REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR D'EL OUED
FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES
Département De Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales

PAR

Sujet

Opérateurs linéaires continus sur les espaces de Hilbert, Théorie et applications

Présenté par : Lamri Imane
Salhi Amira

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Guesba Messaoud	MCA.	Président	Univ. El Oued
Rehouma Abdelhamid	MCA.	Rapporteur	Univ. El Oued
Letoufa Yassine	MCA.	Examinateur	Univ. El Oued

Promotion : 2021/2022

Remerciements

Avant tout, mes purs remerciements, je les exprime à **Allah** tout puissant Mes vifs remerciement vont également à mon encadreur **Dr Rehouma Abdelhamid** qui ma a guider durant ce travail et qui ses conseils et remarques, pour réaliser ce mémoire

Mes profonds remerciements s'adressent à certains de nos enseignants pour leur générosité et leur grande patience durant notre cursus, à mes chers parents et à toutes les personnes qui m'ont aidés et soutenue de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

RESUME

Dans ce mémoire on expose quelques basiques propriétés et principales connaissances des opérateurs linéaires continus auto-adjoints d'un espace de Hilbert vers le même espace de Hilbert . On a débuté par quelques préliminaires des opérateurs linéaires continus sur les espaces de Hilbert . Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacrée à l'étude des propriétés fondamentales générales des opérateurs linéaires continus auto-adjoints d'un espace de Hilbert vers le même espace de Hilbert. Le troisième chapitre de ce mémoire est consacrée aux deux projets applications sur les opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert vers le même espace de Hilbert. La première application concerne des résultats trouvés sur les opérateurs linéaires continus de deux variables (opérateurs 2-linéaires bornés sur les ensembles 2-normés). Aussi les Théorèmes de **Banach-Steinhaus** pour les opérateurs 2-linéaires bornés

La deuxième application s'occupe principalement sur l'étude *La deuxième application s'occupe principalement sur quelques classes des opérateurs linéaires continus auto adjoints normaux, et unitaires discrète et continus* un espace de Hilbert

Mots clés : opérateur-linéaire –borné –continu-norme-Hilbert

ABSTRACT

In this memorial we expose some basic properties and main knowledge of continuous linear operators from a Hilbert space to the same Hilbert space. We started with some preliminaries of continuous linear and self-adjoint linear operators on Hilbert spaces. The second chapter of this memorial is devoted to the study of the general fundamental properties of self-adjoint continuous linear operators from a Hilbert space to the same Hilbert space. The third chapter of this memorial is devoted to two application projects on continuous linear operators from a Hilbert space to the same Hilbert space. The first application concerns results found on continuous linear operators of two variables (2-bounded linear operators on 2-normed sets).

Also Banach-Steinhaus theorems for 2-bounded linear operators The second application mainly deals with the study examples of self-adjoint continuous linear operators this second application mainly deals with some classes of normal self-adjoint continuous linear operators, and unitary discrete and continuous on Hilbert space

Keywords: linear-operator –bounded –continuous-norm-Hilbert

مــلخص

نتناول في هذه المذكرة خصائص وأساسيات حول المؤثرات الخطيه المحدوده و المستمره من فضاء هلبرت نحو فضاء هلبرت آخر . بدأنا بالتطرق الى المؤثرات الخطيه المحدوده والمستمرة القرينه لنفسها.في الفصل الثاني تعرضنا بتوسع لخصائص المؤثرات الخطيه والمحدوده والقرينه لنفسها والمؤثرات الناظميه من فضاء هلبرت نحو فضاء هلبرت آخر.

الفصل الثالث لهذه المذكرة خصص لتطبيقين .التطبيق الأول يدرس المؤثرات الخطيه المستمره والمحدوده لمتغيرين أو ما يسمى المؤثرات 2-خطيه مستمره ومحدوده والمعرفه بدورها غلى فضاء 2-ناظمي. نتكلم أيضا على نظرية باناخ ستنهاوس للمؤثرات 2- خطيه مستمره ومحدوده.

التطيق الثاني خصص لأعطاء نماذج وأمثله شهيرة لخصائص المؤثرات الخطيه والمحدودة والقرينه لنفسها والمؤثرات الناظميه من فضاء هلبرت نحو فضاء هلبرت آخر ومحاولة أعطاء شروحات اضافيه لخواصها وتطبيقاتها.

الكلمات المفتاحية: مؤثر- خطي - محدود - مستمر - نظيم - هلبرت

Table des matières

Notations générales

[.] ensemble des combinaison linéaires.

$\| \, . \, \|$ norme.

$B(x_0, r) = \{x; \| x - x_0 \| < r\}$ boule ouverte, centrée en x_0 de rayon r.

$B_F(x_0, r) = \{x; \| x - x_0 \| \leq r\}$ boule fermée, centrée en x_0 de rayon r.

$d(.,.)$ une distance.

$\langle .,. \rangle$ produit scalaire.

$\mathbb{H}$ espace de Hilbert.

$| \, . \, |$ module.

$A^{\perp}$ orthogonal de A.

T^{-1} inverse d'un opérateur T.

I_d opérateur identité.

$\ker(T)$ noyau de l'opérateur T.

$Im(T)$ image de l'opérateur T.

$\mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ espace des opérateurs linéaires de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$.

$\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ espace des opérateurs linéaires borné de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$.

$\mathbb{L}_r(\mathbb{X})$ ensemble des opérateurs linéaires réguliers de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{X}$.

$\mathbb{L}_c(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ ensemble des opérateurs linéaires compacts de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$.

$\mathbb{X}'$ espace dual de $\mathbb{X}$.

$G(T)$ graphe de l'opérateur T.

T^* opérateur adjoint de l'opérateur T.

$\sigma(T)$ ensemble spectrale de T.

$p(T)$ ensemble résolvante de T.

$\sigma_p(T)$ ensemble spectre ponctuel.

$\sigma_c(T)$ ensemble spectre continu.

$\sigma_r(T)$ ensemble spectre résiduel.

$M_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

$L^p(\Omega) = \{u$ mesurable sur Ω et $\int_\Omega | u |^p < \infty\}$ $1 \leq p \leq \infty\}$.

$L^\infty(\Omega) = \{u$ mesurable sur Ω et il existe C tel que $| u(x) | \leq C$ presque partout sur $\Omega\}$.

$C(\Omega)$ espace des fonctions continues sur Ω.

$C_c(\Omega)$ fonctions continues à support compact dans Ω.

$C^k(\Omega)$ fonctions k fois continûment différentiables sur Ω (k entier ≥ 0).

Introduction générale

L'étude des opérateurs linéaires continus sur les espaces de Hilbert demande de bien connaître les opérateurs adjoint d'un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert vers autre espace de Hilbert qui est aussi un opérateur linéaire continu les deux normes d'un opérateur linéaire continu sur un Hilbert et son opérateur adjoint sont égales. l'opérateur linéaire adjoint possède les mêmes propriétés de l'opérateur linéaire original. Aussi l'opérateur inverse d'un opérateur linéaire continu inversible et possède l'inégalité de l'énergie d'un espace de Hilbert vers autre espace de Hilbert qui est aussi un opérateur linéaire continu.
Dans ce mémoire, on veut traiter quelques propriétés et notions des opérateurs linéaires continus auto adjoints d'un espace de Hilbert vers le même espace de Hilbert , Ce travail est composé de 3 chapitres :

Le premier chapitre est consacré à des sujets qui sont supposés être connus par le lecteur. Nous donnons un court résumé des théorèmes et définitions que nous allons utiliser dans les autres chapitres. Ce chapitre est consacré au rappel sur les espaces et sous espaces linéaires aussi les ensembles linéairement indépendants , sous-espaces engendrés. On expose rappel sur les espaces métriques, et les espaces normés , et sur les espaces de Hilbert, citons : produits scalaires et orthogonalité et bases orthogonales et orthonormées ,on parlera sur quelques propriétés fondamentales comme l'égalité de parallélogramme , aussi le théorème de la projection orthogonale d'un point quelconque sur un sous ensemble fermé et convexe de cet espace de Hilbert, en plus des quelques notions sur les opérateurs linéaires continus de deux variables ([11] Z. Lewandowska)

La deuxième chapitre est composé de 3 parties : La première partie est consacré à l'étude des propriétés des opérateurs linéaires continus sur un espace normé on met l'accent sur les réguliers et les opérateurs compacts et les fonctionnelle linéaires continus (formes linéaires).
La deuxième et la troisième parties est consacré à l'étude des fonctionnelle linéaires continus et les fonctionnelle linéaires continus sur un espace de Hilbert.
A la fin de ce chapitre. On présente les définitions des opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert. On définit aussi quelques classes des opérateurs linéaires continus, citons : opérateurs isométriques, opérateurs unitaires , opérateurs normaux, opérateurs positifs. On trouve enfin des résultats

sur le spectre opérateur linéaire continu sur un espace de Hilbert.

Le troisième chapitre contient deux applications sont illustrées par les propriétés structurelles citées aux premier chapitre et deuxième chapitre .

La première application concerne des résultats trouvés sur les opérateurs linéaires continus de deux variables (opérateurs 2-linéaires bornés sur les ensembles 2-normés). Aussi les Théorèmes de **Banach-Steinhause** pour les opérateurs 2-linéaires bornés ([10]) .

La deuxième application s'occupe principalement sur quelques classes des opérateurs linéaires continus auto adjoints discrète et continus, le manuscrit se termine par une conclusion générale.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces linéaires

Définition 1.1.1 *Un espace linéaire (vectoriel) $\mathbb{X}$ sur le corps $\mathbb{K}$ est un ensemble non vide des éléments $x, y, ...,$ appelés vecteurs, muni de deux opérations.*

1. *La première opération, l'addition, est une opération interne pour laquelle $\mathbb{X}$ devient un groupe abélien. Il existe donc une application $\mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, notée*

$$(x, y) \to x + y,$$

qui a les propriétés suivantes : pour tout $x, y, z \in \mathbb{X}$

   (a) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(associativité).*

   (b) *Il existe en $\mathbb{X}$ un vecteur 0, le vecteur zéro, tel que pour tout $x \in \mathbb{X}$ on aura $x+0 = 0+x = x$.*

   (c) *Pour tout $x \in \mathbb{X}$, il existe dans $\mathbb{X}$ un vecteur $(-x)$, l'opposé de x,*
   tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

   (d) $x + y = y + x$ *(commutativité).*

2. *La deuxième opération, la multiplication des vecteurs par les scalaires est donc une opération externe. C'est l'application $\mathbb{K} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, notée $(\alpha, x) \to \alpha x$, qui possède les propriétés suivantes : pour tout $x, y \in \mathbb{X}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*

   (a) *Si $1 \in \mathbb{K}$ alors $1x = x$.*

   (b) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ *(associativité).*

   (c) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ *(distributivité par rapport à la somme des scalaires).*

   (d) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ *(distributivité par rapport à la somme des vecteurs).*

Définition 1.1.2 *Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur le corps $\mathbb{K}$. Sous-espace linéaire de $\mathbb{X}$ est un sous-ensemble $\mathbb{X}_1 \subseteq \mathbb{X}$ qui forme lui-même un espace linéaire, sur le même corps $\mathbb{K}$, par rapport aux* *opérations de $\mathbb{X}$ restreintes à $\mathbb{X}_1$.*

On peut vérifier facilement que $\mathbb{X}_1 \subseteq \mathbb{X}$, $\mathbb{X}_1 \neq \emptyset$, est un sous -espace linéaire de $\mathbb{X}$ si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{X}_1 \Rightarrow (x + y) \in \mathbb{X}_1.$$

et

$$\forall x \in \mathbb{X}_1, \forall \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha x \in \mathbb{X}_1.$$

Exemple 1.1.1 *Le corps $\mathbb{K}$ est un espace linéaire sur $\mathbb{K}$*

Exemple 1.1.2 $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ *est espace vectoriel En effet,*

1. $(x, y) + (x' + y') = (x + x', y + y')$
   $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$
2. $C[0,1] = \{f, f : [0,1] \to \mathbb{R}, f \text{ continue } \}$
   est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
   $E = \{f, f \in C[0,1], f(x) = 1\}$
   n'est pas un sous espace vectoriel sur $C[0,1]$, En effet
   $\forall \alpha \in E \ \forall f, \rho \in E \qquad \alpha f + \rho \in E$
   $\alpha f + \rho$ *est continue*
   $$\begin{aligned} (\alpha f + \rho)(x_0) &= \alpha f(x_0) + \rho(x_0) \\ &= \alpha + 1 \end{aligned}$$
   $\Rightarrow \alpha f + \rho \notin E$

1.2 Ensembles linéairement indépendants,sous-espaces engendrés

Définition 1.2.1 *Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur $\mathbb{K}$ et $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \mathbb{X}$*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k. \tag{1.1}$$

S'appelle une combinaison linéaire. Les éléments $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$, s'appellent les coefficients de la combinaison linéaire.

Remarque 1.2.1 $[A] = \{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \quad , \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}\}$ *L'ensemble des combinaison linéaires sur A.*

Définition 1.2.2 *Soit $A = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ un ensemble fini contenu dans $\mathbb{X}$.*

L'ensemble fini A est linéairement indépendant $\Leftrightarrow (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_n = 0)$.

c-à-d

$$\exists \alpha_i \neq 0, tel\ que \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0 \tag{1.2}$$

Dans le cas contraire A est linéairement dépendant.

Exemple 1.2.1 *Dans l'espace linéaire $C([a,b])$ $a<b$, l'ensemble $A=\{1,t,t^2,t^3\}$ est linéairement indépendant.*
En effet, la relation

$$\alpha_0 1+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3=0$$

pour tout $t\in[a,b]$ entraîne

$$a_i=0, i=0,1,2,3$$

. Par convention, on considéré l'ensemble vide $\emptyset$ comme étant linéairement indépendant.

Définition 1.2.3 *Un sous-ensemble B de $\mathbb{X}$ s'appelle une base algébrique de l'espace linéaire $\mathbb{X}$ si :*

1. *$B=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ est un ensemble linéairement indépendant.*
2. *$[B]=\mathbb{X}$, i.e. le sous-espace linéaire engendré par B est $\mathbb{X}$.*
   c-à-d $\forall x\in X$ $\exists\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\in\mathbb{K}$ tel que $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x_k$

1.3 Espaces métriques

Définition 1.3.1 *Soit $\mathbb{X}$ un ensemble quelconque non vide. Une semi-métrique, ou semi-distance, sur $\mathbb{X}$ est une application*

$$d:\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{R}$$

telle que, pour tout $x,y,z\in\mathbb{X}$ on a

$c_1)$ $d(x,y)\geq 0,$ *(propriété de non-négativité).*

$c_2)$ $x=y\Rightarrow d(x,y)=0,$ *(propriété d'identité).*

$c_3)$ $d(x,y)=d(y,x),$ *(propriété de symétrie).*

$c_4)$ $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y),$ *(inégalité de triangle).*

L'ensemble $\mathbb{X}$ muni d'une semi-métrique d s'appelle espaces semi-métrique que nous notons par $(\mathbb{X},d)$.

Définition 1.3.2 *Soit $\mathbb{X}$ un ensemble quelconque non vide. Une métrique ou encore une distance sur $\mathbb{X}$ est une semi-métrique $d:\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{R}$, telle que*
$c_5)$. *$d(x,y)=0$ implique $x=y$.*

L'ensemble $\mathbb{X}$ muni d'une métrique d s'appelle espace métrique, noté par $(\mathbb{X},d)$.

Exemple 1.3.1 *$d(x,y)=|x-y|$ est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ on a :*

1. *$d(x,y)=0\Leftrightarrow|x-y|=0\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y$.*
2. *$d(x,y)=|x-y|=|-1||y-x|=|y-x|=d(y,x)$.*
3. *Pour vérifier la propriété $c_4)$, il est suffisant d'observer que pour tout $x,y,z\in\mathbb{R}$ on a*
   $|x-y|=|x-z+z-y|\leq|x-z|+|z-y|$

Définition 1.3.3 *On dit que deux distances d_1, d_2 sur un ensemble E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\beta \geq \alpha \geq 0$ telles que :*

$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y), \text{ pour tout } x,\ y \in E.$$

Exemple 1.3.2 *Soit $(d_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille finie de p distances sur E_i on pose*

$$E = \prod_{i=1}^{p} E_i$$

et on définit sur le produit cartésien $E \times E$ deux distances comme suit :

$$D_1(x,y) = \sup_{1\leq i\leq p} d_i(x_i, y_i)$$

,

$$D_2(x,y) = \sum_{i=1}^{p} d_i(x_i, y_i).$$

Pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de E On a :

$$\sup_{1\leq i\leq p} d_i(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{p} d_i(x_i, y_i) \leq p \sup_{1\leq i\leq p} d_i(x_i, y_i)$$

donc

$$D_1(x,y) \leq D_2(x,y) \leq pD_1(x,y)$$

Alors D_1 et D_2 sont équivalentes telles que $\alpha = 1, \beta = p$.

Un espace vectoriel complexe minu d'une norme est dit espace normé.

1.4 Espaces normés

Définition 1.4.1 *Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur $\mathbb{K}$. On appelle semi-norme pour $\mathbb{X}$, une application $|.| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, telle que pour tout $x, y \in \mathbb{X}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :*

$N_1)$ $|x| \geq 0$, *(propriété de non-négativité).*

$N_2)$ $|\lambda x| =| \lambda | \, |x|$, *(propriété d'homogénéité absolue).*

$N_3)$ $|x + y| \leq |x| + |y|$, *(propriété de sous-additivité).*

Il est possible que $|x| = 0$ et $x \neq 0$.

L'espace linéaire $\mathbb{X}$ muni d'une semi-norme s'appelle espace semi-norme.

Définition 1.4.2 *Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur $\mathbb{K}$. On appelle norme sur $\mathbb{X}$, une application $\| \,.\, \| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^+$, telle que $\| \,.\, \|$ est une semi-norme pour $\mathbb{X}$ et de plus*

$N_4)$ $\| x \| = 0$ *implique* $x = 0$.

Un espace linéaire $\mathbb{X}$ muni d'une norme s'appelle espace normé, noté par $(\mathbb{X}, \| \,.\, \|)$.

Exemple 1.4.1 $E = C([0, 1])$ *on pose :*

1. $\| f \|_\infty = \max\limits_{\varphi\in[0,1]} |f(\varphi)|$.
2. $\| f \|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(\varphi)| d\varphi$.
3. $\| f \|_2 = (\int_0^1 \mid f(\varphi) \mid^2 d\varphi)^{1/2}$.

$\| \,.\, \|_\infty, \| \,.\, \|_1, \| \,.\, \|_2$ *sont des normes définies sur* $C[0,1]$ *Un espace normé est un espace métrique dont la distance est définie par*

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Définition 1.4.3 *On dit que deux normes* $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ *sur un ensemble* E *sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles* $\beta \ \geq \alpha \geq 1$ *telles que*

$$\alpha \parallel x \parallel_1 \leq \parallel x \parallel_2 \leq \beta \parallel x \parallel_1, \text{ pour tout } x \in E.$$

Remarque 1.4.1 $\| \,.\, \|_\infty, \| \,.\, \|_1, \| \,.\, \|_2$ *sont des normes équivalentes*

Exemple 1.4.2 *Tout les normes sur* $\mathbb{R}$ *sont des normes équivalentes*

Définition 1.4.4 ***(Espace de Banach)*** *Un espace de Banach est un espace linéaire normé complet.*
Note *: On dit qu'un espace normé* $(\mathbb{X}, \| \,.\, \|)$ *est complet si toute suite de Cauchy de* $(\mathbb{X}, || \ ||)$ *est convergente dans* $(\mathbb{X}, || \ ||)$.

Exemple 1.4.3 *L'espace* $E = C([a,b]), \mathbb{R}^n)$ *des fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}^n$. *Le nombre*

$$\|f\| = \max_{a\leq\varphi\leq b} |f(\varphi)|$$

où $|.|$ *est la norme dans* $\mathbb{R}^n$, *définit une norme rendant* $(E, \|.\|)$ *un espace de Banach*

1.5 Espaces de Hilbert

Définition 1.5.1 *Soit* $\mathbb{X}$ *espace linéaire, s'il existe un nombre complexe* x, y *pour tout couple de vecteurs* x *et* y *dans* $\mathbb{X}$ *qui vérifie les conditions suivantes :*

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\quad \langle x,x \rangle \geq 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\quad \langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $\forall x,y \in \mathbb{X}$, $\quad \overline{\langle x,y \rangle} = \langle y,x \rangle$.
4. $\forall x,y,z \in \mathbb{X}$, $\quad \langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$.
5. $\forall x,y \in \mathbb{X}$, $\quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \langle \lambda x,y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle$.

Alors $\langle x,y \rangle$ *est dit produit scalaire de* x *et* y, *et on note par* $\langle x,y \rangle$.

Définition 1.5.2 ***(Espace préhilbertien)***

Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur le corps complexe muni par un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ donc $(\mathbb{X}, \langle .,. \rangle)$ est un espace préhilbertien.

Définition 1.5.3 ***(Espace de Hilbert)***

Un espace préhilbertien et complet par raport la norme induite par le produit scalaire $\langle .,. \rangle$,est un espace de Hilbert .

En d'autres mots, un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.

Exemple 1.5.1 *L'espace*

$$l^2([0,1]) = \{x : (x_i)_i; x_i \in \mathbb{C} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

est un espace de ***Hilbert****.*

Proprietés générales

P_1• **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

pour touts $x, y \in \mathbb{H}$, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}. \tag{1.3}$$

Preuve L'inégalité (1.3) est trivialement satisfaite si $\langle x, y \rangle = 0$.

