{12}^1\, x_2 + a_{13}^1\, x_3 + a_{14}^1\, x_4 = y_1^1 \quad (1^1) \\ 0 + a_{22}^1\, x_2 + a_{23}^1\, x_3 + a_{24}^1\, x_4 = y_2^1 \quad (2^1) \\ 0 + a_{32}^1\, x_2 + a_{33}^1\, x_3 + a_{34}^1\, x_4 = y_3^1 \quad (3^1) \\ 0 + a_{42}^1\, x_2 + a_{43}^1\, x_3 + a_{44}^1\, x_4 = y_4^1 \quad (4^1) \end{cases}$$

حيث:

$$a_{i,j}^1 = a_{i,j} \;/\; a_{i,1} \; a_{i,j}^1$$

$2 < i \leq 4$

$$y_1^1 = y_i \;/\; a_{i,1}\, y_1^1$$

$2 < j \leq 4$

ب- نكرر نفس العملية مع السطر الثاني بالقسمة على (a_{22}^1) على اعتبار أن: ($a_{22}^1 \neq 0$)

فنحصل على:

$$(2^2) \quad : x_2 + a_{23}^2\, x_3 + a_{24}^2\, x_4 = y_2^2$$

حيث:

$$a_{2,j}^1 = a_{2,j}^1 \;/\; a_{22}^1$$

$j=3,4$

$$y_2^2 = y_2^1 \;/\; a_{22}^1$$

ثم نقوم بحذف المتغير x_2 من المعادلات (3^1) و (4^1) نجد :

$$(S2)\begin{cases} x_1 + a_{12}^1\, x_2 + a_{13}^1\, x_3 + a_{14}^1\, x_4 = y_1^1\ (1^1) \\ 0 + x_2 + a_{23}^2\, x_3 + a_{24}^2\, x_4 = y_2^2\ (2^2) \\ 0 + 0 + a_{33}^2\, x_3 + a_{34}^2\, x_4 = y_3^2\ (3^2) \\ 0 + 0 + a_{43}^2\, x_3 + a_{44}^2\, x_4 = y_4^2\ (4^2) \end{cases} \qquad (3.5)$$

ج–نعتبر أن $(a_{33}^2 \neq 0)$ ونقوم بعملية القسمة كما سبق المعادلة (3^2) تصبح من الشكل :

$$(3^3)\ :\ x_3 + a_{34}^3\, x_4 = y_3^3$$

حيث:

$$a_{3,j}^3 = a_{3,j}^2 \ / \ a_{33}^2$$

j= 4

$$y_3^3 = y_3^2 \ / \ a_{33}^2$$

ثم نقوم بحذف المتغير x_3 من السطر الرابع فنجد :

$$(S3)\begin{cases} x_1 + a_{12}^1\, x_2 + a_{13}^1\, x_3 + a_{14}^1\, x_4 = y_1^1 \\ 0 + x_2 + a_{23}^2\, x_3 + a_{24}^2\, x_4 = y_2^2 \\ 0 + 0 + x_3 + a_{34}^2\, x_4 = y_3^3 \\ 0 + 0 + 0 + a_{44}^2\, x_4 = y_4^4 \end{cases} \qquad (3.4)$$

د– نقوم بقسمة السطر الرابع على (a_{44}^3) على اعتبار ان $(a_{44}^3 \neq 0)$ فنحصل على :

$$y_4^4 = y_4^3 \ / \ a_{44}^3$$

$$a_{44}^4 = 1$$

أخيرا نحصل على شكل مصفوفي بمصفوفة مثلثية يسهل حلها بالتراجع : Ax = b

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{14}^1 \\ 0 & 1 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_2^2 \\ y_3^3 \\ y_4^4 \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

المرحلة الثانية (الحل بالتعويض):

$$x_4 = y_4^4$$

$$x_3 = y_3^3 - a_{34}^3 x_4$$

$$x_2 = y_2^2 - a_{23}^2 x_3 - a_{24}^2 x_4$$

$$x_1 = y_1^1 - a_{12}^1 x_2 - a_{13}^1 x_3 - a_{14}^1 x_4$$

مثال:

حل الجملة التالية باستعمال طريقة غوص للحذف : Ax = b

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

المرحلة الأولى: الحذف $a_{11} = 2 \neq 0$

لتسهيل العملية سوف نحافظ على شكل المصفوفة A مع إضافة الشعاع b

المصفوفة الموسعة $[A; b]$

أ- نقوم بقسمة السطر الأولى على a_{11}

$$L_1 / a_{11} : L_1/2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & : & 1/2 \\ 2 & 1 & 4 & : & 1 \\ 6 & 4 & 2 & : & 1 \end{bmatrix}$$

نحذف x_1 من L_2 و L_3 نجد:

$$\begin{matrix} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 6L_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & : & 1/2 \\ 0 & -3 & -4 & : & 0 \\ 0 & -8 & -22 & : & -2 \end{bmatrix}$$

ب- ($a_{22}^1 = -3 \neq 0$) نقوم بقسمة السطر الثاني على (3-) ثم نقوم بحذف المتغير x_2 من السطر L_3 نجد :

$$\begin{matrix} L_2 / -3 \\ \text{و} \\ L_3 + 8L_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & : & 1/2 \\ 0 & 1 & 4/3 & : & 0 \\ 0 & 0 & -34/3 & : & -2 \end{bmatrix}$$

ج- نقوم بقسمة السطر الثالث على $(-34/3)$ نجد :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & : & 1/2 \\ 0 & 1 & 4/3 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3/17 \end{bmatrix}$$

المرحلة الثانية (الحل بالتعويض) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 3/17 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$x_3 = \frac{3}{17}$$

$$x_2 = 0 - \frac{4}{3}x_3 = -\frac{4}{17}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - 2x_2 - 4x_3 = \frac{9}{34}$$

حلول الجملة هي :

$$X = \begin{pmatrix} 9/34 \\ -4/17 \\ 3/17 \end{pmatrix}$$

ملاحظات:

1) العدد $\left(a_{ii}^{k}\right)$ يسمى محور اذا كان $\left(a_{ii}^{k} = 0\right)$ نقوم بعملية تبديل الاسطر او الاعمدة لكي نحصل على محور غير معدوم.مع مراعاة ما ينتج عن هذا التبديل.

2) يمكن الحصول على مصفوفة مثلثية علوية او سفلية حسب الانطلاق من الأعلى الأسفل او العكس ونحصل على نفس النتيجة.

ب – طريقة غوص– جوردان:

نتبع نفس الخطوات السابقة لطريقة غوص وعند الحصول على مصفوفة مثلثية نواصل العملية للحصول على مصفوفة A قطرية (عناصر قطرها تساوي 1)

ت– نستعمل طريقة غوص – جوردان أيضا في إيجاد المصفوفة العكسية للمصفوفة A بإتباع نفس الخطوات حيث تكون المصفوفة الموسعة من الشكل : $[A{:}\,I]$

$$[A{:}\,I] \longrightarrow [I, A^{-1}]$$

(سيتم التعرض لها في الاعمال الموجهة)

3–طرق التفكيك

أ– طريقة التفكيك: **LU** (**Lower – Upper**) المراجع[6] و[15].

لحل الجملة: Ax = b حيث A مصفوفة قابلة للقلب نقوم بإيجاد مصفوفتين مثلثتين:

مصفوفة سفلية : L

مصفوفة علوية : U

حيث A = L x U

نتيجة: يوجد تفكيك وحيد لـ A اذا وفقط اذا كانت كل المحددات الصغرى لـ A غير معدومة.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

من خلال عملية الجداء (L x 4) ومساواتها بـ A نجد :

$$l_{11} = a_{11}$$

$$l_{21} = a_{21}$$

$$l_{31} = a_{31}$$

- $(l_{11}U_{12} = a_{12}) \Longrightarrow \quad U_{12} = a_{12}/l_{11}$
- $(l_{11}U_{13} = a_{13}) \Longrightarrow \quad U_{13} = a_{13}/l_{11}$
- $(l_{21}U_{12} + l_{22}) = a_{22} \Longrightarrow \quad l_{22} = a_{22} - l_{21}\,U_{12}$
- $(l_{31}U_{12} + l_{22}) = a_{32} \Longrightarrow \quad l_{32} = a_{32} - l_{31}\,U_{12}$

ثم:

- $l_{21}U_{13} + l_{22}U_{23} = a_{23}$

ومنه:

$$U_{23} = [a_{23} - l_{21}U_{13}]/l_{22}$$

- $l_{31}U_{13} + l_{31}U_{23} + l_{33} = a_{33}$

ومنه:

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}U_{13} - l_{32}U_{23}$$

بعد الحصول على L و U نقوم بحل الجملة على مرحلتين حيث:

Ax = b : L (U X) = b

نضع : U X = Z ثم نقوم بحل الجملة:

$$\begin{cases} L.Z = b \\ U\,X = Z \end{cases} \qquad (3.6)$$

نقوم أولا بإيجاد الشعاع Z ثم نحل الجملة الثانية بحيث يصبح Z معلوما.

تطبيق :

حل الجملة $Ax = b$ حيث:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 27 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 120 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

المرحلة الأولى: التفكيك

A مصفوفة قابلة للقلب وكل المحددات الصغرى غير معدومة.

نضع : $A = LU$ أي :

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 27 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

اذن:

- $l_{11} = 1 \quad ; \quad l_{21} = 3 \quad ; \quad l_{31} = 2$
- $(l_{11}U_{12} = 1) \Longrightarrow \quad U_{12} = 1$
- $(l_{11}U_{13} + 0 \times U_{23} = 1) \Longrightarrow \quad U_{13} = 1$

ثم :

- $(l_{21}U_{12} + l_{22} = 9) \Longrightarrow \quad l_{22} = 6$
- $(l_{31}U_{12} + l_{32} = 4) \Longrightarrow \quad l_{32} = 2$
- $(l_{21}U_{13} + l_{22}U_{23} = 27) \Longrightarrow \quad U_{23} = 4$

وأخيرا:

- $(l_{31}U_{13} + l_{32}U_{23} + l_{33} = 2) \Longrightarrow \quad l_{33} = -2$

ومنه نجد :

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المرحلة الثانية:

نضع $UX = Z$ ونقوم بحل الجملة : $LZ = b$ أي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 120 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

نجد:

$$Z_1 = 14$$

$$Z_2 = (120 - 3 \text{ x } 14)/6 = 13$$

$$Z_3 = (50 - 2 \text{ x } 14 - 2 \text{ x } 13)/-2 = 2$$

اذن حل الجملة $LZ = b$ هو : $Z = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$

نقوم الآن بحل الجملة الثانية لإيجاد X

أي : $UX = Z$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نجد :

$$x_3 = 2$$

$$x_2 = 13 - 4x_2 = 13 - 8 = 5$$

$$x_1 = 14 - 5 - 2 = 7$$

اذن حل الجملة AX = b هي : $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

ب- طريقة شولسكي: المرجع [15].

نظرية : اذا كانت A مصفوفة متناظرة ومعرفة موجبة فيمكن تفكيكها على الشكل التالي:

$A = L^t.L$ حيث L^t مصفوفة حقيقية مثلثية.

مثال: $A = L^t.L$ أي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

تطبيق نفس العمل في تفكيك (LU) مع الأخذ بالاعتبار أن:

$\forall_i , \forall_j \qquad l_{i,j} = l_{j,i}$ ومنه :

- $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$
- $l_{12} = {a_{21}}/{l_{11}}$
- $l_{13} = {a_{31}}/{l_{11}}$
- $l_{22} = \sqrt{a_{22} - (l_{12})^2}$
- $l_{23} = {[a_{23} - l_{12}.l_{13}]}/{l_{22}}$
- $l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{13})^2 - (l_{23})^2}$

حل الجملة يكون على الشكل :

$$\begin{cases} L^t.Z = b \\ L\,X = Z \end{cases} \qquad (3.7)$$

6- تمارين مقترحة

التمرين الأول:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} ; \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

1) احسب : B x A , $A \times B$, A – B ثم $\det A$; $\det B$; $det\ (A \times B)$

2) استنتج $\det(A^{-1})$

3) احسب $\|B\|_\infty$, $\|B\|_1$

التمرين الثاني:

لتكن المصفوفة ثلاثية الأقطار A حيث :

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

1) بين ان A متناظرة هل A معرفة موجبة ؟ برر

2) هل المصفوفة ذات قطر مسيطر؟ برر اجابتك

3) اوجد القيم الذاتية للمصفوفة A ثم عين قيمة الشعاع الطيفي. استنتج $\|A\|_2$.

التمرين الثالث:

لتكن الجملة الخطية التالية :

$$(\text{I})\begin{cases} 3x + z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \\ x + y - 4z = 3 \end{cases}$$

1) ضع الجملة (I) على الشكل المصفوفي : $AX = b$

2) حل الجملة (I) مستعملا طريقة كرامر.

3) اوجد حل الجملة (I) باستعمال طريقة غوص للحذف.

التمرين الرابع :

اوجد حلول الجملة التالية مستعملا طريقة غوص مع تغيير المحاور :

$$\begin{cases} 3x + 8y + 9z = 6 \\ 3x + 8y + z = 11 \\ x + 2y + 4z = 20 \end{cases}$$

التمرين الخامس :

لدينا الجملة $AX = b$ حيث :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) جل الجملة مستعملا طريقة غوص – جوردان.

2) اوجد المصفوفة العكسية لـ A باستعمال طريق غوص – جوردان.

التمرين السادس:

حل الجملة الخطية المعرفة على شكل المصفوفي $AX = b$ حيث :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1) باستعمال طريقة غوص .

2) باستعمال طريقة غوص – جوردان.

التمرين السابع:

لتكن الجملة:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

حل الجملة مستعملا طريقة التفكيك (LU) (كروت).

التمرين الثامن:

حل الجملة التالية مستعملا طريقة شولسكي:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ -x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

الفصل الرابع

الطرق التكرارية لحل جملة معادلات خطية

1-مقدمة

2-طريقة جاكوبي

2- طريقة غوص- سايدل

3- تمارين مقترحة

الطرق التكرارية لحل جملة معادلات خطية

1- مقدمة

طرق الحل لأي نظام من المعادلات الخطية التي رأيناها في الفصل السابق تعتبر طرقا مباشرة لإيجاد الحل، وتتميز هذه الطرق بأنها تصل إلى الحل النهائي بعدد محدد من الخطوات، وحيث أن الحاسب يعمل حسب دقة محددة نتيجة العدد.

