

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'Enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique



UNIVERSITE DE CHAHID HAMMA LAKHDAR
D'EL OUED
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de
MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière: Mathématiques

Option: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Formules de Cauchy , de Stokes et de
Green et ses applications**

Présenté par :



**Guehef Hanane
Hamaiti Khaoula**

Devant le jury composé de:

Dr.	Douib Bachir	MCB	Univ.El-Oued	Président
Dr.	Rehouma Abdelhamid	MCA	Univ.El-Oued	Rapporteur
Dr.	Letoufa Yassine	MCA	Univ.El-Oued	Examineur

Promotion : 2022/2023

Remerciements

Remerciements et Gratitude : Nous exprimons nos remerciements à mes honorables professeurs de l'Université EL-OUED. Nous tenons à remercier notre encadreur **Dr. ABDELHAMID REHOUMA** et qui a suivi ce travail (mémoire) du début à la fin, notre président **Dr. DOUIB BACHIR** et notre examinateur **Dr. LETOUFA YACINE** nous remercions vivement nos familles **GUEHEF** , **HAMAITI** et il a été une bénédiction pour nous en tant que mentor et conseiller. Nous remercions d'abord et avant tout pour son acceptation de l'encadrement et également tous ceux qui m'ont rencontré avec un sourire et un mot gentil dans ce milieu universitaire et ailleurs.

Mes salutations, remerciements et gratitude à tous.

Table des matières

I	Formules intégrales de Cauchy	1
I.1	Propriétés générales des fonctions holomorphes	1
I.1.1	Plan complexe	1
I.1.2	Rappels sur la topologie du plan complexe	2
I.1.3	Dérivation complexe	2
I.1.4	Conditions de Cauchy Riemann	3
I.2	Intégration dans le domaine complexe (Théorème de Cauchy)	4
I.2.1	Intégrale curviligne complexe	4
I.2.2	Intégrale curviligne réelles	4
I.2.3	Relation entre Intégrale curviligne complexe et reelles	5
I.3	Formule de Green	5
I.4	La fonction harmonique conjuguée.	6
I.5	Notation de base sur les formules intégrales de Cauchy	7
I.5.1	Intégrales de Cauchy	7
I.5.2	Indice d'un lacet	11
I.6	Intégrales doubles complexes concideions l'intégrale	13
II	Formules intégrales de Green	1
II.1	Notions de base sur les formules intégrales de Green	1
II.1.1	Généralisation	1
II.1.2	intégrale double d'un fonction continue en fonction de le dérivée conjuge $\overline{\partial}f, \partial$ (Théorème de Mergelyan)	3
III	Applications	1
III.1	Transformation d'une intégrale double de surface sur le disque unite en intégrale de Cauchy	1
III.2	Meilleure approximation d'une fonction complexe par une suite des polynômes orthogonaux sur le disque unite	4
III.3	Formule de Stokes et formule de Cauchy avec l'utilisation de la fonction de Schawrz :	13
III.3.1	Équivalence de l'existence de la fonction de Schwarz et de l'identité en quadrature	14

* Notations générales

$\mathbb{R}$: corps des nombres réels.

D_r : disque unité .

$\|$: la norme associées aux produits scalaires.

$U \subset \mathbb{C}$: ouvert.

$Re f_1(x + iy)$: la réel de f .

$Im f_1(x + iy)$: imaginaire de f .

∂ : la dérivé paratial.

$\mathbb{H}$: espace de Hilbert.

Ind : indice .

Ω : est ouvert de $\mathbb{R}^\times$.

$\frac{\partial F}{\partial V}$: la dérivée normale extérieure sur la dérivée de V .

$\mathbb{X}$: espace de Hausdorff .

K : un sous ensemble compact .

G : un ouvert .

L^2 : l'espace des classes de fonctions de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dx .

$K \subseteq \Omega$: ensemble compact .

$A^2(\Omega)$: un espace de Hilbert séparable .

$\|\cdot\|$: norme .

$H(D)$: . espace des fonctions holomorphe

Δ : l'opérateur de Laplace .

L^p : l'espace des classes de fonctions de puissance p intégrable pour la mesure de Lebesgue dx .

$S(z)$: la fonction de Schwarz .

$D \subset \mathbb{C}$ un domaine .

$B^2(\mathbb{D})$: ensemble des fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ de carré intégrable sur $\mathbb{D}$.

* Introduction générale

Les nécessités de connaissances concernant la théorie des fonctions holomorphes d'une ou plusieurs variables complexes sont très nombreux, car c'est une théorie relativement ancienne et la recherche dans ce domaine des mathématiques est toujours très active. Ce mémoire peut être vu comme la première étape d'entrer la théorie des fonctions holomorphes d'une ou plusieurs variables complexes et surtout ce qui concerne le calcul de l'intégration des fonctions holomorphes le long d'un contour de Jordan rectifiable ou bien de l'intégration le long d'une courbe fermée. Donnons quelques explications à ce sujet. Les connaissances pour aborder la lecture de ce mémoire sont plutôt modestes. En ce qui concerne la topologie complexe du plan et rappels sur la topologie du plan ensuite dérivation complexe et les conditions de Cauchy Riemann on ne demande de connaître que les propriétés élémentaires des compacts et des connexes de $\mathbb{C}$. Pour l'intégration, on n'a utilisé que les propriétés élémentaires de l'intégrale au sens de Riemann et l'intégration des fonctions holomorphes le long d'une courbe fermée. Donnons un exemple : Soit :

$$f(z) = 1 + i - 2\bar{z}.$$

C'est pour ça nous avons divisé ce travail en trois parties. Le chapitre un constitue des révisions concernant les connaissances de bases qui sont bien connus dans le programme usuel de Licence mathématiques. On y traite les propriétés générales des fonctions holomorphes. Bien que ne présentant aucune difficulté, on obtient déjà des résultats sur la notion de la holomorphie ou bien la dérivabilité au cas des fonctions d'une variable complexe. Il est bien connu est fondamental qu'une fonction est dérivable (on dit aussi holomorphe) si et seulement si elle est localement développable en série entière. Dans ce chapitre 1, on utilise la théorie de Cauchy locale pour obtenir les principales propriétés des fonctions holomorphes ou mésomorphes. On y démontre, par exemple, la fameuse formule des résidus (dans des cas particuliers) qui permettra, et c'est parfois ce qui impressionne le lecteur, de calculer des intégrales le long d'un contour.. Le chapitre deux constitue des révisions concernant initiation de bases sur les formules de Green et la formule de Stokes et leurs relations avec la théorie de **Cauchy**. On y traite bien sûr dans le cas des fonctions holomorphes d'une variable complexe.

Le chapitre 3 complète la panoplie d'outils construits dans les chapitre 1 et 2 par deux sujets très importants pour les applications et sujets :

Sujet 1 :

Calcul d'intégrale double par rapport à la mesure de surface sur le disque unité de la module

au carré d'une fonction analytique régulière développable en série entière et leurs propriétés constructives .

Sujet 2 :

Meilleure approximation d'une fonction holomorphe sur le disque unité relativement à une suite des polynômes orthogonaux sur le disque unité et par rapport à la mesure de surface.

Sujet 3 :

Application de la formule de Stokes et la formule de Green et la formule de Cauchy de traiter le problème : Équivalence de l'existence de la fonction de Schwarz et de l'identité en quadrature de l'intégrale double d'une fonction complexe par rapport à la mesure de surface.

*Formules intégrales de Cauchy

I Formules intégrales de Cauchy

I.1 Propriétés générales des fonctions holomorphes

I.1.1 Plan complexe

Définition I.1 Le plan réel $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2. D'habitude, les points de $\mathbb{R}^2$ sont représentés par leurs coordonnées (x, y) dans la base canonique. Nous allons identifier $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ en identifiant un point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ au nombre complexe $x + iy$ de $\mathbb{C}$ dont parties réelle et imaginaire sont les coordonnées du point :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\rightarrow x + iy.\end{aligned}$$

En particulier, la norme du vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ s'identifie au module du nombre $(x, y) \in \mathbb{C}$.

Lemme I.1 Sous l'indentification ci-dessus, la multiplication par le nombre complexe $x + iy$ définit une similitude du plan. La matrice de cette similitude est

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}). \quad (\text{I.1})$$

Inversement, une telle similitude s'interprète comme la multiplication par un nombre complexe. La multiplication de nombres complexes correspond ainsi à la composition de similitudes du plan.

Démonstration. La base canonique de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel est $(1, i)$. La multiplication par $x + iy$ est $\mathbb{R}$ -linéaire et applique 1 sur $x + iy$ et i sur $-y + ix$. Sa matrice a donc la forme prétendue. Inversement, une telle matrice agit sur les points de $\mathbb{R}^2$ comme le fait la multiplication par $x + iy$ sur $\mathbb{C}$. Enfin, la multiplication complexe $(x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx')$ correspond bien au produit matriciel

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -(xy' + yx') \\ xy' + yx' & xx' - yy' \end{pmatrix}. \quad (\text{I.2})$$

■

I.1.2 Rappels sur la topologie du plan complexe

Comme C est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, $\mathbb{C}$ est muni d'une topologie canonique. Une partie U de $\mathbb{C}$ est ouverte pour cette topologie si, pour tout $z_0 \in U$, il existe un disque ouvert

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\} \quad (\text{I.3})$$

de rayon r , de centre z_0 , et contenu dans U . Il s'en suit que tout ouvert de $\mathbb{C}$ s'écrit comme réunion de disques ouverts.

Une partie A de $\mathbb{C}$ est fermée si son complémentaire $\mathbb{C} \setminus A$ est ouvert.

Une partie A de $\mathbb{C}$ est compacte si A est fermée et bornée.

Une partie A de $\mathbb{C}$ est connexe s'il n'existe pas de décomposition en deux parties non vides disjointes $A = A_1 \sqcup A_2$ telles que $A_1 = A \cap U_1$ et $A_2 = A \cap U_2$ pour deux ouverts U_1, U_2 de $\mathbb{C}$.

Une partie A de $\mathbb{C}$ est connexe par arcs si, pour tous $x, y \in A$, il existe une application continue $\phi : [0, 1] \rightarrow A$ telle que $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. Toute partie connexe par arcs est connexe. La réciproque est fautive en général. Cependant,

Lemme I.2 *Un ouvert de $\mathbb{C}$ est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.*

L'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A de $\mathbb{C}$ est la plus petite partie fermée de $\mathbb{C}$ contenant A . En particulier, l'adhérence du disque ouvert $D_r(z_0)$ est le disque fermé

$$\overline{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}.$$

On utilisera souvent que tout disque ouvert $D_r(z_0)$ contient un disque fermé $\overline{D}_s(z_0)$ de même centre avec un rayon s vérifiant $0 < s < r$.

I.1.3 Dérivation complexe

Définition I.2 *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $z_0 \in U$. On dit qu'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$ -dérivable ou holomorphe en z_0 si la limite*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, à quel cas elle sera notée $f'(z_0)$ ou $\frac{df}{dz}(z_0)$. On dit que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe (sur U) si f est holomorphe en tout point de U . La dérivée de f est alors notée

$$f' : U \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto f'(z) \quad (\text{I.4})$$

I.1.4 Conditions de Cauchy Riemann

Soit $f : U \mapsto \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes définie dans un ouvert U de $\mathbb{C}$. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ comme dans la section 1.1, on peut représenter f sous la forme :

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

de sorte que

$$f(x + iy) = f_1(x, y) + i f_2(x, y) \quad (\text{I.6})$$

respectivement

$$f_1(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) \quad (\text{I.7})$$

et

$$f_2(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy). \quad (\text{I.8})$$

On peut donc comparer la différentiabilité de f en (x_0, y_0) en tant que fonction de deux variables réelles avec la dérivabilité de f en $x_0 + iy_0$ en tant que fonction d'une variable complexe. Si f est différentiable en (x_0, y_0) , la différentielle

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (\text{I.9})$$

est une application $\mathbb{R}$ -linéaire, la “meilleure approximation $\mathbb{R}$ -linéaire” de f en (x_0, y_0) .

Si f est $\mathbb{C}$ -dérivable en $x_0 + iy_0$, la dérivée $f'(x_0 + iy_0)$ représente la “meilleure approximation $\mathbb{C}$ -linéaire” de f en $x_0 + iy_0$.

Proposition I.1 *Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe en $x_0 + iy_0 \in U$ si et seulement si f (en tant que fonction de deux variables réelles) est différentiable en (x_0, y_0) et la différentielle $Df(x_0, y_0)$ est une similitude du plan, i.e. les conditions de Cauchy Riemann sont satisfaites :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a

$$f'(x_0 + iy_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) + i \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Démonstration. La $\mathbb{C}$ -dérivabilité implique la différentiabilité. Inversement, la différentiabilité implique la $\mathbb{C}$ -dérivabilité à condition que la différentielle corresponde à la multiplication par

un nombre complexe ce qui, d'après le Lemme 1.1, est précisément le cas quand la différentielle est une similitude du plan, i.e. quand

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (\text{I.10})$$

Dans ce cas, la dérivée $f'(x_0 + iy_0)$ vaut $a + ib$.

I.2 Intégration dans le domaine complexe (Théorème de Cauchy)

I.2.1 Intégrale curviligne complexe

Définition I.3 Soit $f(z)$ une fonction continue en tout point d'une courbe C dont nous supposons la longueur finie, i.e. C sera supposée rectifiable.