Nous supposons donc que $\langle x, y \rangle \neq 0$. Alors nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \frac{x}{\sqrt{\langle x, x \rangle}} - \frac{\langle x, y \rangle y}{|\langle x, y \rangle|\sqrt{\langle y, y \rangle}}, \frac{x}{\sqrt{\langle x, x \rangle}} - \frac{\langle x, y \rangle y}{|\langle x, y \rangle|\sqrt{\langle y, y \rangle}} \rangle \\ &\leq 1 - \frac{2|\langle x, y \rangle|}{\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}} + 1 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - \frac{2|\langle x, y \rangle|}{\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}} + 1 \Rightarrow \frac{2|\langle x, y \rangle|}{\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}} \leq 2 \\ \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}. \end{aligned}$$

Corollaire 1.5.1

$$|\langle x, y \rangle| \leq \frac{1}{2}(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle). \tag{1.4}$$

Preuve

$$0 \leq (\sqrt{\langle x,x\rangle} - \sqrt{\langle y,y\rangle})^2 = \left(\sqrt{\langle x,x\rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle y,y\rangle}\right)^2 - 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} \leq \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{\langle x,x\rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle y,y\rangle}\right)^2\right)$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.3),on obtient

$$|\langle x,y\rangle| \leq \frac{1}{2}(\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle).$$

P_2• **Inégalité de Hölder**

La stricte concavité de la fonction logarithme est à la base de la démonstration de l'inégalité de Hölder, cette dernière inégalité permettant de montrer que pour tout réel $p \geq 1$ l'application

$$x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

défnit une norme sur $\mathbb{R}^n$(ou $\mathbb{C}^n$). Dans ce qui suit on désigne par p et q deux réels strictement positifs tels que

Théorème 1.5.1 *(L'inégalité de Hölder) Pour tous vecteurs x, y dans $\mathbb{C}^n$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a :*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

L'inégalité de Hölder s'écrit, en notant $\langle x,y\rangle$ le produit scalaire hermitien canonique de $\mathbb{C}^n$

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

et cette inegalite est encore valable pour $p = 1$ et $q = +\infty$. Pour $p = q = 2$ on retrouve l'inegalite de Cauchy-Schwarz.

P_3• **Loi du parallélogramme**

Pour tout $x, y \in \mathbb{X}$,on a

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2). \tag{1.5}$$

P_4• **Corollaire** pour tout $x, y \in \mathbb{X}$,$\forall \mu \in \mathbb{C}$,on a

$$\| \lambda x + \mu y \|^2 + \| \lambda x - \mu y \|^2 = 2(|\lambda|^2 \| x \|^2 + |\mu|^2 \| y \|^2). \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

$(C[0,1], ||\ ||_\infty)$ ne verifie pas la loi du parallélogramme

par exemple,

$$\| \sin t + \cos t\|^2 + \| \sin t - \cos t\|^2 \neq 2(\| \sin t\|^2 + \| \cos t\|^2)$$

Théorème 1.5.2 *[1] Soit $\mathbb{X}$ est un espace de Hilbert (i.e. sa norme est induite par un produit scalaire) si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{X}$, on a*

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

Le produit scalaire est unique, et on a

- $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 + i \| x+iy \|^2 - i \| x-iy \|^2).$
- $||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$

Théorème 1.5.3 *Soient $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, $A \subset \mathbb{H}$ un ensemble non vide convexe et fermé et $x_0 \in \mathbb{H} \setminus A$.*
Alors , il existe un et seulement un $y_0 \in A$, tel que

$$\| x_0 - y_0 \| = \inf_{y \in A} \| x_0 - y \|$$

Preuve

a) Montrons que $\| x_0 - y_0 \| = d$. Nous avons

$$d \leq \| x_0 - y_0 \| \leq \| x_0 - y_n \| + \| y_n - y_0 \| < d + \frac{1}{n} + \varepsilon, \ \ si\ n > n_0(\varepsilon),$$

d'où

$$\| x_0 - y_0 \| = d.$$

b) Il nous reste *á* montrer l'unicité de y_0. Soit $z_0 \in A$, tel que $\| x_0 - y_0 \| = d$. En utilisant la loi du parallélogramme (1.5) , on a

$$\begin{aligned} \| z_0 - y_0 \|^2 &= \| (z_0 - x_0) - (y_0 - x_0) \|^2 \\ &= 2 \| z_0 - x_0 \|^2 + 2 \| y_0 - x_0 \|^2 - \| z_0 + y_0 - 2x_0 \|^2 \\ &= 4d^2 - 4 \| \frac{z_0 + y_0}{2} - x_0 \|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0. \end{aligned}$$

D'où $z_0 = y_0$.

1.6 Orthogonalité

Définition 1.6.1 *Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert.*
Deux vecteurs $x, y \in \mathbb{H}$ sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$, on note $x \perp y$.

Remarque 1.6.1 *La relation d'orthogonalité possédé les propriétés suivante :*

1. $0_{\mathbb{H}} \perp x$ *pour tout* $x \in \mathbb{H}$.

2. $x \perp y \Rightarrow y \perp x$.

3. $x \perp x \Rightarrow x = 0_{\mathbb{H}}$.

4. $x \perp x_n$, $n \in \mathbb{N}$, *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \parallel x_n - x_0 \parallel \Rightarrow x \perp x_0$.

5. $x \perp x_i$ *et* $\lambda_i \in K, i = 1, ..., n \Longrightarrow x \perp \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$

6. *soit* $(x_i, x_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, .., n$ *alors Montrons d'abord l' existence de* y_0 *.Soit* $(d = \inf_{y \in A} \|x_0 - y\| > 0)$.

   Choisissons une suite $y_n; \|x_0 - y_n\| \leq d + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \subset A$ *.D'aprés la loi du parallélogramme, nous obtenons*

$$\|x_1 + ... + x_n\|^2 = \|x_i\|^2 + ... + \|x_n\|^2 \tag{1.6}$$

Définition 1.6.2 *Considérons deux ensembles* A_1 *et* A_2 *non vides d'un espace de Hilbert* $\mathbb{H}$. *Nous disons que* A_1 *est orthogonal à* A_2*, noté par* $A_1 \perp A_2$*, si pour tout* $x \in A_1$ *et pour tout* $y \in A_2$ *on a* $x \perp y$*, c.à.d.* $\langle x, y \rangle = 0$.

Théorème 1.6.1 *Si* A *est un ensemble non vide d'un espace de Hilbert* $\mathbb{H}$*, alors*

$$A^{\perp} = \{x; x \in \mathbb{H}, \ \text{et } x \perp A\}$$

est un sous-espace linéaire fermé de $\mathbb{H}$.
$A^{\perp}$ *s'appelle la complément orthogonal de* A.

Preuve Observons d'abord que $A^{\perp} \neq \emptyset$, puis que au moins $0_{\mathbb{H}} \in A^{\perp}$. Soient $x_1, x_2 \in A^{\perp}$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $y \in A$ alors

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle = 0$$

donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A^{\perp}$ et $A^{\perp}$ est un sous-espace linéaire de $\mathbb{H}$.
Soit maintenant $x_0 \in \bar{A^{\perp}}$ alors il existe une suite $\{x_n; \ n \in \mathbb{N}\} \subset A^{\perp}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \parallel x_n - x_0 \parallel = 0$. Nous avons pour tout $y \in A$

$$\langle x_0, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y \rangle = 0.$$

Donc $x_0 \in A^{\perp}$ et $A^{\perp}$ est un sous-espace linéaire fermé.

Théorème 1.6.2 *Soient* H *un espace de Hilbert,* $A \subset H$ *un ensemble non vide convexe et fermé et* $x_0 \in H \setminus A$. *Alors il existe un et seulement un* $y_0 \in A$ *, tel que*

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in A} \|x_0 - y_0\| \tag{1.7}$$

Preuve

a) Montrons d'abord l'existence de y_0 Soit $d = \inf_{y \in A} \|x_0 - y\| > 0$ Choisissons une suite $\{y_n; \|x_0 - y_n\| \leq d + 1/n; n \in \mathbb{N}\} \subset A$

D'aprés la loi du parallélogramme, nous obtenons

$$\|y_m - y_n\|^2 = \|(y_m - x_0) - (y_n - x_0)\|^2 = 2\|y_m - x_0\|^2 + 2\|y_n - x_0\|^2 - 4\|\frac{y_{m+y_n}}{2} - x_0\|^2.$$

Il vient alors $\|y_m - y_n\|^2 \leq 2(d + 1/m)^2 + 2(d + 1/n)^2 - 4d^2$

si $m, n > n_0(\varepsilon)$ puisque A est ensemble convexe, $\frac{y_{m+y_n}}{2} \in A$ et $\|\frac{y_{m+y_n}}{2} - x_0\|^2 \geq d^2$ donc$\{y_n; n \in \mathbb{N}\} \subset A$ est une suite de cauchy et il existe un $y_0 \in H$ tel que $y_n \to y_0$ parce que Aest fermé,$y_0 \in A$

b) Montrons que

$$\|x_0 - y_0\| = d. \tag{1.8}$$

Nous avons $d \leq \|x_0 - y_0\| \leq \|x_0 - y_n\| + \|y_n - y_0\| < d + 1/n + \varepsilon$ si $n > n(\varepsilon)$, d'où le point (1.9)

c) Il nous reste à montrer l' unicité de y_0 Soit $z_0 \in A$, tel que$\|z_0 - x_0\| = d$. En utilisant la loi du parallélogramme (1.4) on a $\|z_0 - y_0\|^2 = \|(z_0 - x_0) - (y_0 - x_0)\|^2 = 2\|z_0 - x_0\|^2 + 2\|y_0 - x_0\|^2 - \|z_0 + y_0 - 2x_0\|^2 = 4d^2 - 4\|\frac{z_0 + y_0}{2} - x_0\| \leq 4d^2 - 4d^2 = 0$ d'où $z_0 = y_0$.

Corollaire 1.6.1 *Soit H_1 un sous-espace d'un espace de Hilbert H Alors il existe pour tout $x \in H$ fixé, un seul $y_0(x) \in H_1$, tel que*

$$\|y_0 - x\| \leq \inf_{Y \in H_1} \|Y - X\| \tag{1.9}$$

Théorème 1.6.3 *Si H_1 est un sous espace fermé d'un espace de Hilbert H, alors tout $x \in H$ se décompose d'une maniére unique*

$$x = y + z, \text{ où } y \in H_1, z \in H_1^{\perp}. \tag{1.10}$$

Preuve L'existence d'une telle décomposition vient du fait que

$$x = Px + (I - P)x,$$

Preuve Où P est projection orthogonale de H sur H_1. Supposons maintenant que

$$x = y + z, y \in H_1, z \in H_1^{\perp}.$$

Alors $Px = Py + Pz = y$ et

$$(I - P)x = (I - P)y + (I - P)z = z.$$

Cette décomposition est donc unique.

Définition 1.6.3 *Un ensemble non vide A d'un espace de Hilbert est un système orthogonal si : pour tout $x, y \in A, x \neq y$, on a $x \perp y$.*

Définition 1.6.4 *Un ensemble $E = \{e_i ; i \in I\}$ d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ est un système orthonormal si :*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & si \quad i = j \\ 0, & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Il est bien connu que $\langle x, y \rangle = 0 \Longleftrightarrow x \perp y$.
$\langle x, x \rangle = \parallel x \parallel^2$

Remarque 1.6.2 *Un systéme orthonormal d'un espace de Hilbert est linéairement indépendant. En effet, si $E = \{e_i ; i \in I\}$ est un systéme orthonormal dans H, et si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{j_k} = 0$,alors, nous avons, pour tout $p = 1, ..., n$,*

$$0 = (o, e_{j_p}) = (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{j_k}, e_{j_p}) = (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{j_k}, e_{j_p})$$

autrement dit

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{kp} = \lambda_p = 0.$$

Définition 1.6.5 *soit H un espace de Hilbert non trivial i.e.$H \neq 0$*
et soit $x_0 \in H$, $x_0 \neq 0$. Le coefficient de Fourier d'un élément $x \in H$ par rapport à x, noté $C_{X_0}(x)$ se définit par

$$C_{X_0}(x) = (x, x_0)/\|x_0\|^2$$

Montrons la signification géométrique d'un coefficient de Fourier.soit P le projection orthogonale de H sur $H_1 = [x_0]$, donc

$$P_x = \xi x_0$$

alors ,nous avons

$$C_{X_0}(x) = (x, x_0)/\|x_0\|^2 = (P_x + (I - P)x, x_0)/\|x_0\|^2 = (P_x, x_0)/\|x_0\|^2$$

c-à-d

$$P_x = C_{X_0}(x) x_0$$

Théorème 1.6.4 *Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ un système orthonormal fini dans l'espace de Hilbert H, alors, pour tout $x \in H$,*

$$\sum_{k=1}^{n} C_K(x) \leq \|x\|^2 \tag{1.11}$$

où $C_K(x) = (x, e_K)$, i.e. le coeffcient de Fourier de x par rapport à $\{e_k ; k = 1, ..., n\}$ La série $\sum_{k=1}^{n} C_K(x) e_k$ s'appelle la série de Fourier de x relativement au systéme e_k

Preuve Si P est la projection orthogonale de H sur le sous espace $H_1 = [e_1, ..., e_n]$, alors pour tout $x \in H$,

$$P_x = \sum_{k=1}^{n} C_K(x) e_k$$

En effet, si $P_x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, alors

$$0 = (x - P_x, e_k) = (x, e_k) - \xi_k$$

pour tout $k = 1, ..., n$. Mais

$$\|P_x\|^2 = (P_x, P_x) = (\sum_{k=1}^{n} C_K(x) e_k, \sum_{j=1}^{n} C_j(x) e_j)$$

=

$$\sum_{k=1}^{n} C_K(x)\overline{C_K(x)} = \sum_{k=1}^{n} |C_K(x)|^2 \leq \|x\|^2$$

Théorème 1.6.5 *(Inégalité de **Bessel**)*
Soit $E = \{e_k; k \in N\}$ un système orthonormal dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $x \in H$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} |C_K(x)|^2 \leq \|x\|^2 \tag{1.12}$$

Preuve

a) Soit $x_n = \sum_{k=1}^{n} C_K(x) e_k \in H$ en vertu de (1.12) on a pour tout $n \in N$,

$$\sum_{k=1}^{n} |C_K(x)|^2 \leq \|x\|^2$$

, De plus

$$\|x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |C_K(x)|^2$$

ce qui entraîne que

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |C_K(x)|^2 \leq \|x\|^2$$

b) pour tout $y \in H_S$ (l'ensemble des combinaisons linéaires). Nous avons $y = \sum_{k=1}^{\infty} n_k e_k$ donc

$$C_j(y) = (y, e_j) = \lim(\sum_{k=1}^{n} n_K e_k, e_j)$$

d'autre part

$$(y, e_j) = \lim(x_n, e_j) = \lim(\sum_{k=1}^{n} n_K e_k, e_j) = C_j(x)$$

Définition 1.6.6 *On appelle base orthonormale dans un espace Hilbert $H = \{0\}$, un systéme orthonormale maximal, i.e.on peut plus ajouter un vecteur non nul qui est orthgonal a une base orthonormale .*

Autrement dit, un systéme orthonormal $\{e_i, i \in I\}$ d'un espace d e Hilbert est une base orthonormale s' appelle aussi systéme orthonormal compléte en encore systéme orthonormal total.

Théorème 1.6.6 *soit $E = \{e_i; i \in In\}$ un systéme orthonormal dans un espace de Helbert H.*

Les énoncée suivants sont equivalents :

i) E est une base orthonormale.

ii) $[E]$ i.e.l'ensemble des conbinaisons lineaires finies sur E, est dense dane H, c-à-d, $[E] = H$

iii) chaque $x \in H$ posséde une représentation unique $x = \sum\limits_{i \in I} C_i(x)e_i$, qui converge en norme, c-à-d. $H = H_e$ et $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |C(x)|^2$

Preuve

a) $i) \Longrightarrow ii)$. Soit $[E] \neq H$. Montrons qu'il existe un $e \perp [E]$,$e \neq 0$, tel que

E ne serait pas une base orthonormale. En effet, il existe $x \in H \backslash [E]$, tel que $(I - P)x \neq 0$ est prenons

$$e = \frac{(I - p)x}{\|(I - P)x\|} \tag{1.13}$$

où P est la projection orthogonale de H sur $[E]$.

b) $ii) \Longrightarrow iii)$. Soit $x \in H$. Alors il existe $\{x_n \in [E]; n \in \mathbb{N}\}$qui converje vers x. Mais $x_n \in H_e$; donc d'aprés(Theoreme) $x \in H_e$. L'unicite de la representation vient du fait que si $x = \sum_{i \in I} \xi_i e_i$, alors $\xi_i = C_i(x)$, pour tout $i \in I$. (voir demonstration du Théoréme [**?**]

c) $iii) \Longrightarrow i)$. Soit $x \in H = H_e$. Alors

$$x = \sum_{i \in I} C_i(x)e_i = \sum_{q=1}^{\infty} C_{i_q}(x)e_{i_q}$$

dont les sommes partielles convergent en normes.

Théorème 1.6.7 *un système orthonormal $E = \{e_k; k \in N\}$ dans un espace de Hilbert H.est dit fermé si pour tout $x \in H$ on a l'égalité suivante :*

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |C(x)|^2 \tag{1.14}$$

*appelée Identité de **Parseval***

Théorème 1.6.8 *Si H est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie (dénombrable) muni d'une base hilbertienne $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ $x_n \in H$: le produit scalaire (x_n, y_n), de x_n avec un autre élément quelconque y_n de H :*

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(y)e_k$$

qui est lui aussi décomposé selon cette même base, s'obtient en sommant les produits(conjugués) de leurs coefficients :

$$(x_n, y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(x)e_k\overline{C_k(y)e_k}$$

1.7 Opérateurs linéaires bornés à 2 variables

1.7.1 Préliminaires

Définition 1.7.1 *Soit X un espace linéaire réel de dimension supérieure à 1 et soit $\|.,.\|$ une fonction à valeurs réelles sur $X \times X$ satisfaisant la quatre propriétés suivantes :*

(1) $\|x, y\| = 0$ si et seulement si les vecteurs x et y sont linéairement dépendants ;

(2) $\|x, y\| = \|y, x\|$;

(3) $\|x, \alpha y\| = |\alpha|\|x, y\|$ pour tout nombre réel α ;

(4) $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ pour tout $x, y, z \in X$.

La fonction $\|.,.\|$ sera appelé une espace linéaire 2-normé sur X et le couple $(X, \|.,.\|)$ un espace linéaire à 2-normés.

Définition 1.7.2 *[4] Soit X un espace linéaire sur le corps K (où K est le corps de nombres réels ou complexes). Un sous-ensemble flou N de $X \times R$ (R est l'ensemble des nombres réels) est appelée 2-norme sur X ssi pour tout $x, u \in X$ et $c \in K$*

(N1) pour tout $t \in R$, avec $t \leq 0$, $N(x, t) \neq 0$

(N2) pour tout $t \in R$, avec $t > 0$, $N(x, t) = 1$ si et seulement si $x = 0$.

(N3) pour tout $t \in R$,avec $t > 0$,

$$N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|}) sic \neq 0$$

.

(N4) pour tout $s, t \in R$, $x, u \in X$,

$$N(x + u, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(u, t)\}$$

(N5) $N(x, \bullet)$ est une fonction non décroissante de R et

$$\lim N(x, t) = 1$$

.

Le couple (X, N) sera appelé un espace linéaire 2-normé

Définition 1.7.3 *[5] : Soit X un espace linéaire sur un corps F . Un sous-ensemble flou N de $X \times X \times R$ (R est l'ensemble des nombres réels) est appelée une 2-norme floue sur X si et seulement si*

1. *pour tout* $t \in R$, *avec* $t \leq 0$, $N(x_1, x_2, t) = 0$.

2. *pour tout* $t \in R$, *avec* $t > 0$, $N(x_1, x_2, t) = 1$ *si et seulement si* x_1 *et* x_2 *sont linéairement dépendant.*

3. $N(x_1, x_2, t)$ *est invariant sous toute permutation de* x_1, x_2.

4. *pour tout* $t \in R$, *avec* $t > 0$,

$$N(x_1, cx_2, t) = N(x1, x2, \frac{t}{|c|}), si \quad c \neq 0, c \in F$$

.

5. *pour tout* $s, t \in R$,

$$N(x_1 + x_2 + x_2', s + t) \geq \min\{N(x_1, x_2, s), N(x_1, x_2', t)\}$$

6. $N(x_1, x_2, \bullet)$ *est une fonction non décroissante de* R *et* $\lim_{t\to\infty} N(x_1, x_2, t)$

alors $N(X, N)$ *est appelé un espace linéaire 2-normé*

Exemple 1.7.1 *Soit* $(X, \|., .\|)$ *être un espace linéaire de 2-norme définit*

$$N(x_1, x_2, t) = \frac{t}{t + \|x_1, x_2\|}$$

quand $t > 0$,$t \in R$ $x_1, x_2 \in A \times B = 0$, *quand* $t \leq 0, t \in R, x_1, x_2 \in A \times B$ *Alors* (X, N) *espace linéaire flou de norme 2.*

Définition 1.7.4 *[6] : Un opérateur linéaire de 2-norme* T *est une fonction de* $A \times B$ *vers* $C \times D$ *où* A, B *sont des sous-espaces de l'espace linéaire flou de norme 2* (X, N_1) *et* C, D *sont sous-espaces de l'espace linéaire de 2-norme* (Y, N_2) *tels que* $T(x_1+x, x_2+x') = T(x_1, x_2)+T(x_1, x')+T(x, x_2)+T(x, x')$ *et* $T(\alpha x_1, \beta x_2) = \alpha\beta T(x_1, x_2)$.