على العكس من ذلك، فإن الطرق التكرارية التي نقدمها هنا، و تسمى بالطرق غير المباشرة أيضا، تبدأ بتخمين حل معين، وبطريقة تكرارية تحاول هذه الطرق التحسين من هذا الحل الذى تم تخمينه في خطوات متتالية حتى يصبح التغير في الحل مع التقدم في هذه الخطوات صغيرا، عندها نوقف الخطوات ويكون هذا الحل الأخير هو الحل المقدم لمجموعة المعادلات.

هذه الخطوات التكرارية من الممكن أن يكون عددها كبيرا جدا، ولذلك فإن هذه الطرق تكون أبطأ كثيرا من الطرق المباشرة.

الجدير بالذكر أن هذه الطرق لا تعتمد على قيمة الحل الابتدائي الذى نبدأ به محاولات الحل. كما

أن هذه الطرق من الممكن ألا تصل إلى حل، بمعنى أن الحلول تتباعد مع تكرار المحاولات. على الرغم من ذلك فإن

هذه الطرق يكون لها المميزات التالية التي تجعلها هي الأفضل عند حل مسائل معينة:

1 – في المصفوفات المتناثرة العناصر تكون معظم عناصر المصفوفة تساوى أصفارا، ولذلك فإن هذه الطرق تسمح بتخزين العناصر غير الصفرية فقط والتعامل معها حسابيا مما يوفر وقتا في الحساب وفى مساحة التخزين –خاصة إذا كان بعد المصفوفة كبيرا– وذلك على العكس من الطرق المباشرة التي لا تميز بين العناصر الصفرية وغير الصفرية في الحساب. وهناك الكثير من التطبيقات التي تكون مصفوفاتها متناثرة.

2 – الميزة الثانية أن الطريقة التكرارية تكون ذاتية التصحيح، بمعنى أن كل محاولة للحل تكون أصح من المحاولة السابقة لها.

3 – الميزة الثالثة أن الطرق التكرارية لا تغير من قيم عناصر المصفوفة الأصلية، على العكس من الطرق المباشرة فإنها تغير من قيم عناصر المصفوفة الأصلية بل وفى ترتيب الصفوف كما رأينا في الفصل السابق.

2– طريقة جاكوبي : (jacobi) المراجع [9] و[13].

لتكن الجملة التالية:

$$(4.1) \quad (\mathrm{I}) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_n x_n \;=\; b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \;=\; b_2 & (2) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{n1}x_n \;=\; b_n & (\mathrm{n}) \end{cases}$$

نعتمد طريقة جاكوبي على إيجاد:

- قيمة x_1 من المعادلة (1) بدلالة باقي المتغيرات.
- قيمة x_2 من المعادلة (2) بدلالة باقي المتغيرات.

⋮

⋮

- قيمة x_n من المعادلة (n) بدلالة باقي المتغيرات.

فنحصل على الجملة التالية:

$$(4.2)$$

$$(\mathrm{I}') \begin{cases} x_1 = c_1 \;+\; t_{12}x_2 \;+ \cdots +\; t_{1n}x_n \\ x_2 = c_2 \;+\; t_{21}x_1 \;+ \cdots +\; t_{2n}x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n = c_n \;+\; t_{n1}x_1 \;+\; t_{n2}x_2 + \cdots + t_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases}$$

حيث: $(a_{i,i} \neq 0\,)$

$$C_i = {}^{b_i}/_{a_{ii}} \qquad \text{i}= 1,2, \dots ,\text{n}$$

$$t_{i,j} = {}^{-a_{i,j}}/_{a_{ii}} \qquad (j \neq i)$$

$$t_{ii} = 0 \qquad \text{i} = 1, 2, \dots, \text{n}$$

الجملة ('I) يكمن كتابتها على الشكل:

$$X^k = TX^{(k-1)} + C \qquad \text{k}=1, \dots,\text{n}$$

$$(4.3) \qquad T= \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & \dots \dots & t_{1n} \\ t_{21} & 0 & \dots \dots & t_{2n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots \dots & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad C= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

المصفوفة التكرارية حيث : T قطرها كل عناصره معدومة .

الكتابة العامة لخوارزمية جاكوبي:

$$(4.4) \qquad \begin{cases} x_i^{(k)} = c_i + \sum_{j=1}^{1} t_{i,j}\, x_j^{(k-1)} & \text{k} = 1, 2, \dots, n \\ t_{ii} = 0 & \text{i} = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

يمكن كتابتها مباشرة باستعمال المصفوفة A كالآتي :

$$(4.5) \qquad \begin{cases} x_i^{(k)} = {}^{\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) \right]} \Big/ {}_{a_{ii}} & \text{k} = 1, \dots, n \\ \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

لحل الجملة نقوم بالخطوات التالية:

1-نقوم باختيار قيمة ابتدائية$X^{(0)}$ أي من اجل (k=0).

2-نضع k=1 ثم نقوم بحساب $X^{(1)}$ من خلال مركباته $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$. مع الشرط $a_{11} \neq 0$ اذا لم يتحقق الشرط نقوم بالتبديل، ثم نضع k=2 ونعيد الحساب بنفس الكيفية لـ $X^{(2)}$ ثم $X^{(3)}, \dots X^{(k)}$.

3-اختبار التوقف:

اذا كان $X^{(k)}$ يمثل الحل التقريبي فهو يحقق اختبار التوقف المعطى من خلال العبارة التالية:

القيمة ε معطاة $$\| X^{(k)} - X^{(K-1)} \| < \varepsilon \qquad (4.6)$$

اذا لم يحقق$X^{(k)}$ اختبار التوقف نضيف 1 للعدد k ونعود الى (2).

مثال:

لتكن الجملة التالية:

$$(\text{I}) \begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 12 \end{cases}$$

اذن حسب ما سبق:

$$(\text{I}') \begin{cases} x_1 = 1 - 0.125x_2 + 0.125x_3 \\ x_2 = 0.571 + 0.143x_1 + 0.286x_3 \\ x_3 = 1.333 - 0.222x_1 + 0.111x_2 \end{cases}$$

نكتب الآن الصيغة العامة بدلالة k :

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 1 - 0.125x_2^{(k-1)} - 0.125x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 0.571 + 0.143x_1^{(k-1)} - 0.286x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = 1.333 - 0.222x_1^{(k-1)} - 0.111x_2^{(k-1)} \end{cases}$$

$$X^{(k)} = T_j X^{(k-1)} + C$$

المصفوفة التكرارية لجاكوبي

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & -0.125 & -0.125 \\ 0.143 & 0 & 0.286 \\ -0.222 & -0.111 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.571 \\ 1.333 \end{bmatrix}$$

يمكنك التأكد أنه من أجل (K=6)

نجد :
$$X^{(6)} = \begin{pmatrix} 1.001 \\ 1.001 \\ 1.001 \end{pmatrix}$$

علما ان الحل الصحيح للجملة هو :

$$X \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3- **طريقة غوص- سايدل:** المراجع [6] و[15].

هي عبارة عن تحسين لطريقة جاكوبي فعوض استعمال المركبات:

(i >1) $x_1^{(k-1)}, \dots, x_{i-1}^{(k-1)}$ للشعاع $X^{(k-1)}$ نستعمل المركبات: $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$ للشعاع $X^{(k)}$ التي تم حسابها ومنه نحصل على الخوارزمية التالية:

$$(4.7) \quad \begin{cases} x_i^{(k)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{1} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right] \Big/ a_{ii} \\ \\ i = 1, \dots, n. \qquad k = 1, 2, \dots, n \quad (a_{11} \neq 0) \end{cases}$$

سنقوم بحل المثال السابق المعطى في طريقة جاكوبي لملاحظة الفرق:

نحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 1 - 0.125x_2^{(k-1)} - 0.125x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 0.571 + 0.143x_1^{(k)} - 0.286x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = 1.333 - 0.222x_1^{(k)} - 0.111x_2^{(k)} \\ k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

يمكنك التأكد أن:

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.007 \\ 0.996 \\ 1.001 \end{pmatrix}$$

ثم مقارنتها بالنتائج السابقة لطريقة جاكوبي ونلاحظ عملية التسريع في الوصول للحل التقريبي.

- **تفكيك المصفوفة: A**

من خلال الجملة: AX =b يمكن تفكيك المصفوفة A للحصول على المصفوفة التكرارية لطريقة جاكوبي وغوص– سايدل.

نضع:

D: $d_{ii} = a_{ii}$ مصفوفة قطرية

L: $l_{ii} = -a_{ij} \quad i<j$ مصفوفة سفلية

U: $U_{ii} = -a_{ij} \quad i>j$ مصفوفة علوية

نحصل على العلاقة التالية:

A = D – L – U

= D – (L+U)

أ) لمصفوفة التكرارية لجاكوبي: T_j

الجملة AX=b تصبح من الشكل:

$$[D - (L + U)]\, X = b$$

ومنه:

$$DX = (L + U)\, X + b$$

بما ان المصفوفة D قابلة للقلب نحصل على :

الطريقة التكرارية لجاكوبي :

$$DX^{(k)} = (\, L + U\,)X^{(k-1)} + b$$

ومنه :

$$X^{(k)} = D^{-1}(\, L + U\,)X^{(k-1)} + D^{-1}b$$

اذن المصفوفة التكرارية لجاكوبي هي :

$$\boldsymbol{T_j = D^{-1}\,(L + U)} \qquad (4.8)$$

ب) المصفوفة التكرارية لغوص–سايدل :

الصيغة التكرارية:

$$(D - L)X^{k} = UX^{(k-1)} + b$$

اذن:

$$X^{(k)} = (D - L)^{-1}UX^{(k)} + (D - L)^{-1}b$$

اذن المصفوفة التكرارية لغوص– سايدل:

$$\boldsymbol{T_G = (D - L)^{-1}U} \qquad (4.9)$$

- **التقارب** : المراجع [5] و[15].

نظرية: المرجع [15]

تتقارب طريقة جاكوبي و غوص– سايدل اذا تحقق احد الشروط الثلاث الآتية :

1) المصفوفة A ذات قطر مسيطر تماما.

2) اذا كان : $\|T_j\| < 1$ (أو $\|T_G\| < 1$) باستعمال أي نظيم

(ممكن $\|\ \|_1$ أو $\|\ \|_\infty$).

3) الشعاع الطيفي للمصفوفة والتكرارية اصغر تماما من واحد أي :

$$\rho(T_G) < 1 \quad \text{و} \quad \rho(T_j) < 1$$

ملاحظات :

1) شروط التقارب (1) و (2) كل شرط هو كاف وغير لازم أما الشرط الثالث فهو كاف ولازم.

2) اذا كانت الطريقة متقاربة فإن أي اختيار للشعاع الابتدائي $X^{(0)}$ يوصلنا للحل الصحيح X.

3) في حالة تقاب الطريقتين فإن طريقة غوص– سايدل تكون اسرع من جاكوبي .

4) طريقة غوص– سايدل تتطلب n قيمة للتخزين في الذاكرة بينما جاكوبي تتطلب 2n.

مبرهنة: المرجع **[9] و [8]**

إذا كانت المصفوفة A متناظرة ومعرفة موجبة فإن طريقة غوص– سايدل تتقارب.

4–طريقة الاسترخاء : المرجع [9]

هذه الطريقة(طريقة الاسترخاء) successive over relaxation, SOR عبارة عن تطوير لطريقةغوص– سايدل التكرارية التي تمثل حالة خاصة من طريقة الاسترخاء.

بذلك يمكن كتابة الصورة النهائية لطريقة الاسترخاء SOR كما يلى:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega\left\{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}\, x_j^{k+1} + \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\, x_j^k\right\} \Big/ a_{ii} \qquad (4.10)$$

لاحظ أنه

2-من أجل معامل الاسترخاء ω يساوي 1 فإن طريقة الاسترخاء تؤول إلى طريقة غوص- سايدل.

3-بوضع المعامل ω خارج المجال $0< \omega <2$ فإن طريقة الاسترخاء لن تتقارب إلى حل نهائي.

4-بوضع ω في المجال $1< \omega <2$ فإن التقارب يكون أسرع من غوص- سايدل في المسائل التي تتقارب أصلا مع طريقة غوص- سايدل.

5-بوضع ω فى المجالى $0< \omega <1$ فإنه قد يمكن التقارب إلى حل في المسائل التي لا تتقارب مع طريقة غوص- سايدل.

تطبيقات :

تمرين 1

لتكن الجملة التالية :

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 - \ 3x_4 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 + \ 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - \ x_4 = -10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + \ 20x_4 = 15 \end{cases}$$

1) برهن ان طريقة جاكوبي لهذه الجملة تتقارب.

2) احسب عدد التكرارات اللازمة حتى يكون الخطأ المرتكب: 10^{-4}

الحل:

1) تحول الجملة الى الشكل:

$X^{(k)} = T_j \, X^{(k-1)} + C$ نجد:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 0.1x_2^{(k-1)} - 0.2x_3^{(k-1)} + \ 0.3x_4^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = -0.1x_1^{(k-1)} + 0.1x_3^{(k-1)} - \ 0.2x_4 + 0.5 \\ x_3^{(k)} = -0.1x_1^{(k-1)} - 0.15x_2^{(k-1)} + \ 0.05x_4 - 0.5 \\ x_4^{(k)} = -0.15x_1^{(k-1)} - 0.1x_2^{(k-1)} - \ 0.05x_3^{(k-1)} + 0.75 \end{cases}$$

حيث:

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & -0.2 & 0.3 \\ -0.1 & 0 & 0.1 & -0.2 \\ -0.3 & -0.15 & 0 & 0.05 \\ -0.15 & -0.1 & -0.05 & 0 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

$$\|T_j\|_1 = \max\{0.35, 0.35 , 0.35, 0.55\} = 0.55$$

لأن $\|T_j\|_1 = 0.55 < 1$ فإن

طريقة جاكوبي تتقارب.

يمكن اثبات التقارب يكون المصفوفة A ذات قطر مسيطر (يمكنك التأكد)

2) قبل الإجابة سنعرض المبرهنة التالية:

اذا كان $\|T\| < 1$ فإن المتتالية:

$X^k = TX^{(k-1)} + C \qquad (k \geq 1)$ تتقارب

من اجل أي اختبار لـ $X^{(0)}$ نحو الحل الصحيح X

ولدينا :

$$\|X - X^{(k)}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|$$

اذن:

نأخذ $X^{(0)} = C$ ومنه:

$$\|X^{(0)}\|_1 = \|C\|_1 = 1.75$$

لدينا:

$$\|X - X^{(k)}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|$$

$$\leq \frac{\|T\|^k}{1-\|T\|}\left\|TX^{(0)}+C-X^{(0)}\right\|$$

$$\leq \frac{\|T\|^{k+1}.\|C\|}{1-\|T\|} = 10^{-4}$$

نجد $k \geq 16.7$ يمكن أخذ $k = 17$ $(k \in N)$

تمرين2

لتكن الجملة الخطية المعرفة على الشكل المصفوفي : AX = b حيث :

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{Bmatrix}$$

1) هل المصفوفة ذات قطر مسيطر؟ برر.