Partageons C en n intervalles au moyen des points $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, arbitrairement choisis et posons $a = z_0, I = z_n$. Sur chaque arc joignant z_{k-1} à z_k [où k varie de 1 à n] choisissons un point ξ_k . Formons la somme

$$S_n = f(\xi_1)(z_1 - a) + f(\xi_2)(z_2 - z_1) + \dots + f(\xi_n)(b - z_{n-1}) \quad (\text{I.11})$$

En posant $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k$, ceci devient

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k \quad (\text{I.12})$$

Si l'on fait croître le nombre n des subdivisions de façon que la longueur $|\Delta z_k|$ de la plus grande des cordes tende vers zéro, alors la somme S_n , tend vers une limite indépendante du mode de subdivision et nous désignerons cette limite par

$$\int_a^b f(z)dz \quad \text{ou} \quad \int_C f(z)dz. \quad (\text{I.13})$$

Appelée intégrale curviligne complexe ou plus simplement intégrale curviligne de $f(z)$ le long de C , ou encore intégrale de $f(z)$ entre a et b , le long de C . Dans un tel cas $f(z)$ est dite intégrale se long de C . On notera que si $f(z)$ est analytique dans un ouvert connexe a et si C est une courbe appartenant à a alors $f(z)$ est certainement intégrable le long de C .

I.2.2 Intégrale curviligne réelles

Définition I.4 Si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des fonctions réelles de x et y , continues en tous les points d'une courbe C , l'intégrale curviligne de $Pdx + Qdy$ le long de C peut être définie d'une

manière semblable à celle indiquée ci-dessus et est notée

$$\int_C [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] \quad \text{ou} \quad \int_C Pdx + Qdy \quad (\text{I.14})$$

la deuxième notation étant utilisée par abréviation. Si C est continûment différentiable et a pour représentation paramétrique $x = \phi(t), y = \psi(t)$ ou $t_1 \leq t \leq t_2$, la valeur de (4) est donnée par

$$\int_{t_1}^{t_2} [P\phi(t), \psi(t)\phi'(t)dt + Q\psi(t), \psi(t)\psi'(t)dt]$$

On peut adapter le résultat au cas où C est continûment différentiable par morceaux

I.2.3 Relation entre Intégrale curviligne complexe et réelles

Définition I.5 Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u + iv$ l'intégrale curviligne complexe (3) peut être exprimé au moyen d'intégrales curvilignes réelles de la façon suivante

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Pour cette raison (5) est souvent prise comme définition de l'intégrale curviligne complexe.

I.3 Formule de Green

Définition I.6 Soit $u(x, y)$ et $v(x, y)$ des fonctions continues et à dérivées partielles continues dans un ouvert connexe $\mathfrak{R}$ et sur sa frontière $\mathbb{C}$. La formule de Green établit que

$$\oint_{\mathbb{C}} udx + vdy = \int_R \int \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy \quad (\text{I.16})$$

cette formule est à la fois vraie pour des ouverts simplement connexes ou multiplement connexes

Forme complexe de la formule de green .

Remarque I.1 $f = u + iv$

holomorphe : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\mathbb{C}$ est une contour fermée alors

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Preuve : En effet :

$$\begin{aligned} \int_C udx - vdy + i \int_C vdx - udy &= - \int_R \int \left(+\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \int_R \int \left(+\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy \\ &= 0. \end{aligned}$$

I.4 La fonction harmonique conjuguée.

Définition I.7 Si la fonction $u = u(x, y)$ est harmonique dans un domaine D , on peut lui associer une autre fonction $v = v(x, y)$ au moyen du système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (\text{I.17})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{I.18})$$

Théorème I.1 Si la fonction $u(x, y)$ harmonique donc elle est Laplacienne sur $D \subset \mathbb{C}$ alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (\text{I.19})$$

alors que trouve fonction $v(x, y)$ (i.e vérifié les conditions de Cauchy Riemann) telle que $f = u + iv$ fonction holomorphe sur $D \subset \mathbb{C}$ telle que :

$$v(x, y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt - \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(s, 0) ds \quad (\text{I.20})$$

Preuve : $u(x, y)$ harmonique donc elle accept conjugué harmonique $v(x, y)$ alors vérifiés les conditions de Cauchy Riemann :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

Complétons la première condition ci-dessus pour y alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= - \int_{0y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, t) dt + C'(x) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= - \int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, t) dt + C'(x) \end{aligned}$$

en intégrons pour y

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) + C'(x)$$

que

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) + C'(x) = 0$$

donc

$$C(x) = - \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(s, 0) ds$$

Et dessus

$$v(x, y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt - \frac{\partial u}{\partial y}(s, 0) ds$$

donc la forme (2) vrai.

Remarque I.2 Ce système d'équations est connu sous le nom d'équations différentielles de Cauchy Riemann et joue un rôle fondamental dans la théorie de la cartographie conforme. La fonction v définie par les équations (3.12) est harmonique en D

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

v est appelé le **conjugué harmonique** de u . Il convient de noter qu'en dérivant l'harmonicité de v , nous n'avons pas utilisé le fait que u est harmonique ; nous n'avons utilisé que l'existence de deux dérivées continues. En effet, il résulte facilement de (10) que deux fonctions u et v qui ont deux dérivées continues et sont reliées et nécessairement toutes les deux harmoniques.

Proposition I.2 Le fait que l'intégrale droite est indépendante de la courbe C et que sa valeur ne dépend que des bornes (x, y) et (x_0, y_0) se vérifie aussi directement. il s'ensuit que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

et c'est la condition bien connue d'indépendance d'une intégrale droite du chemin d'intégration, . Il est important de noter que la fonction harmonique conjuguée n'est déterminée qu'à une constante additive arbitraire qui joue le rôle d'une constante d'intégration en (11) et y était exprimée comme la valeur de la fonction v au point arbitraire (x_0, y_0) .

I.5 Notation de base sur les formules intégrales de Cauchy

I.5.1 Intégrales de Cauchy

Définition I.8 (Intégrales curvilignes dans le plan) Une application continue (resp. de classe C^1) $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée chemin continu (resp. de classe C^1). Un lacet est un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Plus généralement, un chemin (ou lacet) continu $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dit C^1 par morceaux s'il existe une subdivision finie $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{N-1} < a_N = b$ telle que les restrictions $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ soient de classe C^1 pour $0 \leq i \leq N$. Un chemin affine est donnée par

$$\gamma_{[x, y]} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto (1 - t)x + ty$$

pour deux points $x, y \in \mathbb{R}$. Ce chemin parcourt le segment $[x, y]$; il est de classe C^∞

Définition I.9 Soient $P, Q : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ et $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \rightarrow U$ un chemin de classe C^1 . Alors l'intégrale curviligne de la "forme différentielle" $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ le long de γ est définie par

$$\int_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy := \int_a^b (P(\gamma(t))\gamma_1'(t) + Q(\gamma(t))\gamma_2'(t))dt.$$

Définition I.10 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un chemin de classe C^1 . Alors l'intégrale de Cauchy de f le long de γ est définie par

$$\int_{\gamma} f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Ces deux définitions s'étendent aux chemins C^1 par morceaux en remplaçant l'intégrale par une somme finie d'intégrales selon la subdivision finie en chemins de classe C^1

Remarque 2.3. L'intégrale de Cauchy se ramène à deux intégrales curvilignes de la première espèce en séparant parties réelle et imaginaire

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} (f_1(x, y) + if_2(x, y))(dx + idy) \quad (\text{I.21})$$

$$= \int_{\gamma} f_1(x, y)dx - f_2(x, y)dy + \int_{\gamma} f_2(x, y)dx + f_1(x, y)dy \quad (\text{I.22})$$

Pour les calculs, il est en général préférable de ne pas effectuer cette séparation en parties réelles et imaginaire, mais de calculer la valeur de l'intégrale en explicitant une primitive de $(f \circ \gamma)\gamma'$. Si f possède elle-même une primitive F , alors la fonction $(f \circ \gamma)\gamma'$ admet comme primitive $F \circ \gamma$. Dans ce cas, si γ est un lacet, l'intégrale est nulle ! Un des premiers buts de ce cours est de montrer que si f est holomorphe sur un disque ouvert, alors f admet une primitive sur ce disque.

Exemple I.1 Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}^* : t \mapsto e^{it}$. Alors

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = [it]_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

Définition I.11 Soient $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Alors le chemin composé $\gamma_1\gamma_2 : [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$ est défini par

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a, b]; \\ \gamma_2(t) & \text{si } t \in [b, c]. \end{cases}$$

Le chemin opposé $\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est défini par

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t).$$

Lemme I.3 Avec les notations ci-dessus, on a pour toute fonction continue f :

$$(a) \int_{\gamma_1 \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz ;$$

$$(b) \int_{\bar{\gamma}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz ;$$

$$(c) \int_{\gamma \circ \phi} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz \text{ pour tout difféomorphisme } \phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$$

Démonstration. (a) suit de la règle de Chasles. (b) est immédiat. (c) est une conséquence de la formule de changement de variable :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \phi} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\phi(t))) (\gamma\phi)'(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\phi(t))) \gamma'(\phi(t)) \phi'(t) dt \\ &= \int_{\phi(\alpha)=a}^{\phi(\beta)=b} f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

Proposition I.3 (Green-Riemann pour un rectangle). Soient $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux fonctions de classe C^1 définies au voisinage d'un rectangle axial R dans $\mathbb{R}^{\neq}$. On suppose que le lacet ∂R qui parcourt le bord de R est orienté dans le sens positif. Alors

$$\int \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) = \int_{\partial R} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Démonstration. Nous supposons que $R = [x_0, y_0] \times [x_1, y_1]$ et que le lacet ∂R est issu de (x_0, y_0) comme ci-dessus. Néanmoins, le résultat reste valide pour un parcours du bord de R issu de n'importe lequel de ses quatre sommets à condition que le sens du parcours soit positif

$$\begin{aligned} \int \int_R \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy &= \int_{y_0}^{y_1} \left(\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{y_0}^{y_1} (Q(x_1, y) - Q(x_0, y)) dy \\ &= \int_{\partial R} Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} - \int \int_R \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy &= - \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (P(x, y_0) - P(x, y_1)) dx \\ &= \int_{\partial R} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Théorème I.2 (Cauchy). Soit $f : D_R(\omega) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un disque ouvert. Alors f admet une primitive complexe sur $D_R(\omega)$. En particulier, pour tout lacet γ dans $D_R(\omega)$,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Démonstration. On a déjà observé en (1.14) que l'existence d'une primitive de f entraîne la nullité de l'intégrale de Cauchy de f le long d'un lacet. Pour construire une primitive F de f on

Soit $z_0 \in D_R(\omega)$. On pose $F(z_0) = 0$. Pour tout $z \neq z_0$ appartenant à $D_R(\omega)$, le rectangle axial $R = R(x_0, x_1, y_0, y_1)$ tel que $z_0 = x_0 + iy_0$ et $z = x_1 + iy_1$ est entièrement contenu dans $D_R(\omega)$. Il définit un lacet unique $\partial R = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ issu de z_0 et orienté dans le sens positif. On a pour $f = f_1 + if_2$ (en supposant la continuité des dérivées partielles) :

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} f(z) dz &= \int_{\partial R} f_1(x, y) dx - f_2(x, y) dy + i \int_{\partial R} f_2(x, y) dx + f_1(x, y) dy \\ &= \int \int_R \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \right) dx dy + i \int \int_R \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \right) dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

la dernière égalité étant conséquence des conditions de Cauchy-Riemann satisfaites par f , cf. (1.5). On peut donc poser :

$$F(z) := \int_{\gamma_1 \gamma_2} f(z) dz = \int_{\overline{\gamma_4 \gamma_3}} f(z) dz.$$

La valeur $F(z)$ s'écrit $F(x + iy) = F_1(x, y) + iF_2(x, y)$ de sorte que, comme ci-dessus, $F_1(x, y)$ s'obtient comme l'intégrale de la forme différentielle $f_1(x, y) dx - f_2(x, y) dy$, et $F_2(x, y)$ s'obtient comme l'intégrale sur la forme différentielle $f_1(x, y) dy + f_2(x, y) dx$. Du fait que l'intégrale se calcule soit le long de $\gamma_1 \gamma_2$ soit le long de $\overline{\gamma_4 \gamma_3}$, on obtient

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -f_2 \quad (\text{I.23})$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = f_2, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = -f_1 \quad (\text{I.24})$$

La fonction F vérifie donc les conditions de Cauchy-Riemann et sa dérivée $F' = f$,

I.5.2 Indice d'un lacet

Définition I.12 L'indice d'un lacet (C^1 par morceaux) γ en $z_0 \in \mathbb{C}$ est donnée par l'intégrale

$$\text{Ind}_\gamma(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \quad (\text{ou } z_0 \in \text{Image}(\gamma))$$

Exemple I.2 Pour le lacet $\gamma_n : [0, 1] \mapsto e^{2\pi i n t} : , n \in \mathbb{Z} ,$ on obtient $\text{Ind}_\gamma(0) = n$

Théorème I.3 (Formule intégrale de Cauchy). Soit f une fonction holomorphe sur un disque $D_R(\omega)$. Alors pour tout lacet γ in $D_R(\omega)$ et tout $z_0 \in D_R(\omega) \setminus \text{Image}(\gamma)$ on a la formule :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \text{Ind}_\gamma(z_0) f(z_0). \quad (\text{I.25})$$

Démonstration. La fonction

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

est continue dans $D_R(\omega)$ est holomorphe en dehors de z_0 . permettent alors de conclure

Proposition I.4 Pour un lacet donné γ , l'indice $\text{Ind}_\gamma(-)$ est une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \text{Image}(\gamma)$ qui ne prend que des valeurs entières. En particulier, $\text{Ind}_\gamma(-)$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \text{Image}(\gamma)$.