1.7.2 Opérateur linéaire à 2-bornés

Dans cette section, nous définissons la notion de 2-borne faiblement floue et fortement 2-limitation floue pour les opérateurs linéaires 2-bornés flous sur linéaire 2-normé flou les espaces et la relation entre la 2-continuité floue et la 2-limitation floue sont étudiés. Soit X et Y deux espaces linéaires sur le même champ de scalaires. Soit N_1 et N_2 soit deux normes floues 2 sur X et Y respectivement. Alors (X, N_1) et (Y, N_2) sont flous Espaces linéaires à 2 normes.

Définition 1.7.5 *Soit $T : A \times B \to C \times D$ un opérateur 2-linéaire flou, où A, B sont les sous-espaces de (X, N_1) et C, D sont des sous-espaces de (Y, N_2) alors T est dit fortement flou 2- borné sur $A \times B$ si et seulement si $\exists$a un nombre réel positif M tel que $\forall (x, x') \in A \times B$ et*

$$\forall s \in R, N_2[T(x, x'), s] \geq N_1[(x, x'), \frac{s}{M}]$$

Définition 1.7.6 *Soit $T : A \times B \to C \times B$ un opérateur 2-linéaire flou, où A, B sont les sous-espaces de (X, N_1) et C, D sont des sous-espaces de (Y, N_2), alors T est dit faiblement floue 2-bornée sur $A \times B$ si pour tout $\alpha \in (0, 1), \exists M_\alpha > 0$ tel que $\forall (x, x') \in A \times B$, $\forall t \in R$,*

$$N_1((x, x'), \frac{t}{M_\alpha}) \geq \alpha \Rightarrow N_2((x, x'), t) \geq \alpha$$

Théorème 1.7.1 *Soit $T : A \times B \to C \times B$ un opérateur 2-linéaire flou, où A, B sont les sous-espaces de (X, N_1) et C, D sont des sous-espaces de (Y, N_2), alors T est fortement flou-2 bornée alors elle est faiblement floue 2-bornée mais pas l'inverse.*

Preuve *Supposons d'abord que T est fortement flou 2-borné. Donc $\exists M \geq 0$ tel que $\forall (x, x') \in A \times B$ et $\forall s \in R$, on a $N_2[T(x, x', s)] \geq N_1(x, x', \frac{s}{M})$ Ainsi pour tout $\alpha \in (0, 1)$, $\exists M_\alpha (= M) > 0$, tel que*

$$N_1(x, x', \frac{s}{M}) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x, x', s)) \geq \alpha \forall (x, x') \in A \times B \forall s \in R$$

ceci implique que T est faiblement flou 2-borné. A l'inverse, on considère l'exemple suivant

Exemple 1.7.2 *Soit $X = R^2$ un espace linéaire sur R . Soit $x = (a, b), x' = (a', b')$ Définir*

$$\|x, x'\| = |ab' - a'b|, x = |a, b| = b - a$$

puis $(X, \|., .\|)$ un espace linéaire de 2-normé

Chapitre 2

Les opérateurs linéaires continus

2.1 Opérateurs linéaires

Dans ce paragraphe, nous donnons des caractérisations des opérateurs linéaires continus. soient $(\mathbb{X}, \| \,.\, \|_{\mathbb{X}})$ et $(\mathbb{Y}, \| \,.\, \|_{\mathbb{Y}})$ deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$.

Définition 2.1.1 *Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espaces linéaires sur le même corps $\mathbb{K}$.*
Une application $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ est additive si :

$$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$.
Une application $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ est homogène si :

$$T(\lambda x) = \lambda Tx.$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{X}$.
Une application $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ est linéaire si elle est additive et homogène.
En d'autres termes, l'application $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ est linéaire si et seulement si

$$T(\lambda x_1 + x_2) = \lambda Tx_1 + Tx_2$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$.
Notons par $\mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ l'ensemble des opérateurs linéaires de $\mathbb{X}$ dons $\mathbb{Y}$.

Exemple 2.1.1 *L'application $T : C_b^\infty(\mathbb{R}) \to C_b^\infty(\mathbb{R})$ donnée par*

$$(Tf)(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

est un opérateur linéaire. $C_b^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble de fonctions infiniment dérivables et bornées sur $\mathbb{R}$.

Notations :

- On notera $\ker(T)$ le noyau de l'opérateur T ; i.e.

$$\ker(T) = \{x \in \mathbb{X}; \quad Tx = 0\}.$$

  Et aussi noté parfois $N(T)$.

  On remarque $\ker(T) \subset \mathbb{X}$; $Im(T) \subset \mathbb{Y}$

- $Im(T)$ désignera l'image de $\mathbb{X}$ par T. On le notera aussi $T\mathbb{X}$; i.e.

$$Im(T) = \{Tx; \; x \in \mathbb{X}\}.$$

  Et aussi noté parfois $R(T)$.

Théorème 2.1.1 *Soit T un opérateur linéaire $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. Alors*

i) $T(0) = 0$.

ii) *$T\mathbb{X}$ est un sous-espace linéaire de $\mathbb{Y}$.*

iii) $\ker(T) = \{x \in \mathbb{X}; Tx = 0\}$ *est un sous-espace linéaire de $\mathbb{X}$.*

iv) *T est une application injective si et seulement si $T(x) = 0$ entraîne $x = 0$, i.e.* $\ker(T) = \{0_{\mathbb{X}}\}$.

Preuve

i) Nous avons

$$T(0) = T(x + (-x)) = T(x) + T(-x) = T(x) - T(x) = 0.$$

ii) Soient $y_1, y_2 \in T\mathbb{X}$ tels que $y_1 = T(x_1)$ et $y_2 = T(x_2)$. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$\alpha y_1 + y_2 = \alpha T(x_1) + T(x_2) = T(\alpha x_1 + x_2).$$

Donc $\alpha y_1 + y_2 \in T\mathbb{X}$.

iii) Soient $x_1, x_2 \in \ker(T)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T(x_1) + T(x_2) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha x_1 + x_2 \in \ker(T)$.

iv) Soit T une application linéaire injective. Alors $x \neq 0$ entraîne $T(x) \neq T(0) = 0$, donc $\ker(T) = \{0_{\mathbb{X}}\}$. Supposons maintenant que $\ker(T) = \{0_{\mathbb{X}}\}$. Alors $T(x) = 0$ entraîne $x = 0$, donc T est injectif, parce que si $x_1 \neq x_2$ alors $x_1 - x_2 \notin \ker(T)$, donc $T(x_1 - x_2) \neq 0$, d'où $T(x_1) \neq T(x_2)$.

Définition 2.1.2 *Soit $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espace linéaire et $t : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ un opérateur linéaire, T est inversible sur $T\mathbb{X}$ si et seulement si : T injective.*
et $T^{-1} : T\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $T^{-1}(y) = x \;\Rightarrow\; y = T(x)$

Théorème 2.1.2 *Soit $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espaces linéaires sur le même corps $\mathbb{K}$ et $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ un opérateur linéaire. Alors T est inversible sur $T\mathbb{X}$ et $T^{-1} : T\mathbb{X} \to \mathbb{X}$ est opérateur linéaire si et seulement si T est injectif.*

Preuve

a) Pour tout $y_1, y_2 \in T\mathbb{X}$, il existe un seul $x_1 \in \mathbb{X}$ et un seul $x_2 \in \mathbb{X}$ tel que $y_1 = Tx_1$ et $y_2 = Tx_2$ alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda y_1 + \mu y_2 \in T\mathbb{X}.$$

Donc

$$\begin{aligned} T^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2) =& \lambda x_1 + \mu x_2 \\ =& \lambda T^{-1} y_1 + \mu T^{-1} y_2. \end{aligned}$$

donc T^{-1} est linéaire .

b) Si T^{-1} existe $\Rightarrow$ T est injectif.

T est injectif $\Rightarrow$ T^{-1} existe sur $T\mathbb{X}$

2.1.1 Les opérateurs linéaires bornés

Définition 2.1.3 *L'opérateur linéaire $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est borné s' il existe un nombre $M > 0$, tel que*

$$\| Tx \|_{\mathbb{Y}} \leq M \| x \|_{\mathbb{X}} . \tag{2.1}$$

Pour tout $x \in \mathbb{X}$.

L'opérateur identité *I est défini par $Ix = x$ pour tout 0 $x \in \mathbb{X}$.*

L'opérateur zero *0 est défini par $0x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{X}$.*

Exemple 2.1.2 1. *une applicatoin linéaire entre espaces vectoriels normés de dimension finie est toujours un opérateur borné.*

2. *L'opérateur de multiplication T défini sur l'espace $C([1, 2])$, alors :*

$$\begin{aligned} \| Tf \| &= \sup_{x \in [1,2]} | Tf(x) | \\ &= \sup_{x \in [1,2]} | x \cdot f(x) | \\ &\leq 2 \| f \| \quad (M = 2) \quad \forall f \in C([1, 2]). \end{aligned}$$

Définition 2.1.4 *L'opérateur linéaire T est continu à $x_0 \in \mathbb{X}$ si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0, \ \forall x \in \mathbb{X} \quad \| x - x_0 \|_{\mathbb{X}} < \sigma \Rightarrow \| Tx - Tx_0 \|_{\mathbb{Y}} < \epsilon. \tag{2.2}$$

Puis que la continuité de T peut être caractérisée par les suites, T est continu à x_0 si pour toute suite $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{X}$ telle que :

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x_0 \|_{\mathbb{X}} = 0.$$

On a

$$\lim_{n \to \infty} \| Tx_n - Tx_0 \|_{\mathbb{Y}} = 0.$$

en effet

$$\| Tx_n - Tx_0 \|_{\mathbb{Y}} \leq \| x_n - x_0 \|_{\mathbb{X}}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| Tx_n - Tx_0 \|_{\mathbb{Y}} = 0$$

Théorème 2.1.3 *Soit $x_0 \in \mathbb{X}$ quelconque, si $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ alors on a :*

$$T \textit{est continu en } x_0 \Leftrightarrow T \textit{ est continu sur } \mathbb{X}.$$

Preuve

T est continu en $x_0 \Leftrightarrow \left\{ \lim_{n\to\infty} \| x_n - x_0 \|_{\mathbb{X}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| Tx_n - Tx_0 \|_{\mathbb{Y}} = 0 \right\}$. Soit $x \in \mathbb{X}$ quelconque il suffit de montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n^{'} - x \|_{\mathbb{X}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| Tx_n^{'} - Tx \|_{\mathbb{Y}} = 0.$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n^{'} - x \|_{\mathbb{X}} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \| (x_n^{'} - x + x_0) - x_0 \|_{\mathbb{X}} = 0.$$

On pose $y_n = (x_n^{'} - x + x_0)$ on a T est continu en $x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| Ty_n - Tx_0 \|_{\mathbb{Y}} = 0$, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \| T(x_n^{'} - x + x_0) - Tx_0 \|_{\mathbb{Y}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| Tx_n^{'} - Tx + Tx_0 - Tx_0 \|_{\mathbb{Y}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| Tx_n^{'} - Tx \|_{\mathbb{Y}} = 0.$$

Donc T est continu sur $\mathbb{X}$.

Définition 2.1.5 *L'opérateur $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ est dite uniformément continu si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall x, y \in \mathbb{X} \ \ \| x - y \|_{\mathbb{X}} < \sigma \Rightarrow \| Tx - Ty \|_{\mathbb{Y}} < \epsilon. \tag{2.3}$$

σ ne dépend pas de ϵ.

Définition 2.1.6 ***(Application lipschitzienne)*** *Si k est un réel positif, on appelle application lipschitzienne de rapport k, toute opérateurs T vérifiant :*

$$\| Tx - Ty \|_{\mathbb{Y}} \leq k \| x - y \|_{\mathbb{X}} .$$

Éventuellement on précise : k-lipschitzienne.
tout application lipschitzienne et borné donc continu .

Exemple 2.1.3 *Soit $E \subset (\mathbb{R}_+, |.|)$, on définit l'opérateur T par :*

$$T(x) = \frac{x}{2}.$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
|T(x) - T(y)| &= \mid \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \mid \\
&= \mid \frac{1}{2}(x-y) \mid \\
&= \mid \frac{1}{2} \mid\mid x - y \mid \\
&\leq \tfrac{1}{2} \mid x - y \mid .
\end{aligned}$$

C'est-à-dire T *est lipschitzienne de rapport* $\frac{1}{2}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

On remarque T *est linéaire .*

Remarque 2.1.1 *Il est clair que, si* T *est lipschitzienne alors,* T *est uniformément continu mais le contraire n'est pas toujours juste, par exemple l'opérateur* $T :]0;1] \to \mathbb{R}$ *qui est définie par* $Tx = \sqrt{x}$ *est uniformément continu sur* $\mathbb{R}_+$*, mais elle est non lipschitzienne.*

Théorème 2.1.4 $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *est continu* $\Longleftrightarrow T$ *est borné .*

Preuve

a) Soit T un opérateur linéaire borné et soit $x_0 \in \mathbb{X}$ quelconque. La relation (2.1) appliquée à $(x - x_0)$

$$\| T(x) - T(x_0) \|_{\mathbb{Y}} = \| T(x - x_0) \|_{\mathbb{Y}} \leq M \| x - x_0 \|_{\mathbb{X}} .$$

montre que T est continu à x_0 et donc sur $\mathbb{X}$.

b) Montrons que (2.2) entraîne (2.1) en vérifiant que non (2.1) entraîne non (2.2). Supposons donc qu'il existe des vecteurs $x_n \in \mathbb{X}$, $\| x_n \|_{\mathbb{X}} = 1$ tels que

$$\| Tx_n \|_{\mathbb{Y}} > n \| x_n \|_{\mathbb{X}} = n.$$

La suite $\{y_n = \frac{x_n}{\sqrt{n}};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ converge vers 0 .

$$\| Ty_n \| = \| T(\frac{x_n}{\sqrt{n}}) \| = \frac{1}{\sqrt{n}} \| Tx_n \| \geq_{n\to\infty} \nrightarrow 0 = T(0)$$

$\Longrightarrow T$ n'est pas continu

$$T(0) = 0, y_n \to 0, Ty_n \nrightarrow T(0) = 0$$

Exemple 2.1.4 *Soit* $T \in \mathbb{L}_a(C_b^\infty(\mathbb{R})), C_b^\infty(\mathbb{R}))$ *défini par*

$$Tf(t) = \frac{df(t)}{dt}.$$

Pour tout $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$*. Alors nous avons pour* $f(t) = \sin nt$*,*

$$\| f \|_\infty = 1, \;\; et \, \| Tf \| = \| n \cos nt \|_\infty = n$$

, $\bullet T(\lambda f+g)'=(\lambda f+g)'=\lambda f'+g'$ *sonc* T *linéaire*

$\bullet f_n(t)=sin(nt) \parallel f_n \parallel_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}(sin(nt))=1 \Rightarrow \{f_n\}_n$ *est borné*

$\bullet T(f_n)=(sin(nt))'=ncos(nt). \parallel T(f_n) \parallel_\infty = n \to \infty \Rightarrow T$ *est non borné donc non continu*

Notons par $\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\subset\mathbb{L}_a(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *l'ensemble des opérateurs linéaires continus de* $\mathbb{X}$ *dons* $\mathbb{Y}$*. Observons d'abord que* $\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\neq\emptyset$*, puis que au moins l'opérateur nul* $0\in\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$*. Nous donnons maintenant des caractéristiques différentes pour un opérateur linéaire continu.*

Théorème 2.1.5 *Soit* $T\in\mathbb{L}_a(\mathbb{X},\mathbb{Y})$*. Les énoncés suivants sont équivalents*

1) T *est continu à* 0.

2) T *est continu sur* $\mathbb{X}$.

3) T *est uniformément continu sur* $\mathbb{X}$.

4) $\exists M>0$: $\parallel Tx \parallel_{\mathbb{Y}} \leq M \parallel x \parallel_{\mathbb{X}}$, *pour tout* $x\in\mathbb{X}$.

5) $\exists M>0$: $\parallel Tx \parallel_{\mathbb{Y}} \leq M$, *pour tout* $x\in B_F(0,1)$, *i.e.* $\{\forall x\in\mathbb{X}; \parallel x \parallel_{\mathbb{X}} \leq 1\}$.

Preuve

5) $\Rightarrow$ 4)

$x=0$: 4) est vérifié

$x\neq 0$: $\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{X}}}\in B_F(0,1)$ donc

$$\begin{aligned} & \parallel T(\frac{x}{\parallel x \parallel_{\mathbb{X}}}) \parallel_{\mathbb{Y}} \leq M \\ \Rightarrow & \frac{1}{\parallel x \parallel_{\mathbb{X}}} \parallel Tx \parallel_{\mathbb{Y}} \leq M \\ & \Rightarrow \parallel Tx \parallel_{\mathbb{Y}} \leq M \parallel x \parallel_{\mathbb{X}} \quad \forall x\in\mathbb{X}-\{0_{\mathbb{X}}\}. \end{aligned}$$

4) $\Rightarrow$ 3)

T est uniformément continu $\Leftrightarrow \forall\epsilon>0, \exists\lambda>0$ tel que $\forall x,x^{'}\in\mathbb{X} \parallel x-x^{'} \parallel_{\mathbb{X}} < \lambda \Rightarrow \parallel Tx-Tx^{'} \parallel_{\mathbb{Y}} < \epsilon$.

Soit $\epsilon>0$, on pose $\lambda=\frac{\epsilon}{M}$ on a

$$\begin{aligned} \parallel Tx-Tx^{'} \parallel_{\mathbb{Y}} &= \parallel T(x-x^{'}) \parallel_{\mathbb{Y}} \\ &\leq M \parallel x-x^{'} \parallel_{\mathbb{X}} . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \parallel x-x^{'} \parallel_{\mathbb{X}} < \frac{\epsilon}{M} \\ \Rightarrow & M \parallel x-x^{'} \parallel_{\mathbb{X}} < \epsilon \\ \Rightarrow & \parallel Tx-Tx^{'} \parallel_{\mathbb{Y}} \leq M \parallel x-x^{'} \parallel_{\mathbb{X}} \\ & < M(\frac{\epsilon}{M}) = \epsilon \\ \Rightarrow & \parallel Tx-Tx^{'} \parallel_{\mathbb{Y}} < \epsilon. \end{aligned}$$

$3) \Rightarrow 2)$ et $2) \Rightarrow 1)$ évident par définition.

$1) \Rightarrow 5)$

$\forall \epsilon > 0, \exists \lambda > 0$ tel que $\| x \|_{\mathbb{X}} < \lambda \Rightarrow \| Tx \|_{\mathbb{Y}} < \epsilon$. Pour $\epsilon = 1$ on a

$$\exists \lambda_1 > 0 \ \| x \|_{\mathbb{X}} < \lambda_1 \Rightarrow \| Tx \|_{\mathbb{Y}} < 1.$$

Soit $x \in B_F(0,1) \Rightarrow \| x \|_{\mathbb{X}} \leq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\| \frac{\lambda_1}{2} x \|_{\mathbb{X}} = \frac{\lambda_1}{2} \| x \|_{\mathbb{X}} &\leq \frac{\lambda_1}{2} < \lambda_1 \\
\Rightarrow \| T(\frac{\lambda_1}{2} x) \|_{\mathbb{Y}} &\leq 1 \\
\Rightarrow \frac{\lambda_1}{2} \| Tx \|_{\mathbb{Y}} &\leq 1 \\
\Rightarrow \| Tx \|_{\mathbb{Y}} &\leq \frac{2}{\lambda_1} = M, \ \forall x \in B_F(0,1).
\end{aligned}$$

2.1.2 L'espace norme $(\mathbb{L}(\mathbb{X};\mathbb{Y}), \| \,.\, \|)$

Dans ce qui suit, $\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ signifie l'ensemble des opérateurs linéaires continus de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$ qui est un sous-espace linéaire de l'espace linéaire $\mathbb{L}_a(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Donc $\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ peut être regardé lui-même comme un espace linéaire sur le corps $\mathbb{K}$. Introduisons maintenant une norme pour $\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

Théorème 2.1.6 $T \in L(\mathbb{X},\mathbb{Y})$

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{x \neq 0, x \in \mathbb{X}} \{\frac{\|Tx\|_{\mathbb{Y}}}{\|x\|_{\mathbb{X}}}\} \\
&= \sup\{\|Tx\|_{\mathbb{Y}}, \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\} \\
&= \inf\{M > 0, \|Tx\|_{\mathbb{Y}} \leq M\|x\|_{\mathbb{X}}\}
\end{aligned}$$

est une norme pour $\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

Preuve

Pour tout $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y}), \| T \| \geqslant 0$ et $\| T \|$ est finie. Si $\| T \| = 0$, alors $Tx = 0$ pour tout $x \in \mathbb{X}$. En effet pour $x \neq 0$

$$\| Tx \|_{\mathbb{Y}} = \| x \|_{\mathbb{X}} \| T \frac{x}{\| x \|_{\mathbb{X}}} \|_{\mathbb{Y}} = 0.$$

Donc $Tx = 0$ sur $\mathbb{X}$ et $T = 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\| \lambda T \| = |\lambda| \, \| T \|$ parce que

$$\begin{aligned}
\| \lambda T \| &= sup\{\| (\lambda T)x \|_{\mathbb{Y}}; \ \| x \|_{\mathbb{X}} \leq 1\} \\
&= sup\{|\lambda| \, \| Tx \|_{\mathbb{Y}}; \ \| x \|_{\mathbb{X}} \leq 1\} \\
&= |\lambda| \, \| T \| .
\end{aligned}$$

En fin, pour tout $x \in \mathbb{X}$, tel que $\| x \|_{\mathbb{X}} \leq 1$, nous avons

$$\begin{aligned}
\| (T_1 + T_2)x \|_{\mathbb{Y}} = \| T_1 x + T_2 x \|_{\mathbb{Y}} &\leq \| T_1 x \|_{\mathbb{Y}} + \| T_2 x \|_{\mathbb{Y}} \\
&\leq \| T_1 \| + \| T_2 \| .
\end{aligned}$$