هل يمكن استنتاج تباعد او تقارب الطرق التكرارية؟ برر.

2) اوجد المصفوفة التكرارية T_j و T_G ، ثم احسب الشعاع الطيقي.

3) أي الطريقتين تتقارب؟

الحل:

1) A ليست ذات قطر مسيطر لأن:

- حسب الأعمدة: $1 > 1 + 2$ غير محققة.
- حسب الأسطر: $1 > 1 + 1$ غير محققة.

لا يمكن استنتاج التقارب او التباعد لأن شرط A ذات قطر مسيطر هو شرط كاف لكنه غير لازم.

2) المصفوفات التكرارية:

يمكنك ايجادها بواسطة العبارة التكرارية او تفكيك المصفوفة A حسب كل طريقة نجد:

$$T_j = \begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix} ; T_G = \begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

الشعاع الطيفي : $\rho = max|\lambda_I|$ لدينا: $det\left(T_j - \lambda I\right) = 0$

أي : $(\lambda = 0)$ $(-\lambda^3 = 0) \longrightarrow$

ومنه : $\rho\left(T_j\right) = 0$

- $det\,(T_G - \lambda I) = -\lambda\,(2-\lambda)^2 = 0$

ومنه : $\lambda = 0$ أو $\lambda = 2$

اذن : $\rho(T_G\,) = 2$

بما ان $\rho\,\left(T_j\right) = 0 < 1$ فإن طريقة جاكوبي تتقارب و $\rho(T_G) = 2 > 1$ فإن طريقة غوص- سايدل تتباعد.

هذا المثال يبين أن أفضلية طريقة غوص- سايدل تكون عند تقارب الطريقتين فقط.

4–تمارين مقترحة

التمرين الأول:

لتكن الجملة الخطية المعرفة على الشكل المصفوفي :

حيث $AX = b$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1) اكتب الجملة التكرارية لطريقة جاكوبي معينا T_j C_j

2) احسب الشعاع الطيفي للمصفوفة T_j ثم استنتج تقارب او تباعد طريقة جاكوبي.

3) احسب عدد التكرارات اللازمة حتى يكون الخطأ المرتكب 10^{-4} نأخذ $X^0 = C_j$

التمرين الثاني:

لتكن الجملة الخطية المعرفة على الشكل المصفوفي $AX = b$

حيث : $\alpha \in R$ $$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

- عين قيم α التي تحقق تقارب طريقتي جاكوبي و غوص – سايدل.

التمرين الثالث:

لتكن الجملة الخطية التالية: $AX = b$

حيث : $\alpha \in R$ $$A= \begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 3-\alpha \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) عين المصفوفة التكرارية T_G لطريقة غوص – سايدل.

2) احسب $l\ (T_G)$ ثم اوجد الشرط الضروري والكافي على α حتى تتقارب الطريقة.

التمرين الرابع:

لتكن الجملة الخطية التالية:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1) احسب $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ علما ان $X^{(0)} = (2,2,2)$

بإستعمال طريقة جاكوبي ثم غوص – سايدل بعد التأكد من تقاربهما.

2) حل الجملة الخطية مستعملا طريقة غوص للحذف ثم طريقة التفكيك (LU).

3) استنتج أي الطريقتين اسرع في التقارب.

الفصل الخامس

الحل العددي للمعادلات التفاضلية العادية

1-تمهيد

2-مراجعة بعض المفاهيم الأساسية

3-طريقة اويلر

4-طريقة تايلور

5- تطبيقات

1- تمهيد

المعادلات التفاضلية العادية هي علاقة دالية بين دالة مجهولة بمتغير واحد ومشتقاتها ورتبتها من رتبة المشتق الأكبر درجة.

في هذا الفصل سوف نستعرض بعض الطرق العددية لحل معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى.

2- مراجعة بعض المفاهيم الأساسية

الشكل العام لمعادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى هو:

$$y' = F\big(x, y(x)\big) \qquad (5.1)$$

y بدلالة x

تعريف1:

تكون الدالة $F(x,y)$ ليبشيتزيه في y على D من R^2 اذا وجد ثابت $L > 0$ بحيث:

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D : \qquad (5.2)$$

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| < L|y_1 - y_2|$$

نظرية: المراجع [10] و[12].

لتكن المسألة :

$$(1)\ \begin{cases} y' = F(x,y)\,;\ \ x \in [a,\ \ b] \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

$$D = \{(x,y) \in R^2 : a \leq x \leq b\,;\ -\infty < y < +\infty\}$$

اذا كانت $F(x,y)$ مستمرة و ليبشيتزية في y على D فإن المسألة (1) تقبل حلا وحيدا y(x).

المسألة (1) تسمى مسألة كوشي أو مسألة شروط ابتدائية.

مثال:

لتكن المسألة التالية:

$$\begin{cases} y' = 1 + xy \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

و $$D = \{(x,y) \in R^2 : 1 \le x \le 4 \, ; \, y > 0\}$$

لدينا: $$F(x,y) = 1 + xy$$

الدالة F مستمرة على D.

من جهة أخرى:

$$\forall((x,y_1),(x,y_2)) \in D^2 :$$

$$|F(x,y_1) - F(x,y_2)| = |xy_1 - xy_2)|$$

$$= |x(y_1 - y_2)| \le 4|y_1 - y_2|$$

إذن F ليبشيتزيه ومنه المسألة تقبل حلا وحيدا.

الهدف من هذه الطرق هو إيجاد حل مقرب للحل الصحيح لمسألة كوشي (1) وسوف نتعرض لطريقتين هما:

- طريقة إيلر
- طريقة تايلور

3- طريقة إيلر: المراجع [10] و[2].

تعتبر أبسط الطرق وتتميز بسهولة الاستعمال وضعف الدقة.

أ) خطوات الطريقة:

- التقسيمات:

تتمثل في تجزئة المجال $[a, b]$ الى n مجال طول كل منها h وتسمى خطوة

الخطوة: $h = \frac{b-a}{h}$

✓ نشر تايلور:

نفرض أن الحل الصحيح $y(x)$ يقبل الاشتقاق ومستمر مرتين على $[a, b]$ ومنه:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + O(h^2) \qquad (5.3)$$

نعوض y' بـ $F(x_i, y_i)$ نجد:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h\,F(x_i, y_i) + O(h^2) \qquad (5.4)$$

من أجل $i = 0, \ldots, n-1$

بما ان $\lim_{h\to 0} O(h^2) = 0$ فإن: (5.4) تصبح على الشكل

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h\,F(x_i, y_i) \qquad (5.5)$$

وتكتب اختصارا على الشكل الآتي:

$$y_{(i+1)h} = y_{ih} + h\,F(x_i, y_{ih}) \qquad (5.6)$$

حيث يمثل y_{ih} الحل التقريبي عند x_i .

على اعتبار : $y_{0h} = y_0$ أي معطى.

حيث : $a = x_0$

من خلاله يمكن حساب y_{1h} ثم y_{2h} .... y_{ih} …… y_{nh}

ب)رتبة الخطأ:

- تعريف:

نسمي القيمة e_i الخطأ عند النقطة x_i :

$$|e_i|=|y(x_i)-y_{ih}| \qquad (5.5)$$

حيث $y(x_i)$ و y_{ih} القيمة الصحيحة والمقربة على التوالي عند النقطة x_i.

اذا كان $|e_i| \leq kh^p$ فإن التقريب العددي التي تعطى القيمة المقربة y_{h^i} لـ y_i من الرتبة p.

من خلال ما سبق نلاحظ ان طريقة إيلر من الرتبة الأولى.

ملاحظة:

- ✓ كلما كان العدد p أكبر تكون الطريقة أكثر دقة.
- ✓ الخطأ ناتج عن إهمال $O(h^2)$ عند نشر تايلور ويسمى خطأ البتر.

ج) مثال:

لتكن مسألة كوشي:

$$\begin{cases} y'(x) = x - y + 1 & x \in [0,1] \\ y(0) = 1 & h = 0,1 \end{cases}$$

إيجاد القيمة المقربة $y(x_i)$ بطريقة إيلر:

- الحل:

لدينا: الخطوة h معطاة بـ:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = 0.1$$

ومنه : $n = 10$

اذن : $i = 0, 1, 2, \dots \dots \dots, 9$

نضع الحل التقريبي : y_{ih}

حسب العلاقة (2) فإن:

$$\begin{cases} y_{(i+1)h} = y_{ih} + h\,F\left(x_i, y_{ih}\right) \\ y_0 = 1 \qquad\qquad i = 1, 2, \dots \dots, 9 \end{cases}$$

من أجل $i = 0$ الحل معلوم.

$$y_{(i+1)h} = y_{ih} + h\,(x_i - y_{ih} + 1)$$

اذن :

$$y_{(i+1)h} = y_{ih}(1-h) + hx_i + h$$

$$= 0.9y_{ih} + ih^2 + h$$

لأن : $x_i = x_0 + ih = 0 + ih = ih$

ومنه:

$$y_{(i+1)h} = 0.9y_{ih} + 0.01i + 0.1$$

$$y_0 = 1$$

$$i = 0$$

$$y_{1h} = 0.9y_0 + 0.01 \times 0 + 0.1 = 1$$

$$y_{2h} = 0.9 \times 1 + 0.01 \times 1 + 0.1 = 0.11$$

$i = 9$ $\quad\vdots$

$$y_{10} = 1.348$$

يمكنك إيجاد الحل الصحيح للمسألة وتعويض x بـ 1 ثم تحسب الخطأ بين :

$$y_{10} \text{ و } y(1)$$

4-طريقة تايلور: المراجع [10] و[2].

نفرض أن حل المسألة (1) y(x) يقبل (n+1) مشتقة مستمرة ومنه حسب نشر تايلور نجد:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y"(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(x_i + \theta_i h) \qquad (5.8)$$

حيث : $0 < \theta_i < 1$ وحسب (1)

$$y'(x_i) = F\big(x_i, y(x_i)\big)$$

أي :

$$y"(x_i) = F(x_i, y_i)$$

اذن:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h\left[F(x_i, y_i) + \frac{h}{2} F'(x_i, y_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!} F^{(n-1)}(x_i, y_i)\right] + O(h^{n+1}) \qquad (5.9)$$

باستعمال البتر وبما أن:

$$\lim_{h \to 0} O(h^{n+1}) = 0$$

نحصل على العلاقة التالية:

نضع $y_{(i+1)h}$: الحل التقريبي .

ومنه نجد:

(5.10)

$$y_{(i+1)h} = y_{1h} + h\left[F(x_i, y_{ih}) + \frac{h}{2}F'(x_i, y_{ih}) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!}F^{(n-1)}(x_i, y_{ih})\right]$$

نرمز للجزء بين عارضتين بالرمز:

$$T^n(x_i, y_{ih})$$

فنحصل على المعادلة التالية:

$$\begin{cases} y_{(i+1)h} = y_{\,ih} + h\,T^n\big(x_i, y_{\,ih}\big) \\ y_{0h} = y_0 = \alpha \qquad\qquad i = 1, 2, \dots\dots, n-1 \end{cases} \qquad (5.11)$$

ملاحظة:

عند استعمال طريقة تايلور يجب ذكر الرتبة.

مثال: نأخذ المسألة السابقة

$$\begin{cases} y'(x) = x - y + 1 \qquad 0 < x \leq 1 \\ y(0) = 1 \qquad\qquad\qquad\quad h = 0.1 \end{cases}$$

طريقة تايلور من الرتبة الثانية:

$$y_{(i+1)h} = y_{\,ih} + h\,T^2\big(x_i, y_{\,ih}\big)$$

حيث:

$$T^2(x_i, y_{ih}) = F(x_i, y_{ih}) + \frac{h}{2}F'(x_i, y_{ih})$$

$$F'(x_i, y_{ih}) = 1 - y'(x)$$

$$= 1 - x + y(x) - 1$$

$$= -x + y(x)$$

اذن:

$$F'(x_i, y_{ih}) = -x_i + y_{ih}$$

$$y_{(i+1)h} = y_{1h} + h\left[x_i - y_{ih} + 1 + \frac{h}{2}(-x_i + y_{ih})\right]$$

$$= y_{ih} + h\left[\left(1 - \frac{h}{2}\right)(x_i + y_{ih}) + 1\right]$$

بالتعويض نجد:

$$y_{(i+1)h} = 0.905y_{ih} + 0.095x_i + 0.1$$

$$y_{1h} = 1.005;\ y_{2h} = 1.019$$

من اجل *i=9* نجد: $y_{10h} = 1.367$

يمكنك المقارنة مع طريقة ايلر علما ان الحل الصحيح *y(1)=1.367*

لاحظ ان *i=9* تكون $x_{10} = x_n = 1$ سنجد طريقة تايلور اكثر دقة واذا رفعنا الرتبة اكثر ستزيد الدقة لكن الحساب يتعقد أيضا.

الرتبة الثانية تكون $T^2(x_i, y_{ih})$:

حيث $F'(x_i, y_{ih})$ تمثل: *y''*

6–تطبيقات:

أ– لتكن المسألة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} y' = x \sin y \\ y(0) = 2 \qquad h = 0.1 \end{cases}$$

عين الحل التقريبي y_{1h} و y_{2h} بطريقة :

1/ أيلر

2/ تايلور من الرتبة الثانية

1) ايلر:

$$\begin{cases} y_{(i+1)h} = y_{\,ih} + h\,F\left(x_i, y_{\,ih}\right) \\ y_{0h} = 2 \end{cases}$$

اذن:

$$y_{1h} = y_{0h} + 0.1(0\sin 2)$$
$$= 2$$
$$y_{2h} = y_{1h} + 0.1(0.1\sin 2)$$
$$= 2.009$$

2) طريقة تايلور:

$$y_{(i+1)} = y_{ih} + h\,F(x_i, y_{ih}) + \frac{h^2}{2}F'(x_i, y_{ih})$$
$$= y_{ih} + h\,T^2(x_i, y_{ih})$$

تحقق أن :

$$F'(x_i, y_{ih}) = \sin y_{ih} + x_i \cos y_{ih}$$

ومنه :

$$y_{1h} = y_{0h} + h(x\sin y_{0h}) + \frac{h^2}{2}(\sin y_{0h} + x_0 \cos y_{0h} \times \sin y_{0h})$$
$$y_{1h} = 2.004$$
$$y_{2h} = 2.018$$

تأكد من النتائج.