Exemple I.3 Pour le lacet $\gamma : [0, 1] \mathbb{C} : t \mapsto e^{2\pi i t}$, on obtient $\text{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| < 1; \\ 0 & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$

Théorème I.4 (Cauchy) Soit $C(z_0, r)$ un cercle de centre z_0 et de rayon r est :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - z_0} = 1.$$

On pose $z = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, est $dz = ire^{it}dt$ et de lui c'est :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}} dt = 1.$$

Remarque : D bordure tricotée simplement C fermé supposons que $f(z)$ holomorphe sur D comment montrer que $\oint_C f(z)dz = 0$

En effet, que le formule de Green définie par 2_ime forme : D bordure tricotée simplement le contour fermé , C le cercle telle que la fonction $f = p + iq$ holomorphe sur D alors que :

$$\frac{\partial(i(f(z)))}{\partial x} = \frac{\partial(f(z))}{\partial y} = 0.$$

On appliquons les conditions de Cauchy Riemann :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

nous concluons

$$\frac{\partial(i(f(z)))}{\partial x} = \frac{\partial(i(p+iq))}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial x} + i\frac{\partial p}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial(f(z))}{\partial y} = \frac{\partial((p+iq))}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} + i\frac{\partial q}{\partial y} \quad (\text{I.26})$$

donc :

$$\frac{\partial(i(f(z)))}{\partial x} - \frac{\partial(f(z))}{\partial y} = 0. \quad (\text{I.27})$$

Par suite

$$\begin{aligned} \int_C f(z)(dx + idy) &= \int_C f(z)dx + if(z)dy \\ \int_D \int \left(\frac{\partial(i(f(z)))}{\partial x} - \frac{\partial(f(z))}{\partial y} \right) dx dy &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

Lemme I.4 1. $f = p + iq$ Holomorphe alors :

$$\frac{\partial(i(f(z)))}{\partial x} = \frac{\partial(f(z))}{\partial y} = 0$$

2. Que ce soit D simplement lié et dont le bord est un contour en cercle fermé C' de sorte que f holographique sur D :

$$\int_C f(z)dz = 0 \quad (\text{I.29})$$

Preuve : on applique les conditions de Cauchy Riemann :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

Nous concluons :

$$\frac{\partial(i(f(z)))}{\partial x} = \frac{\partial(i(p+iq))}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial x} + i\frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{I.30})$$

De la même manière pour y

$$\frac{\partial(f(z))}{\partial y} = \frac{\partial(p+iq)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + i\frac{\partial q}{\partial y} \quad (\text{I.31})$$

Et de lui

$$\frac{\partial(i(f(z)))}{\partial x} - \frac{\partial(f(z))}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.32})$$

Donc

$$\int_c f(z)(dx + idy) = \int_c f(z)dx + if(z)dy = \int \int_D \left(\frac{\partial(i(f(z)))}{\partial x} - \frac{\partial(f(z))}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (\text{I.33})$$

Il faut le prouver.

Proposition I.5 Soit $F(z, \bar{z})$ une fonction continue, à dérivées partielles continues dans un ouvert connexe $\mathfrak{R}$ et sur sa frontière C , et soit $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ des coordonnées complexes conjuguées. La formule de Green peut être écrite sous la forme complexe suivante

$$\oint_C F(z, \bar{z}) dz = 2i \int_R \int \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dA \quad (\text{I.34})$$

ou dA représente l'élément d'aire $dx dy$.

Remarque I.3

$$\int_C f(z, \bar{z}) dz = 2i \int_R \int \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy \quad (\text{I.35})$$

En posant $p + iq, z = x + iy, dz = dx + idy$ en appliquant la formule de Green :

Alors

$$\int_C f(z, \bar{z}) dz = 2i \int_R \int \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy$$

.

Exemple I.4 D qui est simplement conjugué et dont l'arête est un contour fermé C tel que la fonction $B(z, \bar{z})$ soit continue et accepte les dérivées partielles sur D de sorte que :

$\text{Area}(D)$ désigne une zone de D

$$\int \int_D dx dy = \text{Area}(D) = \frac{1}{2i} \int_C \bar{z} dz \quad (\text{I.36})$$

Preuve : On a

$$\text{Area}(D) = \int \int_D dx dy$$

D'autre part

$$\frac{1}{2i} \int_C \bar{z} dz = \frac{1}{2i} \int_C (x - iy)(dx + idy) = \frac{1}{2i} \int_C x dx + y dy + \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx$$

$$\int \int_D dx dy = \text{Area}(D)$$

Par exemple $C(0, r) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$ son aire est égale à πr^2 unité carrée et donc :

$$\frac{1}{2i} \int_{C(0, r)} \bar{z} dz = \pi r^2 \quad (\text{I.37})$$

I.6 Intégrales doubles complexes concideions l'intégrale

$$I = \int \int_{|z| \leq R} f(z, \bar{z}) dx dy, \quad z = x + iy$$

posons $z = re^{i\theta} = x + iy$

$$dxdy = r dr d\theta$$

$$0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^R f(re^{i\theta}, re^{-i\theta}) r dr d\theta \\ &= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}, re^{-i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

posons $w = re^{i\theta}$, $\frac{dw}{iw} = d\theta$, $\bar{w} = \frac{r^2}{w}$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R r dr \int_{|w|=r} f(w, \bar{w}) \frac{dw}{iw} \\ &= \int_0^R \left(\int_{|w|=1} f(w, \frac{r^2}{w}) \frac{dw}{iw} \right) r dr \end{aligned}$$

Théorème I.5 Soit $f(z)$ une fonction analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , soit a un point intérieur à C , alors

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (\text{I.38})$$

où le contour C est décrit dans le sens direct.

De même la n -ième dérivée de $f(z)$ en $z = a$ est donnée par

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{I.39})$$

Preuve :

La fonction $f(z)/(z-a)$ est analytique à l'intérieur de C et sur C sauf au point $z = a$. nous avons .

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (\text{I.40})$$

ou l'on peut prendre pour contour τ un cercle de rayon ϵ ou $z - a = \epsilon e^{i\theta}$ avec $0 \leq \theta < 2\pi$. De $z = a + \epsilon e^{i\theta}$, on tire $dz = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$, et l'intégrale du deuxième membre de (1) devient

$$\begin{aligned} \oint_\tau \frac{f(z)}{z-a} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \epsilon e^{i\theta}) i\epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} f(a + \epsilon e^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

On a .

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-a} dz = i \int_0^{2\pi} f(a + \epsilon e^{i\theta}) d\theta \quad (\text{I.41})$$

En prenant la limite des deux membres de (2) et en utilisant la continuité de $f(z)$, on obtient

$$\begin{aligned} \oint_c \frac{f(z)}{z-a} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(a + \epsilon e^{i\theta}) d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(a + \epsilon e^{i\theta}) d\theta = i \int_0^{2\pi} f(a) d\theta = 2\pi i f(a). \end{aligned}$$

On a donc le résultat demandé

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (\text{I.42})$$

Remarque I.4 *L'ancienne constitution (1) peut être considéré comme un cas particulier de (2) si l'on pose $0! = 1$.*

les constitution sont appelés formules intégrales de Cauchy et sont très remarquables car ils montrent que si une fonction $f(z)$ est connue sur la courbe fermée simple C , alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de C . Donc si une fonction de la variable complexe admet une dérivée première, i.e. est analytique, dans un ouvert simplement connexe $\Re$ toutes ses dérivées d'ordre supérieur existent dans $\Re$. Ceci n'est pas nécessairement vrai pour les fonctions de la variable réelle.

Corollaire : Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur d'un ouvert simplement connexe $\Re$ et sur sa frontière C , alors :

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \quad (\text{I.43})$$

Preuve :

si a et $a+h$ appartiennent à $\Re$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{z-(a+h)} - \frac{1}{z-a} \right\} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z) dz}{(z-a-h)(z-a)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz + \frac{h}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z) dz}{(z-a-h)(z-a)^2} \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

On obtient alors le résultat cherché en prenant la limite de cette expression quand $h \rightarrow 0$, il suffit alors de montrer que le dernier terme tend vers zéro.

Pour montrer cela nous utilisons le fait que si τ est un cercle de rayon ϵ centré en a et appartenant à $\mathcal{A}$ (voir Fig. 5-3), alors,

$$\begin{aligned} & + \frac{h}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2} \\ & = \frac{h}{2\pi i} \oint_\tau \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2} \end{aligned}$$

On choisit alors h suffisamment petit en valeur absolue pour que $a+h$ soit dans τ et que $|h| < \epsilon/2$; on a alors d'après le problème 7(c), Chapitre 1 et le fait que l'équation de τ est $|z-a| = \epsilon$,

$$|z-a-h| \geq |z-a| - |h| > \epsilon - \epsilon/2 = \epsilon/2$$

La fonction $f(z)$ étant analytique dans R , nous pouvons trouver un nombre positif M tel que $|f(z)| < M$. La longueur de τ est $2\pi\epsilon$, on en déduit

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \oint_\tau \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2} \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \frac{M(2\pi\epsilon)}{(\epsilon/2)(\epsilon^2)} = \frac{2|h|M}{\epsilon^2}$$

et il en résulte que le premier membre tend vers zéro quand $h \rightarrow 0$, ce qui complète la démonstration. Il est intéressant de remarquer que le résultat est équivalent à

$$\frac{d}{da} f(a) = \frac{d}{da} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_\tau \frac{f(z)}{z-a} dz \right\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\tau \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{f(z)}{z-a} \right\} dz.$$

qui est une extension aux intégrales curvilignes de la règle de dérivation sous le signe $\oint$.

Théorème I.6 *sous les mêmes conditions ,*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\tau \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

Preuve : Les cas $n = 0$ et 1 s'obtiennent à partir respectivement à condition de poser $f^{(0)}(a) = f(a)$ et $0! = 1$.

Pour démontrer la formule dans le cas $n = 2$, on utilise le problème 2 où a et $a+h$ appartiennent à R ; on obtient

$$\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\tau \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{(z-a-h)^2} - \frac{1}{(z-a)^2} \right\} f(z) dz \quad (\text{I.45})$$

$$= \frac{2!}{2\pi i} \oint_\tau \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz + \frac{h}{2\pi i} \oint_\tau \frac{3(z-a) - 2h}{(z-a-h)^2(z-a)^3} f(z) dz \quad (\text{I.46})$$

On en déduit le résultat cherché en prenant la limite de cette expression quand $h \rightarrow 0$, il suffit alors de démontrer que le dernier terme tend vers zéro. La démonstration est semblable à celle du problème 2, on utilise le fait que les intégrales sur C et sur Γ sont égales et l'on a

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{3(z-a) - 2h}{(z-a-h)^2(z-a)^3} f(z) dz \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \frac{M(2\pi\epsilon)}{(\epsilon/2)^2(\epsilon^3)} = \frac{4|h|M}{\epsilon^4}$$

car il existe M tel que $|3(z-a) - 2hf(z)| < M$.

De la même façon on peut établir le résultat pour $n = 3, 4, \dots$.

Le résultat est équivalent à

$$\frac{d^n}{da^n} f(a) = \frac{d^n}{da^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d^n}{da^n} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Théorème I.7 *La formule intégrale de Cauchy pour un ouvert multiplement connexe.*

Preuve : Nous donnons ici une démonstration dans le cas de l'ouvert multiplement connexe $\mathfrak{R}$ limité par les courbes fermées C_1 et C_2 . On peut étendre aisément cette démonstration à d'autres types d'ouvert multiplement connexes.

Considérons un cercle Γ centré en un point a de $\mathfrak{R}$, tel que Γ appartienne à $\mathfrak{R}$. Soit $\mathfrak{R}'$ l'ensemble des points de $\mathfrak{R}$ extérieures à Γ . La fonction $\frac{f(z)}{z-a}$ est analytique dans $\mathfrak{R}'$ et sur sa frontière. Le théorème de Cauchy pour les ouverts multiplement connexes s'écrit alors

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0$$

Mais d'après la formule intégrale de Cauchy pour les ouverts simplement connexes, on a

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

si bien que de

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Donc si C représente la frontière totale de $\mathfrak{R}$ (décrite de telle façon qu'un observateur parcourant C a toujours $\mathfrak{R}$ à sa gauche) on peut écrire (3) sous la forme

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

De la même façon on peut montrer que les autres formules intégrales de Cauchy

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

sont encore valables pour des ouverts multiplement connexes

Théorème I.8 *Théorème de Morea (la réciproque du théorème de Cauchy)*

Définition si $f(z) = r$ est continue dans un ouvert simplement connexe $\mathbb{R}$ et si

$$\oint_c f(z)dz = 0$$

sur toute courbe fermée simple de $\mathbb{R}$, alors $f(z)$ est analytique dans $\mathbb{R}$.

Preuve : Si $\oint_c f(z)dz = 0$ quelle que soit C , on en déduit que $F(z) = \int_a^z f(z)dz$ ne dépend pas du chemin joignant a et z , pourvu que ce chemin appartienne à $\mathbb{R}$.