Théorème 2.1.7 *Soient* $(\mathbb{X}, \| \,.\, \|_{\mathbb{X}})$ *un espace normé et* $(\mathbb{Y}, \| \,.\, \|_{\mathbb{Y}})$ *un espace de Banach. Alors* $(\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \|.\|)$ *est un espace de Banach.*

Preuve

On sait déjà que $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est un espace normé . Il nous reste à montrer que $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est complet. Soit $\{T_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ une suite de Cauchy. Alors $\| T_n - T_m \| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n, m > n_0(\varepsilon)$. Pour $x \in \mathbb{X}$ fixé l'inégalité

$$\begin{aligned} \| Tx - T_n x \|_{\mathbb{Y}} &\leq \| T - T_n \| \cdot \| x \|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \varepsilon \| x \|_{\mathbb{X}} \end{aligned}$$

$$\sup_{\|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1} \| \mid T - T_n \| \, x \mid \|_{\mathbb{Y}} \leq \varepsilon$$

Montre que $\{ \, T_n x; n \in \mathbb{N} \, \} \subset \mathbb{Y}$ est une suit de Cauchy. Mais $(\mathbb{Y}, \| \,.\, \|_{\mathbb{Y}})$ est un espace de Banach, donc $T_n x$ est convergente, i.e. $\lim_{n \to +\infty} T_n x$ existe pour tout $x \in \mathbb{X}$. Définissions l'application $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ par $Tx = \lim_{n \to +\infty} T_n x$, pour tout $x \in \mathbb{X}$. Montrons que $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
D'abord T est linéaire parce que

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \to +\infty} T_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_{n \to +\infty} (\alpha T_n x + \beta T_n y) \\ &= \alpha T x + \beta T y \end{aligned}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathbb{X}$.
D'autre part, nous avons

$$\| T_n x \|_{\mathbb{Y}} \leqslant M \| x \|_{\mathbb{X}}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}.$$

Ce qui entraîne, pour $n \to \infty$, que

$$\| Tx \|_{\mathbb{Y}} \leqslant M \| x \|_{\mathbb{X}}, \text{ et donc } \; T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}).$$

Enfin, montrons que $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$.
Nous avons

$$\begin{aligned} \| T_m x - T_n x \|_{\mathbb{Y}} &\leq \| T_m - T_n \| \cdot \| x \|_{\mathbb{X}} \\ &< \varepsilon \| x \|_{\mathbb{X}} \, . \end{aligned}$$

Si $n, m > n_0(\varepsilon)$ et pour tout $x \in \mathbb{X}$.
En fixant n, nous obtenons pour $m \to \infty$. Nous avons

$$\begin{aligned} \| Tx - T_n x \|_{\mathbb{Y}} &\leq \| T - T_n \| \cdot \| x \|_{\mathbb{X}} \\ &< \varepsilon \| x \|_{\mathbb{X}}, \text{ si } n > n_0(\varepsilon), \end{aligned}$$

et donc

$$\| T - T_n \| < \varepsilon, \text{ si } n > n_0(\varepsilon), \text{ c-à-d } \; T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T.$$

Corollaire 2.1.1 *Soit $(\mathbb{X}, \| \,.\, \|)$ un espace normé. Alors l'espace dual topologique $\mathbb{X}'$ est un espace de Banach. En effet $\mathbb{X}' = \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$ est un espace de Banach.*

Théorème 2.1.8 *Soit $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. L'opérateur inverse T^{-1} existe et est continu sur $T\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$ si et seulement s'il existe un nombre $k > 0$, tel que*

$$\| Tx \|_{\mathbb{Y}} \geq k \| x \|_{\mathbb{X}}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}. \tag{2.4}$$

Preuve

Si $\mathbb{X} = \{0_{\mathbb{X}}\}$ il n'y a rien à dire. Supposons donc que $\mathbb{X} \neq \{0_{\mathbb{X}}\}$

1. $\alpha x_1 + x_2 = T^{-1}(\alpha y_1 + y_2) = \alpha T^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2)$
2. Soit $T^{-1} \in \mathbb{L}(\,T\mathbb{X}, \mathbb{X})$. Évidemment $T^{-1} \neq 0$.

$$\forall y \in T\mathbb{X}, \; \| T^{-1}y \|_{\mathbb{X}} \leq \| T^{-1} \| \cdot \| y \|_{\mathbb{Y}}$$

et donc, en posant $y = Tx$, nous obtenons

$$\| x \|_{\mathbb{X}} \leq \| T^{-1} \| \cdot \| Tx \|_{\mathbb{Y}},$$

parce que $\| T^{-1} \| > 0$, la relation (2.4) est montrée avec $k = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

3. Supposons maintenant qu'on a (2.4). Alors

$$\ker(T) = \{x; Tx = 0\} = \{0_{\mathbb{X}}\},$$

donc T^{-1} existe sur $T\mathbb{X}$ et T^{-1} est linéaire.

Montrons que T^{-1} est continu

$$\forall x \in \mathbb{X} \; k \| x \|_{\mathbb{X}} \leq \| Tx \|_{\mathbb{Y}} .$$

Soit $x = T^{-1}y$, i.e. $y = Tx$, alors

$$k \| T^{-1}y \|_{\mathbb{X}} \leq \| y \|_{\mathbb{Y}}$$

entraine que

$$\| T^{-1}y \|_{\mathbb{X}} \leq \frac{1}{k} \| y \|_{\mathbb{Y}}, \; \forall y \in T\mathbb{X}, \text{ et } T^{-1} \text{ est continu.}$$

Exemple 2.1.5 *Soit $E = l^2, (\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée dans $\mathbb{C}$ et $M = \sup_n |\lambda_n|$. Soit $T : l^2 \to l^2$ définie par : $Tx = (\lambda_n x_n)_{n\geq 1}$,si $x = (x_n)_{n\geq 1} \in E$.*

Montrons que $T \in l^{l^2}$.

La linéarité de T est évidente.

T est bornée.

En effet : $\forall x \in E$ *on a*

$$\begin{aligned}\|Tx\|_2^2 &= \sum_{n\geq 1} |\lambda_n x_n|^2 \\ &\leq |\lambda_n| \sum_{n\geq 1} |x_n| \\ &\leq M^2 \sum_{n\geq 1} |x_n|^2 \\ &\leq M^2 \|x\|_2^2. \\ \Rightarrow \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_2} &\leq M, x \neq 0.\end{aligned}$$

Donc $\| T \|_{l(l^2)} \leq M$.

Soit $(e_n)_n$ *la base hilbertienne canonique de E. Alors pour tout* n

$$\begin{aligned}|\lambda_n| &= \|Te_n\|_2 \\ &\leq \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_2}, x \neq 0. \\ &\leq \| T \|_{l(l^2)}\end{aligned}$$

donc $M = \sup_n |\lambda_n| \leq \| T \|_{l(l^2)}$

Conclusion : $\| T \|_{l(l^2)} = M$.

Théorème 2.1.9 ***(Hahn-Banach, forme analytique)*** *[2]* *Soit E un espace linéaire sur* $\mathbb{R}$ *et* $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonctionnelle vérifiant*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \ \forall x \in E \ et \ \forall \lambda > 0. \tag{2.5}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \ \forall x, y \in E. \tag{2.6}$$

Soit d'autre part, $G \subset E$ *un sous-espace linéaire et soit* $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonctionnelle linéaire tel que*

$$g(x) \leq p(x), \ \forall x \in G. \tag{2.7}$$

Alors il existe une forme linéaire f *définie sur E qui prolonge* g*, i.e.*

$$g(x) = f(x), \forall x \in G$$

et telle que

$$f(x) \leq p(x), \ \forall x \in E. \tag{2.8}$$

Corollaire 2.1.2 *Soit G un sous-espace linéaire de E et soit* $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application linéaire et continu. Alors il existe* $f \in E^{'}$ *qui prolonge* g *et tel que*

$$\| f \|_{E'} = \| g \|_{G'} .$$

Preuve Appliquer le théorème (2.1.9) avec $p(x) = \| g \|_{G'} \cdot \| x \|_E$.

Corollaire 2.1.3 *Pour tout $x_0 \in E$ il existe $f_0 \in E^{'}$ tel que*

$$\| f_0 \|_{E'} = \| x_0 \|_E, \ \text{et } \langle f_0, x_0 \rangle = \| x_0 \|_E^2 .$$

Preuve Appliquer le corollaire (2.1.2) avec $G = \mathbb{R}x_0$, et $g(tx_0) = t \| x_0 \|_E^2$ de sorte que

$$\| g \|_{G'} = \| x_0 \|_E .$$

Corollaire 2.1.4 *Pour tout $x \in E$ on a*

$$\| x \|_E = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} | \langle f, x \rangle | = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} | \langle f, x \rangle | .$$

Preuve Supposons que $x \neq 0$. Il est clair que

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} | \langle f, x \rangle | \leq \| x \|_E .$$

D'autre part (corollaire (2.1.3)) on sait qu'il existe $f_0 \in E^{'}$ tel que $\| f_0 \|_{E'} = \| x \|_E$ et $\langle f_0, x \rangle = \| x \|_E^2$. On pose $f_1 = \| x \|_E^{-1} f_0$ de sorte que $\| f_1 \|_{E'} = 1$ et $\langle f_1, x \rangle = \| x \|_E$.

Théorème 2.1.10 ***(Banach-Steinhaus)****[2]* *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continus de E dans F. On suppose que*

$$\sup_{i \in I} \| T_i x \| < \infty, \ \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i \in I} \| T_i \|_{\mathbb{L}(E,F)} < \infty.$$

Autrement dit, il existe une constante c telle que

$$\| T_i x \| \leq c \| x \|, \forall x \in E \ \forall i \in I.$$

Théorème 2.1.11 ***(Arzela-Ascoli)****[3]* *Soit $(\mathbb{X}, \| \ . \ \|_{\mathbb{X}})$ un espace norme compact, $(\mathbb{Y}, \| \ . \ \|_{\mathbb{Y}})$ un espace norme complet. Une partie A de $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est relativement compacte si et seulement si :*

1. *A est équicontinu, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in \mathbb{X}, \ \forall \epsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \ \forall f \in A, \ \forall y \in \mathbb{X} \ \ \| x - y \|_{\mathbb{X}} < \eta \ \Rightarrow \| f(x) - f(y) \|_{\mathbb{Y}} < \epsilon.$$

2. *Pour tout $x \in \mathbb{X}$, l'ensemble $A(x) = \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact, (i.e. A est uniformément borné).*

2.1.3 Opérateurs réguliers

Définition 2.1.7 *Soient* $(\mathbb{X}, \| \,.\, \|)$ *un espace de Banach. Un opérateur* $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$ *est régulier, si*

a) $T\mathbb{X} = \mathbb{X}$.

b) T^{-1} *existe sur* $\mathbb{X}$, *et* $T^{-1} \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$.

L'ensemble d'opérateurs réguliers sur $\mathbb{X}$ *est noté par* $\mathbb{L}_r(\mathbb{X})$.

Exemple 2.1.6 *Considérons* $(\mathbb{X} = C[a,b], \| \,.\, \|_\infty)$, *et* $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$ *défini par*

$$T(f)(t) = tf(t), \quad f \in \mathbb{X}.$$

Alors $T \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$, *si et seulement si* $0 \notin [a,b]$.

Théorème 2.1.12 *Soient* $T_1, T_2 \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$ *alors* $T_1 \circ T_2 \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$, *et* $\lambda T_1 \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Preuve Montrons d'abord que $T_1 \circ T_2$ admet une inverse sur $\mathbb{X}$, et que

$$(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_2^{-1} \circ T_1^{-1}.$$

En effet

$$(T_1 \circ T_2)\mathbb{X} = T_1(T_2\mathbb{X}) = T_1\mathbb{X} = \mathbb{X}$$

et

$$(T_1 \circ T_2) \circ (T_2^{-1} \circ T_1^{-1}) = (T_2^{-1} \circ T_1^{-1}) \circ (T_1 \circ T_2) = I_{\mathbb{X}}.$$

Puis que l'élément inverse, s'il existe, est unique

$$(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_2^{-1} \circ T_1^{-1}.$$

D'autre part

$$\| (T_1 \circ T_2)^{-1} \| = \| T_2^{-1} \circ T_1^{-1} \| \leq \| T_2^{-1} \| \cdot \| T_1^{-1} \| < \infty.$$

Ce qui montre que $T_1 \circ T_2 \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$. Si $\lambda \neq 0$, $(\lambda T_1)^{-1} = 1/\lambda T_1^{-1}$ et

$$\| (\lambda T_1)^{-1} \| = \frac{1}{|\lambda|} \| T_1^{-1} \| < \infty.$$

Donc $\lambda T_1 \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

2.1.4 L'algèbre de Banach $\mathbb{L}(\mathbb{X})$

Si $(\mathbb{X}, \| \,.\, \|)$ est un espace de Banach, alors $\mathbb{L}(\mathbb{X}) = \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ muni de la norme introduite dans (2.1.6) est aussi un espace de Banach. De plus $(\mathbb{L}(\mathbb{X}), \| \,.\, \|)$ est une algèbre linéaire avec identité.

Définition 2.1.8 *Une algèbre linéaire* $\mathbb{X}$ *munie d'une norme s'appelle une algèbre normée si on a pour tout* $x, y \in \mathbb{X}$

$$\| x \cdot y \| \leqslant \| x \| \cdot \| y \| . \tag{2.9}$$

Remarque 2.1.2 *La condition (2.9) assure la continuité du produit de deux vecteurs dans une algèbre linéaire. En effet, si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \| x_n - x_0 \| = 0$, *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \| y_n - y_0 \| = 0$

$$\begin{aligned} \| x_n y_n - x_0 y_0 \| &= \| x_n y_n - x_0 y_n + x_0 y_n - x_0 y_0 \| \\ &\leqslant \| x_n - x_0 \| \cdot \| y_n \| + \| x_0 \| \cdot \| y_n - y_0 \| \longrightarrow 0 \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Définition 2.1.9 *Un algèbre de Banach est une algèbre normée qui est complète par rapport à la norme, i.e. Un espace de Banach.*

Théorème 2.1.13 *Soit* $(\mathbb{X}, \| \, . \, \|)$ *un espace de Banach. Alors* $\mathbb{L}(\mathbb{X})$ *est un algèbre de Banach .*

Preuve Nous savons déjà que $\mathbb{X}$ est un espace de Banach et que $\mathbb{X}$ est une algèbre linéaire avec identité. Il nous reste à montrer que pour $T_1, T_2 \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$ on a

$$\| T_1 \circ T_2 \| \leq \| T_1 \| \cdot \| T_2 \| \, .$$

Soient donc $T_1, T_2 \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$. Alors

$$\begin{aligned} \| (T_1 \circ T_2)x \| &= \| T_1(T_2 x) \| \\ &\leq \| T_1 \| \cdot \| T_2 x \| \\ &\leq \| T_1 \| \cdot \| T_2 \| \cdot \| x \| \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{X}$ donc $T_1 \circ T_2 \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$, et $\| T_1 \circ T_2 \| \leqslant \| T_1 \| \cdot \| T_2 \|$.

2.1.5 Convergence dans $(\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \| \, . \, \|)$

Définition 2.1.10 *Soient* $\{T_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *et* $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

a) La suite $\{T_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *converge en norme, ou uniformément vers* T *si*

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n - T \| = 0,$$

et nous écrivons $T_n \xrightarrow{u} T$.

b) La suite $\{T_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *converge ponctuellement vers* T *si*

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n x - Tx \|_{\mathbb{Y}} = 0, \ \textit{pour tout} \ \ x \in \mathbb{X}.$$

et nous écrivons $T_n \xrightarrow{s} T$.

c) La suite $\{T_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *converge faiblement vers* T *si*

$$x^{'}(T_n x) \to x^{'}(Tx),$$

pour tout $x^{'} \in \mathbb{Y}^{'}$ *et pour tout* $x \in \mathbb{X}$, *et nous écrivons* $T_n \xrightarrow{w} T$.

Théorème 2.1.14 a) $T_n \xrightarrow{u} T$ *entraine que* $T_n \xrightarrow{s} T$.

b) $T_n \xrightarrow{s} T$ *entraine que* $T_n \xrightarrow{w} T$.

Preuve

a) Nous avons pour tout $x \in \mathbb{X}$

$\| T_nx - Tx \|_{\mathbb{Y}} = \| (T_n - T)x \|_{\mathbb{Y}} \leq \| T_n - T \| \cdot \| x \|_{\mathbb{X}} \rightarrow 0$, si $n \rightarrow \infty$.

b) Nous avons pour tout $x' \in \mathbb{Y}'$, et pour tout $x \in \mathbb{X}$ fixé

$$\begin{aligned} |x'(T_nx) - x'(Tx)| &= |x'((T_n - T)x)| \\ &\leq \| x' \| \cdot \| T_nx - Tx \|_{\mathbb{Y}} \ \rightarrow 0, \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Remarque 2.1.3 $T_n \xrightarrow{s} T$ *n'entraine pas* $T_n \xrightarrow{u} T$. *Considérons* $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = l^2$, *et soit* $T_n \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$ *la projection orthogonale de* $\mathbb{X}$ *sur* $\langle e_{n+1}, e_{n+2}, \cdots \rangle$, *i.e.*

$$T_n((\zeta_1, \zeta_2, \cdots)) = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n \ \text{fois}}, \zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, \cdots).$$

Alors nous avons pour tout $x \in \mathbb{X}$,

$$\| (T_n - 0)x \|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\zeta_k|^2 \rightarrow 0, \textit{si } n \rightarrow \infty,$$

et $T_n \xrightarrow{s} T = 0$. *Mais d'autre part,*

$$\| T_n \| \geq \| T_n e_{n+1} \|_2 = 1 \ \nrightarrow \ 0$$

c-à-d. $T_n \overset{u}{\nrightarrow} T = 0$.

Remarque 2.1.4 $T_n \xrightarrow{w} T$ *n' entraine pas* $T_n \xrightarrow{s} T$.

Remarque 2.1.5 *Rappelons qu' une suite* $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ *d'éléments d'un espace normé* $(\mathbb{X}, \| \ . \ \|)$ *converge en normé vers un élément* $x \in \mathbb{X}$ *si*

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \| x_n - x \| = 0.$$

De plus la suite $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ *converge faiblement vers* x *si*

$$\lim_{n\rightarrow\infty} Tx_n = Tx \ \forall T \in \mathbb{X}'.$$

comme dans les cas précédents la convergence en norme implique la convergence faible mais pas inversement.

2.1.6 Opérateur compact

Soient $(\mathbb{X}, \| \ . \ \|_{\mathbb{X}})$ un espace normé et $(\mathbb{Y}, \| \ . \ \|_{\mathbb{Y}})$ un espace de Banach.

Définition 2.1.11 *Un opérateur linéaire* $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *est compact ou complètement continu si l'image de chaque ensemble borné de* $\mathbb{X}$ *est relativement compact dans* $\mathbb{Y}$.
Notons par $\mathbb{L}_c(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subset \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de* $\mathbb{X}$ *dans* $\mathbb{Y}$.

Remarque 2.1.6 *Si $T \in \mathbb{L}_c(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ alors $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ i.e. Un opérateur linéaire compact est continu.*

Exemple 2.1.7

- *soit $F = C([0,1])$, espace des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs complexes, muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty$.*
- *soit $E = C^1([0,1])$, espace des fonctions à valeurs complexes, continement dérivables sur $[0,1]$, muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$*
  l'injection canonique $T : \{E \to F, f \to f\}$ est un opérateur compact.

Exemple 2.1.8 *On définit l'opérateur T comme suit $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ tq*

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)dt$$

où $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ est continu.

On montre :

1) *T est un opérateur linéaire compact.*
2) *Dans le cas $K(x,t) = e^{x+t}$ détermine la norme de T.*

Solution :

1) La boule unité dans $C([0,1])$ est $B_F(0,1) = \{f \in C([0,1]); \| f \|_\infty \leq 1\}$.

Pour montrez que $TB_F(0,1)$ est relativement compact dans $C([0,1])$ on, utilise le théorème d'Arzela-Ascoli (2.1.11).

i) *$TB_F(0,1)$ est uniformément borné : En effet $\forall f \in B_F(0,1)$ on a*

$$\begin{aligned} | Tf(x) | &= \left| \int_0^1 K(x,t)f(t)dt \right| \\ &\leq \int_0^1 | K(x,t) || f(t) | dt \\ &\leq \| f \|_\infty \int_0^1 | K(x,t) | dt \\ &\leq \int_0^1 | K(x,t) | dt \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sup\limits_{f\in B_F(0,1)} | Tf(x) | \leq \sup\limits_{x\in[0,1]} \int_0^1 | K(x,t) | dt.$

On pose $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} \int_0^1 | K(x,t) | dt$ on trouve $\| Tf \| \leq M$. D'où $TB_F(0,1)$ est uniformément borné.

ii) *$TB_F(0,1)$ est équicontinu : En effet $\forall f \in B_F(0,1)$ et pour tous $x, y \in [0,1]$ on a*

$$\begin{aligned} | Tf(y) - Tf(x) | &= \left| \int_0^1 (K(y,t) - K(x,t))f(t)dt \right| \\ &\leq \| f \|_\infty \int_0^1 | (K(y,t) - K(x,t)) | dt \\ &\leq \int_0^1 | (K(y,t) - K(x,t)) | dt \\ &< \int_0^1 \epsilon dt = \epsilon. \end{aligned}$$

Donc $\exists \delta = \epsilon$ tel que $| y - x | < \delta$, d'où $TB_F(0,1)$ est équicontinu.