ب- نعتبر المسألة:

$$(1)\ \begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & 0 < x \leq 1 \\ y(0) = 1 \quad , & h = 0.2 \end{cases}$$

1) بين أن المسألة (1) تقبل حلا صحيحا وهو : $y = \sqrt{2x+1}$

2) اوجد الحل التقريبي بإستعمال:

- طريقة ايلر
- طريقة تايلور من الرتبة الثانية

3) أحسب الخطأ بين الحل الصحيح والحل التقريبي عند القيمة $x = 1$ بالنسبة للطريقتين ماذا نستنتج.

الفصل السادس

ملحق ماتلاب

1- مقدمة

2- دوال الرسم في الماتلاب

3- الاستقطاب

4- الاشتقاق العددي

5- التكامل العددي

6- الحل العددي لمعادلة غير خطية

7- الطرق المباشرة لحل جمل معادلات خطية

8- الطرق التكرارية لحل جمل معادلات خطية

9- الطرق العددية لحل معادلات تفاضلية

مقدمة

الماتلاب هو برنامج تفاعلي –*Matrix Laboratory*– يستخدم في الحسابات العلمية والعرض البصري للمعلومات وهو يتوفر كذألك علي لغة برمجة خاصة جد مرنة وسهلة التعلم والاستخدام.

الماتلاب هو أكثر البرامج استخداما في مجال الهندسة والبحوث العلمية وشهرته ناتجة عن المميزات التالية

- الثراء الوظيفي الدقة في أجراء عمليات حسابية معقدة باستخدام مجموعة بسيطة من التعليمات.
- إمكانية استخدام علب الادوات – *toolboxes*– وهي علب تحتوي على الوظائف المحتاج إليها في مجال ما مثل معالجة وتحليل الموجات أو الصور الرقمية ...
- سهولة لغة البرمجة الخاصة به فهو أسهل للإنشاء والفهم مقارنة ببرامج أخرى

مثل *Pascal* أو *C* .

تم إنشاء برنامج الماتلاب في الاصل من أجل حساب ومعالجة الاشعة والمصفوفات- التسمية- لكن تم تحسينه وتمديد وظائفه حتى أصبح يشمل العديد من المجالات كما نعرفه الان.

الماتلاب ليس البرنامج الوحيد المستخدم في الحسابات العلمية نذكر منها

Mathematica أو *Maple*

كما يوجد العديد من الرامج المجانية التي تقلد بعض وظائف الماتلاب ويمكن أن تستخدم كبديل بسيط له مثل *Scilab* و *Octave* .

سوف نتناول في هذا الملحق بعض الخوارزميات بواسطة أمثلة محلولة ونشير إلى أن هدفنا هو تطبيق الماتلاب بالدرجة الاولى.

تبعا للفصول المقدمة في الكتاب تتم المعالجة وسنركز على الطرق الاكثر استعمالا .

أخيرا أحيل الطالب للمراجع التالية للمزيد من التعمق [6], [11], [1] و[12].

2-دوال الرسم في ماتلاب

ماتلاب غنى جدا بدوال الرسم التي تمكنك من رسم أي دالة في بعدين أو ثلاثة أبعاد. من دوال الرسم *plot(x,y)* التي ترسم المتغير *y* مع المتغير *x*.

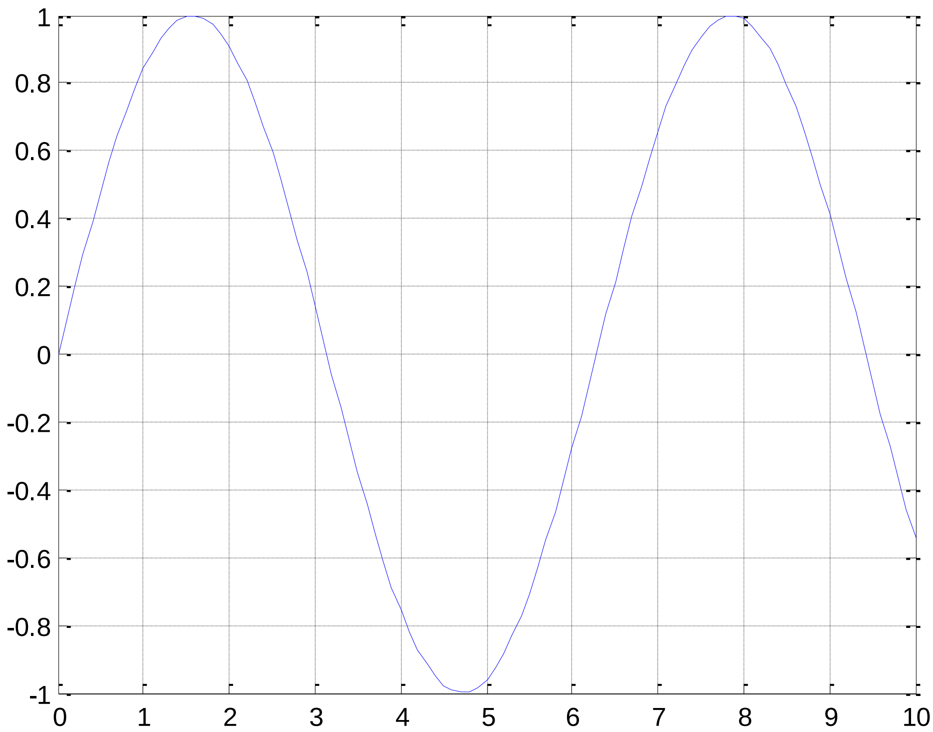
كمثال على ذلك سنرسم الدالة : $y = \sin x$ كما في الأوامر التالية:

ومنه نحصل على الشكل (6.1)

X=0:0.1:10;

>>

```
>> y=sin(x);
        >> plot(x,y), grid
```

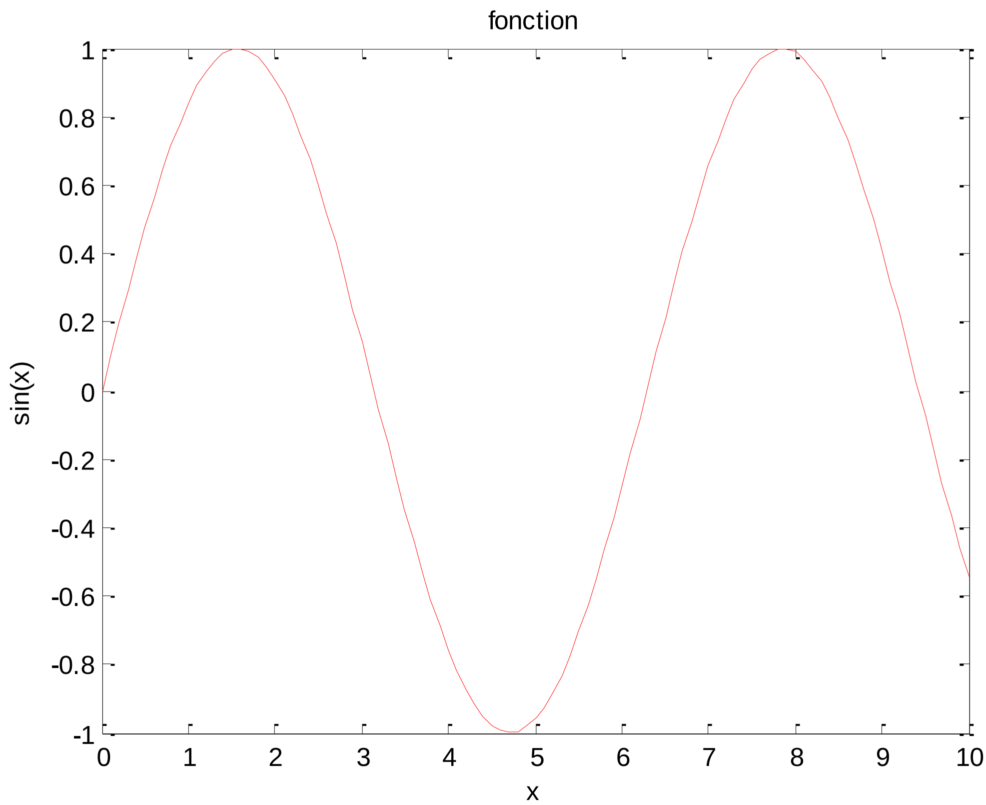


الشكل (6.1)

يمكن التحكم في لون المنحنى وإضافة أسماء للمحاور وعنوان للشكل .

للمحور *x* بالأمر *xlabel()* ، وإضافة مسمى للمحور *y* بالأمر *ylabel()* ، ثم إضافة عنوان للشكل بالأمر. *title* تم إضافة علامتي تنصيص يوضع بينها اختيار اللون بالحرف *r* للون الأحمر و*+* لتوقيع نقط الرسم و:لجعل المنحنى منقط بدلا من منحنى متصل ومن خلال هذا المثال نحصل على الشكل (6.2)

```
x=0:0.1:10;
y=sin(x);
plot(x,y,'r')
title('fonctx=ion')
xlabel('x')
ylabel('sin(x)')
```



الشكل (6.2)

الحسابات الرمزية في ماتلاب

لقد تعودنا على التعامل الرقمي مع برنامج ماتلاب فمثلا يمكننا استخدام الماتلاب في حساب قيمة دالة

مثل الدالة *cos(x)* أو الدالة *sin(x)* حيث المتغير *x* يؤول إلى قيمة معينة بالدرجات .الجديد هنا أننا يمكننا أن نطلب من ماتلاب حساب تفاضل أو تكامل أي واحدة من هذه الدوال فيعطينا الدالة *cos(x)*

كتفاضل للدالة *sin(x)* مثلا .كل هذا يتم من خلال صندوق أدوات *Tool box* خاص بالحسابات الرمزية ويسمى *Symbolic Math Tool Box*

يستخدم صندوق أدوات الحساب الرمزي نوعا من المتغيرات الخاصة تسمى المتغيرات الرمزية *symbolic variables*التي ترمز للمتغير بسلسلة أحرف يتم حفظها في هذا المتغير.

مثال

```
>> a=sqrt(2)

a =

1.4142

>> a=sqrt(sym(2))

a =

2^(1/2)
```

التفاضل على المتغيرات الرمزية

يمكن إجراء التفاضل على التعبيرات الرمزية بنفس قواعد التفاضل التى نعرفها تماما كما يلى:

```
>> syms x
```

```
f = sin(5*x)

f=

sin(5*x)

>> y=diff(f)

y =

5*cos(5*x)
```

يمكن إجراء التفاضل على قيمة ثابتة شرط الاعلان عن الثابت بالصورة الرمزية

```
>> c=sym('5')

c =

5

>> y=diff(c)

y =

0
```

يمكن إجراء التفاضل الجزئي على دالة متعددة المتغيرات كما في المثال التالي:

```
>> syms s t;

>> f=sin(s*t);
```

```
>> y=diff(f,t)

y =

s*cos(s*t)

>> y=diff(f,s)

y =

t*cos(s*t)
```

التكامل على المتغيرات الرمزية

لإجراء التكامل على المتغيرات الرمزية فإن ماتلاب يستخدم الدالة int(f) للدوال في متغير واحد . يمكن تحديد متغير التكامل كما في الدالة int(f,v) التي تعطى تكامل الدالة f بالنسبة للمتغير v.

مثال

التكامل $\int x^2\, dx$ يمكن إجراؤه كما يلى:

```
>> syms x

>> f=x^2;

>> y=int(f)

y =

x^3/3
```

يمكن أيضا إجراء التكامل المحدود كما يلى:

```
>> syms x
>> f=x^2;
>> y=int(f,0,1)
y =
1/3
```

حيث y=int(f,0,1) سيقوم بإجراء التكامل على الدالة f من 0 حتى 1.

3-الاستقطاب

1-كثير حدود نيوتن

أ- استخدم طريقة نيوتن لإيجاد كثيرة حدود الاستقطاب للدالة التي تشمل النقاط الأربعة التالية-) :
(2, 3‏و (1, 0) و (0, -1) و(-1,2)

جدول الفروق المنتهية

x	Y			
−2	3			
1	0	−1		
0	−1	1	1	
−1	2	−3	2	1

ومنه نحصل على كثير الحدود التالي

$$P(x) = 3 - (x+2) + (x+2)(x-1) + (x+2)(x-1)(x)$$

البرنامج التالي معمم لحساب الفروق المقسومة لأي عدد من النقاط:

```
% Calculation of divided diff for Newton method
% div_diff function computes all divided differences for
% the data stored in x and y = f(x)
x = input([' Enter The Array of Coefficients x= ']); %e.g [1;2;]
y = input([' Enter The Array of Coefficients y= ']); %e.g [1;2;]
n = length(x);
m = length(y);
if m~=n; error('x and y must be same size');
else
F = zeros(n, n);
for i = 1:n % define 0th divide difference
F(i,1) = y(i);
end
for k = 1:n-1 % Get kth divided difference
for i = 1:n-k
F(i,k+1) = (F(i+1,k)-F(i,k))/(x(i+k)-x(i));
end
end
end
disp('Divided differences will be the first row of F');
F(1,1:n) %div. diff components.
```

بتنفيذ هذا البرنامج على نقاط المثال السابق نحصل على ما يلي

```
>> NewtonInterp
Enter The Array of Coefficients x= [-2;1;0;-1]
Enter The Array of Coefficients y= [3;0;-1;2]
Divided differences will be the first row of F
ans =
```

3 -1 1 1

المعاملات المتحصل عليها هي نفسها التي وجدناها في كثير الحدود.