Il résulte que $F(z)$ est analytique dans $\mathbb{R}$ et que $F'(z) = f(z)$. Cependant, $F'(z)$ est également analytique dès que $F(z)$ l'est. La fonction $f(z)$ est donc analytique dans $\mathbb{R}$.

Théorème I.9 si $f(z)$ est intégrable le long d'une courbe C de longueur finie L , et s'il existe un nombre positif M tel que $|f(z)| \leq M$ sur C , alors

$$\left| \int_c f(z)dz \right| \leq ML$$

Preuve : Par définition :

$$\int_c f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k \quad (\text{I.47})$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k \right| &\leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| |\Delta z_k| \\ &\leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \\ &\leq ML \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $|f(z)| \leq M$ pour tous les points z de C et que $\sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$ représente la somme des longueurs des cordes joignant les points z_{k-1} et z_k (où $k = 1, 2, \dots, n$), cette somme étant inférieure ou égale à la longueur de C .

On obtient alors le résultat demandé en prenant la limite des deux membres de (2) et en tenant compte de (1).

On peut montrer plus généralement que

$$\left| \int_c f(z)dz \right| \leq \int_c |f(z)| |dz|$$

Théorème I.10 Inégalité de Cauchy

Si $f(z)$ est une fonction analytique à l'intérieur du cercle C d'équation $|z - a| = r$, et sur C , l'inégalité de Cauchy

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où M désigne une constante telle que $|f(z)| < M$.

Preuve :

On a d'après les formules intégrales de Cauchy

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

puisque $|z - a| = r$ sur C et que la longueur de C est $2\pi r$.

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M \cdot n!}{r^n}.$$

Théorème I.11 théorème de Liouville

Si quel que soit z dans le plan complexe,

(i) $f(z)$ est analytique

(ii) $f(z)$ est bornée [i.e. on peut trouver une constante M telle que $|f(z)| < M$] alors $f(z)$ est une constante.

Preuve : Soit a et b deux points quelconques du plan de la variable z .

Considérons le cercle C de rayon r centré en a et contenant le point b

On a d'après la formule intégrale de Cauchy

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - b)} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz \quad (\text{I.48})$$

$$= \frac{b - a}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - b)(z - a)}. \quad (\text{I.49})$$

D'autre part

$$|z - a| = r, \quad |z - b| = |z - a + a - b| \geq |z - a| - |a - b| = r - |a - b| \geq r/2$$

si l'on choisit r suffisamment grand pour que $|a - b| < r/2$. Alors tenant compte de $|f(r)| < M$ et de ce que la longueur de C est $2\pi r$, on a

$$|f(b) - f(a)| = \frac{|b - a|}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - b)(z - a)} \right| \leq \frac{|b - a| M (2\pi r)}{2\pi (r/2) r} = \frac{2|b - a| M}{r}$$

Faisant tendre r vers ∞ on voit alors que $|f(b) - f(a)| = 0$ soit $f(b) = f(a)$ ce qui montre que $f(z)$ est une autre méthode. En posant $n = 1$ dans le problème 8 et en remplaçant a par z , on a

$$|f'(z)| \leq M/r.$$

Faisant tendre r vers ∞ , on en déduit que $|f'(z)| = 0$ donc que $f'(z) = 0$. La fonction $f(z)$ est donc constante ce qui démontre le théorème.

Théorème I.12 (Theoreme de gauss sur la valeur moyenne) Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un cercle C centré en a , et sur C . le théorème de Gauss sur la valeur moyenne : la moyenne des valeurs de $f(z)$ sur C est $f(a)$.

Preuve : D'après la formule intégrale de Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Si C a pour rayon r , l'équation de C est $|z-a| = r$ ou $z = a + re^{i\theta}$. Donc (1) devient

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta}) ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

qui est le résultat demandé.

Théorème I.13 (Théorème de l'argument) Soit $f(z)$ une fonction analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , l'exception d'un pôle $z = \alpha$ d'ordre (de multiplicité) p , intérieur à C . Supposons également que dans C , $f(z)$ a un seul zéro $z = \beta$ d'ordre (de multiplicité) n et aucun zéro sur C .

alors que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n - p.$$

Preuve :

Soit C_1 et Γ_1 deux cercles extérieurs l'un à l'autre situés dans C , et contenant respectivement $z = \alpha$ et $z = \beta$. Alors

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (\text{I.50})$$

Le point $z = \alpha$ étant un pôle d'ordre P

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-\alpha)^p} \quad (\text{I.51})$$

où $F(z)$ est analytique et différente de zéro dans et sur C_1 . En prenant la dérivée logarithmique de (2) on trouve

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{p}{z - \alpha} \quad (\text{I.52})$$

Si bien que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{F'(z)}{F(z)} dz + \frac{p}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{dz}{z - \alpha} = 0 - p = -p \quad (\text{I.53})$$

Le point $z = \beta$ étant un zéro d'ordre n

$$f(z) = (z - \beta)^n G(z) \quad (\text{I.54})$$

où $G(z)$ est analytique et différente de zéro dans et sur Γ_1 .

Par dérivation logarithmique on obtient

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - \beta} + \frac{G'(z)}{G(z)} \quad (\text{I.55})$$

Si bien que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{n}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{dz}{z - \beta} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{G'(z)}{G(z)} dz = n \quad (\text{I.56})$$

Dans ces conditions (1), (4) et (7) donnent le résultat demandé

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n - p \quad (\text{I.57})$$

Définition I.13 Soit $f(z)$ une fonction analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , à l'exception d'un nombre fini de poles intérieurs à C . On suppose que $f(z) \neq 0$ sur C . Si N et P sont respectivement le nombre de zéros et de poles de $f(z)$ intérieurs à C comptés avec leur ordre de multiplicité, On a

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P \quad (\text{I.58})$$

Preuve : On désigne respectivement par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ les poles et les zéros de $f(z)$ situés à l'intérieur de C et l'on suppose que les ordres de multiplicité sont respectivement $p_1, p_2, \dots, p_j$ et $n_1, n_2, \dots, n_k$.

On entoure chaque pole et chaque zéro par des cercles ne se recouvrant pas $C_1, C_2, \dots, C_j$ et

$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$. Ceci peut toujours être réalisé car les pôles et les zéros sont isolés.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{r=1}^k \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \sum_{r=1}^j \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
 &= \sum_{r=1}^j n_r - \sum_{r=1}^k p_r \\
 &= N - P.
 \end{aligned}$$

Théorème I.14 (Théorème de Rouché) Si $f(z)$ et $g(z)$ sont analytiques à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , si de plus $|g(z)| < |f(z)|$ sur C , alors $f(z) + g(z)$ et $f(z)$ ont le même nombre de zéros dans C .

Preuve : Soit $F(z) = g(z)/f(z)$ et donc $g(z) = f(z)F(z)$ ou $g = fF$. Alors si N_1 et N_2 désignent respectivement le nombre de zéros intérieur à C de $f + g$ et f , on, utilisant le fait que ces fonctions n'ont pas de pôles à l'intérieur de C .

$$N_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f' + g'}{f + g} dz, \quad N_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'}{f} dz$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 N_1 - N_2 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f' + f'F + fF'}{f + fF} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'}{f} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(1 + F) + fF'}{f(1 + F)} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'}{f} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'}{f} + \frac{F'}{1 + F} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'}{f} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F'}{1 + F} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C F'(1 - F + F^2 - F^3 + \dots) dz \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Utiliser le fait $|f| < 1$ sur C si bien que la série est uniformément convergente sur C et l'intégration terme à terme donne la valeur zéro. On a donc $N_1 = N_2$ ainsi qu'il était demandé.

$$\int_C 1 \frac{f'}{f} = Z(f) - P(f) \quad (\text{I.59})$$

$$\int_C g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^m n_i g(\alpha_i) - \sum_{j=1}^l p_j g(w_j) \quad (\text{I.60})$$

$\alpha_1 \dots \alpha_m$ d'ordre $n_1 \dots n_m$

$w_1 \dots w_l$ d'ordre $p_1 \dots p_l$.

Preuve :

$$(\log f)' = \frac{f'}{f} \quad (\text{I.61})$$

$$= \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{z - \alpha_i} - \sum_{j=1}^l \frac{p_j}{z - w_j}$$

$\Rightarrow$

$$g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^m \frac{n_i g(z)}{z - \alpha_i} - \sum_{j=1}^l \frac{p_j g(z)}{z - w_j} \quad (\text{I.62})$$

Exemple I.5 utiliser le théorème de Rouché pour démontrer que tout polynôme de degré n a exactement n zéros (théorème fondamental de l'algèbre) :

Soit $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ le polynôme considéré avec $a_n \neq 0$. On pose $f(z) = a_n z^n$ et $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$.

Si C désigne un cercle centré à l'origine et ayant pour rayon $r > 1$, on a sur C

Application sur les formules de Cauchy soit $z_1, z_2, \dots, z_n$ des nombres complexes situés à l'intérieur de cercle unité $\{|z| \leq 1\}$

$$I = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(z - z_p)(\bar{z}_p - \bar{z}_q)}, \quad z = e^{i\theta} \quad (\text{I.63})$$

tq : $0 \leq p, q \leq n$.

$$\frac{dz}{iz} = d\theta, \quad |z| = 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

alors

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{(z - z_p)\left(\frac{1}{z} - \bar{z}_q\right)} \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z - z_p)(1 - z\bar{z}_q)} \\ &= -\frac{1}{1 - z_p \bar{z}_q} \\ &= \frac{1}{z_p \bar{z}_q - 1} \end{aligned}$$

Considérons l'intégrale

$$J_{p,q} = -\frac{1}{\pi} \int \int_{|z|<1} \frac{dxdy}{(z - z_p)(\bar{z}_p - \bar{z}_q)}, \quad z = x + iy$$

$$z = re^{i\theta} = x + iy, \quad dxdy = r dr d\theta, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

alors

$$\begin{aligned} J_{p,q} &= - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{(re^{i\theta} - z_p)(re^{-i\theta} - \bar{z}_q)} \\ &= - \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(re^{i\theta} - z_p)(re^{-i\theta} - \bar{z}_q)} \end{aligned}$$

on pose $W = e^{i\theta}$, $dw = iwd\theta$, $|w| = 1$

Alors

$$J_{p,q} = - \int_0^1 r dr \int_{|w|=1} \frac{\frac{dw}{iw}}{(rw - z_p)(\frac{r}{w} - \bar{z}_q)}$$

Mais

$$\begin{aligned} -\frac{1}{i} \int_{|w|=1} \frac{dw}{(rw - z_p)(r - w\bar{z}_q)} &= \frac{2\pi}{r} \frac{-1}{r - \frac{z_p\bar{z}_q}{r}} \\ &= \frac{2\pi}{-r^2 + z_p\bar{z}_q} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} J_{p,q} &= 2\pi \int_0^1 \frac{r dr}{-r^2 + z_p\bar{z}_q} \\ &= -\pi \log(z_p\bar{z}_q - 1)|_0^1 \\ &= \pi \log \frac{z_p\bar{z}_q}{z_p\bar{z}_q - 1} \\ \Rightarrow \sum_{p,q=0}^{n-1} J_{p,q} &= \pi \log \prod_{p,q=0}^{n-1} \frac{z_p\bar{z}_q}{z_p\bar{z}_q - 1} \\ &= \pi \log \frac{|z_0 z_1 \dots z_{p-1}|^{2n}}{\frac{n-1}{\pi} (z_p\bar{z}_q - 1)} \end{aligned}$$

* *Formules intégrales de Green*

II Formules intégrales de Green

II.1 Notions de base sur les formules intégrales de Green

II.1.1 Généralisation

Définition II.1 *Le résultat analogue en deux dimensions connu sous le nom de théorème de **Gauss** est le suivant : Dans les fonctions $p(x, y)$ et $q(x, y)$ sont continues et ont des dérivées premières partielles continues dans la fermeture d'un domaine D délimité par une courbe lisse par morceaux Γ alors :*

$$\int \int_D p_x(x, y) + q_y(x, y) dx dy = \int_{\Gamma} p(x, y) dy - q(x, y) dx. \quad (\text{II.1})$$

où l'intégrale de droite est une intégrale linéaire prolongée sur le bord Γ de D dans le sens positif, c'est-à-dire de telle sorte que l'intérieur du bord parcouru.

L'intégrale droite du coté droit de (1) est définie par l'intégrale ordinaire

$$\int_{t_1}^{t_2} [p(x, y) \frac{\partial y}{\partial t} - q(x, y) \frac{\partial x}{\partial t}] dt. \quad (\text{II.2})$$

où

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad (\text{II.3})$$

est une représentation paramétrique de la courbe Γ . Nous omettons ici la preuve du théorème de **Gauss** puisqu'elle peut être trouvée dans n'importe quel texte sur le calcul avancé.