2) Déterminons la norme de T on a

$$\begin{aligned} \mid Tf(x) \mid &= \mid \int_0^1 e^{x+t} f(t)dt \mid \\ &= e^x \mid \int_0^1 e^t f(t)dt \mid \\ &\leq e^x \parallel f \parallel_\infty \int_0^1 e^t dt \\ &\leq e(e-1) \parallel f \parallel_\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow \parallel Tf \parallel_\infty \leq e(e-1) \parallel f \parallel_\infty$. *Donc* $\parallel T \parallel \leq e(e-1)$.

Maintenant, on montre $\parallel T \parallel \geq e(e-1)$, *on prend* $g(x) = 1\ \forall x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} Tg(x) &= \int_0^1 e^{x+t} dt \\ &= e^x \int_0^1 e^t dt. \end{aligned}$$

Donc $\parallel T \parallel \geq \parallel Tg \parallel_\infty = e(e-1)$, *alors*

$$\parallel T \parallel = e(e-1).$$

2.1.7 Théorème du graphe fermé

Définition 2.1.12 *Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux espaces linéaires sur le même corps $\mathbb{K}$, et $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Alors le graphe de l'opérateur linéaire T est l'ensemble*

$$G(T) = \{(x, Tx); x \in \mathbb{X}\} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}.$$

Définition 2.1.13 *Soient $(\mathbb{X}, \parallel . \parallel_\mathbb{X})$ et $(\mathbb{Y}, \parallel . \parallel_\mathbb{Y})$ deux espaces normés, et $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Alors T est opérateur linéaire avec un graphe fermé si pour tout $x_0 \in \mathbb{X}$;*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \parallel x_n - x_0 \parallel_\mathbb{X} = 0 \\ et \\ \lim\limits_{n\to\infty} \parallel Tx_n - y_0 \parallel_\mathbb{Y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y_0 = Tx_0.$$

Observons que $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est un graphe fermé si et seulement si son graphe
$G(T) = \{(x, Tx); x \in \mathbb{X}\}$ est un ensemble ferme dans $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Théorème 2.1.15 *[1] Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux espaces de Banach, et $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Alors $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ si et seulement si T est un opérateur avec un graphe ferme.*

2.2 Fonctionnelle linéaires continus

2.2.1 Fonctionelles linéaires sur un espace linéaire

Aprés avoir donné quelques exemples de fonctionnelles linéaires , nous montrons qu'une fonctionnelle linéaire est caractrérisée par son noyau .

Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur le corps $\mathbb{K}$.

Définition 2.2.1 *[1] Une application $f : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$s'appelle une fonctionnelle.*

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$(i.e. $\mathbb{X}$ est un espace linéaire complexe), on considére des fonctionnelles à valeurs réelles , i.e. des fonctionnelles réelles . Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (i.e. $\mathbb{X}$ est un espace linéaire réel) ,on considére seulement des fonctionnelles réelles .

Définition 2.2.2 *Une fonctionnelle réelle f, définie sur un espace linéaire réel ou complexe $\mathbb{X}$, s'appelle sous-additive si*

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \textit{pour tout } x, y \in \mathbb{X} \tag{2.10}$$

La fonctionnelle f s'appelle positive si

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \textit{pour tout } x \in \mathbb{X} \textit{ et pour tout nombre } \ \alpha \geq 0. \tag{2.11}$$

Une fonctionnelle sous-additive et positive-homogéne s'appelle fonctionnelle sous-linéaire ou encore fonctionnelle convexe .

Remarque 2.2.1 *Une fonctionnelle sous-linéaire f sur l'espace linéaire $\mathbb{X}$ a les propriétés suivantes :*

$$f(0) = 0 \quad \textit{et} \quad -f(-x) \leq f(x).$$

En effet , si on prend dans (2.10) , $\alpha = 0$, on obtient $f(0) = 0$. Deplus ,

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) \leq f(x) + f(-x)$$

Exemple 2.2.1 *Soit $(\mathbb{X}, \|\|)$ un espace normé . Alors la norme $\|\|$est une fonctionnelle convexe sur $\mathbb{X}$.*

Définition 2.2.3 *Une fonctionnelle $f : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ est homogéne si*
$f(\alpha x) = \alpha f(x)$, por tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{X}$.
Une fonctionnelle linéaire est une application $f : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ additive et homogéne , en d'autres mots :

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{X}$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Nous allons noter l'ensemble de fonctionnelles linéaires sur $\mathbb{X}$ par $L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ et seséléments ,les fonctionnelles linéaires , par $x', y', ...$ Remarquons que $L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ n'est pas vide parce que $x'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{X}$, notée par $x' = 0'$, est une fonctionnelle linéaire .

Exemple 2.2.2 *Considérons l'ensemble de suite convergent c. Alors pour $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c$, $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = \xi_0$ et $\{\alpha_k \in \mathbb{C}; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mid \alpha_k \mid < \infty$, l'application*

$$x'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \xi_k$$

est une fonctionnelle linéaire.

De plus ,$x'(f) = f(\frac{1}{2})$ est une fonctionnelle linéaire .

Exemple 2.2.3 *Soit* $(\mathbb{X}, M)$ *un espace mesurable et* μ *une mesure complexe . L'application* x' : $L^1(d\mu) \to K$ *définie par*

$$x'(f) = \int_X f d\mu, pour\ tout\ f \in L^1(d\mu)$$

est une fonctionnelle linéaire .

Théorème 2.2.1 *Siot* $\mathbb{X}$*un espace linéaire sur le corps* $\mathbb{K}$.*Alor l'ensemle* $L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ *est un espace linéaire sur* $\mathbb{K}$ *, par rapport aux opérations habitulles d'addition et de multplicationpar un scalaire des application.*

Preuve Soit $x'_1, x'_2 \in L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$. Alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha x'_1 + \beta x'_2 : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$, et

$$\begin{aligned}(\alpha x'_1 + \beta x'_2)(\lambda x + \mu y) &= \alpha x'_1(\lambda x + \mu y) + \beta x'_2(\lambda x + \mu y)\\ &= \alpha(\lambda x'_1(x) + \mu x'_1(y)) + \beta(\lambda x'_2(x) + \mu x'_2(y))\\ &= \lambda(\alpha x'_1(x) + \beta x'_2(x)) + \mu(\alpha x'_1(y) + \beta x'_2(y))\\ &= \lambda((\alpha x'_1 + \beta x'_2)(x)) + \mu((\alpha x'_1 + \beta x'_2)(y))\end{aligned}$$

Définition 2.2.4 *L'espace linéaire* $L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ *s'appelle l'espace dual algébrique de* $\mathbb{X}$

Puis que $L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ est un espace linéaire , on peut parler de son espace dual algébrique, i.e. $L_a(L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K}), \mathbb{K})$, qui s'appelle l'espace bidual algébrique de $\mathbb{X}$.

Remarque 2.2.2 *Si* $\dim \mathbb{X} = n \in \mathbb{N}$ *alors* $\dim L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K}) = n$.

En effet , soit $u_1, \ldots, u_n$ une base algébrique pour $\mathbb{X}$. Alors pour tout $e \in \mathbb{X}$, on a $x = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k u_k$ et si $x' \in L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ nous avons

$$x'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k x'(u_k),$$

donc une fonctionnelle linéaire est déterminée de façon unique par les n nombres $x'(u_1), \ldots, x'(u_n)$.

Montrons qu'on peut construire les fonctionnelles linéaires $u_i \in L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$, telles que $u'_i(u_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$.
En effet , nous définissons

$$u'_i(x) = u'_i(\sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k) = \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n\ .$$

Evidemment u'_i sont des fonctionnelles linéaires et de plus indéprendantes , donc $\dim L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K}) \geq n$. D'autre part si $x' \in \dim L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$, alorson a pour tout $x \in \mathbb{X}$.

$$x'(\sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x'(u_k) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u'_k(x),$$

donc

$$x' = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u'_k$$

c-à-d . $\dim L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K}) = n.$

Puis que chaque espace linéaire sur le corps $\mathbb{K}$,de dimension algébrique n , est isomorphe à l'espace linéaire $\mathbb{K}^n$.

En d'autres mots , nous avons pour tout $y \in \mathbb{X}$, la représentation

$$y = x + \frac{x'(y)}{x'(x_0)} x_0, \quad où \quad x \in kerx'. \tag{2.12}$$

Donc

$$\mathbb{X} = ker\ x' + [x_0] \quad et\ ker\ x' \cap [x_0] = \{0\},$$

c-à-d .

$$\mathbb{X} = ker\ x' \oplus [x_0].$$

Puisque $1 = \dim[x_0] = codim\ ker\ x'$, les sous-espace ker x' est , d'aprés , un sous-espace maximal de $\mathbb{X}$. Le résultat réciproque est donné par :

Théorème 2.2.2 *Si $\mathbb{X}_0$ est un sous-espace linéaire maximal de l'espace linéaire $\mathbb{X}$, alors il existe une fonctionnelle linéaire $x' \in L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ telle que $ker\ x' = \mathbb{X}_0$.*

Preuve Soit $x_0 \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{X}_0$, un élément fixé . Alors tout vecteur $x \in \mathbb{X}$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = y + \lambda x_0$, où $y \in \mathbb{X}_0$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ (puisque $\mathbb{X} = \mathbb{X}_0 \oplus [x_0]$) . L'application $x' : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ définie par

$$x'(x) = x'(y + \lambda x_0) = \lambda,$$

est une fonctionnelle linéaire sur $\mathbb{X}$ et de plus $ker\ x' = \mathbb{X}_0$.

Montrons enfin que le rayon d'une fonctionnelle linéaire détermine la fonctionnelle linéaire à une constante multiplicative prés .

Théorème 2.2.3 *Soient $x'_1, x'_2 \in L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$, $x'_1 \neq o'$ et $x'_2 \neq o'$. Si $ker\ x'_1 = ker\ x'_2$, alors $x'_2 = \mu x'_1,\ \mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

Preuve Supposons que $ker\ x'_1 = ker\ x'_2 \neq \mathbb{X}$ et choisissons $x_0 \in \mathbb{X} \setminus ker\ x'_1$. Alors $x \in \mathbb{X}$ posséde une décomposition unique $x = y + \lambda x_0, y \in ker\ x'_1,\ \lambda \in \mathbb{K}$. Les égalités

$$x'_1(x) = \lambda x'_1(x_0)\ ,\ x'_2(x) = \lambda x'_2(x_0)$$

entraînent pour tout $x \in \mathbb{X}$

$$x'_2(x) = \frac{x'_2(x_0)}{x'_1(x_0)} x'_1(x) = \mu x'_1(x)$$

2.2.2 Fonctionnelles linéaires sur un espace normé

Puisque tout espace normé est un espace linéaire , tout les résultats du paragraphe

restent valides pour ce cas . De plus , l'existence d'une norme sur l'espace $\mathbb{X}$ nous permet de trouver des propriétés intéressantes pour les fonctionnelles linéaires continus.

Définition 2.2.5 *Soit* $(\mathbb{X}, \|\|)$ *un espace normé et soit* $x' \in L_a((\mathbb{X}, \|\|), \mathbb{K})$*. On dit que* x' *est borné s'il existe un* $M > 0$*, tel que*

$$| x'(x) | \leq M \parallel x \parallel, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}$$

Nous notons par $\mathbb{X}' = L(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctionnelles linéaires bornées sur $\mathbb{X}$.

Théorème 2.2.4 *L'ensemble* $\mathbb{X}'$ *est un espace linéaire sur* $\mathbb{K}$ *, normé par la norme*

$$\parallel x' \parallel' = \sup_{\|x\| \leq 1} | x'(x) | . \tag{2.13}$$

Preuve Notons d'abord que $\mathbb{X}' \neq \phi$, puis que au moins la fonctionnelle linéaire identique nulle $x' = o'$ appartient à $\mathbb{X}'$.

Soient $x', y' \in \mathbb{X}'$. Alors

$$| x'(x) | \leq M \parallel x \parallel \;\; et \;\; | y'(x) | \leq N \parallel x \parallel, \text{pour tout } x \in \mathbb{X}.$$

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{X}$, nous avons

$$\begin{aligned} | (\alpha x' + \beta y')(x) | &= | \alpha x'(x) + \beta y'(x) | \leq | \alpha x'(x) | + | \beta y'(x) | \\ &\leq | \alpha | M \parallel x \parallel + | \beta | N \parallel x \parallel \\ &= (| \alpha | M + | \beta | N) \parallel x \parallel, \end{aligned}$$

donc $(\alpha x' + \beta y') \in \mathbb{X}'$ et $\mathbb{X}'$ est un espace linéaire sur $\mathbb{K}$.

Il nous reste à montrer que (2.13) est une norme sur $\mathbb{X}'$. On a $\parallel x' \parallel' \geq 0$, pour tout $x' \in \mathbb{X}'$. Si $\parallel x' \parallel' = 0$, alors $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} | x'(x) | = 0$, donc $x'(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{X}$, telque $\parallel x \parallel \leq 1$. De plus , $x'(x) = 0$, sur $\mathbb{X}$, parce que pour un x avec $\parallel x \parallel > 1$, on a $x'(x) = x'(\parallel x \parallel \cdot \frac{x}{\|x\|}) = \parallel x \parallel x'(\frac{x}{\|x\|}) = 0$

D'aute part , nous avons

$$\parallel \lambda x' \parallel' = \sup_{\|x\| \leq 1} | \lambda \cdot x'(x) | = | \lambda | \cdot \sup_{\|x\| \leq 1} | x'(x) | = | \lambda | \cdot \parallel x' \parallel'$$

et

$$\begin{aligned} \parallel x' + y' \parallel' = \sup_{\|x\| \leq 1} | x'(x) + y'(x) | &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} | x'(x) | + \sup_{\|x\| \leq 1} | y'(x) | \\ &= \parallel x' \parallel' + \parallel y' \parallel' \end{aligned}$$

Remarque 2.2.3 *On peut obtenir la norme $\| x' \|'$ par*

$$\| x' \|' = \sup_{\|x\|\leq 1} | x'(x) | = \sup_{\|x\|=1} | x'(x) | = \sup_{\|x\|\neq 0} [| x'(x) | / \| x \|]$$
$$= \inf\{M; | x'(x) | \leq M \| x \| \ \ \textit{pour tout } x \in \mathbb{X}\}.$$

Définition 2.2.6 *On appelle l'espace $\mathbb{X}'$ muni de la norme définie cidessus l'espace dual topologique de $\mathbb{X}$. De plus l'espace dual topologique de $\mathbb{X}', \mathbb{X}''$, s'appelle l'espace bidual topologique .*

Exemple 2.2.4 *Soit (Y, M, μ) un espace mesuré et soit $\mathbb{X} = L^p c, 1 \leq p \leq \infty$, muni de la norme*

$$\| f \|_p = \begin{cases} (\int_{\mathbb{Y}} | f |^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}, \ \ si \ 1 \leq p \leq \infty \\ ess. \ sup\{| f(t) |; t \in \mathbb{Y}\}, \ \ si \ p = \infty \end{cases}$$

De plus , soit $g \in L^q(d\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. D'après l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\left| \int_{\mathbb{Y}} f \cdot g \mathrm{d}\mu \right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q = M \|f\|_p$$

Donc $x'(f) = \int_{\mathbb{Y}} f \cdot g \mathrm{d}\mu$ est une fonctionnelle linéaire bornée ,i.e. dans $\mathbb{X}'$, et nous avons

$$\|x'\|' \leq \|g\|_q$$

Remarque 2.2.4 *En considérant*

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k; \quad k \in \mathbb{N}$$

nous obtenons l'analogue pour ℓ_p.

Exemple 2.2.5 *Considérons l'espace normé $(C([0,1]), \| \, . \, \|_{[0,1]})$, et la fonctionnelle linéaire $x'(f) = f(\frac{1}{2})$. Alors*

$$| x'(f) | = | f(\frac{1}{2}) | \leq \| f \|_{[0,1]},$$

et nous avans $\| x' \|' = 1$.

Théorème 2.2.5 *Soit $(\mathbb{X}, \| \, . \, \|)$ un espace de Banach et soit x' une fonctionnelle linéaire sur $\mathbb{X}$ .Les quatre énoncés suivants sont équivalents.*

1. *x' est bornée .*
2. *x' est uniformément continu sur $\mathbb{X}$.*
3. *x' est continu à l'orgine .*
4. *$\ker x'$ est formé .*

2.3 Fonctionnelles linéaires sur un espace de Hilbert

ce paragraphe nous montrons d'abord le théorème de Rize qui dit qu'une fonctionnelles linéaires sur un espace de Hilbert posséde une représentation par un produit scalaire ; ce qui entraîne qu'un espace Hilbert est réflexif .

Théorème 2.3.1 *(Riesz) Si $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{K}$ et si $x' \in \mathbb{H}'$, alors il existe un et un seul élément $y \in \mathbb{H}$, tel que*

$$x'(x) = (x, y), \ \textit{pour tout } x \in \mathbb{H} \tag{2.14}$$

et de plus

$$\| \ x' \ \|' = \| \ y \ \| \ . \tag{2.15}$$

Réciproquement , pour tout élément $y \in \mathbb{H}$, la formule (2.14) définit une fonctionnelle linéaire continu x' sur $\mathbb{H}$ et on a l'églité (2.15) .

Preuve

a Montrons d'abord l'existence de y . Soit $x' \in \mathbb{H}'$. Si $x' = o'$, prenons $y = o$. Soit donc $x' \neq o'$. On sait que $\ker x'$ est un sous espace maximal et férme de $\mathbb{H}$.
Alors $(\ker x')^{\perp} \neq \{0\}$. Choisissons un $z \in (\ker x')^{\perp} \setminus \{0\}$ et posons

$$y = \frac{\overline{x'(z)} z}{\|z\|^2}.$$

De plus soit P la projection orthogonale de $\mathbb{H}$ sur le sous espace $\ker x'$. Alors pour tout $x \in \mathbb{H}$, on a

$$\begin{aligned}(x, y) &= \frac{(x, z)x'(z)}{\|z\|^2} = \frac{((I - P + P)x, z)x'(z)}{\|z\|^2} \\ &= \frac{((I - P)x, z)x'(z)}{\|z\|^2}\end{aligned}$$

Mais $(I - P)x \in (\ker x')^{\perp}$ et $\dim(\ker x')^{\perp} = 1$ ($\ker x'$ est un sous espace maximal de $\mathbb{H}$) entraîne que $(I - P)x = \lambda z$.

Nous avons donc

$$(x, y) = \frac{(\lambda z, z)x'(z)}{\|z\|^2}.$$

Déautre part , $x'(x) = x'((I - P + P)x) = x'((I - P)x) = x'(\lambda z) = \lambda x'(z)$,
ce qui montre que $x'(x) = (x, y)$.

b Montrons maintenant l'unicité de y . Soit $x'(x) = (x, y) = (x, y_1)$, pour tout $x \in \mathbb{H}$. Alors $(x, y - y_1) = 0$ sur $\mathbb{H}$, et pour $x = y - y_1$ nous obtenons $y = y_1$.

c De $| \ (x, y) \ | \leq \|x\| \cdot \|y\|$ on a $\|x'\|' \leq \|y\|$, et $x'(y) = \|y\|^2$ entraîne que $\|x'\|' \geq \|y\|$, donc l'égalité (2.15) est vérifiée .

d Réciproquement $x'(x) = (x, y)$ pour un $y \in \mathbb{H}$ fixé est une fonctionnelle linéaire . La continuité s'ensuit de $\mid x'(x) \mid \leq \|x\| \cdot \|y\|$ et de c) nous avons $\|x'\|' = \|y\|$.

Corollaire 2.3.1 *Considérons l'espace de Hiilbert $L^2(d\mu)$ sur $\mathbb{X}$ avec le produit scalaire*

$$(f, g) = \int_{\mathbb{X}} f\bar{g} d\mu$$

Alors pour $x' \in (L^2(d\mu))'$ il existe une fonction $g \in L^2(d\mu)$ tel que

$$x'(f) = \int_{\mathbb{X}} f\bar{g} d\mu, \text{ pour tout } f \in L^2(d\mu).$$

De plus g est μ-presque partout unique .

Le théorème (2.3.1) suggére une liaison forte entre un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ et son dual topologique $\mathbb{H}'$.

Dans ce qui suit , $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ signifie l'ensemble des opérateurs linéaires continus de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$ qui est un sous-espace linéaire $L_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ .Donc $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ peut être regardé lui-même comme un espace linéaire sur le corps $\mathbb{K}$.

Introduisons maintenant une norme pour $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Théorème 2.3.2 *L'application $\| \; \| : L(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \to \mathbb{R}^+$, donnée par*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_{\mathbb{Y}}; x \in \mathbb{X} \text{ et } \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\} \tag{2.16}$$

est une norme pour $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Preuve Pour tout $T \in L(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \|T\| \geq 0$ et $\|T\|$ est finie .
Si tout $\|T\| = 0$, alors $Tx = 0$, pour tout $x \in \mathbb{X}$. En effet pour $x \neq 0$,
$\|Tx\|_{\mathbb{Y}} = \|x\|_{\mathbb{X}} \|T \frac{x}{\|x\|_{\mathbb{X}}}\|_{\mathbb{Y}} = 0$, donc $Tx = 0$ sur $\mathbb{X}$et $T = 0$.
pour tout $\lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda T\| = \mid \lambda \mid \|T\|$ parce que

$$\begin{aligned}\|\lambda T\| = \sup\{\|(\lambda T)x\|_{\mathbb{Y}}; \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\} &= \sup\{\mid \lambda \mid \|Tx\|_{\mathbb{Y}}; \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\} \\ &= \mid \lambda \mid \|T\|.\end{aligned}$$

Enfin , pour tout $x \in \mathbb{X}$, tel que $\|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1$, nous avons

$$\|(T_1 + T_2)x\|_{\mathbb{Y}} = \|T_1 x + T_2 x\|_{\mathbb{Y}} \leq \|T_1 x\|_{\mathbb{Y}} + \|T_2 x\|_{\mathbb{Y}} \leq \|T_1 x\| + \|T_2 x\|.$$

Remarque 2.3.1 *Soit $T \in L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, alors*

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1} \{\|Tx\|_{\mathbb{Y}}\} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{X}} = 1} \{\|Tx\|_{\mathbb{Y}}\} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{X}} \neq 0} \{\|Tx\|_{\mathbb{Y}} / \|x\|_{\mathbb{X}}\} \\ &= \inf\{M, \|Tx\|_{\mathbb{Y}} \leq M\|x\|_{\mathbb{X}}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}\}\end{aligned}$$

Exemple 2.3.1 *Considérons la transformation de Fourier*

$$T: \ L^1(dt) \to (\overline{C_0}(\mathbb{R}, \| \ \|_{\mathbb{R}}).$$

$$(Tf)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(t)dt$$

Nous avons

$$\|Tf\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mid \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(t)dt \mid \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mid f(t) \mid dt = \|f\|_1.$$

Donc $\|T\|_1 \leq 1$.