ب- استخدم طريقة نيوتن لإيجاد كثيرة حدود الاستقطاب للدالة التي تشمل النقاط الخمسة التي في الجدول التالي:

X_i	0	1	2	3	4
Y_i	0	1	8	27	64

بتنفيذ البرنامج السابق على نقاط المثال – ب – نحصل على ما يلي

```
>> NewtonInterp
Enter The Array of Coefficients x= [0;1;2;3;4]
Enter The Array of Coefficients y= [0;1;8;27;64]
Divided differences will be the first row of F
ans =
0 1 3 1 0
```

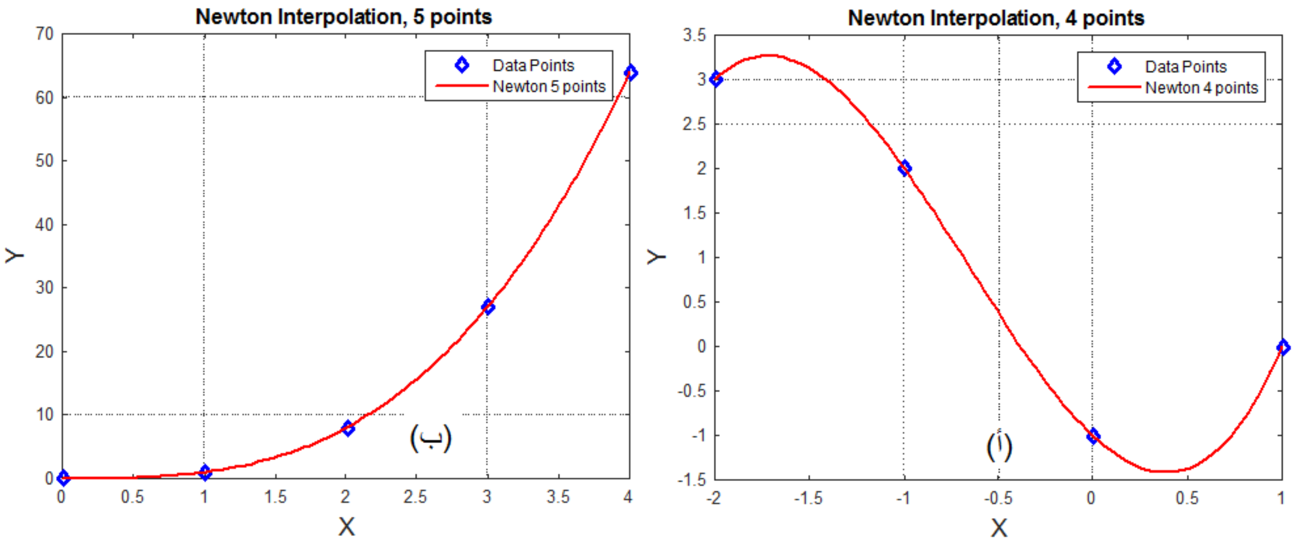
كثير حدود نيوتن يكون إذن على الشكل التالي

$$P(x) = 0 + 1.\ x + 3.x(x-1) + 1.x(x-1)(x-2) + 0.\ x(x-1)(x-2)(x-3)$$

ملاحظة

من خلال كتابة كثير حدود نيوتن بهذا الشكل بحيث تكون المعاملات ممثلة بالفروق المقسومة.

الشكل (6.3) يمثل المنحنى البياني الممثل لكثيري حدود الاستقطاب للمثالين أ و ب.



الشكل (6.3)

2−كثير حدود لاغرانج

استخدم طريقة لاجرانج لإيجاد دالة استيفاء تمر بالنقاط الأربع التالية: (10، 2−) و(4 1−−) و (6، 1) و (2,3) .

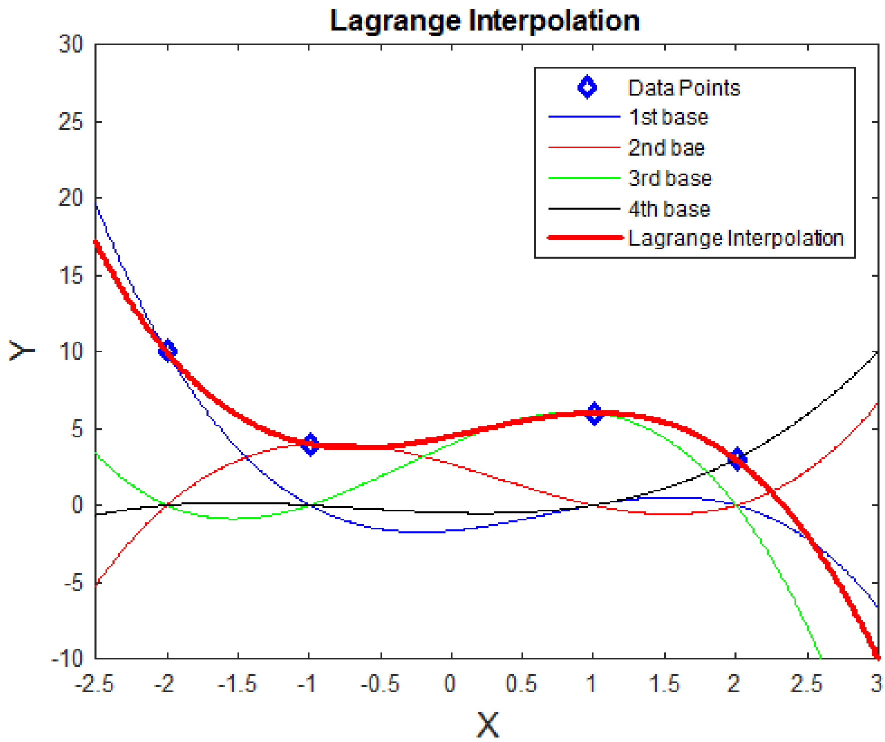
تذكر أن ترتيب النقاط ليس له أي تأثير على الحل أيضا. كثيرة حدود لاجرانج لأربع نقاط يمكن كتابتها كما يلي:

$$P(x) = 10\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-1)(-3)(-4)} + 4\frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(1)(-2)(-3)} + 6\frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(3)(2)(-1)} + 3\frac{(x+1)(x+1)(x-1)}{(4)(3)(1)}$$

البرنامج التالي يقوم بتنفيذ هذا الاستقطاب على النقاط الأربعة مع بيان دوال الأساس الأربعة أيضا كما هو مبين في الشكل (6.4) .

لاحظ أن كل دالة أساس مقابلة لأى نقطة تساوى المركبة y لهذه النقطة وتساوى صفر عند باقي النقط. مثلا دالة الأساس المقابلة للنقطة (2,10−) والمرسومة بالمنحنى الأزرق تساوى 10 عندما

x=−2 وتساوى صفر عند النقاط الثلاث الأخرى، مجموع كل دوال الأساس يعطى منحنى لاجرانج وهو ممثل باللون الاحمر السميك.



الشكل (6.4)

تنفيذ البرنامج

```
% Polynomial interpolation by Lagrange method
pointx = [-2 -1 1 2];
pointy = [10 4 6 3];
x_new = -2.5:.01:3;
plot(pointx,pointy,'bd','Linewidth',2); hold on;
m=size(pointx,2);
r=ones(m,size(x_new,2));
for i=1:4
for j=1:4
if (i~=j)
r(i,:)=r(i,:).*(x_new-pointx(j))/(pointx(i)-pointx(j));
end
end
End
plot(x_new,pointy(1)*r(1,:),'b',x_new,pointy(2)*r(2,:),'r',x_new,pointy(3)*r(3,:),'g',x_new,pointy(4)*r(4,:),'k');
hold on;
y_new=0;
for i=1:4
y_new=y_new+pointy(i)*r(i,:);
end
plot(x_new,y_new,'r','Linewidth',2);
title('Lagrange Interpolation','fontsize',12)
ylabel('Y','fontsize',14)
xlabel('X','fontsize',14)
legend('Data Points','1st base','2nd bae','3rd base','4th
base','Lagrange Interpolation');
axis([-2.5 3 -10 30]);
```

4-الاشتقاق العددي

مثال لتكن الدالة $f(x) = \sin x$

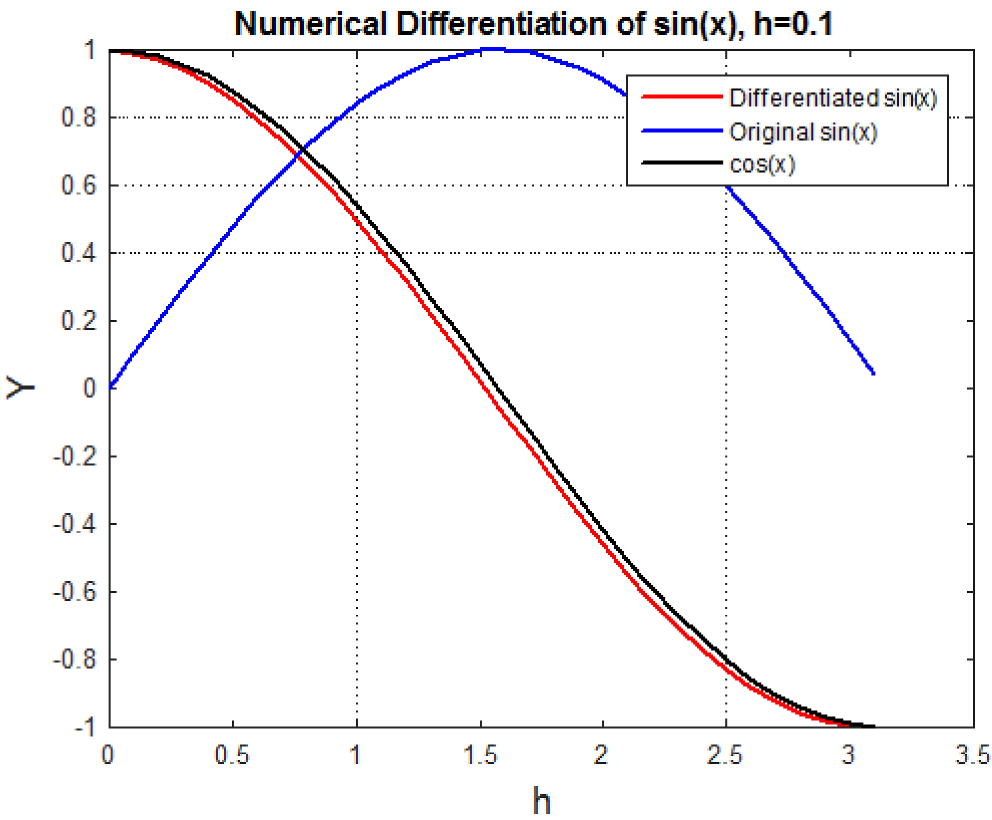
سوف نقوم بالاشتقاق العددي للدالة f(x)=sin(x) على المجال $[0,\pi]$ عن طريق تقسيم المجال إلى نقاط

متساوية البعد بين كل منها هو h=0.1 ، ثم نجرى دالة الفرق ونقسم هذه الفروق على المسافة بين كل نقطتين(h)

فنحصل على الاشتقاق العددي الدالةعند النقاط المتحصل عليها ثم نقارن ا الاشتقاق العددي الناتج مع التفاضل التحليلي للدالة f(x)=sin(x) وهو cos(x) عن طريق رسم كل منهما في نفس المعلم بواسطة البرنامج التالي

```
% Numerical Diff. of a sin(x) using the diff(x) function
h = 0.1;
x = 0:h:pi;
n=size(x);
m=size(x,2)-1;%to make y the same size as x
y=diff(sin(x))/h;
plot(x(1,1:m),y,'r', 'linewidth', 1.5);
hold on; grid;
y1=sin(x);
y2=cos(x);
plot(x,y1 ,'b', 'linewidth', 1.5);hold on;
plot(x,y2 ,'k', 'linewidth', 1.5);
title('Numerical Differentiation of sin(x), h=0.1','fontsize',12)
ylabel('Y','fontsize',14)
xlabel('h','fontsize',14)
legend('Differentiated sin(x)','Original sin(x)', 'cos(x)')
```

من خلال هذا البرنامج نحصل على الشكل (6.5) حيث يمثل المنحني باللون الاسود الاشتقاق العددي ومنحني اللون الاحمر قيم الدالة المشتقة تحليليا.



الشكل (6.5)

5–التكامل العددي

مثال

احسب التكامل التالي مستخدما طريقة شبه المنحرف في الماتلاب:

$$A = \int_0^{\pi} \sin x dx$$

أولا القيمة الحقيقية للتكامل هي $A = 2$

ثانيا الحل باستخدام الدالة z=trapz(y) سيكون كما يلي بعد تقسيم المدى من x=0 إلى x=π إلى عدد اختياري من النقاط وليكن 100.

```
>> X = 0:pi/100:pi;
```

```
>> Y = sin(X);

>> Z = pi/100*trapz(Y)

Z =

1.9998
```

مثال - طريقة سمبسون-

الدالة سابقة البناء في ماتلاب والتي تقوم بإجراء التكامل العددي لأى دالة هي:

$Q=quad('fun'.a.b)$

حيث تقوم هذه الدالة بإجراء التكامل العددي بطريقة سمبسون على الدالة fun في المدى [a b] بطريقة تكرارية.

استخدام دالة ماتلاب quad( ) لحساب التكامل العددي

$$\int_0^2 e^x \, dx$$

```
>> quad('exp(x)',0,2)

ans =

6.389056104485924
```

القيمة الحقيقية تساوي *6.38905609830650*

6-الحل العددي للمعادلات غير الخطية

طريقة نيوتن

```
1- %Tangent (Newton Raphson) method to find a root of a nonlinear equation
2- f = input('Enter The Function: ' , 's') ;%for example x^2-2
3- f = inline(f);
4- df=input('Enter Function Derivative: ','s');
5- df=inline(df);
6- x0 = input('Enter Starting Point: ');
7- n = input('Enter the Number of iterations: ');
8- t = input('Enter the Tolerance: ') ;
9- for i=1:n
10- x1 = x0-(f(x0)/df(x0));
11- err = abs(x1-x0);
12- if err >= t
13- x0=x1;
14- else
15- disp('The Root =')
```

```
disp(x0)
break
end
end
if err > t
disp ('The Root Not Found!')
end
```

7-الطرق المباشرة لحل جملة معادلات خطية

قبل التطرق لكيفية تنفيذ هذه الطرق من خلال برنامج ماتلاب سنذكر ببعض الخطوات الاولية الخاصة بالمصفوفات.

يفصل الماتلاب بين عناصر الصف الواحد بفاصلة أو مسافة، ويفصل بين الأعمدة بالفاصلة المنقوطة.

```
>> A=[1 2 3 4]
A =
1 2 3 4
```

هنا أدخلنا لماتلاب المصفوفة *A* على أنها صف واحد مكون من العناصر *4 3 2 1* والتي يفصل بين كل منها مسافة *(* كان من الممكن أن نفصل بين كل عنصر والتالي له بفاصلة *.)*كانت استجابة ماتلاب أنه سجل عنده مصفوفة من صف واحد وأربع أعمدة.

```
>> B=[1;2;3;4]

B =

1

2

3

4
```

في المصفوفة *B* توجد فاصلة منقوطة تفصل بين كل عنصر والتالي له، لذلك فإن ماتلاب يعتبر كل عنصر كما لو كان صفا

قائما بذاته، لذلك فقد استجاب ماتلاب بكتابة المصفوفة *B* في صورة مصفوفة من أربع صفوف وعمود واحد.

```
>> A=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]

A =

1 2 3

4 5 6

7 8 9
```

لاحظ كيف تم الفصل بين عناصر كل صف بمسافة، والفصل بين كل عمودين بفاصلة منقوطة، فحصلنا على المصفوفة المربعة (*3x3*).