Considérons maintenant une fonction $u(x, y)$ qui a des dérivées partielles premières continues en $D + \Gamma$ et une fonction $v(x, y)$ qui y a des dérivées partielles continues du premier et du second ordre. Les fonctions

$$p(x, y) = u \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad q(x, y) = u \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (\text{II.4})$$

satisfera alors les hypothèses du théorème de **Gauss**. En vue de

$$p_x = \frac{\partial}{\partial x} (u \frac{\partial v}{\partial x}) = uv_{xx} + u_x v_x, \quad (\text{II.5})$$

$$q_y = \frac{\partial}{\partial y} (u \frac{\partial v}{\partial y}) = uv_{yy} + u_y v_y, \quad (\text{II.6})$$

il résulte de (2) que

$$\int_D \int [uv_{xx} + u_x v_x + uv_{yy} + u_y v_y] dx dy = \int_{\Gamma} [uv_x dy - uv_y dx]$$

ou

$$\int_D \int u(v_{xx} + v_{yy}) dx dy + \int_D \int (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = \int_{\Gamma} u[v_x dy - v_y dx]. \quad (\text{II.7})$$

Proposition II.1 *L'intégrale linéaire du côté droit de (2) peut être écrite sous une forme plus simple si nous introduisons la différenciation dans la direction de la normale pointant vers l'extérieur, notée d/dn . Par les règles de différenciation partielle*

$$\frac{\partial v}{\partial n} = v_x \cos(x, n) + v_y \cos(y, n).$$

où (x, n) et (y, n) désignent les angles entre la normale pointant vers l'extérieur et les axes x et y positifs, respectivement. Puisque les cosinus directeurs de la tangente sont dx/ds et dy/ds , où s est le paramètre de longueur d'arc, et la normale extérieure est obtenue en tournant la tangente dans le sens des aiguilles d'une montre de $\frac{1}{2}\pi$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \cos(x, n) &= \frac{dy}{ds} \\ \cos(y, n) &= -\frac{dx}{ds} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial v}{\partial n} ds = v_x dy - v_y dx$$

En utilisant cette identité et l'abréviation $v_{xx} + v_{yy} = \Delta v$, on peut enfin mettre (2) sous la forme

$$\int_D \int u \Delta v dx dy + \int_D \int (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} ds. \quad (\text{II.8})$$

Cette identité, qui est d'une importance fondamentale dans la théorie des fonctions harmoniques, est connue sous le nom de **formule de Green**; les noms identité de Green et théorème de Green sont également utilisés. Parfois, (4) est appelée **première formule de Green**, pour la distinguer d'une autre formule la **deuxième formule de Green** - qui est une conséquence immédiate de (4). Si $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont supposés posséder des dérivées premières et secondes continues, les rôles de ces deux fonctions en (4) peuvent être interverties.

Ce faisant, nous obtenons la formule d'accompagnement

$$\int_D \int v \Delta u dx dy + \int_D \int (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds. \quad (\text{II.9})$$

Si on soustrait cette formule de (4), on arrive à la deuxième formule de Green

$$\int_D \int (u\Delta v - v\Delta u) dx dy = \int_\Gamma (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) ds. \quad (\text{II.10})$$

(4) et (5) sont généralement appelés formule de Green.

II.1.2 intégrale double d'une fonction continue en fonction de la dérivée conjuguée $\bar{\partial}f, \partial$ (Théorème de Mergelyan)

Théorème II.1 Une formule de représentation

Dans la preuve du théorème de Mergelyan, des fonctions non analytiques apparaissent, qui doivent être

représentées par une formule intégrale avec le noyau de Cauchy. Supposons maintenant que G est un ouvert dans $\mathbb{R}^2$ et $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ est continûment dérivable dans G . On introduit deux opérateurs différentiels :

$$\partial f := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \bar{\partial} f := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

ils associent également G à $\mathbb{C}$. Si nous écrivons $f = u + iv$, alors

$$\bar{\partial} f = 0 \Leftrightarrow u_x = v_y, u_y = -v_x \Leftrightarrow f \text{ analytique dans } G.$$

Si tel est le cas, alors $f'(z) = (\partial f)(z)$.

La formule de représentation suivante est parfois appelée formule de Pompéi.

Théorème II.2 *Supposons que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ est continûment dérivable dans $\mathbb{R}^2$ et à support compact. Alors*

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\bar{\partial} f)(\xi)}{\xi - z} dm_\xi \quad (\text{II.11})$$

pour tout $z \in \mathbb{R}^2$.

Preuve : Nous substituons $\xi = z + re^{i\phi}$ au $z \in \mathbb{R}^2$ fixe et obtenons $f(\xi) = f(z + re^{i\phi}) = F(r, \phi)$.

Par la règle de la chaîne, on trouve que

$$(\bar{\partial} f)(\xi) = \frac{1}{2} e^{i\phi} (F_r + \frac{i}{r} F_\phi)$$

Donc le membre de droite de (2,2) est la limite ($\epsilon \rightarrow 0$) de

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{r=\epsilon}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} (F_r + \frac{i}{r} F_{\phi}) d\phi dr$$

Puisque F en fonction de ϕ , a une période 2π , il s'ensuit que $\int F_{\phi} d\phi = 0$.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} F(\epsilon, \phi) d\phi = f(z),$$

parce que $F(\epsilon, \phi) \Rightarrow f(z)$ ($\epsilon \rightarrow 0$).

Théorème II.3 *Supposons que f est continue dans R^2 et que g est continûment dérivable dans R^2 et à support compact t_g ; laisser*

$$f_g(z) := \frac{1}{\pi} \int \int_{R^2} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} (\bar{\partial}g)(\xi) dm_{\xi} \quad (z \in R^2) \quad (\text{II.12})$$

alors

a) f_g admet la représentation

$$f_g(z) := f(z)g(z) + \frac{1}{\pi} \int \int_{R^2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} (\bar{\partial}g)(\xi) dm_{\xi} \quad (z \in R^2) \quad (\text{II.13})$$

b) f_g est continue dans R^2 , et $f_g(z) \rightarrow 0$ pour $z \rightarrow \infty$;

c) f_g est analytique dans t_g^c

d) si f est analytique dans G , alors f_g l'est aussi;

e) si le support t_g , de g a un diamètre $\leq \delta$, alors

$$\|f_g\|_{R^2} \leq 2\delta\omega_f(\delta)\|\bar{\partial}g\|_{R^2}$$

Preuve : a) Cela découle de la formule de représentation (2.2), appliquée à g .

b) Si on écrit $\zeta = z - u$ dans (2.4), alors le second terme devient $\int \int F(z - u)u^{-1} dm_u$, où F est continue dans R^2 et à support compact. De là découle la continuité de f_g , dans R^2 ; implique que $f_g(z) \rightarrow 0$ comme $z \rightarrow \infty$

c) Pour $z \in t_g$ plus de $f_g(z) = \frac{1}{\pi} \int \int \frac{f(\xi)}{\xi - z} (\bar{\partial}g)(\xi) dm_{\xi}$, où l'intégrale il est s'ensuit que f_g , est analytique en t_g^c . Car b), f_g , est même analytique ∞

d) Pour cette partie on forme $[f_g(z+h) - f_g(z)]/h$ et évalue la limite comme $h \rightarrow 0$ ($h \in C; z \in G$). Le théorème de Lebesgue doit être appliqué.

e) Considérant c), b), et le principe du maximum, on voit que $\|f_g\|_{R^2}$ est assumé pour certains. $z_0 \in t_g$. Mais alors (3.3) implique

$$|f_g(z_0)| \leq \frac{1}{\pi} \omega_f(\delta) \|\bar{\partial}g\|_{R^2} \int_{t_g} \int \frac{dm\xi}{|\xi - z_0|}$$

et l'intégrale ($\xi = z_0 + re^{i\phi}$) est limitée en grandeur par $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\delta} dr d\phi = 2\pi\delta$

Proposition II.2 Si $\partial/\partial n$ et $\partial/\partial s$ dénotent Écrire à

différenciations par rapport à la direction n positive et à la direction s positive, respectivement, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x, n) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(y, n), \quad (\text{II.14})$$

où (x, n) et (y, n) sont les angles entre les positifs indiqués. De la même manière,

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos(x, s) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(y, s),$$

Preuve : Depuis, $(x, n) = (y, s)$ et $(x, s) + (y, n) = \pi$, cela peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial x} \cos(y, n) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(x, n),$$

soit, compte tenu des équations de Cauchy Riemann ,

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial y} \cos(y, n) + \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x, n).$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad (\text{II.15})$$

qui est la forme générale recherchée des équations de Cauchy Riemann , peut aussi être mise sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad (\text{II.16})$$

qui découle de l'observation que l'orientation relative des directions n et s est inversée si les directions positive et négative de n sont interverties. Une comparaison de (2.10) et (2.11) fait d'ailleurs ressortir le fait que la relation entre les fonctions u et v n'est pas symétrique Si v est le conjugué harmonique de u , alors u , et non v , est le conjugué harmonique de v .

Remarque II.1 (2.10) peut être utilisé pour calculer le conjugué harmonique d'une fonction harmonique donnée u . Si C est une courbe lisse reliant deux points (x, y) et (x_0, y_0) et s le paramètre de longueur d'arc de cette courbe, alors

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = \int_{s_0}^s \frac{\partial v}{\partial s} ds,$$

où s et s_0 sont les valeurs des paramètres correspondant aux points considérés. Il résulte donc de (2.10) que

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + \int_{s_0}^s \frac{\partial v}{\partial s} ds \quad (\text{II.17})$$

Il est laissé au lecteur, en exercice, de montrer que (2.12) est nécessairement équivalent à (11). Dans une application pratique de (2.12), la courbe C sera bien entendu choisie de manière à rendre le calcul de la dérivée normale de u aussi simple que possible. À titre d'exemple, considérons la fonction harmonique $u = \log r$, où r, θ sont des coordonnées polaires. En choisissant les courbes C comme de cercle $rcs = \text{const}$ nous avons $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ et $ds = r d\theta$. Si

$$v = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{r} r d\theta + \text{const.} = \theta,$$

où une valeur appropriée de la constante a été prise. On trouve donc que l'angle θ est le Conjugué harmonique de $\log r$. (En ce qui concerne θ étant une fonction harmonique, comparez l'exercice 2, section 2.).

Il est à peine besoin de souligner que la région de convergence de (2.13') est identique à celle de (2.13).

Nous utilisons ensuite (2.10) pour montrer que le problème de Neumann de la section précédente est équivalent à un problème de Dirichlet convenablement posé. Si l'on veut construire une fonction harmonique v qui, sur la frontière Γ d'un domaine D doucement borné, vérifie

$$\frac{\partial v}{\partial n} = p(s), \quad (\text{II.18})$$

où $p(s)$ est une fonction continue par morceaux du paramètre de longueur d'arc s , on procède comme suit : On définit une fonction $q(s)$ par

$$q(s) = \int_{s_0}^s p(s) ds, \quad (\text{II.19})$$

où s_0 correspond à un point fixe arbitraire de Γ . Ensuite, nous construisons une fonction harmonique u qui a les valeurs limites $-q(s)$ sur Γ , c'est-à-dire

$$u(z) = -q(s)$$

$z(s) \in \Gamma$, par (2.15), on a

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -p(s)$$

sur Γ . Si v désigne le conjugué harmonique de u , il résulte donc de (2.11) que

$$\frac{\partial v}{\partial n} = p(s),$$

ce qui montre que la fonction v résout le problème de Neumann en équation.

On notera que, conformément à (9*), la fonction $p(s)$ doit satisfaire la condition

$$\int_{\Gamma} p(s) ds = 0.$$

Si ce n'était pas le cas, la fonction $q(s)$ de (2.15) n'aurait pas une valeur unique.

Proposition II.3 (la formule de Green) : dans la vérité que la formule de Green et définit par la forme suivante :

Soit D simplement connexe dont l'arête est le contour du cercle fermé C tel que la fonction $f = p + iq$ holomorphe soit sur D donc :

$$\oint_C p(x, y) dx + q(x, y) dy = \int \int_D \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx dy. \quad (\text{II.20})$$

La première intégrale est courbure tandis que la seconde intégrale est aire.

Exemple II.1 Le disque de rayon R . $D = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ dont l'arête est le cercle : $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}$

Nous résumons la loi de zone comme suit

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

$$dx = -r \sin \theta d\theta, \quad dy = r \cos \theta d\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R.$$

$$\oint_C 2y dx + 3x dy = \int \int_D dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

Proposition II.4 (proposition de Green) Le disque dont le rayon est R . $D = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ dont l'arête est le cercle $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}$ de sorte que la fonction holomorphe $f = p + iq$ est sur D alors :

$$\oint_C p(x, y) \left(\frac{\partial q}{\partial x} dx - \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) = - \int \int_D p(x, y) \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx dy. \quad (\text{II.21})$$

Preuve : Évidemment.

$$\oint_C p(x, y) \left(\frac{\partial q}{\partial y} dx - \frac{\partial q}{\partial x} dy \right) = \oint_C p(x, y) \frac{\partial q}{\partial y} dx - p(x, y) \frac{\partial q}{\partial x} dy \quad (\text{II.22})$$

Ensuite on applique la constitution du premier époux. on a :

$$\frac{\partial q}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial q}{\partial x} \right) - \frac{\partial q}{\partial y} \left(p(x, y) \frac{\partial q}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} \quad (\text{II.23})$$

Exemple II.2 Le disque dont le rayon est r . $D = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2\}$ dont l'arête est le cercle $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$

our calculer la valeur de l'intégrale double : $\int \int_D (4x^3 - 2xy) dx dy$ Nous résumons la loi de zone comme suit :

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta.$$

$$dx = -r \sin \theta d\theta \quad , \quad dy = r \cos \theta d\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\oint_C p(x, y) dx + q(x, y) dy = \int \int_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{II.24})$$

Donc

$$\int \int_D (4x^3 - 2xy) dx dy = \oint_C xy^2 dx + x^4 dy = -r^4 \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^3 \theta d\theta + r^5 \int_0^{2\pi} \cos^5 \theta d\theta \quad (\text{II.25})$$

Le lecteur peut maintenant compléter le récit

Exemple II.3 L'ellipse remplie $D = \{(x, y) : 0 \leq 9x^2 + 8y^2 \leq 72\}$ dont le bord est l'ellipse : $C = \{(x, y) : 9x^2 + 8y^2 = 72\}$

our calculer la valeur de l'intégrale double : $\int \int_D (4x^3 - 2xy) dx dy$ Nous résumons la loi de zone comme suit :

$$x = 2\sqrt{2} \cos \theta \quad , \quad y = 3 \sin \theta.$$

$$dx = -2\sqrt{2} \sin \theta d\theta \quad , \quad dy = \cos \theta d\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\oint_C p(x, y) dx + q(x, y) dy = \int \int_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{II.26})$$

Donc

$$\int \int_D (4x^3 - 2xy) dx dy = \oint_C xy^2 dx + x^4 dy = -72 \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^3 \theta d\theta + 3(2\sqrt{2})^4 \int_0^{2\pi} \cos^5 \theta d\theta \quad (\text{II.27})$$

Puis on complète les intégrales.