D'autre part , pour $f \geq 0$, $f \in L^1(dt)$, nous avons

$$\|Tf\|_{\mathbb{R}} \geq (Tf)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \|f\|_1.$$

ce qui entraîne que $\|T\|_1 = 1$.

Montrons maintenant que si $(\mathbb{Y}, \| \ \|_2)$ est un espace de Banach , alors cette structure se transmet sur $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Théorème 2.3.3 *Soient* $(\mathbb{X}, \| \ \|_1)$ *un espace normé et* $(\mathbb{Y}, \| \ \|_2)$ *un espace de Banach . Alors* $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *est un espace de Banach .*

Preuve On sait déja que $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est un espace normé . il nous reste à montrer que $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est complet . Soit $\{T_n; n \in \mathbb{N}\} \subset L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ une suit de cauchy . Alors

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon \text{ si } n, m > n_0(\varepsilon) \ .$$

Pour $x \in \mathbb{X}$ fixé , l'inégalité

$$\|T_n x - T_m x\|_2 \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|_1 < \varepsilon \|x\|_1, \ n, m > n_0(\varepsilon)$$

montre que $\{T_n x; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Y}$ est une suit de cauchy . Mais $(\mathbb{Y}, \| \ \|_2)$ est un espace de Banach ; donc $T_n x$ est convergente , i.e. $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existe pour tout $x \in \mathbb{X}$. Définissons l'application $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ par

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x, \ \text{ pour tout } x \in \mathbb{X} \ .$$

Montrons que $T \in L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

D'abord T est linéaire parce que

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n x + \beta T_n y) \\ &= \alpha Tx + \beta Ty, \end{aligned}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathbb{X}$.

D'autre part , nous avons

$$\|T_n x\|_2 \leq M\|x\|_1 \text{ , pour tout } x \in \mathbb{X},$$

ce qui entraîne , pour $n \to \infty$, que

$$\|Tx\|_2 \leq M\|x\|_1 \text{ , et donc } T \in L(\mathbb{X}, \mathbb{Y}).$$

Enfin, montrons que $T_n \xrightarrow{\|\|} T$.

Nous avons

$$\|T_m x - T_n x\|_2 \leq \|T_m - T_n\| \cdot \|x\|_1 < \varepsilon\|x\|_1$$

si $n, m > n_0(\varepsilon)$ et pour tout $x \in \mathbb{X}$

En fixant n, nous obtenons pour $m \to \infty$

$$\|Tx - T_n x\|_2 \leq \|T - T_n\|\|x\|_1 < \varepsilon\|x\|_1, \text{ si } n > n_0(\varepsilon),$$

et donc

$$\|T - T_n\| < \varepsilon \; si \; n > n_0(\varepsilon) \text{ c-à-d. } T_n \xrightarrow{\|\ \|} T.$$

Corollaire 2.3.2 *Soit* $(\mathbb{X}, \|\ \|)$ *un espace normé. Alors l'espace dual topologique* $\mathbb{X}'$ *est un espace de Banach . En effet* $\mathbb{X}' = L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *et* $\mathbb{K}$ *est un espace de Banach .*

Exemple 2.3.2 *Considérons l'espace de Banach* $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = (\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$. *pour* $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *nous avons :*

$$\|Tx\|_\infty \leq \|T\|\|x\|_\infty$$

2.4 Opérateurs linéaires continus sur un espace de Hilbert

2.4.1 Généralités sur les opérateurs linéaires continus dans un espace de Hilbert

Soient $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}'$ deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

Définition 2.4.1 *Toute application linéaire continu* $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ *s'appelle un opérateur. L'espace vectoriel* $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ *des applications linéaires continus de* $\mathbb{H}$ *dans* $\mathbb{H}'$ *est l'espace des opérateurs de* $\mathbb{H}$ *dans* $\mathbb{H}'$.

Notations :

1) Pour alléger les écritures, l'image d'un vecteur $x \in \mathbb{H}$ par l'opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ sera généralement notée Tx mais la notation traditionnelle $T(x)$ sera parfois utilisée également.

2) La norme de T est le nombre

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_{\mathbb{H}} \leq 1} \|Tx\|_{\mathbb{H}'} \tag{2.17}$$

c'est la norme usuelle assujettie aux normes de $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}'$.

3) On notera $KerT$ le noyau de l'opérateur T i.e. $kerT = \{x \in \mathbb{H}; Tx = 0\}$

4) ImT désignera le sous-espace de $\mathbb{H}'$ image de $\mathbb{H}$ par T. On le notera aussi $T(\mathbb{H})$.

Remarque 2.4.1 *$KerT$ (resp. ImT) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{H}$ (resp. de $\mathbb{H}'$). On notera que $KerT$ est toujours un sous-espace fermé de $\mathbb{H}$ mais ImT n'est pas forcément fermé dans $\mathbb{H}'$.*

Définition 2.4.2 *: $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ est dit continu si :*

$$\forall (x_n) \subset \mathbb{H}, x_n \longrightarrow_x \; dans \; \|.\|_{\mathbb{H}} \Rightarrow Tx_n \longrightarrow Tx \; dans \; \|.\|_{\mathbb{H}'}$$

Proposition 2.4.1 *soint $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}'$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et T un opérateur linéaire de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}'$. il y a équivalence entre :*
1.l'opérateur linéaire T est continu.
2.l'opérateur linéaire T est continu en 0.
3.l'opérateur linéaire T est continu en un point.
4.il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Tx\|_{\mathbb{H}'} \leqslant c\|x\|_{\mathbb{H}}$ pour tout $x \in \mathbb{H}$.

Exemple 2.4.1 *L'opérateur défini de $L_2([0, 1])$ dans $L_2([0, 1]$ par*

$$Tu(x) = xu(x)dx$$

est continu pour la norme

$$\|u\|_2 = (\int_0^1 |u(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

et de plus

$$\|Tu(x)\|_2 \leqslant \|u\|_2, \|T\|_2 = 1$$

2.4.2 Inverse d'un opérateur

Soient $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}'$ des espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ un opérateur.

Définition 2.4.3 *On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}', \mathbb{H})$ tel que*

$$A \circ B = B \circ A = I_H \tag{2.18}$$

l'opérateur B (lorsqu'il existe) est unique.on l'appelle l'inverse de A note par A^{-1}.

Cas particulier où $\mathbb{H} = \mathbb{H}'$: Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$. Dans le cas où $\mathbb{H}$ est de dimension finie, on sait que l'inversibilité de T a plusieurs aspects équivalents. Plus précisément, rappelons l'important résultat suivant :

Théorème 2.4.1 *Si dim$\mathbb{H} < +\infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *T est inversible.*
2. *T est injectif.*
3. *T est surjectif.*
4. *T admet un inverse à droite (i.e. il existe $U \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ tel que $T \circ U = I_{\mathbb{H}}$).*
5. *T admet un inverse à gauche (i.e. il existe $V \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ tel que $V \circ T = I_{\mathbb{H}}$).*

Exemple 2.4.2 *:soit $E = l^2$, l'opérateur T défini par :*

$$T(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, \tfrac{x_2}{2}, ..., \tfrac{x_n}{n}) \ n \in \mathbb{N}$$

T est inversible, et son inverse est donné par :

$$T^{-1}(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, 2x_2, ..., nx_n)$$

2.4.3 Opérateurs adjoints

Théorème 2.4.2 ***(Représentation de Riesz)***
soit $\mathbb{H}$ un espace de hilbert.alors

$$\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{K}), \exists ! y \in \mathbb{H} : f(x) = \langle y, x \rangle, \forall x \in \mathbb{H}.$$

Définition 2.4.4 *[15]* ***(Opérateur adjoint)***
Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$. Alors il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{H}', \mathbb{H})$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{H}, \quad \forall y \in \mathbb{H}', \quad < Tx, y >_{\mathbb{H}'} = < x, T^* y >_{\mathbb{H}} \tag{2.19}$$

L'opérateur T^* s'appelle l'adjoint de T.

Exemple 2.4.3 *I l'opérateur de l'identité : soit x,y $\in \mathbb{H}$ c'est clair que :*

$$\langle Ix, y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x, I^* y \rangle$$

d'ou $I^* = I$

Exemple 2.4.4 *supposons que S et T soient les opérateurs de décalage droit et gauche sur le espace de séquence $l^2(\mathbb{N})$ défini par*

$$S(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...), \ T(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...)$$

ensuite $T = S^*$, puisque

$$\langle x, Sy \rangle = \overline{x_2} y_1 + \overline{x_3} y_2 + \overline{x_4} y_3 + ... = \langle Tx, y \rangle.$$

2.4.4 Opérateurs isométriques,unitaires,normaux,auto-adjoints,positifs

Définition 2.4.5 *Soient $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}'$ deux espaces de Hilbert. Lorsque $\mathbb{H} = \mathbb{H}'$, $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{H})$.*

*a. Un élément $U \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ est appelé **isométrique** si $\|U(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{H}$.*

*b. Un élément $U \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ est appelé **unitaire** si $U^*U = Id_{\mathbb{H}}$ et $UU^* = Id_{\mathbb{H}'}$*

*c. Un élément $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est appelé **normal** si $NN^* = N^*N$*

*d. Un élément $S \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est appelé **hermitien** ou **auto-adjoint** si $S = S^*$*

*e. Un élément $P \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est appelé **positif** (notation : $P \geq 0$) si P est autoadjoint et si pour tout $x \in E \quad \langle P(x), x\rangle \geq 0$*

Exemple 2.4.5 *1.l'opérateur Shift S sur $l^2(\mathbb{N})$ est isométrique.*
2.l'opérateur Shift sur $l^2(\mathbb{Z})$ est unitaire

Exemple 2.4.6 *Soit l'opérateur T définit sur l'espace de Hilbert $L^2[0,1]$*

$$T : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$$
$$f \mapsto Tf$$

oú

$$(Tf)(x) = xf(x), \forall x \in [0,1]$$
$$\langle Tf, f\rangle = \int_0^1 (Tf)(x)f(x) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xf^2(x)dx \geqslant 0$$

donc T est opérateur positif

2.4.5 Spectre d'un opérateur linéaire continu

soit $\mathbb{H}$ un espace vectoriel et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$.

Définition 2.4.6 ***(ensemble résolvante)**[16] soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$, on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient à l'ensemble résolvant de T si $T - \lambda I$ est une bijection de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$, et que $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ l'ensemble résolvante de T est noté $\rho(T)$,i.e.*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \textit{ inversible } \}$$

Définition 2.4.7 ***(Spectre d'un opérateur)** le spectre d'un opérateur T est le sous-ensemble défini par*

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \diagdown \rho(T)$$
$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \textit{ n'est pas inversible}\}$$

*un élément $\sigma(T)$ est une **valeur spectrale** de T*

Définition 2.4.8 ***(valeurs propres et vecteurs propres d'un opérateur)****[15] soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$, le nombre complexe λ, est dit valeur propre de T s'il existe un vecteur x dans $\mathbb{H} - \{0_{\mathbb{H}}\}$(s'appelle vecteur propre associé à λ), tel que :*

$$(T - \lambda I)x = 0,\ Tx = \lambda x\ .$$

Remarque 2.4.2 $\sigma(T) \cup \rho(T) = \mathbb{C}$. *et* $\sigma(T) \cap \rho(T) = \emptyset$.

Définition 2.4.9 ***(Spectre ponctuel)***

on appelle Spectre ponctule de T l'ensemble des valeurs propres de T, noté $\sigma_p(T)$ tel que

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ non injectif }\}.$$

Définition 2.4.10 ***(spectre continu)***

on appelle spectre continu de T et on note par $\sigma_c(T)$,l'ensemble

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ injectif et } Im(T - \lambda I) \neq \overline{Im(T - \lambda I)} = \mathbb{H}\}.$$

Définition 2.4.11 ***(Spectre résiduel)***

on appelle spectre résiduel de T et on note par $\sigma_r(T)$;l'ensemble

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ injectif et } \overline{Im(T - \lambda I)} \neq \mathbb{H}\}$$

Définition 2.4.12 ***(le spectre)*** *le spectre $\sigma(T)$ est la réunion disjointe de trois ensembles*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

Définition 2.4.13 *soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$.*

si T est inversible,alors $\sigma(T^{-1}) = \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$

Chapitre 3

Applications

3.1 Opérateurs 2-linaires bornés sur des espaces vectoriels 2-normés

3.1.1 Introdiction

Dans [7] S. Gähler a introduit la définition suivante d'un espace à 2 normes :

Définition 3.1.1 *[7] Soit X un espace linéaire réel de dimension supérieure à 1 et soit $\|.,.\|$ une fonction à valeurs réelles sur $X \times X$ satisfaisant la quatre propriétés suivantes :*

(G1) $\|x, y\| = 0$ si et seulement si les vecteurs x et y sont linéairement dépendants ;

(G2) $\|x, y\| = \|y, x\|$;

(G3) $\|x, \alpha y\| = |\alpha|\|x, y\|$ pour tout nombre réel α ;

(G4) $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ pour tout $x, y, z \in X$.

La fonction $\|.,.\|$ sera appelé une 2-norme sur X et le couple $(X, \|.,.\|)$ un espace linéaire à 2 normes.

Dans [10] et [11] nous avons donné une généralisation de l'espace 2-normé de Gahler. A savoir une norme 2 généralisée n'a pas besoin d'être symétrique et de satisfaire la première condition de la définition ci-dessus.

Définition 3.1.2 *[10] Soient X et Y des espaces linéaires réels. Notons D un sous-ensemble non vide de $X \times Y$ tel que pour tout $x \in X$, $y \in Y$ les ensembles*

$D_x = \{y \in Y, (x, y) \in D\}$ et $D^y = \{x \in X; (x, y) \in D\}$ sont linéaires sous-espaces de l'espace Y et X, respectivement.

Une fonction$\|.,.\| : D \to [0, 1)$ sera appelée norme 2 généralisée sur D s'il satisfait aux conditions suivantes :

(N1) $\|x, \alpha y\| = |\alpha|\|x, y\| = \|\alpha x, y\|$ pour tout nombre réel α et tout $(x, y) \in D$;

(N2) $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ pour $x \in X, y, z \in Y$ tel que $(x, y), (x, z) \in D$;

(N3) $\|x + y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\|$ pour $x, y \in X, z \in Y$ tel que $(x, z), (y, z) \in D$;

L'ensemble D est appelé un ensemble 2-normé.

En particulier, si $D = X \times Y$, la fonction $\|.,.\|$ sera appelé un 2-norme généralisée sur $X \times Y$ et le *couple $(X \times Y; \|.,.\|)$ a généralisé Espace à 2 normes.*

De plus, si $X = Y$, alors l'espace 2-normé généralisé sera noté par $(X, \|.,.\|)$

Supposons que la norme 2 généralisée vérifie, en plus, la symétrie état. Ensuite, nous définirons la 2-norme comme suit :

Définition 3.1.3 *[10] Soit X un espace linéaire réel. Notons χ un sous-ensemble non vide de $X \times X$ avec la propriété $\chi = \chi^{-1}$ et tel que l'ensemble*

$\chi^y = \{x \in X; (x; y) \in \chi\}$ est un sous-espace linéaire de X, pour tout $y \in X$.

Une fonction $\|.,.\| : \chi \to [0, 1)$ remplissant les conditions suivantes :

(S1) $\|x, y\| = \|y, x\|$ pour tout $(x, y) \in \chi$;

(S2) $\|x, \alpha y\| = |\alpha|\|x, y\| = \|\alpha x, y\|$ pour tout nombre réel α et tout $(x, y) \in \chi$;

(S3) $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ pour $x \in X, y, z \in Y$ tel que $(x, y), (x, z) \in \chi$;

sera appelée une 2-norme symétrique généralisée sur X. L'ensemble X est appelé une ensemble symétrique à 2 normes. En particulier, si $X = X \times X$, la fonction $\|.,.\|$ sera appelée une 2-norme symétrique généralisée sur X et le couple $(X, \|.,.\|)$ un espace symétrique généralisé à 2 normes.

Dans [10], [11], [12], [13] nous avons considéré les propriétés des espaces 2-normés généralisés et ensembles à 2 normes

Dans ce qui suit nous utiliserons les résultats suivants :

Théorème 3.1.1 *[10] Soit $(X \times Y, \|.,.\|)$ un espace 2-normé généralisé.*

Alors la famille $\mathcal{B}$ de tous les ensembles définis par :

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X; \|x, y_i\| < \varepsilon\}$$

où $y_1, y_2, ..., y_n \in Y, n \in N$ et$\varepsilon > 0$, forme un système complet de voisinages de zéro pour une topologie localement convexe dans X.

Nous le noterons par le symbole $\mathcal{T}(X, Y)$. De même, nous avons le précédent théorème pour une topologie $\mathcal{T}(X, Y)$ dans l'espace Y . Dans le cas où $X = Y$ nous écrira : $\mathcal{T}_1(X) = \mathcal{T}(X, Y)$ et $\mathcal{T}_2(X) = \mathcal{T}(X, Y)$

Soit $(X \times Y; \|.,.\|)$ un espace 2-normé généralisé et soit Σ un ensemble dirigé. Un $\{x_\sigma; \sigma \in \Sigma\}$ est convergent vers $x_o \in X$ dans $(X, \mathcal{T}(X, Y))$ si et seulement si pour tout $y \in Y$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\sigma_o \in \Sigma$ tel que $\|x_\sigma - x_o, y\| < \varepsilon$

pour tout $\sigma \geq \sigma_o$. De même on a la notion de convergence dans$(Y, \mathcal{T}(Y, X))$. Une séquence $\{x_n, n \in N\} \subset X$ est une suite de Cauchy dans $(X, \mathcal{T}(X, Y))$ si et seulement si pour tout $y \in Y$ et $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $n_o \in N$ tel que inégalité $n, m > n_o$ implique $\|x_n - x_m, y\| < \varepsilon$. Un espace $(X, \mathcal{T}(X, Y))$ est appelé séquentiellement complet si toute suite de Cauchy dans $(X, \mathcal{T}(X, Y))$ est convergente dans cet espace. De manière analogue, nous avons la notion de complétude séquentielle pour l'espace $(Y, \mathcal{T}(Y, X))$.

Exemple 3.1.1 *[10] Soit X un espace linéaire réel qui a deux normes (semi-normes) $\|.\|_1, \|.\|_2$. Alors $(X, \|.,.\|)$ est un espace 2-normé généralisé avec la norme 2 définie par la formule*

$$\|x, y\| = \|x\|_1.\|y\|_2 \text{ pour chaque } x, y \in X$$

Remarquons que les topologies engendrées par ces normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ coïncident avec les topologies $\mathcal{T}_1(X)$ et $\mathcal{T}_2(X)$ données dans le théorème

Exemple 3.1.2 *Dans l'exemple (3.1.1) , nous pouvons obtenir $\|.\|_1 = \|.\|_2$. Puis $(X, \|.,.\|)$ est un espace 2-normé symétrique généralisé avec le symétrique 2-norme définie par la formule*

$$\|x, y\| = \|x\|.\|y\| \text{ pour chaque } \; x, y \in X \tag{3.1}$$

Remarquons qu'un espace symétrique de norme 2 n'est pas nécessairement un espace de norme 2 espace au sens de Gähler. Par exemple donné dans l'exemple (3.1.2) $x \neq \theta$, $y = kx, k \neq 0$ on obtient

$$\|x, y\| = \|x, kx\| = |k|.\|x, x\| = |k|.\|x\|^2 > 0$$

mais malgré cela x et y sont linéairement dépendants. L'espace à 2 normes de l'exemple (3.1.2) n'est pas un espace 2-normé au sens de la définition (3.1.1) Il est facile de voir que si $(X, \|.\|)$ est un espace normé, $\mathcal{T}_1$-la topologie générée par cette norme et $\mathcal{T}_2$-la topologie générée par la 2-norme définie par la formule (3.1), alors $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. De plus une suite $\{x_n, n \in N\}$ est un Suite de Cauchy dans $(X, \|.\|)$ si et seulement si c'est une suite de Cauchy dans $(X, \|.\|)$ avec la norme 2 définie dans l'exemple (3.1.2) Ainsi s'ensuit le théorème suivant.