منقول مصفوفة

A =

1 2 3

4 5 6

7 8 9

>> B=A'

B =

1 4 7

2 5 8

3 6 9

تمثل المصفوفة B منقول المصفوفة A ورمزها A'

العمليات على المصفوفات

- الجمع والطرح

A =

1 2 3

4 5 6

B =

1 4 7

2 5 8

```
>> C=A+B
C =
2 6 10
6 10 14
```

بنفس الطريقة يمكن إجراء عملية الطرح.

ضرب المصفوفات

```
A =
1 2 3 4
5 6 7 8
B =
1 5
2 6
3 7
4 8
>> C=A*B
C =
30 70
70 174
```

المصفوفة العكسية

إذا كانت *A* قابلة للقلب فإنه يوجد في ماتلاب الدالة *inv( )* سابقة البناء التي تحسب معكوس أي مصفوفة مباشرة كما يلى:

```
A =
10 2 3
4 20 3
3 3 10
>> B=inv(A)
B =
0.1121 -0.0065 -0.0317
-0.0182 0.0534 -0.0106
-0.0282 -0.0141 0.1127
```

طريقة غوص للحذف لحل جملة معادلات خطية

البرنامج التالي عبارة عن مقترح لتنفيذ خوارزم غوص لحذف المتغيرات مع المحورة.

```
1- %program to solve a system of linear equations
2- clear ;
3- format short
4- a = input([' Enter The Array of Coefficients a= ']); %e.g [1 2;3 4]
```

```
b = input([' Enter The Arrays of Constants b = ' ]) ;
n = size(a,1) ;
A = [ a , b ] ; % indent a and b in a single matrix
for k=1:n %loop on the columns
[amax, im]=max(abs(A(k:n,k)));
if amax==0
disp('matrix is singular, no possible solution');
break;
end
im=im+k-1;
if im~=k
T = A(k,:);
A(k,:) = A(im,:);
A(im,:) = T;
end
for i=k+1:n
A(i,k:n+1)=A(i,k:n+1)-(A(i,k)/A(k,k))*A(k,k:n+1);
end
end % end of triangularization of the matrix
```

```
if A(n,n)==0
disp('matrix is singular, no possible solution ann=0');
break;
end
x(n)=A(n,n+1)/A(n,n); %start of backward substitution
for i=n-1:-1:1
x(i)=(A(i,n+1)-sum(A(i,i+1:n).*x(i+1:n)))/A(i,i);
end
disp(x)
```

مستعملا البرنامج السابق حل الجملة الخطية التالية: *AX=B*

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 3 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 4 & -3\end{pmatrix}\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-8\\ 20\\ -2\\ 4\end{pmatrix}$$

```
>> GElimination
Enter The Array Coefficients a= [1 -1 2 -1 ;2 -2 3 -3 ; 1 1 1 0 ;1 -1
4 3 ]
Enter The Arrays Constants b = [-8;-20;-2;4]
x =
```

−7.0000 3.0000 2.0000 2.0000

يوفر الماتلاب طرق مباشرة لحل أى نظام خطى من المعادلات وأول هذه الطرق هي الدالة *linsolve(A,b)* حيث *A* مصفوفة المعاملات و *b* هوالشعاع المعطى، ويمكن التحقق من ذلك بالتطبيق على المثال السابق في ماتلاب مباشرة كما يلى:

```
>> A=[1 −1 2 −1 ;2 −2 3 −3 ; 1 1 1 0 ;1 −1 4 3 ];
>> b=[−8;−20;−2;4];
>> X = linsolve(A,b)
X =
−7.0000
3.0000
2.0000
2.0000
```

الدالة *linsolve()* تستخدم تحليل المصفوفة *A* إلى مصفوفة مثلثة علوية وأخرى سفلية.

8-الطرق التكرارية لحل جمل معادلات خطية

أ-طريقة جاكوبي

البرنامج المقترح لطريقة جاكوبي هو كما يلى:

```
%program to solve a system of linear equations using Jacobi method
clear ;
format short
a = input([' Enter The Array of Coefficients a= ']); %e.g [1 2;3 4]
b = input([' Enter The Arrays of Constants b = ' ]) ;%e.g [1;2;]
n = size(a,1) ;% where a is nxn and we want n only
x0 = input([' Enter The Array of first trial x0 = ' ]) ;%e.g [1;2;]
kmax = input([' Enter The Max number of iterations = ' ]) ;%e.g [10]
X = x0; At = zeros(n,n);
for i = 1:n
for j = 1:n
if j ~= i
At(i,j) = -a(i,j)/a(i,i);
end
end
Bt(i,:) = b(i,:)/a(i,i);
end
```

```
for k = 1: kmax
X = At*x0 + Bt;
x0 = X;
end
disp(X);
```

مثال

مستخدما البرنامج السابق حل الجملة الخطية التالية

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

```
>> Jacobi
Enter The Array of Coefficients a= [10 -1 2 0;-1 11 -1 3;2 -1 10 -1;0 3 -1 8]
Enter The Arrays of Constants b = [6;25;-11;15]
Enter The Array of first trial x0 = [0;0;0;0]
Enter The Max number of iterations = 10
1.0001
1.9998
```

-0.9998

0.9998

ب- طريقة غوص- سايدل

البرنامج التالي يمثل تعديل لبرنامج جاكوبي السابق ليعطي الحل بطريقةغوص- سايدل:

```
% solving a system of linear equations using Gauss-Siedel method
clear ;
format short
a = input([' Enter The Array of Coefficients a= ']); %e.g [1 2;3 4]
b = input([' Enter The Arrays of Constants b = ' ]) ;%e.g [1;2;]
n = size(a,1) ;% where a is nxn and we want n only
x0 = input([' Enter The Array of first trial x0 = ' ]) ;%e.g [1;2;]
kmax = input([' Enter The Max number of iterations = ' ]) ;%e.g [10]
X = x0; At = zeros(n,n);
for k = 1: kmax
X(1,:) = (b(1,:)-a(1,2:n)*x0(2:n,:))/a(1,1);
for i = 2:n-1
tmp = b(i,:)-a(i,1:i-1)*X(1:i-1,:)-a(i,i+1:n)*x0(i+1:n,:);
X(i,:) = tmp/a(i,i);
end
```

```
X(n,:) = (b(n,:)-a(n,1:n - 1)*X(1:n - 1,:))/a(n,n);
x0 = X;
disp(X');
end
%disp(X);
```

مثال

سنقوم بحل الجملة السابقة لكن بواسطة برنامج طريقة غوص- سايدل

Enter The Array of Coefficients a= [10 −1 2 0;−1 11 −1 3;2 −1 10 −1;0 3 −18]

Enter The Arrays of Constants b = [6;25;−11;15]

Enter The Array of first trial x0 = [0;0;0;0]

Enter The Max number of iterations = 10

K	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0.6000	2.3273	−0.9873	0.8789
2	1.0302	2.0369	−1.0145	0.9843
3	1.0066	2.0036	−1.0025	0.9984
4	1.0009	2.0003	−1.0003	0.9998
5	1.0001	2.0000	−1.0000	1.0000
6	1.0000	2.0000	−1.0000	1.0000
7	1.0000	2.0000	−1.0000	1.0000
8	1.0000	2.0000	−1.0000	1.0000

9	1.0000	2.0000	−1.0000	1.0000
10	1.0000	2.0000	−1.0000	1.0000

لقد نفذنا البرنامج هنا على 10 محاولات مثل طريقة جاكوبي تماما والجدير بالملاحظة أننا حصلنا على الإجابة الصحيحة تماما بعد 5 محاولات فقط كما هو موضح في النتائج السابقة التي حصلنا عليها، وهذا يعكس الفرق في السرعة بين طريقة غوص- سايدل وطريقة جاكوبي.

ج-طريقة الاسترخاء

البرنامج التالي يبين التعديلات على برنامج طريقة غوص- سايدل ليتلاءم مع طريقة الاسترخاء.

```
1- %program to solve a system of linear equations by the SOR method

2- clear ;

3- format short

4- a = input([' Enter The Array of Coefficients a= ']); %e.g [1 2;3 4]

5- b = input([' Enter The Arrays of Constants b = ' ]) ;%e.g [1;2;]

6- n = size(a,1) ;% where a is nxn and we want n only

7- x0 = input([' Enter The Array of first trial x0 = ' ]) ;%e.g [1;2;]

8- kmax = input([' Enter The Max number of iterations = ' ]) ;%e.g [10]
```

```
w = input([' Enter The Relaxation Value = ' ]) ;%e.g [10]
X = x0; At = zeros(n,n);
for k = 1: kmax
X(1,:) = x0(1,:)+w*((b(1,:)-a(1,1:n)*x0(1:n,:)))/a(1,1);
for i = 2:n-1
tmp = w*(b(i,:)-a(i,1:i-1)*X(1:i - 1,:)-a(i,i:n)*x0(i:n,:));
X(i,:) = x0(i,:)+tmp/a(i,i);
end
X(n,:) = x0(n,:)+w*((b(n,:)-a(n,1:n)*X(1:n,:)))/a(n,n);
x0 = X;
disp(X');
end
%disp(X');
```

9-حل المعادلات التفاضلية باستخدام ماتلاب

يوجد في ماتلاب دالتين لحل المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى .الدالة الأولى هي*ode23( )*

و تستخدم طريقة رونج كيتا من الدرجة الثانية والدرجة الثالثة لحساب الحل.

ماتلاب لديه طريقة للحساب الآلي لمقدار الخطوة *h* وليتم ذلك فإنه يستخدم في الحل درجتين الثانية والثالثة .الصورة العامة لهذه الدالة هي:

[xout,yout]=ode23('fun', span, y0)

مثال

أوجد حل المعادلة التفاضلية

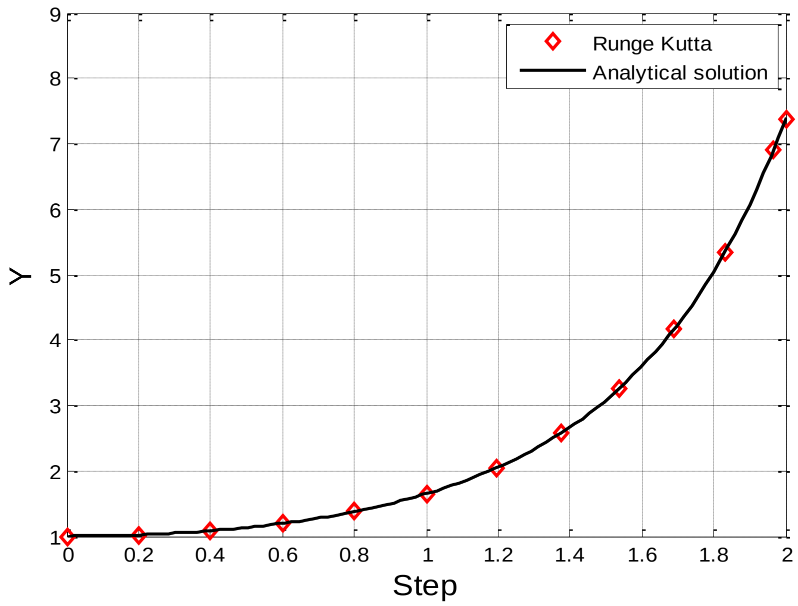
$$\begin{cases} y' = xy & x \in [0,2] \\ \quad y(0) = 1 & \end{cases}$$

الحل التحليلي لهذه المعادلة هو: $Y(x) = e^{x^2/2}$

البرنامج التالي بواسطة الدالة (*ode23(*) المرفق بالشكل (6.6) الذي يمثل المنحنى البياني للحل التحليلي والحل التقريبي حيث نلاحظ انطباقهما تقريبا .

```
% using Runge Kutta

clear

f=inline('(x*y)');

[Xout, Yout]=ode23(f,[0 2],1);

curve=plot(Xout,Yout,'rd');grid;hold on; grid on;

set (curve,'LineWidth',2)

i=linspace(0,2); % plotting real solution

y4=exp(i.^2/2);

plot(i,y4,'k-', 'linewidth',1.5)
```

```
ylabel('Y', 'fontsize',14)

xlabel('Step', 'fontsize',14)

axis([0 2 1 9]);

legend('Runge Kutta','Analytical solution')
```



الشكل (6.6)

الفصل السابع

حلول التمارين المقترحة

1- حلول تمارين الفصل الاول
2- حلول تمارين الفصل الثاني
3- حلول تمارين الفصل الثالث
4- حلول تمارين الفصل الرابع

حلول تمارين الفصل الاول

التمرين الاول:

التدوير الى اربعة ارقام معبرة دقيقة.

العدد	التدوير	الخطأ
456.872	456.9	0.5×10^{-1}
456.872	-5.358	0.5×10^{-3}
0.0023417	0.002342	0.5×10^{-6}

التمرين الثاني:

الخطأ المطلق للعدد $a = 476.6$ هو $\Delta a = 0.05$

الخطأ المطلق للعدد $b = 3.11918$ هو $\Delta b = 0.00005$

اذن: $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$

الخطأ المطلق للمجموع هو: $\Delta_{(a+b)} = 0.050005$

الخطأ النسبي للمجموع هو: $\frac{\Delta_{(a+b)}}{|a+b|}$ أي : $\frac{0.050005}{479.71918} = 0.0001$

التمرين الثالث:

تقريب الدالة: $f(x) = e^x \sin x$ على المجال $[0.1]$

نشر تايلور من المرتبة الثالثة:

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

نقوم بحساب المشتقات: $f(0) = 0$

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) \;:\; f'(0) = 1$$

$$f''(x) = 2e^x \cos x \;:\; f''(0) = 2$$

$$f^{(3)}(x) = 2e^x(\cos x - \sin x) \;:\; f^{(3)}(0) = 2$$

اذن: كثير حدود تايلور يكون من الشكل :

$$P_3(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

- الخطأ المرتكب في هذا التقريب يعطى على الشكل:

$$\forall x \in [0,1]: |f(x) - P_3(x)| \leq M.\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

اذن: $|f(x) - P_3(x)| \leq \frac{M}{24}$

حيث: $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq M$

التمرين الرابع:

حتى تكون كثيرات الحدود $(P_i(x))_{i=0.1.2}$ متعامدة يجب تحقيق:

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)\, P_j(x) dx = 0 \qquad i \neq j$$

و $\qquad w(x) = 1$

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)\, P_i(x) dx \neq 0$$

لدينا:

- $\int_{-1}^{1} P_0(x)\, P_1(x) dx = \int_{-1}^{1} x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 0$
- $\int_{-1}^{1} P_0(x)\, P_2(x) dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{3}{6}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1} = 0$

- $\int_{-1}^{1} P_1(x)\, P_2(x) dx = \int_{-1}^{1} x\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)\, dx = \left[\frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1} = 0$