Pour

$$\int_c B(z, \bar{z}) dz = 2i \int \int_D \frac{\partial B}{\partial \bar{z}} dx dy \quad (\text{II.28})$$

Preuve : En particulier D est simplement connexe de contour fermé C

$$\frac{1}{2i} \int_C \bar{z} dz = \int \int_D 1 dx dy.$$

*Applications

III Applications

III.1 Transformation d'une intégrale double de surface sur le disque unite en intégrale de Cauchy

Resumé : nous étudions l'intégration de zone sur l'unité de disque c'est-à-dire Pour la mesure de surface $dxdy = r dr.d\theta$ différence longue au carré Les images de x et y au moyen d'une fonction f sur les différences carrées longues ont tout x et y cet effet, Taylor publie la même fonction f comme intégrale d'aire Un autre auxiliaire et plusieurs intégrales de Cauchy sur le cercle unitaire pour entrer Ce dernier fait référence à une expression directe de cette intégrale surfacique en termes de série Thérapie totale de la boîte longue à Taylor.

Définition III.1 Dans tout ce problème , on désigne par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction holomorphe le disque unité fermé D (défini par $|z| \leq 1$) , par $\overline{f(z)}$ la quantité imaginaire de $f(z)$, et par C_r la circonférence $|z| = r$ ($0 \leq r \leq 1$) parcourue dans le sens et on pose

$$J(f) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{|f(e^{i\varphi}) - f(e^{i\theta})|^2}{|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^2} d\theta$$

Lemme III.1 on a

a)-

$$J(f) = \int_{c_1} dy \int_{c_1} |f(y) - f(x)|^2 \frac{dy}{(y-x)^2} \quad (\text{III.1})$$

que $J(f)$ est la limite , lorsque r ($r < 1$) tend vers 1 , de l'intégrale

$$J_r(f) = \int_{c_1} dy \int_{c_1} |f(y) - f(x)|^2 \frac{dy}{(y-x)^2}$$

b) Pour $r < 1$, les relations suivantes :

$$\int_{c_r} dy \int_{c_1} |f(y)|^2 \frac{dy}{(y-x)^2} = 0 \quad (\text{III.2})$$

$$\int_{c_r} dy \int_{c_1} |f(x)|^2 \frac{dy}{(y-x)^2} = 0 \quad (\text{III.3})$$

$$\int_{c_r} dy \int_{c_1} |\overline{f(x)} f(y)|^2 \frac{dy}{(y-x)^2} = 0 \quad (\text{III.4})$$

(On appliquera la théorie des résidus , en s'appuyant sur la possibilité d'intervertir les deux signes $\int$.)

c) et en utilisant la méthode du b pour obtenir la valeur de l'intégrale

$$K_r(f) = \int_{c_r} dy \int_{c_1} |f(y)f(x)|^2 \frac{dy}{(y-x)^2},$$

et les résultats obtenus permettent d'obtenir la valeur de $J_r(f)$. pour déduire l'expression de $J_r(f)$ au moyen des coefficients a_n

d) l'égalité

$$J(f) = 4\pi \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 r dr d\theta. \quad (\text{III.5})$$

Preuve

- a) La fonction f étant holomorphe dans le disque fermé $z \leq 1$, la fonction

$$F(\theta, \varphi) = |e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^{-2} |e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^2$$

est continue sur $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, L'intégrale $J(f)$ a donc un sens

D'autre part , si on pose $e^{i\theta} = x, e^{i\varphi} = y$ on a

$$|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^2 = (e^{i\varphi} - e^{i\theta})(e^{-i\varphi} - e^{-i\theta}) = -e^{-i(\theta+\varphi)}(y-x)^2$$

et $dx = ie^{i\theta}d\theta, dy = ie^{i\varphi}d\varphi$ d'où

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi d\theta}{|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^2} = \int_{c_1} \int_{c_1} \frac{dy dx}{(y-x)^2}$$

ce qui permet d'établir l'égalité (1).

Enfin , on a

$$J_r(f) = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\varphi}) - f(e^{i\theta})|^2}{|re^{i\varphi} - e^{i\theta}|^2} re^{i(\theta+\varphi)} d\theta$$

Ce qui montre que $J_r(f)$ est l'intégrale d'une fonction continue de l'ensemble * Variables r, θ, φ . Il en résulte que $J_r(f)$ est une fonction continue de r pour $0 \leq x \leq 1$ qui tend vers $J_1(f) = J_r(f)$ lorsque r tend vers 1

b)- La relation (2) résulte du fait que , pour $|y| < 1$, on a

$$\int_{c_1} \frac{dx}{(y-x)^2} = 0$$

La relation (3) résulte du fait que , pour $|x| = 1$, on a

$$\int_{c_r} \frac{dx}{(y-x)^2} = 0$$

et de la possibilité d'échanger Les deux signed d'intergration .La relation (4) ***fait que

$$\int_{c_r} f(y) \frac{dx}{(y-x)^2} = 0$$

lorsque $|x|$ (car , dans ce cas , x est extérieur à Cr).

c)- On a

$$|f(y) - f(x)|^2 = |f(y)|^2 + |f(x)|^2 - \overline{f(y)}f(x) - f(y)\overline{f(x)}.$$

d'ou, en utilisant Les relations (2),(3),(4),

$$J_r(f) = - \int_{c_r} dy \int_{c_1} \overline{f(y)}f(x) \frac{dx}{(y-x)^2} = -K_r(f).$$

Ou la théorie Des rèsidus appliquée au pôle double $x = y$ nous donne

$$\int_{c_1} f(x) \frac{dx}{(y-x)^2} = 2i\pi f'(y)$$

Lorsque $|y| = r < 1$; d'ou

$$\begin{aligned} J_r(f) &= -K_r(f) = -2i\pi \int_{c_r} f(y)' \overline{f(y)} dy \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} p a_p \bar{a}_q r^{p+q} e^{(p-q)i\varphi} d\varphi \\ &= 4\pi^2 \sum_{p=0}^{\infty} p |a_p|^2 r^{2p}. \end{aligned}$$

A la limite , on a

$$J(f) = 4\pi^2 \sum_{p=0}^{\infty} p |a_p|^2,$$

III.2 Meilleure approximation d'une fonction complexe par une suite des polynômes orthogonaux sur le disque unite

Resumé : Nous considérons l'espace des fonctions holomorphes $H(D)$ sur le disque unité de telle sorte que l'intégration carrée de ces fonctions sur le disque unité par rapport à la mesure d'aire $rdrd\theta$ soit présente, définie et finie. Coefficients de diffusion de Fourier pour cette fonction afin de trouver une solution au problème aux limites La meilleure approximation de la différence pour la fonction au carré long f et le polynôme de mélange linéaire qualitatif de degré n . Bien sûr, au moyen de prismes de Fourier, nous obtenons la phrase, la solution est un polynôme de Fourier de degré n , et la valeur limite atteinte par la plus petite distance définie ci-dessus. On découvre alors par les coefficients de diffusion de Fourier que ce polynôme de Fourier de degré n est un noyau de degré n pour les polynômes ϕ_n .

Théorème III.1 *D étant un domaine plan, on désigne par $H(D)$ l'espace des fonctions holomorphes et de carré sommable dans D . normé par*

$$\|f\| = \left[\int \int_D |f(x+iy)|^2 dx dy \right]^{1/2} \quad (\text{III.6})$$

1. Prenant pour D le disque $|z| < R$, on pose $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$. $\|f\|$ au moyen des coefficients a_n .

2. On revient au cas général ; et, pour chaque $z \in D$, on désigne par $r(z)$ la distance de z à la frontière de D . On a les inégalités

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{\pi}r(z)}, |f'(z)| \leq \frac{\|f\| \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}[r(z)]^2}. \quad (\text{III.7})$$

En déduire que chaque partie bornée de $H(D)$ est formée de fonctions également continues sur chaque compact contenu dans D .

3. $H(D)$ constitue un espace de Hilbert pour le produit scalaire lorsque

$$\langle f|g \rangle = \int \int_D f(x+iy) \overline{g(x+iy)} dx dy. \quad (\text{III.8})$$

(Pour prouver que $H(D)$ est complet, on pourra utiliser le fait que pour toute fonction φ , positive et continue sur D , on a

$$\int \int_D \varphi(x,y) dx dy = \sup_{k \in H} \int \int_K \varphi(x,y) dx dy. \quad (\text{III.9})$$

où H désigne l'ensemble des compacts contenues dans D)

4. On désigne par (φ_p) ($0 \leq p \leq n$) un système orthonormal de $H(D)$, et par t un point de D .

le minimum de $\|f\|$ parmi toutes les fonctions de la forme

$$f(z) = \sum_{p=0}^n A_p \varphi_p(z) \quad (A_p = \text{Cte})$$

qui satisfont à $f(t) = 1$, est obtenu lorsque

$$A_p = \overline{\varphi_p(t)} / \sum_0^n |\varphi_p(t)|^2 \quad (0 \leq p \leq n); \quad (\text{III.10})$$

Et pour tout système orthonormal (φ_n) la série $\sum_0^\infty |\varphi_n(t)|^2$ est convergente.

5. Désignant par A_n une suite quelconque de nombres complexes, en utilisant ce qui précède pour prouver que la convergence de $\sum_0^\infty |A_n|^2$ entraîne la convergence uniforme de $\sum_0^\infty A_n \varphi_n(z)$ sur tout compact contenu dans D.

6. Pour t fixé, la série $\sum \varphi_n(z) \varphi_n(t)$ est uniformément convergente sur chaque compact contenu dans D. Calculer sa somme $k(z, t)$ dans le cas où D est le disque $|z| < R$ et où $\varphi_n(z) = k_n z^n$ [k_n désignant une constante que l'on déterminera].

7. revenant au cas d'un domaine quelconque on désigne par t un point de D, par φ_n un système orthonormal complet, et l'on pose

$$k(z, t) = \sum \varphi_n(z) \overline{\varphi_n(t)}.$$

le minimum de $\|f\|$, sur l'ensemble des $f \in H(D)$ telles que $f(t) = 1$, est atteint pour $f(z) = K(z, t)/K(t, t)$, et que ce minimum est égal à $1/k(t, t)$. Et $k(z, t)$ ne dépend pas du système orthonormal considéré, et que chaque élément f de $H(D)$ vérifie la relation

$$f(z) = \int \int_D K(z, t) f(t) du dv, \text{ où } t = u + iv$$

Preuve

1. Si

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n, \quad \text{on a} \quad \overline{f(z)} = \sum_0^\infty \bar{a}_n \bar{z}^n,$$

d'où

$$|f(e^{i\theta})|^2 = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_n \bar{a}_p r^{n+p} e^{(n-p)i\theta}$$

et

$$\|f\|^2 = \int_0^R \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 r dr d\theta = 2\pi \sum_0^\infty |a_n|^2 \int_0^R r^{2n+1} dr = \pi \sum_0^\infty |a_n|^2 \frac{R^{2n+2}}{n+1};$$

car pour $n \neq p$, on a

$$\int_0^R e^{(n-p)i\theta} d\theta = 0.$$

2. Détant quelconque, désignons par z_0 un point de D et par Δ le disque défini par $|z - z_0| < r(z_0)$. Le disque Δ étant contenu dans D , on a

$$\|f\|^2 = \int \int_D |f(x + iy)|^2 dx dy \geq \int \int_{\Delta} |f(x + iy)|^2 dx dy.$$

Pour calculer l'intégrale de droite, on se ramène au cas du **1.** en posant $z - z_0 = u$, $R = r(z_0)$.

On a donc l'inégalité

$$\|f\|^2 \geq \pi \sum_0^\infty |a_n|^2 \frac{[r(z_0)]^{2n+2}}{n+1}, \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z)$$

On en déduit les inégalités :

$$\|f\|^2 \geq \pi |f(z_0)|^2 [r(z_0)]^2 \quad \text{et} \quad \|f\|^2 \geq \frac{\pi}{2} |f'(z_0)|^2 [r(z_0)]^4$$

ce qui donne les inégalités (1).