Théorème 3.1.2 *Un espace normé $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach si et seulement si l'espace de norme 2 symétrique avec la norme 2 définie par (3.1) est séquentiellement Achevée.*

3.1.2 L'espace de tous les opérateurs 2-linéaires bornés

Dans [14] A. G. White a défini et considéré les propriétés de 2- fonctionnelles linéaires de $B \times B$, où B désigne un espace 2-normé au sens de Gähler. Il a prouvé que l'ensemble de toutes les fonctionnelles 2-linéaires bornées est un Espace Banach.
S. S. Kim, Y. J. Cho et A. G. White dans [9] et A. Khan dans [8] ont donné la propriétés des opérateurs bornés de $X \times X$ à valeurs dans un espace normé Y, où X désigne un espace 2-normé au sens de Gähler. Ils ont montré que l'ensemble B$(X \times X$, Y) de tous les opérateurs bornés de$X \times X$ dans Y est un espace semi-norme. De plus, si Y est un espace de Banach, alors $B(X \times X, Y)$ est un espace complet.
Dans cette section, nous considérerons les opérateurs 2-linéaires bornés définis sur un Ensemble 2-normé dans un espace normé. Nous allons montrer, comme dans ce qui précède papiers, que l'espace de ces opérateurs est un espace de Banach. Nous prouverons que sous certaines conditions supplémentaires, il s'agit d'un espace symétrique à 2 normes. Considérons un espace linéaire réel X. Soit $\mathcal{D} \subset X \times X$ un ensemble 2-normé, Y un espace normé

Définition 3.1.4 *Un opérateur $F : \mathcal{D} \to Y$ est dit 2-linéaire s'il satisfait les conditions suivantes :*

1. $F(a+c, b+d) = F(a,b) + F(a,d) + F(c,b) + F(c,d)$ *pour* $a,b,c,d \in X$ *tel que* $a,c \in \mathcal{D}^b \bigcap \mathcal{D}^d$.
2. $F(\alpha a, \beta b) = \alpha.\beta.F(a,b)$ *pour* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, (a,b) \in \mathcal{D}$.

Définition 3.1.5 *Un opérateur F de norme 2 est dit borné s'il existe un nombre positif K tel que*

$$\|F(a,b)\| \leq K.\|a,b\| \text{ pour tout } (a,b) \in \mathcal{D}$$

Définition 3.1.6 *Si F est un opérateur borné, alors le nombre suivant*

$$\|F\| = \inf\{K > 0; \|F(a,b)\| \leq K.\|a,b\| \text{ pour } (a,b) \in \mathcal{D}\}$$

sera appelée la norme de l'opérateur 2-linéaire F.

Exemple 3.1.3 *Soit $(X\ ,\ (\ .\ /\ .\ ))$ un véritable espace de produit interne. Puis X est un espace 2-normed symétrique généralisé avec la 2-norm définie comme suit :*

$$\|x,y\| = |(x|y)| \text{ pour tout } x,y \in X$$

Cette norme 2 génère une topologie faible dans l'espace de Hilbert (voir l'exemple (3.1.1) dans [10]). Un opérateur $F : X \times X \to \mathbb{R}$ défini par la formule

$$F(a,b) = (a|b) \text{ pour } a,b \in X$$

est 2-linéaire et borné. De plus $\|F\| = 1$ Dans le théorème suivant, nous donnerons les propriétés des notions mentionnées ci-dessus.

Théorème 3.1.3 *Soit F un opérateur 2-linéaire borné. Puis :*

(a) $\|F\| \leq K$ *pour* $K \in \mathcal{P}^{(F)} = \{K' > 0; \|F(a,b)\| \leq K'.\|a,b\| \text{ pour } (a,b) \in \mathcal{D}\}$;

(b) $\|F(a,b)\| \leq \|F\|.\|a,b\|$ *pour tout* $(a,b) \in \mathcal{D}$;

(c)

$$\begin{aligned}\|F\| &= \sup\{\|F(a,b)\|; (a,b) \in \mathcal{D}; \|a,b\| = 1\} \\ &= \sup\{\|F(a,b)\|; (a,b) \in \mathcal{D}; \|a,b\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\frac{\|F(a,b)\|}{\|(a,a;b)\|}(a,b) \in \mathcal{D}; \|a,b\| \neq 0\}\end{aligned}$$

Preuve La condition (a) découle de la Définition (3.1.6)

(b) Comme l'opérateur F est borné, alors il existe $K > 0$ tel que

$$\|F(a,b)\| \leq K.\|a,b\| \text{ pour } (a,b) \in \mathcal{D}$$

Ainsi , c'est-à-dire

$$\|F(a,b)\| \leq \|F\|.\|a,b\|$$

(c) d'aprés (b) $\sup\{\frac{\|F(a,b)\|}{\|(a,a;b)\|}(a,b) \in \mathcal{D}; \|a,b\| \neq 0\} \leq \|F\|$ Laisser $A = sup\|F(a,b)\|; (a,b) \in \mathcal{D}, \|a,b\| = 1$ ensuite

$$\begin{aligned}
A &= \sup\{\frac{\|F(a,b)\|}{\|(a,a;b)\|}(a,b) \in \mathcal{D}; \|a,b\| = 1\} \\
&\leq \sup\{\frac{\|F(a,b)\|}{\|(a,a;b)\|}(a,b) \in \mathcal{D}; \|a,b\| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\frac{\|F(a,b)\|}{\|(a,a;b)\|}(a,b) \in \mathcal{D}; \|a,b\| \neq 1\} \\
&\leq \|F\|
\end{aligned}$$

en outre

$$A = \sup\{\frac{\|F(a,b)\|}{\|(a,a;b)\|}(a,b) \in \mathcal{D}; \|a,b\| \leq 1\} \tag{3.2}$$

Soit $(a,b) \in \mathcal{D}$ tel que $\|a,b\| \neq 0$. Parce qu'un $\|\frac{a}{\|(a,b)\|}, b\| = 1$, alors $\|F(\frac{a}{\|(a,b)\|}, b) \leq A$. Et de plus en vertu des égalités.

$$\|F(\frac{a}{\|(a,b)\|}, b) = \|\frac{1}{\|(a,b)\|}.F(a,b)\| = \frac{1}{\|(a,b)\|}\|F(a,b)\|$$

on obtient $\|F(a,b)\| \leq A.\|a,b\|$. D'autre part, si $(a,b) \in \mathcal{D}$ et $\|a,b\| = 0$, alors $0 \leq \|F(a,b)\| \leq \|F\|.\|a,b\| = 0$, soit $\|F(a,b)\| = 0 = A\Delta\|a,b\|$ Par conséquent $\|F(a,b)\| \leq A.\|a,b\|$ pour tout $(a,b) \in \mathcal{D}$, ce qui signifie que $A \in \mathcal{P}^(F)$. En vertu de (a) on obtient

$$\|F\| \leq A \tag{3.3}$$

Les conditions (2.9) et (3.2) impliquent

$$\begin{aligned}
\|F\| &= \sup\{\|F(a,b)\|; (a,b) \in \mathcal{D}; \|a,b\| = 1\} \\
&= \sup\{\frac{\|F(a,b)\|}{\|(a,a;b)\|}(a,b) \in \mathcal{D}; \|a,b\| \neq 1\}
\end{aligned}$$

De (b) on a $\sup\{\|F(a,b)\|; (a,b) \in \mathcal{D}; \|a,b\| \leq 1\} \leq \|F\|$, qui avec (3.2) donne l'égalité $\|F\| = \sup\{\|F(a,b)\|; (a,b) \in \mathcal{D}, \|a,b\| \leq 1\}$, et la preuve est terminée.

Définition 3.1.7 *Soient$D \subset X \times X$ un ensemble 2-normé et Y un ensemble normé espacer. Notons $L_2(\mathcal{D}, Y)$ l'ensemble de tous les opérateurs 2-linéaires bornés de $\mathcal{D}$ en Y.*
En particulier, on écrira $L_2(X,Y)$, si X est un 2-normé généralisé l'espace et $\mathcal{D} = X \times X$. Soit $F, G \in L_2(\mathcal{D}, Y)$ et définissons

1. *$(F+G)(a,b) = F(a,b) + G(a,b)$ pour tout $(a,b) \in \mathcal{D}$;*
2. *$(\alpha.F)(a,b) = \alpha.F(a,b)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}, (a,b) \in \mathcal{D}$.*

Théorème 3.1.4 *Si $\mathcal{D}$ est un ensemble 2-normé et Y un espace normé, alors le l'ensemble $L_2(\mathcal{D}, Y)$ est un espace normé de norme $\|.\|$ défini dans la Définition (3.1.6)*

Preuve Prenons $F, G \in L_2(\mathcal{D}, Y)$ $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ et $a, b, c, d \in X$ tel qu'un ; $a, c \in \mathcal{D}^b \cap \mathcal{D}^d$ Pour F + G on obtient :

$$(F+G)(a+c, b+d) = (F+G)(a,b) + (F+G)(a,d) + (F+G)(c,b) + (F+G)(c,d); \tag{3.4}$$

$$(F+G)(\alpha a; \beta b) = \alpha\beta(F+G)(a,b) \tag{3.5}$$

De plus en vertu de la condition (b) du Théorème (3.1.3) on a

$$\|(F+G)(a,b)\| = \|F(a,b) + G(a,b)\| \tag{3.6}$$

$$\leq \|F(a,b)\| + \|G(a,b)\| \leq \|F\|.\|a,b\| + \|G\|.\|a,b\| \tag{3.7}$$

$$= (\|F\| + \|G\|).\|a,b\| \tag{3.8}$$

Ainsi $F+G \in L_2(\mathcal{D}, Y)$ De manière analogue, nous montrons que $\alpha.F \in L_2(\mathcal{D}, Y)$et

$$\|(\alpha.F)(a,b)\| = \|\alpha.F(a,b)\| \leq |\alpha|.\|F\|.\|a,b\| \tag{3.9}$$

De plus il est facile de montrer que l'ensemble $L_2(\mathcal{D}, Y)$ est un espace linéaire réel. Nous allons maintenant montrer que la fonction $\|.\| : L_2(\mathcal{D} \to [0,1)$ donnée en La définition (3.1.6) satisfait toutes les conditions d'une norme.

Si $\|F\| = 0$, alors $\|F(a,b)\| = 0$ pour tout $(a,b) \in \mathcal{D}$. Ainsi $F(a,b) = 0$ pour chaque $(a,b) \in D$. Inversement, si F est un opérateur nul, alors

$$\|F\| = \sup\{\|F(a,b)\|, (a,b) \in \mathcal{D}, \|a,b\| = 1\} = 0$$

En conséquence on a la condition

$$\|F\| = 0 \text{ si et seulement si } F = 0$$

D'après (3.9) nous avons $|\alpha|.\|F\| \in \mathcal{P}^{(\alpha F)}$, ce qui avec le théorème (3.1.3) (a) implique l'inégalité $\|\alpha.F\| \leq |\alpha|.\|F\|$. Supposons $\alpha \neq 0$. Alors

$$\|F\| = \|\frac{1}{\alpha}.\alpha.F\| \leq \frac{1}{\alpha}.\|\alpha F\|$$

c'est-à-dire $|\alpha|.\|F\| \leq \|\alpha.F\|$; donc $|\alpha|.\|F\| = \|\alpha.F\|$.

Pour $\alpha = 0$ l'égalité $\|\alpha.F\alpha = |\alpha|.\|F\|$ est évidente. Donc $\|\alpha.F\| = |\alpha|.\|F\|$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. La condition (3.6) implique $\|F\| + \|G\| \in \mathcal{P}^{(F+G)}$. D'où et d'après le théorème (3.1.3)(a) nous avons $\|F+G\| \leq \|F\| + \|G\|$. Ceci achève la preuve.

Théorème 3.1.5 *Si D est un ensemble de norme 2 et Y est un espace de Banach, alors $L_2(\mathcal{D}, Y)$ est un espace de Banach.*

Preuve D'après le théorème (3.1.4),$L_2(\mathcal{D}, Y)$ est un espace normé. Soit $\{F_n; n \in N\}$ une suite de Cauchy dans $L_2(\mathcal{D}, Y)$. Puis

$$\lim_{n,m\to 1} \|F_n - F_m\| = 0$$

et pour tout $(a,b) \in \mathcal{D}$ l'inégalité suivante

$$\|F_n(a,b) - F_m(a,b)\| = \|(F_n - F_m)(a,b)\| \leq \|F_n - F_m\|.\|a,b\|$$

est vrai. Ainsi $\{F_n(a,b); n \in N\}$ est une suite de Cauchy dans Y pour tout $(a,b) \in \mathcal{D}$. Comme Y est complet, la suite $\{F_n(a,b); n \in N\}$ est convergent pour tout $(a,b) \in \mathcal{D}$. Notons

$$(a,b) = \lim_{n\to 1} F_n(a,b)$$

Nous allons montrer que $F \in L_2(\mathcal{D}, Y)$ Pour un $a,b,c,d \in X$ tel que $a,c \in \mathcal{D}^b \cap \mathcal{D}^d$ nous avons

$$\begin{aligned} F(a+c, b+d) &= \lim_{n\to 1} F_n(a+cb+d) \\ &= \lim_{n\to 1} F_n(a,b) + lim_{n\to 1} F_n(a,d) + \lim_{n\to 1} F_n(c,b) + \lim_{n\to 1} F_n(c,d) \\ &= F(a,b) + F(a,d) + F(c,b) + F(c,d) \end{aligned}$$

De plus pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \in \mathcal{D}$ on a :

$$\begin{aligned} F(\alpha a, \beta b) &= \lim_{n\to 1} F_n(\alpha a, \beta b) \\ &= \lim_{n\to 1} \alpha\beta.F_n(a,b) \\ &= \alpha\beta. \lim_{n\to 1} F_n(a,b) \\ &= \alpha\beta.F(a,b). \end{aligned}$$

Ainsi F est un opérateur 2-linéaire. L'inégalité

$$|\|F_n\| - \|F_m\|| \leq \|F_n - F_m\|$$

implique que $\{\|F_n\|; n \in N\}$ est une suite de Cauchy dans$\mathbb{R}$. Par conséquent, cette est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $K > 0$ tel que $\|F_n\| \leq K$ pour tout $n \in N$. En utilisant ce résultat, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|F(a,b)\| &\leq \|F_n(a,b)\| + \|F(a,b) - F_n(a,b)\| \\ &\leq \|F_n\|.\|a,b\| + \|F(a,b) - F_n(a,b)\| \\ &\leq K\|a,b\| + \|F_n(a,b) - F(a,b)\| \end{aligned}$$

Laisser $n \to \infty$ on obtient $\|F(a,b)\| \leq K.\|a,b\|$ pour tout $(a,b) \in \mathcal{D}$, qui signifie que F est borné. Nous avons donc montré que $F \in L_2(\mathcal{D}, Y)$. Supposons maintenant que $(a,b) \in \mathcal{D}$ et $\|a,b\| \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Parce que $\{F_n; n \in N\}$ est une suite de Cauchy, il n'existe pas de $n_0 \in N$ tel que

$$\|F_n - F_m\| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ pour tout } n, m \geq n_o$$

Ainsi $\|F_n(a,b) - F_m(a,b)\| \leq \|F_n - F_m\|.\|a,b\| < \frac{\varepsilon}{4}.\|a,b\|$ pour tout $n, m \geq n_o$. L'égalité

$$F(a,b) = \lim_{n\to\infty} F_n(a,b)$$

implique qu'il existe $n_1 = n_1(a,b) \geq n_o$ tel que

$$\|F_{n_1}(a,b) - F(a,b)\| < \frac{\varepsilon}{4}.\|a,b\|$$

$\|a,b\|$ En conséquence on obtient

$$\begin{aligned}\|F_n(a,b) - F(a,b)\| &\leq \|F_n(a,b) - F_{n_1}(a,b)\| + \|F_{n_1}(a,b) - F(a,b)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}.\|a,b\|\end{aligned}$$

pour $n \geq n_o, (a,b) \in \mathcal{D}et\|a,b\| \neq 0$. Si $\|a,b\| = 0$, alors $F_n(a,b) = 0 = F(a,b)$, donc $\|F_n(a,b) - F(a,b)\| = \frac{\varepsilon}{2}.\|a,b\|$. Donc $\|F_n(a,b) - F(a,b)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.\|a,b\|$ pour tout $n \geq n_o; (a,b) \in \mathcal{D}$, c'est-à-dire

$$\frac{\varepsilon}{2} \in \mathcal{P}^{(F_n - F)} \text{ pour } n \geq n_o$$

Donc $\|F_n - F_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ pour $n \geq n_o$, ce qui signifie que la suite $\{F_n; n \in N\}$ est convergent vers F dans $L_2(\mathcal{D}, Y)$. C'est pourquoi nous avons montré que $L_2(\mathcal{D}, Y)$ est un espace de Banach, ce qui termine la preuve. Du théorème (3.1.5) et du théorème (3.1.2) découle le corollaire suivant.

Corollaire 3.1.1 *Si χ est un ensemble 2-normé symétrique et Y est un Banach espace, alors $L_2(\chi, Y)$ est un espace symétrique séquentiellement complet à 2 normes avec la norme 2 définie comme suit :*

$$\|F, G\| = \|F\|.\|G\| \textit{ pour } F, G \in L_2(\chi, Y)$$

3.1.3 Théorèmes de Banach-Steinhaus pour les opérateurs 2-linéaires bornés

() Dans cette section, nous examinerons les propriétés des suites d'opérateurs de $L_2(\mathcal{D}, Y)$. Nous formulerons les théorèmes de Banach-Steinhaus pour une famille de ces les opérateurs.

Proposition 3.1.1 *Soient $\mathcal{D}$ un ensemble 2-normé, Y un espace normé et $\{F_n; n \in N\} \subset L_2(\mathcal{D}, Y)$. Si la suite de normes $\{\|F_n\|; n \in N\}$ est bornée, alors pour chaque $(x,y) \in \mathcal{D}$ la suite de normes $\{\|F_n(x,y)\|; n \in N\}$ est délimité.*

Preuve De l'hypothèse il s'ensuit qu'il existe un nombre positif M tel que $\|F_n\| \leq M$ pour chaque $n \in N$. Ainsi pour $(x,y) \in \mathcal{D}$ on obtient

$$\|F_n(x,y)\| \leq \|F_n\|.\|x,y\| \leq M.\|x,y\| \text{ pour chaque } n \in N$$

.

Théorème 3.1.6 *Soit X un espace 2-normé généralisé et Y un espace normé espacer. Si $\{Fn; n2N\} \subset L_2(X, Y)$ est ponctuellement convergente vers F et la séquence de normes $\{\|F_n\|; n \in N\}$ est borné, alors $F \in L_2(X, Y)$*

Preuve Pour tout $x, y \in X$ nous avons

$$F(x,y) = \lim_{n \to 1} F_n(x,y)$$

Ainsi l'opérateur F est un opérateur 2-linéaire. Parce que la suite de normes$\{\|F_n\|; n \in N\}$ est borné, alors il y a existe $M > 0$ tel que $\|F_n\| \leq M$ pour tout $n \in N$. Ainsi $\|F_n(x, y)k \leq \|F_n\|.\|x, y\| \leq M.\|x, y\|$. Prenons $x, y \in X$. Alors

$$\begin{aligned}\|F(x,y)\| &\leq \|, F_n(x,y) - F(x,y)\| + \|F_n(x,y)\| \\ &\leq \|F_n(x,y) - F(x,y)\| + M.\|x,y\|.\end{aligned}$$

En laissant $n \to 1$ on obtient $\|F(x, y)\| \leq M.\|x, y\|$ pour chaque $x, y \in X$. Ce donne que F est bornée. En conséquence nous avons montré que $F \in L_2(X, Y)$.

Théorème 3.1.7 *Soit Y un espace de Banach, $(X, \|.,.\|)$ un 2- généralisé espace normé et soit A un ensemble linéairement dense dans les espaces $(X, \mathcal{T}_1(X))$ et $(X, \mathcal{T}_2(X))$. Si une suite$\{F_n; n \in N\} \subset L_2 \in (X, Y)$ est convergente ponctuellement sur l'ensemble A et la suite de normes $\{\|F_n\|; n \in N\}$ est borné, alors le séquence $\{F_n(x, y); n \in N\}$ est convergent en Y pour chaque $x, y \in X$.*

Preuve Soit X_o le sous-espace linéaire de X engendré par A. On considérera X_o comme un espace de norme 2 de même norme 2 induite par celui de X. Soit $x, y \in X_o$. Alors $x = a_1x_1 + ... + a_kx_k, y = b_1y_1 + ... + b_ty_t$, où $a_i, b_j \in \mathbb{R}x_i, y_j \in A; i = 1, 2, ..., k; j = 1, 2, ..., t; k, t \in N$ et

$$F_n(x,y) = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{k} a_i b_j F_n(x_i, y_j)$$

Parce que la suite $\{\|F_n(x_i, y_j)\|; n \in N\}$ est convergent pour tout $x_i, y_j \in A$, alors $\{F_n(x, y); n \in N\}$ est convergent en X_o Soit $\|F_n\| \leq M$ pour tout $n \in N$ Prenons un nombre $\varepsilon > 0$ et $x, y \in X$ Puisque X_o est un ensemble dense dans $(X, \mathcal{T}_1(X))$ on peut choisir $x_o \in X_o$ tel que

$$\|x - x_o, y\| < \frac{\varepsilon}{6M}$$

De plus il existe $y_o \in X_o$ avec la propriété

$$\|x_o, y - y_o\| < \frac{\varepsilon}{6M}$$

car X_o est aussi un ensemble dense dans $(X, \mathcal{T}_2(X))$. La suite $F_n(x_o, y_o); n \in N$ est convergente, donc c'est une suite de Cauchy en Y. Il existe donc un nombre $n_o \in N$ tel que

$$\|F_n(x_o, y_o) - F_m(x_o, y_o)\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pour chaque } n; m \geq n_o$$

En conséquence on obtient

$$\begin{aligned}\|F_n(x,y) - F_m(x,y)\| &= \|F_n(x - x_o + x_o, y) - F_m(x - x_o + x_o, y)\| \leq \|F_n(x - x_o, y)\| + \|F_m(x - x_o, y)\| \\ &+ \|F_n(x_o, y) - F_m(x_o, y)\| \\ &\leq \|F_n(x - x_o, y)\| + \|F_m(x - x_o, y)\| + \|F_n(x_o, y - y_o)\| + \|F_m(x_o, y - y_o)\| \\ &+ \|F_n(x_o, y_o) - F_m(x_o, y_o)\| \\ &\leq \|F_n\|.\|x - x_o, y\| + \|F_m\|.\|x - x_o, y\| + \|F_n\|\|x_o, y - y_o\| + \|F_m\|.\|x_o, y - y_o\| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq 2M.\|x - x_o, y\| + 2M.\|x_o, y - y_o\| + \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

pour $n, m \geq n_o$. Nous avons donc montré que $\{F_n(x,y); n \in N\}$ est un Cauchy séquence en Y pour chaque $x, y \in X$. Parce que Y est complet, alors la suite $\{F_n(x,y); n \in N\}$ est convergent en Y , ce qui termine la preuve.