و

- $\int_{-1}^{1} P_0(x)\, P_0(x) dx = 2$
- $\int_{-1}^{1} P_1(x)\, P_1(x) dx = \frac{2}{3}$
- $\int_{-1}^{1} P_2(x)\, P_2(x) dx = \frac{2}{5}$

ومنه كثيرات الحدود P_2, P_1, P_0 متعامدة

التمرين الخامس:

لدينا:

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{i=3} y : L : (x)$$

حيث:

$$y_0 \mathrm{L}_0(x) = \frac{(-2)(x-2)(x-6)(x-8)}{35}$$

$$y_1 \mathrm{L}_1(x) = \frac{(5)(x-1)(x-6)(x-8)}{24}$$

$$y_2 \mathrm{L}_2(x) = \frac{(-7)(x-1)(x-2)(x-8)}{40}$$

$$y_3 \mathrm{L}_3(x) = \frac{(5)(x-1)(x-2)(x-6)}{84}$$

ومنه:

$$P_3(x) = y_0 \mathrm{L}_0(x) + y_1 \mathrm{L}_1(x) + y_2 \mathrm{L}_2(x) + y_3 \mathrm{L}_3(x)$$

حساب : $P_3(x)$: بتعويض قيم x بالعدد 3

نجد:

$$P_3(x) = \frac{-30}{35} + \frac{150}{24} + \frac{70}{40} - \frac{30}{84}$$

ومنه:

$$P_3(x) = \frac{-6}{7} + \frac{25}{4} + \frac{7}{4} - \frac{5}{14}$$

اذن:

$$P_3(x) \approx 6.7$$

بما ان قيم الجدول مأخوذة للعدد واحد دقيق معبر ولدينا: $P_3(x6) = 7$ و $P_3(2) = 5$

نأخذ:

$$P_3(3) \approx 6$$

التمرين السابع:

1) طريقة شبه المنحرف البسيطة:

$$\int_{1.1}^{1.5} f(x)dx \approx \frac{1.5 - 1.1}{2}\big(f(1.5) + f(1.1)\big)$$

$$\approx \frac{0.4}{2}(3.0042 + 4.4817)$$

$$\approx 1.4972$$

2) طريقة شبه المنحرف البسيطة:

$$\int_{1.1}^{1.5} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$\approx \frac{0.4}{6}(f(1.1) + 4f(1.3) + f(1.5))$$

$$\approx \frac{0.2}{3}(3.0042 + 4 \times (3.6693) +$$
$$4.4817)$$

$$\approx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

التمرين الثامن:

بما ان عدد النقاط زوجي (ستة) فإنه لا يمكننا استخدام القانون $1/_3$ لسمبسون وحده، فيتم استخدام قانون $3/_8$ لسمبسون في النقاط الاربع الاولى ثم قانون $1/_3$ للنقاط الثلاث المتبقية.

قانون $3/_8$ لسمبسون:

اذا كانت : x_0, x_1, x_2, x_3 اربع نقاط حيث : $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = h$ فإن:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

ومنه نجد:

$$\int_{0}^{2.5} f(x)dx = \int_{0}^{1.5} f(x)dx + \int_{1.5}^{2.5} f(x)dx$$

اذن بتطبيق قانون $3/_8$ نجد:

$$\int_{0}^{1.5} f(x)dx \approx \frac{3 \times 0.5}{8}[f(x0_0) + 3f(x_1 0.5) + 3f(1) + f(1.5)]$$

$$\approx \frac{1.5}{8}[1.5 + 6 + 6 + 1.6364]$$

وبتطبيق قانون $1/3$ نجد:

$$\int_{1.5}^{2.5} f(x)dx \approx \frac{0.5}{3}(1.6364 + 4 \times 1.25 + 0.9565)$$

ومنه: $\int_0^{2.5} f(x)dx \approx 4.1036$

التمرين التاسع:

1) حساب القيمة الحقيقية للتكامل:

$$I = \int_{0}^{2} e^x dx = [e^x]_0^2$$

$$= e^2 - 1 = 6.389$$

$$\approx 6.421$$

- طريقة شبه المنحرف البسيطة

$$\int_{0}^{2} e^x dx \approx \frac{2-0}{2}(e^0 + e^2) \approx 8.389$$

2- طريقة سمبسون البسيطة

$$\int_0^2 e^x dx \approx \frac{2-0}{6}(e^0+4e^1+e^2) \approx 6.421$$

$$\boldsymbol{h = 0.5}$$

3- طريقة شبه المنحرف المركبة

نقوم اولا بتقسيم مجال التكامل الى مجالات جزئية مدى كل واحد منها 0.5 ومنه:

$$\int_0^2 e^x dx = \int_0^{0.5} e^x dx + \int_{0.5}^{1} e^x dx + \int_1^{1.5} e^x dx + \int_{1.5}^{2} e^x dx$$

$$\approx \frac{0.5}{2}(e^0+e^2+2(e^{0.5}+e^1+e^{1.5})) \approx 6.522$$

4 – طريقة سمبسون المركبة

نقوم بتقسيم مجال التكامل إلى مجالين مدى كل واحد منها 1 لان طريقة سمبسون تستدعي وجود ثلاث نقاط

$$\int_0^2 e^x dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx$$

$$\approx \frac{0.5}{3}(e^0+e^2+2e^1+ 4(e^{0.5}++e^{1.5}))$$

$$\approx 6.391$$

نلاحظ ان ادق قيمة تقريبية للتكامل هي الاخيرة (4) اي من اجل $h = 0.5$ وبالتالي كلما كانت الخطوة h اصغر زادت الدقة، لكن مع صعوبة الحساب اليدوي او استحالته وهنا تكمن اهمية البرمجة في الكومبيوتر فمن خلالها يمكننا حل مسائل معقدة في ظرف وجيز.

حلول تمارين الفصل الثاني

التمرين الاول:

أ- $$h(x) = x^3 - 1$$

نلاحظ أن: $h(2) = 7 \notin [1,2]$ ومنه الدالة h لا تحقق شروط نظرية النقطة الثانية.

- $$g(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{1/3}$$

من أجل : $1 \leq x \leq 2$ فإن $2^{1/3} \leq g(x) \leq 3^{1/3}$

حيث: $g(2) \approx 1.25$ و $g(3) \approx 1.44$

ومنه : $g(x) \in [1,2] \quad : \quad \forall x \in [1,2]$

المشتق : $$max_{[1,2]}|g'(x)| = max_{[1,2]}\left|\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}\right|$$

$$= |g'(x)| \leq \frac{1}{3 \times \sqrt[3]{4}} = 0.21 < 1$$

اي: $K = 0.21$

ومنه الدالة g تحقق شروط نظرية النقطة الثانية.

ب- نحسب أولا عدد التكرارات اللازمة من اجل خطا $0.5 \times 10^{-2} =$ ع اي:

حسب العلاقة: $\frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| \leq$ ع

$$x_1 = g(x_0) = \sqrt[3]{2.5} \approx 1.357 \quad : \quad x_0 = 1.5$$

ومنه:

$$\frac{(0.21)^{\mathrm{n}}|1.357 - 1.500|}{1 - .021} \leq 0.5 \times 10^{-2}$$

بادخال الدالة ln على طرفي المتناهية نجد:

$n \le 2.992$ ومنه نأخذ : $n = 3$

ت- الجذر التقريبي:

$$x_2 = g(x_1) = \sqrt[3]{2.357}$$

$$\approx 1.331$$

$$x_3 = g(x_2) = \sqrt[3]{2.331} \approx 1.326$$

اذن : $\bar{x} \approx 1.32 \pm 0.01$ الحل التقريبي.

التمرين الثاني:

لدينا: $x \in [0,0.5]: x = g(x) = 0.5\cos x$

1) شروط النقطة الثابتة:

- نعلم ان : $\forall x \in [0,0.5]: 0 \le x\cos x \le 1$

اذن: $0 \le 0.5\cos x \le 0.5$

ومنه: $\forall x \in [0,0.5]: g(x) \in [0,0.5]$

- $$g'(x) = -0.5\sin x$$
$$|g'(x)| \le |g'(0.5)| < 0.5 < 1$$

اذن الدالة g تحقق شروط النقطة الثابتة.

التمرين الثالث:

$x^4 - 8x + 1 = 0$ على المجال $[1,6,2]$

شروط طريقة نيوتن:

- $f(1.6).f(1) < 0$: $f(1.6) = -5.246 < 0$
  $f(2) = 1 > 0$
- $\forall x \in [1,6,2] : f'(x) = 4x^3 - 8 > 0$
- $\forall x \in [1,6,2] : f''(x) = 12x^2 > 0$

اذن شروط نظرية نيوتن محققة.

حسب العلاقة:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$x = 2$ و $f(2).f''(2) > 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{24} \approx 1.96$$

$$x_2 = 1.956$$

اذن القيمة المقربة للجذر التقريبي هي:

$$\bar{x} = 1.96 \pm 0.07$$

التمرين الرابع:

$x^3 - x^2 - 11 = 0$ على المجال $[1,2]$

شروط تطبيق نظرية نيوتن.

- $f(1).f(2) = -9 \times 1 < 0$
- $\forall x \in [1,2] : f'(x) = 3x^2 + 2x > 0$
- $\forall x \in [1,2] : f''(x) = 6x + 2 > 0$

$f'(x)$ و $f''(x)$ مستمرتان على المجال $[1,2]$ ولا تغيران إشارتهما. إذن:

شروط طريقة نيوتن محققة.

نأخذ $x_0 = 2$ $f(2).f''(2) > 0$

حسب العلاقة نجد :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{16} \approx 1.9375$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.9375 - \frac{0.065}{15.172} \approx 1.9362$$

اذن: $|x_2 - x_1| < 0.0013 < 0.5 \times 10^{-2}$

ومنه: $\bar{x} = 1.936 \pm 0.05$

التمرين الخامس:

بإستعمال نشر تايلور من المرتبة الثانية عند النقاط $(x + h)$ و $(x - h)$ نحصل على:

حلول تمارين الفصل الثالث

التمرين الأول:

لدينا:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. حساب A×B ، B×A ، A − B :

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & +2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} \times \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

ثم:

$$\det A = 0 - 0 - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\det B = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = +12$$

$$\det(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -12$$

من جهة أخرى:

$$\det A \times detB = (-1) \times (12) = -12$$

الخاصية محققة دوما أي:

$$\det(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \det A \times detB$$

بصورة عامة:

$$\det(A_1 \times A_2 \times \dots A_n) = \det A_1 \times \dots \times detA_n$$

2. لدينا:

$$\det(\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1}) = \det A \times det\mathrm{A}^{-1}$$

حسب الخاصية السابقة ومنه:

$$(\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1}) = I$$

$$\det \mathrm{I} = \det A \times det\mathrm{A}^{-1}$$

بما أن $\det \mathrm{I} = 1$ فإن $det\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det A}$

أي : $\det \mathrm{A}^{-1} = -1$

3. $\|B\|_1 = max\{1+1+2\,, 2+2+2\,, 1+1+1\}$

(حسب الاعمدة) $\|B\|_1 = 6$

$$\|B\|_\infty = max\{1+2+1\,, 1+2+1\,, 2+1+1\}$$

(حسب الاسطر) $\|B\|_\infty = 5$

التمرين الثاني:

لدينا:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) اذن A متناظرة : $A^t = A$

- A معرفة موجبة اذا تحقق :

$$\forall \mathrm{X} \neq 0 : \quad X^t A\, X > 0 \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

أي :

$$X^t = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} > 0$$

لدينا:

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3)$$

ومنه:

$$X^t A\, X = (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3x_2 - x_2x_3 + 2x_3^2$$

$$= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_1^2 + x_3^2$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_1^2 + x_3^2 > 0$$

ومنه : $\forall \, X \neq 0 = X^t A \, X > 0$

اذن A معرفة موجبة

2) A ذات قطر مسيطر لأن :

حسب الاسطر: $2 \geq 1$

$$2 \geq 2$$

$$2 \geq 1$$

حسب الاعمدة: $(2 \geq 1)$ ، $(2 \geq 2)$ ، $(2 \geq 1)$

3) القيم الذاتية للمصفوفة A:

المعادلة المميزة:

$$\det(A - \lambda \, I) = 0$$

$$A - \lambda \, I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \, I) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2 & -\lambda & -1 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) - (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1 - 1]$$

ومنه: $\det(A - \lambda \, I) = (2-\lambda)\left(2 - \lambda - \sqrt{2}\right)\left(2 - \lambda + \sqrt{2}\right) = 0$

اذن:

$$\det(A - \lambda \, I) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} 2 - \lambda = 0 \\ 2 - \sqrt{2} - \lambda = 0 \\ 2 + \sqrt{2} - \lambda = 0 \end{cases} : \quad \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 2 - \sqrt{2} \\ \lambda = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

ومنه القيم الذاتية للمصفوفة A هي :

$$\lambda_1 = 2 \ , \qquad \lambda_2 = 2 - \sqrt{2} \ , \qquad \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$$

الشعاع الطبقي:

$$\rho(A) \quad = max|\lambda_i| \quad i = 1,2,3$$

اذن:

$$\rho(A) \quad = 2 + \sqrt{2}$$

استنتاج $\|A\|_2$ لدينا :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} \qquad (A^t = A)$$

$$= \sqrt{\rho(A^2)} \qquad \left(\rho(A^2)\right) = \left(\rho(A)\right)^2$$

$$= \sqrt{\left(\rho(A)\right)^2}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A)} = \ 2 + \sqrt{2} \qquad \rho(A) \geq 0$$

التمرين الثالث:

1) الشكل المصفوفي: $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) طريقة كرامر :

حساب محدد المصفوفة A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$$

اذن الجملة تقبل حل وحيد حيث:

$$\mathrm{x} = \frac{\Delta x}{\det A} \ ; \quad y = \frac{\Delta y}{\det A} \ ; \ \ z = \frac{\Delta z}{\det A}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -13$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -41$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{13}/_{30} \\ {}^{41}/_{30} \\ {}^{-9}/_{30} \end{pmatrix}$$

3) حل الجملة بإستعمال طريقة غوص للحذف:

المصفوفة الموسعة: $[A{:}\,b]$

1. مرحلة الحذف:

$$[A{:}\,b] \ : \ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & : & 1 \\ -1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 1 & 1 & -4 & : & 3 \end{pmatrix}$$

أ- $a_{11} = 3 \neq 0$

$$\mathrm{L_1}/_{3} \ \to \mathrm{L_1}^{(1)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^{1}/_{3} & : & {}^{1}/_{3} \\ -1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 1 & 1 & -4 & : & 3 \end{pmatrix}$$

ب- حذف المتغير x من المعادلتين الثانية والثالثة:

$$\begin{matrix} L_1 + L_2 \rightarrow {L_2}^{(1)} \\ L_3 - L_1 \rightarrow {L_3}^{(1)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & : & 1/3 \\ 0 & 2 & 4/3 & : & 7/3 \\ 0 & 1 & -13/3 & : & 8/3 \end{pmatrix}$$