Soit alors K un compact contenu dans D , et soit d la distance de K à la frontière de D . Si $z \in K$, on a $r(z) \geq d$, d'où

$$|f'(z)| \leq \frac{\|f\| \sqrt{2}}{d^2 \sqrt{\pi}} \leq \frac{\|f\|}{d^2}.$$

Si z et z' sont deux points de K tels que $|z' - z| \leq d$, alors le segment $[zz']$ est contenu dans D , et la formule des accroissements finis nous donne l'inégalité

$$|f(z') - f(z)| \leq \frac{\|f\|}{d^2} |z' - z|.$$

Cette inégalité prouve que, quel que soit $k \in \mathbb{R}$, les fonctions $f \in H(D)$ qui satisfont à $\|f\| \leq k$, sont également continues sur K .

3. $H(D)$ constitue un espace vectoriel, et le produit scalaire donné dans l'énoncé satisfait bien à $\langle f|f \rangle = \|f\|^2$. Pour prouver que $H(D)$ est un espace de Hilbert, il nous suffit donc de prouver qu'il est complet.

Soit donc f_n une suite de Cauchy dans $H(D)$. Cette suite étant une partie bornée de $H(D)$, les fonctions f_n sont, d'après ce qui précède, également continues sur chaque compact K contenu dans D . Soit k_p une suite exhaustive de compacts contenus dans D (par exemple $k_p = \{z | |z| \leq R - R/p\}$ pour $p = 2, 3, \dots$). D'après le théorème d'Ascoli, on peut extraire de

f_n une suite paratielle qui converge unigormément sur k_2 , puis extraire de celle-ci une suite paratielle qui converge uniformément sur k_3 , etc. Le procédé diagonal donne alors une suite paratielle $g_n = f_{\varphi(n)}$ extraire de f_n , qui converge uniformément sur chaque compact contenu dans D . La limite g de cette suite est holomorphe sur chaque compact K contenu dans D , donc dans D , et on a suite est holomorphe sur chaque compact K contenu dans D , donc dans D , et on a

$$\int \int_K |g(x + iy)|^2 dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_K |g_n(x + iy)|^2 dx dy \leq K^2,$$

en posant

$$K = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|.$$

Le compact K étant arbitraire cela prouve que $g \in H(D)$, avec $\|g\| \leq k$. D'autre part, on a

$$\int \int_K |g_n(x + iy) - g(x + iy)|^2 dx dy = \lim_{p \rightarrow \infty} \int \int_K |g_n(x + iy) - g_p(x + iy)|^2 dx dy$$

et

$$\int \int_K |g_n(x + iy) - g_p(x + iy)|^2 dx dy \leq \|g_n - g_p\|^2.$$

La suite g_n étant elle-meme de Cauchy, on peut, quel que soit $0 < \varepsilon$ donné, déterminer un entier ∞ tel que $n \geq \infty$ et $p \geq \infty$ entraîne $\|g_n - g_p\| \leq \varepsilon$. Quel que soit le compact K contenu dans D , on a alors

$$\int \int_K |g_n(x + iy) - g_p(x + iy)|^2 dx dy \leq \varepsilon^2;$$

et en faisant tendre p vers l'infini, on en déduit que $n \geq \infty$ entraîne

$$\int \int_K |g_n(x + iy) - g(x + iy)|^2 dx dy \leq \varepsilon^2,$$

d'où

$$\|g_n - g\|^2 = \sup_{K \subset D} \int \int_K |g_n(x + iy) - g(x + iy)|^2 dx dy \leq \varepsilon^2,$$

ce qui prouve que la suite g_n converge vers g dans $H(D)$. La suite f_n donnée admet g pour valeur d'adhérence, et converge elle-meme vers g (car une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence, converge vers cette valeur).

Remarque III.1 - Si on connaît le théorème de Fatou, on peut abrégier la démonstration précédente en notant que ce théorème entraîne immédiatement les inégalités :

$$\int \int_D |g(x + iy)|^2 dx dy \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_D |g_n(x + iy)|^2 dx dy \leq k^2$$

et

$$\|g - g_n\| \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \|g_p - g_n\|.$$

4. On a à chercher le minimum de

$$\|f\|^2 = \sum_0^n |A_p|^2$$

sur l'ensemble des nombres complexes A_p vérifiant la relation

$$\sum_0^n A_p \varphi_p(t) = 1$$

Or on a

$$\left| \sum_0^n A_p \varphi_p(t) \right|^2 \leq \sum_0^n |A_p|^2 \sum_0^n |\varphi_p(t)|^2.$$

l'égalité étant atteinte s'il existe un nombre complexe λ tel que $A_p = \lambda \varphi_p(t)$ tel que soit p. On a donc

$$\|f\|^2 = \sum_0^n |A_p|^2 \geq \left[\sum_0^n |\varphi_p(t)|^2 \right]^{-1},$$

l'égalité étant atteinte s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A_p = \lambda \overline{\varphi_p}(t)$. En utilisant la relation

$$\sum_0^n A_p \varphi_p(t) = 1,$$

on obtient

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_0^n |\varphi_p(t)|^2,$$

ce qui donne les valeurs des A_p réalisant le minimum de $\|f\|^2$. En appliquant la première des inégalités (1) au point t pour la fonction f qui réalise ce minimum, on obtient

$$\sum_0^n |\varphi_p(t)|^2 = \|f\|^{-2} \leq \frac{|f(t)|^{-2}}{\pi r^2(t)} = \frac{1}{\pi r^2(t)},$$

et cela, quel que soit $t \in D$.

En appliquant l'inégalité

$$\sum_0^n |\varphi_p(t)|^2 < \frac{1}{\pi r^2(t)}$$

aux $n + 1$ premiers termes d'un système orthonormal quelconque (φ_n) , on voit que la série

$$\sum_0^n |\varphi_n(t)|^2$$

est convergente et que

$$\sum_0^n |\varphi_n(t)|^2 < \frac{1}{\pi r^2(t)}.$$

5. Si K est un compact contenu dans D et si d désigne sa distance à la frontière de D , on a, pour tout $z \in K$, et $p < q$:

$$\left| \sum_p^q A_n \varphi_n(z) \right|^2 \leq \sum_p^q |A_n|^2 \sum_0^n |\varphi_n(z)|^2 \leq \frac{1}{\pi d^2} \sum_p^q |A_n|^2,$$

ce qui prouve que la convergence de la série $\sum_0^\infty |A_n|^2$ entraîne normale de $\sum_0^\infty A_n \varphi_n(z)$ sur K .

6. En posant $A_n = \overline{\varphi_n(t)}$, on voit, d'après le **5.**, que la série $\sum \varphi_n(z) \overline{\varphi_n(t)}$ converge normalement, pour t fixé, sur chaque compact contenu dans D . Sa somme $K(z, t)$ est donc holomorphe dans D .

Si D est le disque $|z| < R$, on a un système orthonormal φ_n en posant $\varphi_n(z) = k_n z^n$, avec

$$k_n^{-2} \int \int_D |z^n|^2 dk dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^{2n+1} dr d\theta = \pi \frac{R^{2n+2}}{n+1}$$

d'où :

$$\varphi_n(z) = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi} R^{n+1}} z^n$$

et

$$K(z, t) = \frac{1}{\pi} \sum_0^\infty \frac{n+1}{R^{2n+2}} z^n \bar{t}^n = \frac{R^2}{\pi} (R^2 - z\bar{t})^{-2}.$$

7. Si le système orthonormal φ_n est complet, chaque $f \in H(D)$ peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \sum_0^\infty A_n \varphi_n(z).$$

Il résulte du **4.** que le minimum de $\|f\|$, sur l'ensemble des $f \in H(D)$ qui vérifient $f(t) = 1$, est obtenu lorsque

$$A_n = \overline{\varphi_n(t)} \left[\sum_0^\infty |\varphi_k(t)|^2 \right]^{-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On a alors

$$f(z) = \frac{\sum_0^\infty \varphi_n(z) \overline{\varphi_n(t)}}{\sum_0^\infty \varphi_n(t) \overline{\varphi_n(t)}} = \frac{K(z, t)}{K(t, t)}$$

et le minimum est égal à

$$\left[\sum_0^{\infty} |\varphi_k(t)|^2 \right]^{-1} = \frac{1}{K(t, t)}.$$

Il en résulte que $K(t, t)$ ne dépend pas du système (φ_n) considéré ; et comme la fonction qui réalise le minimum ne dépend pas non plus de ce système, $K(z, t)$ est indépendant du choix de ce système.

Si f est un élément quelconque de $H(D)$, ses coefficients de Fourier sont :

$$A_n = \langle f | \varphi_n \rangle = \int \int_D f(t) \overline{\varphi_n(t)} du dv \quad \text{si } t = u + iv.$$

et on a

$$f(z) = \sum_0^{\infty} A_n \varphi_n(z),$$

soit :

$$f(z) = \int \int_D K(z, t) f(t) du dv$$

car la série $K(z, t) = \sum \varphi_n(z) \overline{\varphi_n(t)}$ est normalement convergente sur compact contenu dans D , lorsque z est fixé.

Théorème III.2 noyau Bergman : soit $f \in A(\Omega)$, $z \in A(\Omega)$ et $0 < r < R$ où $R = \text{dist}(z, \partial\Omega)$ est la distance de z à la frontière de Ω . Alors par la formule de Cauchy

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z + re^{i\theta}) r^{-n} e^{-in\theta} d\theta.$$

Si on prend la valeur absolue, multiplier cette équation par r^{n+1} , puis intégrer r de 0 à R on obtient

$$\frac{R^{n+2}}{n+1} |f^n(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int \int_{D(z, R)} |f(z)| dx dy.$$

si on le côté droit par la méégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$|f^n(z)| \leq \frac{n+1}{2} \frac{n!}{\pi^{1/2} R^{n+1}} \left(\int \int_{D(z, R)} |f(z)|^2 dx dy \right)^{1/2}$$

si on définit la L^2 norme de f par

$$\|f\| = \left(\int \int_{\Omega} |f(z)|^2 dx dy \right)^{1/2}$$

alors nous avons montré

$$|f^n(z)| \leq \frac{n!(n+2)}{2} \frac{\|f\|}{n^{1/2} (\text{dist}(z, \partial\Omega))^{n+1}}$$

On peut obtenir la même estimation. mais avec $(n+1)/2$ remplacé par $\sqrt{n}+1$ en développant f en série entière dans $D(z, R)$ puis en calculant la norme L^2 sur $D(z, R)$

L'estimation ci-dessus implique certainement que pour chaque ensemble compact $K \subseteq \Omega$ il existe une constante $C_k > 0$ telle que

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C_k \|f\|$$

il en résulte que l'espace

$$A^2(\Omega) = A(\Omega) \cap L^2(\Omega)$$

est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$.donc $A^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Référence : [?]

Leçons concernées : 201, 202, 205, 208, 209, 213, 234, 243, 245. On définit l'espace de Bergman $B^2(\mathbb{D}) := H(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ de carré intégrable sur $\mathbb{D}$. On munit cet espace du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ de L^2 et de la norme $\|\cdot\|_2$ induite. On commence par montrer

Lemme III.2 Pour tout K compact de $\mathbb{D}$, pour tout $f \in B^2(\mathbb{D})$,

$$\|f\|_{\infty, K} \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{\pi}d(K, \mathbb{S}^1)} \quad (\text{III.11})$$

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{D}$, et soit $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset \mathbb{D}$. Par formule de la moyenne, pour $0 \leq p \leq r$, $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + pe^{i\theta}) d\theta$ et donc, en multipliant par p et en intégrant par rapport à p :

$$\frac{r^2}{2} f(a) = \int_0^r f(a) p dp = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{D(a, r)} f(z) dz.$$

Ainsi, $f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(a, r)} f(z)$ et par inégalité de Holder,

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \left(\int_{D(a, r)} |f(z)|^2 dz \right)^{1/2} \left(\int_{D(a, r)} dz \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\pi r^2} \sqrt{\pi r^2} \|f\|_2 = \frac{\|f\|_2}{\sqrt{\pi}r}.$$

On fait alors tendre r vers $d(a, \mathbb{S}^1)$, et on conclut avec $d(a, \mathbb{S}^1) \geq d(K, \mathbb{S}^1)$ pour $a \in K$. On utilise le lemme pour montrer la complétude de l'espace $B^2(\mathbb{D})$.

Proposition III.1 L'espace de Bergman $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. On considère $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $B^2(\mathbb{D})$. Pour tout K compact de $\mathbb{D}$, on a, d'après le lemme, pour tous $m, n \geq 0$,

$$\|f_n - f_m\|_{\infty, K} \leq \frac{\|f_n - f_m\|_2}{\sqrt{\pi}d(K, \mathbb{S}^1)}$$

et donc par hypothèse, $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur tout compact de $\mathbb{D}$ donc converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers $f \in (\mathbb{D})$ d'après le théorème de Weierstrass. D'autre part, puisque $L^2(\mathbb{D})$ est complet d'après le théorème de Riesz-Fischer, il existe $g \in L^2(\mathbb{D})$ telle que f_n converge dans $L^2(\mathbb{D})$ vers g . De plus, d'après ce théorème, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\varphi(n)})_n$ converge presque partout vers g dans $\mathbb{D}$. Ainsi, par unicité de la limite simple, presque partout dans $\mathbb{D}$, $f = g$ et donc $f \in L^2 \cap H(\mathbb{D}) = B^2(\mathbb{D})$. On va enfin exhiber une base hilbertienne de l'espace $B^2(\mathbb{D})$. On pose, pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{en : } \quad z & \rightarrow \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n. \end{aligned}$$

III.3 Formule de Stokes et formule de Cauchy avec l'utilisation de la fonction de Schwarz :

Resumé : Avant de parler de l'objectif de calculer l'intégration de surface d'une fonction continue f sur le disque unité, bien sûr, en ce qui concerne la mesure de surface $dx dy = r dr d\theta$, nous précisons que la constitution de Stokes convertit l'intégration de surface sur le disque unité en une fonction f , bien sûr, multiplié par 1 et le rend égal à l'intégrale longitudinale sur le bord du cercle unité de la même fonction f avec substitution $1/b$ conjugué z ou $\bar{z}$. Il existe une fonction célèbre $S(z)$ Schwarz qui atteint l'égalité avec $\bar{z}$. C'est pour une fonction de prisme sous la forme d'une somme en termes de fractions dans laquelle ses pôles apparaissent. En substituant la somme, nous nous retrouvons devant les intégrales de Cauchy sur le cercle unitaire des fractions dont les pôles sont marqués, et donc on applique la constitution de Cauchy et ainsi de suite. Nous avons obtenu la valeur de l'intégrale ci-dessus au moyen de la constitution de Stokes, de la constitution de Cauchy et de la fonction de Schwarz f .

Certains domaines D du plan complexe admettent des identités en quadrature pour tout f appartenant à un ensemble prescrit de fonctions analytiques sur D . Avant d'entrer dans l'étude détaillée de ces domaines, nous avons besoin de quelques préparations.

$L^p(D)$ désignera la classe de Lebesgue par rapport à la surface mesure $d\sigma_z = dx dy$. Nous noterons l'ensemble des fonctions analytiques à valeur unique dans $L^p(D)$ par $L_a^p(D)$, et le sous-ensemble de $L^p(D)$ constitué des fonctions avec intégrales à valeur unique par $L_{as}^p(D)$.

Nous verrons qu'un domaine $D \subseteq \mathbb{C}$ qui admet une quadrature l'identité de la forme (0.1) a une fonction distinguée. Cette fonction, notée $S(z)$, est appelée fonction de Schwarz de D . Elle est caractérisée par les propriétés suivantes : Elle a un nombre fini de pôles dans D et les valeurs de $S(z)$ diffèrent de $\bar{z}$ par une constante sur chaque composante connexe du bord de D . On voit facilement que chaque fois que cette fonction existe, elle est unique.

La fonction Schwarz est un outil très efficace pour traiter les identités en quadrature. Il possède de nombreuses propriétés, mais nous nous intéresserons ici aux propriétés liées aux problèmes d'identité en quadrature. Pour de nombreuses autres applications de cette fonction, voir Davis.

III.3.1 Équivalence de l'existence de la fonction de Schwarz et de l'identité en quadrature

Pour un domaine DCC donné, trouver la fonction de Schwarz est généralement un problème difficile, et tous les domaines en $\mathbb{C}$ n'ont pas de fonctions de Schwarz. Pour pouvoir prouver l'existence de la fonction de Schwarz pour un domaine de quadrature D , il apparaît que nous devons imposer une sorte d'hypothèse supplémentaire sur D en plus de l'hypothèse que D admet une identité en quadrature. Notre hypothèse sera que la fonction potentielle

$$V(z) = - \int \int_D \log |w - z| d\sigma_{W < \infty} \quad (\text{III.12})$$

existe pour toutes $z \in \mathbb{C}$. Il est bien connu que les dérivées premières de $V(z)$ sont continues pour tout $x \in \mathbb{C}$. De plus, $V(z)$ est la solution de l'équation différentielle $\nabla^2 V = -2\pi$ dans D , où $\nabla^2 = \partial/\partial x^2 + \partial/\partial y^2$ est le Laplacien. Pour un traitement complet de la fonction potentielle voir Courant-Hilbert.

Dans la suite, nous utiliserons plusieurs fois des sous-parties de fatégration. Cette formule, parfois appelée formule de Stokes, stipule que

$$\int \int_D f(z) \overline{g'(z)} d\sigma_z = \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} f(z) \overline{g(z)} dz \quad (\text{III.13})$$

où f et g sont des fonctions analytiques régulières dans D .

Nous sommes maintenant en mesure de prouver :

Lemme III.3 *Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine tel que la fonction potentielle $V(z)$, définie par (4.11), existe pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors la fonction de Schwarz $S(z)$ de D existe sous la forme spéciale*

$$S(z) = \overline{Z} \quad (\text{III.14})$$

pour tous $z \in \partial D$ si et seulement si D admet une identité en quadrature de le type $(0,1)$ pour tous $f \in L_a^1(D)$.

preuve

a) Supposons que S existe et soit de la forme

$$S(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r_{i-1}} \frac{a_{ij} j!}{(z - z_i)^{j+1}} + g(z)$$

où $z_i \in D$ et a_{ij} ($i = 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, r_i - 1$) sont des constantes complexes et $g(z)$ est analytique régulière dans D . Hense pour tout $f \in L_a^1(D)$.

$$\begin{aligned} \int_D \int f(z) d\sigma_z &= \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} f(z) \bar{z} dz \\ &= \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} f(z) S(z) dz \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{r_{k-1}} a_{kl} \frac{l!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z) dz}{(z - z_k)^{l+1}} + \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} f(z) g(z) dz \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{r_{k-1}} a_{kl} f^{(l)}(z_k) \end{aligned}$$

Dans la dernière étape, nous avons utilisé la formule de Cauchy

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(w) dw}{(w - z)^{n+1}} \quad (\text{III.15})$$

et le fait que $\oint_{\partial D} h(z) dz = 0$ pour toute fonction analytique régulière h dans D .

b) Supposons à l'inverse que D admette une identité en quadrature du type (0.1). Ensuite on obtient

$$\int_D \int \frac{d\sigma_w}{w - z} = - \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{r_{k-1}} \frac{a_{kl} l!}{(z - z_k)^{l+1}}$$

pour tous $z \in D$ by (0.1). pour $z \in D$ nous savons que $\nabla^2 V = -2\pi$.

Ceci implique que

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{2} \int_D \int \frac{d\sigma_w}{w - z} = \frac{\pi}{2} \bar{z} + \frac{\pi}{2} g(z)$$

où $g(z)$ est analytique régulière dans d . Par conséquent nous avons

$$\int_D \int \frac{d\sigma_w}{w - z} = \begin{cases} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{r_{k-1}} \frac{a_{kl} l!}{(z - z_k)^{l+1}} & \text{pour } z \in D \\ -\pi \bar{z} + \pi g(z) & \text{pour } z \in D \end{cases}$$

Or la contiomité de $\frac{\partial V}{\partial z}$ implique que

$$-\pi \bar{z} + \pi g(z) = - \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{r_{k-1}} \frac{a_{kl} l!}{(z - z_k)^{l+1}} \quad \text{pour } z \in \partial D.$$

$$S(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{r_{k-1}} \frac{a_{kl} l!}{(z - z_k)^{l+1}} + g(z) \quad (\text{III.16})$$

Par cette définition l'égalité (1.3) est satisfaite sur le bord de D . Il en a un nombre fini dans D . Donc $S(z)$ est la fonction de Schwarz de D . Q.E.D

*

Resumé

Soit B le domaine simplement connexe sur le plan $\mathbb{C}$ de la variable complexe x , dont le contour τ est la courbe rectifiable de Jordan et $f(x)$, la fonction régulière holmorphe à l'intérieur de B . Le premier but de ce travail est d'indiquer quelques résultats sur la validité des formules de Cauchy et de Green et de Stokes

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tau(x)\tau} \frac{f(z)}{z-x} dz$$

Et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\tau(x)} f(z) \frac{\partial G(z, x)}{\partial \eta} ds$$

$G(z, x) = \log |z - x|$, qui est nommée la fonction de Green, est la fonction harmonique réelle à l'intérieur de B égale à zéro sur le contour et avec une telle singularité au point x que la différence $G(z, x) - \log |z - x|$, n'a pas de singularité au point x . Nous désignons par $f(z)$ les valeurs limites de la fonction $f(z)$ sur le contour τ suivant les chemins non tangents par η la direction de la normale extérieure sur τ . Aussi la formule de Stokes

$$\int \int_B f(z) \overline{g'(z)} dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\tau} f(z) \overline{g(z)} dz$$

$f(z)$, et $g(z)$ sont continues et régulières sur B

Abstract

Let B be the simply connected domain on the plane $\mathbb{C}$ of the complex variable x , whose contour τ is the rectifiable Jordan curve and $f(x)$, the holomorphic regular function inside B . The first goal of this work is to indicate some results on the validity of the formulas of Cauchy and Green and of Stokes

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tau(x)\tau} \frac{f(z)}{z-x} dz$$

and

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\tau(x)} f(z) \frac{\partial G(z, x)}{\partial \eta} ds$$

$G(z, x) = \log |z - x|$ which is named Green's function, is the harmonic function real inside B equal to zero on the contour and with such a singularity at the point x that the difference $G(z, x) - \log |z - x|$, has no singularity at the point x . We designate by $f(z)$ the

limit value s of the function $f(x)$ on the contour τ following the nontangent paths by τ the direction of the external normal on η . Also the Stokes formula

$$\int \int_B f(z) \overline{g'(z)} dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\tau} f(z) \overline{g(z)} dz$$

$f(z)$ and $g(z)$ are continuous and regular on B .

*Conclusion On a étudié dans ce mémoire, quelques principes sur la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe et surtout le calcul de l'intégration des fonctions holomorphes le long d'un contour de Jordan rectifiable ou bien les formules intégrales de Cauchy et les formules intégrales de Green et les formules de Stokes et leurs relations avec les formules intégrales de Cauchy.

Dans le chapitre 1 ,on a utilisé la théorie de Cauchy locale pour obtenir les principales propriétés des fonctions holomorphes ou méromorphes. On y démontre, par exemple, la fameuse formule des résidus (dans des cas particuliers) qui permettra, et c'est parfois ce qui impressionne le lecteur, de calculer des intégrales le long d'un contour.

Le chapitre deux constitue des révisions concernant initiation de bases sur les formules de Green et la formule de Stokes et leurs relations avec la théorie de calcul des intégrales de Cauchy. Le troisième chapitre s'occupe à étudier quelques utilisations des formules intégrales de Cauchy et les formules intégrales de Green et la formule de Stokes et leurs relations avec les formules intégrales de Cauchy. On a proposé de traiter trois sujets

Sujet 1 :

Calcul d'intégrale double par rapport à la mesure de surface sur le disque unité de la module au carré d'une fonction analytique régulière développable en série entière et leurs propriétés constructives

Sujet 2 :

Sur un problème extrémal de la meilleure approximation d'une fonction holomorphe sur le disque unité relativement à une suite des polynômes orthogonaux sur le disque unité et par rapport à la mesure de surface.

Sujet 3 : :

Application de la formule de Stokes et la formule de Green et la formule de Cauchy de traiter le problème : Équivalence de l'existence de la fonction de Schwarz et de l'identité en quadrature de l'intégrale double d'une fonction complexe par rapport à la mesure de surface

Références

- [1] L. V. Ahlfors, Complex analysis, an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, 1953.
- [2] E. Amar , E. Matheron, Analyse complexe, Cassini, 2004. [BD] L. Bonavero and J.−P. Demailly, Variable Complexe, Notes de cours mise en ligne par J.−P.
- [3] G. André, Initiation à l'analyse complexe - Cours et exercices corrigés, Ellipses, 2014.
- [4] F. Bayen ,C .Margaria , Espaces de Hilbert et opérateurs ,Ellipses , 1986
- [5] S. Bensid , M.B Zahaf, Fonction d'une variable complexe, Université de Tlemcen, 2020.
- [6] C. Berenstein , R. Gay, Complex variables : an introduction, Graduate Texts in Mathematics, vol. 125, Springer Verlag, 1991.
- [7] H. Cartan , Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 6ième édition, 1985.
- [8] B. Chabat, Introduction à l'analyse complexe. Tome 1, Fonctions d'une variable, Editions Mir Moscou, 1990.
- [9] J. B. Conway, Functions of one complex variable, second edition ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 11, Springer Verlag, 1978.
- [10] P. Dolbeault, Analyse complexe, Maîtrise de mathématiques pures, Masson, 1990.
- [11] M. Heins, Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable, Selected topics in Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, 1962.
- [12] S. Lang, Complex analysis, second edition ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 103, Springer Verlag, 1985.
- [13] A.I. Markushevich, Theory of funtions of a complex variable, revised second edition ed., Chelsea publishing company, 1985.
- [14] R. Narasimhan ,Y. Nievergelt, Complex analysis in one variable, Birkhäuser Verlag, 2001.
- [15] B. Palka, An Introduction to Complex Function Theory, Springer-Verlag New York, 1991.
- [16] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, Paris, 1975.
- [17] S. L. Segal, Nine Introductions in Complex Analysis, Mathematics Studies, vol. 53, North-Holland, 1981.
- [18] P. Tauvel, Analyse complexe pour la Licence 3 : Cours et exercices corrigés, Collection : Sciences Sup, Dunod, 2006.

- [19] A. Yger, Analyse Complexe un Regard Analytique et Géométrique, El-lipses, 2014.
- [20] A. Yger, Analyse complexe et distributions, Ellipses, 2001.