ت- $a_{22}^{(1)} = 2 \neq 0$

$$L_2^{(1)}/2 \rightarrow {L_2}^{(2)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & : & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & : & 7/6 \\ 0 & 1 & -13/3 & : & 8/3 \end{pmatrix}$$

ث- حذف المتغير y من المعادلة الثالثة :

$$L_3^{(1)} - L_2^{(2)} \rightarrow {L_3}^{(2)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & : & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & : & 7/6 \\ 0 & 0 & -5 & : & 3/2 \end{pmatrix}$$

ج- $a_{33}^{(2)} = -5 \neq 0$ اذن :

$$L_3^{(2)}/_{-5} \rightarrow {L_3}^{(3)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & : & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & : & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & : & -3/10 \end{pmatrix}$$

2. مرحلة التعويض:

- $z = {}^{-3}/_{10}$
- $\left(y + \frac{2}{3}z = \frac{7}{6}\right) \rightarrow y = \frac{7}{6} + \frac{1}{5} = \frac{41}{30}$
- $\left(x + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}\right) \rightarrow x = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{13}{30}$

التمرين الرابع:

المصفوفة الموسعة

$$[A{:}b] = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 & : & 6 \\ 3 & 8 & 1 & : & 11 \\ 1 & 2 & 4 & : & 20 \end{pmatrix}$$

1) مرحلة الحذف:

أ- $a_{11} = 3 \neq 0$

$$\mathrm{L_1}/_3 \rightarrow \mathrm{L_1}^{(1)} : \begin{pmatrix} 1 & {}^{8}/_{3} & 3 & : & 2 \\ 3 & 8 & 1 & : & 11 \\ 1 & 2 & 4 & : & 20 \end{pmatrix}$$

ب- حذف المتغير x من المعادلتين الثانية والثالثة:

$$\begin{matrix} \mathrm{L_2} + 3\mathrm{L_1}^{(1)} \rightarrow \mathrm{L_2}^{(1)} \\ \mathrm{L_3} - \mathrm{L_1}^{(1)} \rightarrow \mathrm{L_3}^{(1)} \end{matrix} : \begin{pmatrix} 1 & {}^{8}/_{3} & 3 & : & 2 \\ 0 & 0 & -8 & : & 5 \\ 0 & {}^{-2}/_{3} & 1 & : & 18 \end{pmatrix}$$

ت- $a_{22}^{(1)} = 0$ اذن لايمكن استعماله كمحور يجب تغيير المحور اما بتبديل الاعمدة او الاسطر نلاحظ ان تبديل السطرين الثالث و الثاني يساعدنا في الحصول على مصفوفة مثلثية ومنه نحصل على المصفوفة الموسعة التالية:

$$\begin{matrix} \mathrm{L_2}^{(2)} \rightarrow \mathrm{L_3}^{(1)} \\ \mathrm{L_3}^{(2)} \rightarrow \mathrm{L_2}^{(1)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^{8}/_{3} & 3 & : & 2 \\ 0 & {}^{-2}/_{3} & 1 & : & 18 \\ 0 & 0 & -8 & : & 5 \end{pmatrix}$$

ث- $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$ اذن :

$$L_3^{(2)}/_{-8} \rightarrow L_3^{(3)} : \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & 3 & : & 2 \\ 0 & -2/3 & 1 & : & 18 \\ 0 & 0 & 1 & : & -5/8 \end{pmatrix}$$

2) مرحلة التعويض :

- $z = -5/8$
- $-\frac{2}{3}y = 18 + \frac{5}{8} = \frac{144+5}{8} = \frac{149}{8}$
- $y = \frac{-149}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{-447}{16}$ اذن
- $x = 2 + \frac{8}{3} \times \frac{447}{16} + \frac{15}{8} = \frac{627}{8}$

$$x = \begin{pmatrix} 627/8 \\ -447/16 \\ -5/8 \end{pmatrix}$$

التمرين السادس: AX=b

- ✓ طريقة غوص:

المصفوفة الموسعة $[A:b]$ $a_{11} = 1$

أ-

$$\begin{array}{l} L_2^{(1)} \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3^{(1)} \rightarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4^{(1)} \rightarrow L_4 - 4L_1 \end{array} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & : & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & : & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & : & 0 \end{bmatrix}$$

ب-

$$\begin{matrix} L_2^{(1)}/_{-1} \\ \\ L_3^{(2)} \to L_3^{(1)} + 2L_2^{(2)} \\ L_4^{(2)} \to L_4^{(1)} + 7L_2^{(2)} \end{matrix} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & : & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & : & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & : & 0 \end{bmatrix}$$

ت-

$$\begin{matrix} L_3^{(2)}/_{-4} \\ \\ L_4^{(3)} \to L_4^{(2)} - 4L_3^{(3)} \end{matrix} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & : & 0 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$x_4 = 0 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_1 = 1$$

حلول الجملة هي: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>التمرين السابع:</u>

الجملة من الشكل: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

طريقة التفكيك : A=LU

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & U_{12} & U_{23} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بعد الضرب والمطابقة نحصل على:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad , \; U = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(AX = b) \; \leftrightarrow \; \begin{cases} LZ = b \\ UX = Z \end{cases}$$

$$(LZ = b) \leftrightarrow \; Z = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$(UX = Z) \leftrightarrow \; X = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

اذن حلول الجملة هي:

$$X = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

حلول تمارين الفصل الرابع

التمرين الأول:

$$\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$$

1. الجملة التكرارية لطريقة جاكوبي:

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-\frac{1}{3}x_2^{(k)}-\frac{1}{3}x_3^{(k)}+1\\x_2^{(k+1)}=-\frac{1}{3}x_1^{(k)}-\frac{1}{3}x_3^{(k)}+2\\x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{3}x_1^{(k)}-\frac{1}{3}x_2^{(k)}+3\end{cases}$$

أي: $x^{(k+1)}=T_jX^{(k)}+C_j$

حيث:

$$T_j=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{pmatrix};C_j=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

2. حساب الشعاع الطيفي $\rho(T_j)$ حيث:

$\rho(T_j)=\max_i|\lambda_i|$ λ_i القيمة الذاتية لـ T_j

قيم λ_i تمثل حلول المعادلة المميزة: $det(T_j-\lambda I)=0$

$$det(T_j - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\lambda\right) = 0$$

ومنه نجد:

$$det(T_j - \lambda I) = \left(\lambda - \frac{1}{3}\right)\left(-\lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{9}\right) = 0$$

حلول المعادلة هي : $\lambda_1 = \frac{1}{3}\ , \lambda_2 = \frac{1}{3}\ , \lambda_3 = \frac{-2}{3}$

اذن: $\mathrm{e}(T_j) = \max_{i=1,2,3}|\lambda_i| = \frac{2}{3}$

بما ان $\mathrm{e}(T_j) = \frac{2}{3} < 1$ فإن طريقة جاكوبي تتقارب.

3. عدد التكرارات بخطأ 10^{-4} و $X^{(0)} = C_j$ حسب العلاقة لدينا:

$$\|X - X^{(k)}\| \le \frac{\|T_j\|^k}{1 - \|T_j\|}\|X^{(1)} - X^{(0)}\| = 10^{-4}$$

اذن: $\|X - X^{(k)}\| \le \frac{\|T_j\|^{k+1} . \|C_J\|}{1 - \|T_j\|} = 10^{-4}$

لدينا: $\|T_j\|_1 = \frac{2}{3}\ \ ;\ \ \|X^{(0)}\| = \|C_j\|_1 = 6$

ومنه نجد : $\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \times 18 = 10^{-4}\ \ :\ \ \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + 6}{\frac{1}{3}} = 10^{-4}$

ندخل الدالة ln على الطرفين نجد:

$$(K+1)\ln\frac{2}{3}+\ln 18=-4\ln 10$$

بعد الحساب نستنتج أن $k=26$

التمرين الثاني:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 1\\ 0 & \alpha & 0\\ 1 & 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

تتقارب طريقتي جاكوبي وغوص سايدل اذا كانت A ذات قطر مسيطر تماما أي:

$|\alpha|>1$ (حسب الاسطر والاعمدة)

ومنه قيم α التي تحقق التقارب هي : $(1<\alpha)$ أو $(\alpha<-1)$.

التمرين الرابع: AX=b

$$\begin{pmatrix}6 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 0\\ 6\end{pmatrix}$$

2) بما ان المصفوفة A ذات قطر مسيطر تماما فإن الطريقتين تتقاربان (جاكوبي وغوص− سايدل)

1) طريقة جاكوبي:

$$X^{(0)}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 2\end{pmatrix};\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-\frac{1}{6}x_2^{(k)}-\frac{1}{6}x_3^{(k)}+2\\ x_2^{(k+1)}=-\frac{1}{2}x_1^{(k)}\quad +0\\ x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{6}x_1^{(k)}-\frac{1}{3}x_2^{(k)}+1\end{cases}$$

بالتعويض نجد:

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 13/_6 \\ -2/_3 \\ 10/_9 \end{pmatrix} \quad ; \quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} 4/_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 52/_{27} \\ -13/_{12} \\ 31/_{36} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.926 \\ -1.083 \\ 0.861 \end{pmatrix}$$

2) طريقة غوص− سايدل:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\dfrac{1}{6}x_2^{(k)} - \dfrac{1}{6}x_3^{(k)} + 2 \\ x_2^{(k+1)} = -\dfrac{1}{2}x_1^{(k+1)} + 0 \\ x_3^{(k+1)} = -\dfrac{1}{6}x_1^{(k+1)} - \dfrac{1}{3}x_2^{(k+1)} + 1 \end{cases}$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 35/_{18} \\ -35/_{36} \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} 4/_3 \\ -2/_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 431/_{216} \\ -431/_{452} \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.995 \\ -0.995 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) حل الجملة باستعمال طريقة غوص للحذف:

$$[A:b] = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & : & 12 \\ 0 & 11/3 & -1/3 & : & -4 \\ 0 & 0 & 6 & : & 6 \end{pmatrix}$$

نجد: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$

أي : الحل الصحيح x حيث : $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

طريقة التفكيك A=LU حيث :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 11/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

نصل الى نفس النتيجة.

4) من خلال المقارنة نجد ان طريقة غوص– سايدل هي الأسرع لأنها الأقرب الى الحل الصحيح.

المراجع

المراجع

قائمة المراجع باللغة العربية

[1] محمد ابراهيم العدوى – التحليل العددي مع التطبيق على الماتلاب –كلية الهندسة بحلوان– جامعة حلوان2018 .

[2] نشاط إبراهيم العبيدي – التحليل العددي – مكتبة نرجس *www.narjes-library.blogspot.com*

[3] نصر الدين عيد – التحليل العددي – منشورات جامعة حلب كلية العلوم 2011.

قائمة المراجع باللغة الانجليزية

[4] *Fundamental Numerical Methods and Data Analysis,2003. George W. Collins, II*

[5] Gilbert Strang,Wellesley Introduction to linear algebra, Cambridge Press, 2008

[6] O. Axelsson. Iterative solution methods. Cambridge University Press, 1994.

قائمة المراجع باللغة الفرنسية

[7] *Alfio Quarteron Steven Dufour. Guide de Matlab. Ecole Polytechnique de Montréal, 2002.43*

Calcul Scientifique ; Cours, exercices corrigées

[8] *Ciarlet P.G., B. Miara, J.M. Thomas, Exercices d'analyse numérique matricielle et d'optimisation avec solutions.Edition Masson, 1991*

[9] *Ciarlet P.G. : Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Masson, Paris (1985).*

[10] *Jean-Pierre DEMAILLY; Analyse Numérique et Equations Différentielles; Collection Gronoble Scientifique.*

[11] *M. Crouzeix, AL Mignot . Analyse numérique des équations différentielles, collec. Math. Appli pour la maitrise. Masson, 1984.*

[12] *M. Marcoux. Programmation avec Matlab (TP). I.N.S.S.E.T. Université de Picardie.*

[13] *P. Lascaux, R. Théodor. Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Tomes 1 et 2 Masson 1986.*

[14] *Radhia Bessi et MaherMoakher, école nationale d'ingénieures de Tunis. Analyse Numérique, 2013-2014.*

[15] *Salem Mathlouthi, Université Virtuelle de Tunis, 2007.*

خلاصة

تعرضنا في هذا العمل لأهم فصول التحليل العددي الموجه لطلبة السنة الثانية ليسانس رياضيات حيث تم التطرق بعد دراسة الاخطاء

إلى التقريب والاستقطاب ثم الاشتقاق والتكامل العددي و أنهينا هذا الجزء

بالحل العددي للمعادلات غير الخطية.

أما الجزء الثاني فخصصناه للطرق المباشرة والتكرارية لحل جملة معادلات خطية إضافة للحل العددي للمعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الاولى.

كما أرفقنا كل فصل بتمارين مقترحة متنوعة ليتمكن الطالب من معرفة مدى استيعابه للمفاهيم ويراجع الحلول المدرجة في الفصل الاخير.

أما الجانب النضري فلم نتعمق فيه وقمنا بتوجيه الطالب إلى بعض المراجع حيث يمكنه التعمق في هذا الجانب.

كما أولينا أهمية بالغة للجانب التطبيقي من خلال برنامج ماتلاب كونه الاكثر سلاسة إضافة لكونه البرنامج المعتمد في الاعمال التطبيقية حيث قمنا ببرمجة غالبية الطرق العددية التي تم التعرض لها في الدروس.

أخيرا نرجو من الله أن يسدد خطانا ويفيد بهذا العمل كل طالب معرفة.

الاستاذ بقاص محمد

أستاذ محاضر بجامعة الشهيد حمه لخضر/ كلية العلوم الدقيقة / قسم الرياضيات

mohammed-beggas@univ-eloued.com

ملخص

قدمنا في هذه المطبوعة الدروس المقررة لطلاب في السنة الثانية ليسانس رياضيات وتخص التحليل العددي 1 و 2 متبوعَةً بملحق عن برنامج MATLAB لكل فصل، مع تمارين مقترحة محلولة.

الكلمات المفتاحية التقريب والاستقطاب - التكامل والاشتقاق العددي- المعادلات غير الخطية- التحليل العددي المصفوفي**.**

Résumé

Dans cette publication, nous avons présenté les cours prévus pour les étudiants de deuxième année license mathématiques, en analyse numérique 1 et 2, suivis d'une annexe sur le programme MATLAB pour chaque chapitre, avec des exercices résolus**.**

Mots clés : approximation et interpolation - intégration et différenciation numériques - équations non linéaires- analyse numérique matricielle.