Théorème 3.1.8 *Soit $(X, \|.,.\|)$ un espace 2-normé généralisé et Y un espace de Banach. Si une suite $\{F_n; n \in N\} \subset L_2(X,Y)$ est ponctuel convergent vers $F \in L_2(X,Y)$ sur un ensemble A linéairement dense dans les espaces $(X, \mathcal{T}_1(X))$ et $(X, \mathcal{T}_2(X))$ et la suite de normes $\{\|F_n\|; n \in N\}$ est borné, alors $\{F_n; n \in N\}$ est ponctuellement convergente vers F et l'inégalité $\|F\| \leq \sup_n \|F_n\|$ tient.*

Preuve Il résulte du théorème (3.1.7) que la suite $\{F_n(x,y); n \in N\}$ est convergente en Y pour chaque $x, y \in X$ Notons

$$H(x,y) = \lim_{n \to 1} F_n(x,y) \text{ pour tout } x, y \in X$$

Il faut montrer que $H(x,y) = F(x,y)$ pour tout $x, y \in X$. En utilisant le Théorème (3.1.6) nous voir que $H \in L_2(X,Y)$. De l'hypothèse, il s'ensuit que $H(x,y) = F(x,y)$ pour tout $x, y \in A$, soit $(H - F)(x,y) = 0$ pour $x, y \in A$ Parce que $L_2(X,Y)$ est un espace linéaire, alors $H - F \in L_2(X,Y)$. Par conséquent $H - F$ est une 2-linéaire opérateur et $(H - F)(x,y) = 0$ pour $x, y \in X_o$, où X_o désigne l'ensemble de tous combinaisons linéaires d'éléments de A. De plus $H - F$ est borné, donc il existe $K > 0$ tel que $\|(H - F)(x,y)\| \leq K.\|x,y\|$ pour tout $x, y \in X$. Soit $\varepsilon > 0; x, y \in X$. Comme l'ensemble X_o est dense dans $(X, \mathcal{T}_1(X))$ on peut choisir $x_o \in X_o$ tel que

$$\|x - x_o, y\| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

Il existe $y_o \in X_o$ avec la propriété

$$\|x_o, y - y_o\| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

car X_o est aussi dense dans $(X, \mathcal{T}_2(X))$. Ensuite nous avons

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|(H - F)(x,y)\| = \|(H - F)(x - x_o + x_o, y)\| \\
&= \|(H - F)(x - x_o, y) + (H - F)(x_o, y)\| \\
&= \|(H - F)(x - x_o, y) + (H - F)(x_o, y - y_o + y_o)\| \\
&= \|(H - F)(x - x_o, y) + (H - F)(x_o, y - y_o) + (H - F)(x_o, y_o)\| \\
&= \|(H - F)(x - x_o, y) + (H - F)(x_o, y - y_o)\| \\
&\leq \|(H - F)(x - x_o, y)\| + \|(H - F)(x_o, y - y_o)\| \\
&\leq K.\|x - x_o, y\| + K.\|x_o, y - y_o\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Cela donne $\|(H - F)(x,y)\| = 0$ pour chaque $x, y \in X$, soit $H(x,y) = F(x,y)$ pour chaque $x, y \in X$. Notons $M = \sup_n \|F_n\|$. Alors pour tout $n \in N$ et $x, y \in X$ tel que $\|x,y\| \leq 1$ on a

$$\|F_n(x,y)\| \leq \|, F_n\|.\|x,y\| \leq M$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|F(x,y)\| &= \|F(x,y) - F_n(x,y) + F_n(x,y)\| \\
&\leq \|F(x,y) - F_n(x,y)\| + \|F_n(x,y)\| \\
&\leq \|F(x,y) - F_n(x,y)\| + M
\end{aligned}$$

En laissant $n \to 1$ on obtient $\|F(x,y)\| \leq M$ pour $x, y \in X$ tel que $\|x, y\| \leq 1$. Ceci implique $\|F\| = \sup\{\|F(x,y)\|; X, y \in X, \|x,y\| \leq 1\} \leq M$, ce qui finit la preuve.

3.2 Opérateurs autoadjoints positifs dans un espace de Hilbert.

3.2.1 Introduction

Cette application présente le concept et l'utilité de quelques opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert. On expose dans cette deuxième application certains caractérisations de leurs types,et leurs propriétés numériques et en donnant des exemples sur les utilisations et l'emploi de ces opérateurs continus sur les espaces de Hilbert.Enfin nous apprenons combien il est important de faire etudier ce type des opérateurs hilbertien continus

3.2.2 Opérateurs et formes linéaires continus.

Rappel :

Définition 3.2.1 *soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
Opérateur dans E est une application linéaire $E \longrightarrow F$;
Forme linéaire dans E est une application linéaire $E \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3.2.2 *: si E est normé,alors un opérateur A est continu si pour $v_n \longrightarrow v$ dans E,$Av_n \longrightarrow Av$ dans E,c.à.d. $\|v_n - v\| \Rightarrow \|Av_n - Av\| \longrightarrow 0$;*
une forme linéaire l est continue si pour $v_n \longrightarrow v$ dans E,$l(v_n) \longrightarrow l(v)$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemple 3.2.1 *1) pour $w \in E$ fixé, $v \longrightarrow \langle w, v\rangle$ est une forme linéaire continue. En particulier,dans l'espace de Hilbert $\mathbb{H}(a,b)$,pour $g(x)$ fixé,*

$$f(x) \longrightarrow \langle g, f\rangle = \int_a^b dx\overline{g(x)}f(x) \tag{3.10}$$

est une forme linéaire dans $\mathbb{H}(a,b)$.
2) projection sur un sous-espace V engendré par une suite $\{\varphi_n, n = 1, 2, ..., N\}$:

$$f(x) \longrightarrow P_V(f)(x) = \int_a^b dx' P_V(x, x')f(x') \tag{3.11}$$

avec

$$P_V(x, x') = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(x')} \tag{3.12}$$

un opérateur continu dans $\mathbb{H}(a, b)$.
3) Opérations de multiplication par x et de dérivation $\frac{d}{dx}$ sont des opérateurs dans $\mathbb{H}(a,b)$;

$$f(x) \longrightarrow xf(x) \tag{3.13}$$

$$f(x) \longrightarrow \frac{d}{dx}f(x) \tag{3.14}$$

4) Hamiltonian d'une particule dans un potentiel $U(x)$, dans la mécanique quantique :

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \tag{3.15}$$

(nous avous mis $m = \hbar = 1$). Il agit,comme un opérateur,sur fonction d'one $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) \longrightarrow (-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + U(x))\Psi(x). \tag{3.16}$$

donc dans l'espace de Hilbert $\mathbb{H}(-\infty, +\infty)$.

Matrice d'une Opérateur sur un base hilbertienne.

Si $\{u_n(x)\}$ est une base hilbertienne et A est un opérateur dans $\mathbb{H}(a, b)$, alors on pose

$$A_{mn} = \langle u_m, Au_n \rangle \tag{3.17}$$

Avec cette définition l'opérateur A agit sur les vecteurs de base comme une matrice :

$$Au_m(x) = \sum_n u_n(x) A_{nm} \tag{3.18}$$

Effectivement, en développant $Au_m(x)$ dans la série de Fourier dans la base $\{u_n(x)\}$, on trouve :

$$Au_m(x) = \sum_n u_n(x) a_n \tag{3.19}$$

$$a_n = \langle u_n, Au_m \rangle \tag{3.20}$$

Donc :

$$Au_n(x) = \sum_n u_n(x)\langle u_n, Au_m \rangle = \sum_n u_n(x) A_{nm} \tag{3.21}$$

Pour une fonction $f(x) \in \mathbb{H}(a, b)$, en la développant dans une série dans la base $\{u_n(x)\}$:

$$f(x) = \sum_n u_n(x) c_n \tag{3.22}$$

$$c_n = \langle u_n, f \rangle \tag{3.23}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} Af(x) = \sum_n Au_n(x) c_n \quad &= \sum_n (\sum_m u_m(x) A_{mn}) c_n \\ &= \sum_m u_m(x) (\sum_n A_{mn} c_n) \end{aligned} \tag{3.24}$$

On conclut que sur un vecteur $\overrightarrow{c} = \{c_n\}$, qui représente $f(x)$ dans la base $\{u_n(x)\}$,l'opérateur A agit comme une matrice :

$$Ac_m = \sum_n A_{mn} c_n \tag{3.25}$$

Observons encore une fois que dans l'espace de Hilbert les vecteurs et les matrices sont de dimension infinie.

Dual topologique.

Pour un espace vectoriel E on définit l'espace dual topologique E' comme un espace vectoriel des formes linéaires continues sur E.

Théorème 3.2.1 *Dans l'espace de Hilbert $\mathbb{H}$, pour tout $w \in \mathbb{H}$, l'application*

$$v \longrightarrow \langle w, v\rangle \tag{3.26}$$

est dans $\mathbb{H}'$; inversement, si $l \in \mathbb{H}'$, l'espace des formes linéaires continues sur $\mathbb{H}$, alors il existe $w \in \mathbb{H}$ tel que

$$l(v) = \langle w, v\rangle \tag{3.27}$$

pour tout $v \in \mathbb{H}$. (Sans démonstration).

3.2.3 Opérateur adjoint. Opérateur hermitien

Opérateur adjoint.

L'adjoint de l'opérateur A est l'opérateur A^* tel que pour tous $v, w \in \mathbb{H}$

$$\langle w, Av\rangle = \langle A^* w, v\rangle \tag{3.28}$$

Propriétés de l'adjoint

1)

$$(A+B)^* = A^* + B^*; (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$$

2)

$$(A^*)^* = A; (AB)^* = B^* A^*$$

3)Si A est continue A^* sussi.

4) Si A est inversible (il existe un autre opérateur A^{-1} tel que $A^{-1}A = 1$,alors

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} \tag{3.29}$$

5)Matrice de l'adjoint :

$$(A^*)_{mn} = \overline{A_{nm}} \tag{3.30}$$

Preuve

1) Pour la démonstration on met $(A+B)^*$ dans un produit scalaire

$$\langle (A+B)^* w, v\rangle \tag{3.31}$$

avec $v, w \in \mathbb{H}$ quelconques. Onsuite on utilise la définition de l'adjoint et la linéarité du produit scalaire :

$$\langle (A+B)^* w, v\rangle = \langle w, (A+B)v\rangle = \langle w, Av\rangle + \langle w, Bv\rangle = \langle A^* w, v\rangle + \langle B^* w, v\rangle = \langle (A^* + B^*)w, v\rangle \tag{3.32}$$

Donc on trouve que $(A+B) = A^* + B^*$.

De la même manière :

$$\langle (\lambda A)^* w, v\rangle = \langle w, \lambda Av\rangle = \lambda\langle w, Av\rangle = \lambda\langle A^* w, v\rangle = \langle \overline{\lambda} A^* w, v\rangle \tag{3.33}$$

D'où $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.

2)

$$\langle (A^*)^* w, v\rangle = \langle w, A^* v\rangle = \overline{\langle A^* v, w\rangle} = \overline{\langle v, Aw\rangle} = \langle Aw, v\rangle \tag{3.34}$$

Donc $(A^*)^* = A$.

3)On compare

$$\|Av_n - Av\|^2 = \langle A(v_n - v), A(v_n - v)\rangle = \langle A^* A(v_n - v), v_n - v\rangle \tag{3.35}$$

qui tend vers 0 quand $v_n \longrightarrow v$, par la définition de continuité de l'opérateur A, et

$$\|A^* v_n - A^* v\|^2 = \langle A^*(v_n - v), A^*(v_n - v)\rangle = \langle AA^*(v_n - v), v_n - v\rangle \tag{3.36}$$

La différence des deux expressions sera donnée par :

$$\|A^* v_n - A^* v\|^2 - \|Av_n - Av\|^2 = \langle [A, A^*](v_n - v), v_n - v\rangle \leqslant \|[A, A^*](v_n - v)\|^2 \times \|v_n - v\|^2 \tag{3.37}$$

Ici $[A, A^*] = AA^* - A^* A$, le commutateur et nous avons utilisé l'inégalité de Schwarz pour le produit scalaire, cours 14. Si, en plus, on suppose que le commutateur $[A, A^*]$ n'est pas un opérateur singulier,c.à.d. que $\|[A, A^*](v_n - v)\|^2 \longrightarrow 0$.

4)D'une part,pour tous $w, v \in \mathbb{H}$:

$$\langle w, v\rangle = \langle w, A^{-1} Av\rangle = \langle (A^{-1})^* w, Av\rangle \tag{3.38}$$

D'autre part :

$$\langle w, v\rangle = \langle A^*(A^*)^{-1} w, v\rangle = \langle (A^*)^{-1} w, Av\rangle \tag{3.39}$$

On peut conclure que $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

5)

$$(A^*)_{mn} = \langle u_m, A^* u_n\rangle = \overline{\langle A^* u_n, u_m\rangle} = \overline{\langle u_n, Au_m\rangle} = \overline{A_{nm}} \tag{3.40}$$

Exemple 3.2.2 *1) Opérateur intégral dans* $\mathbb{H}(a, b)$:

$$f(x) \longrightarrow Af(x) = \int_a^b dy K(x, y) f(y) \tag{3.41}$$

$K(x, y)$ est un noyau de A. Il est facile à vérifier que l'opérateur A^* est aussi un opérateur intégrale avec a un noyau égalà $\overline{K(y, x)}$.En effet :

$$\begin{aligned}\langle g, Af\rangle = &\int dx \overline{g(x)} Af(x)\\ &= \int dx \overline{g(x)} \int dy K(x, y) f(y)\\ &= \int dy (\int dx \overline{\overline{K(x, y)} g(x)}) f(y)\\ &= \int dx (\int dy \overline{\overline{K(y, x)} g(y)}) f(x)\\ &= \int dx \overline{A^* g(x)} f(x) = \langle A^* g | f\rangle\end{aligned} \tag{3.42}$$

2) Opérateur de dérivation dans l'espace $\mathbb{H}(-\infty, +\infty)$, des fonctions $f(x)$ avec $|f(x)|^2$ intégrable sur $(-\infty, +\infty)$. On a :

$$A = \frac{d}{dx} \tag{3.43}$$

$$f(x) \longrightarrow Af(x) = \frac{d}{dx} f(x) \tag{3.44}$$

On vérifiera à titre d'exercice,que

$$A^* = -\frac{d}{dx} \tag{3.45}$$

Opérateur Hermitien.

A est dit hermitien, ou auto-adjoint, si $A^* = A$.

Pour une matrice d'un opérateur hermitien on a :

$$\overline{A_{mn}} = A_{mn}$$

Exemple 3.2.3 *1) Opérateur de projection sur un sous-espace $V, \{\varphi_n, n = 1, 2, ...N\}$ Cet opérateur posséde un noya*

$$A_V(x, y) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)} \tag{3.46}$$

On trouve que

$$A_V^*(x, y) = \overline{A_V(y, x)} = A_V(x, y) \tag{3.47}$$

Donc l'opérateur est auto-adjoint.

2) Opérateur d'impulsion dans la mécanique quantique :

$$\hat{p} = -i\frac{d}{dx} \tag{3.48}$$

dans l'espace $\mathbb{H}(-\infty, +\infty)$ des fonctions d'ondes, d'une particule dans une dimention spaciale. On vérifie que

$$\hat{p}^* = \hat{p} \tag{3.49}$$

3) Hamiltonian de la mécanique quantique.

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \tag{3.50}$$

On vérifie également que

$$\hat{H}^* = \hat{H} \tag{3.51}$$

Proprétés.

1) Pour A hermitien, dans $\mathbb{H}(a, b), \langle v, Av\rangle$ est réel pour tout $v \in \mathbb{H}(a, b)$.

Démonstration :

$$\overline{\langle v, Av\rangle} = \langle Av, v\rangle = \langle v, A^*v\rangle = \langle v, Av\rangle \tag{3.52}$$

Définition 3.2.3 *Opérateur A est dit positif si $\langle v, Av\rangle \geqslant 0$ pour tout $v \in \mathbb{H}(a,b)$*

le carré d'un opérateur hermitien. En effet, supposons que B est un opérateur hermitien,$B^* = B$. Alors

$$\langle v, B^2v\rangle = \langle B^*v, Bv\rangle = \langle Bv, Bv\rangle = \langle Bv, Bv\rangle = \|Bv\|^2 \tag{3.53}$$

2) Les valeurs propres d'un opérateur hermitien sont réelles.

Preuve

Soit $\Psi_\lambda(x)$ est un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ.

$$A\Psi_\lambda = \lambda\Psi_\lambda(x) \tag{3.54}$$

Alors

$$\langle \Psi_\lambda, A\Psi_\lambda\rangle = \lambda\|\Psi_\lambda\|^2 \tag{3.55}$$

$\langle \Psi_\lambda, A\Psi_\lambda\rangle$ est réel pour A hermitien $\rightarrow \lambda$ est réel.

3) Les vecteurs propres d'un opérateur hermitien correspondants à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.

Preuve

$$A\Psi_1(x) = \lambda_1\Psi_1(x) \tag{3.56}$$

$$A\Psi_2(x) = \lambda_2\Psi_2(x) \tag{3.57}$$

où $\lambda_1$et λ_2 sont réels. Ensuite :

$$\langle \Psi_2, A\Psi_1\rangle = \lambda_1\langle \Psi_2, \Psi_1\rangle \tag{3.58}$$

$$\langle A^*\Psi_2, \Psi_1\rangle = \lambda_1\langle \Psi_2, \Psi_1\rangle \tag{3.59}$$

$$\langle A\Psi_2, \Psi_1\rangle = \lambda_1\langle \Psi_2, \Psi_1\rangle \tag{3.60}$$

$$\langle \lambda_2\Psi_2, \Psi_1\rangle = \lambda_1\langle \Psi_2, \Psi_1\rangle \tag{3.61}$$

$$\lambda_2\langle \Psi_2, \Psi_1\rangle = \lambda_1\langle \Psi_2, \Psi_1\rangle \tag{3.62}$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$,alors $\langle \Psi_2, \Psi_1\rangle = 0$.

3.2.4 Opérateurs unitaires

Définition 3.2.4 *U est un opérateur unitaire si*

$$U^* = U^{-1} \tag{3.63}$$

Propriété d'un opérateur unitaire.

Pour U un opérateur unitaire :

1)

$$U^*U = UU^* = 1 \tag{3.64}$$

où 1 est un opérateur d'identité : $1v = v$, pour tout v.

2)

$$\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle \tag{3.65}$$

pour tous v, w.

Preuve 2)

$$\langle Uv, Uw \rangle = \langle U^* Uv, w \rangle = \langle U^{-1} Uv, w \rangle = \langle v, w \rangle \tag{3.66}$$

3) Ses valeurs propres sont de module 1.

Preuve

Pour Ψ_λ ,tel que $U\Psi_\lambda = \lambda\Psi$,d'une part on a :

$$\langle U\Psi_\lambda, U\Psi_\lambda \rangle = \langle \Psi_\lambda, \Psi_\lambda \rangle \tag{3.67}$$

D'autre part :

$$\langle U\Psi_\lambda, U\Psi_\lambda \rangle = \langle \lambda\Psi_\lambda, \lambda\Psi_\lambda \rangle = |\lambda|^2 \langle \Psi_\lambda, \Psi_\lambda \rangle \tag{3.68}$$

Conclusion : $|\lambda|^2 = 1$

4)Si Ψ_λ est un vecteur propre de $U, U\Psi_\lambda = \lambda\Psi_\lambda$ alors Ψ_λ est un vecteur propre de U^* aussi avec la valeur propre $\overline{\lambda}$.

Preuve

$$\begin{aligned} U\Psi_\lambda &= \lambda\Psi_\lambda \\ U^* U\Psi_\lambda &= \lambda U^* \Psi_\lambda \end{aligned} \tag{3.69}$$

Comme $U^* U = 1$,alors

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda &= \lambda U^* \Psi_\lambda \\ U^* \Psi_\lambda &= \lambda^{-1} \Psi_\lambda \end{aligned} \tag{3.70}$$

Comme $|\lambda| = 1$,alors $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$.Donc :

$$U^* \Psi_\lambda = \overline{\lambda} \Psi_\lambda \tag{3.71}$$

5) Les vecteurs propres d'un opérateur unitaire, correspondants à des valeurs propres différentes, sont orthogonaux.

$$U\Psi_1 = \lambda_1 \Psi_1, \quad U^* \Psi_1 = \overline{\lambda}_1 \Psi_1 \tag{3.72}$$

$$U\Psi_2 = \lambda_2 \Psi_2, \quad U^* \Psi_2 = \overline{\lambda}_2 \Psi_2 \tag{3.73}$$

où λ_1, λ_2 sont complexes, $|\lambda_1| = 1, \overline{\lambda}_1 = \lambda_1^{-1}, |\lambda_2| = 1, \overline{\lambda}_2 = \lambda_2^{-1}$.On trouve :

$$\langle \Psi_2, U\Psi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \Psi_2, \Psi_1 \rangle \tag{3.74}$$

$$\langle U^* \Psi_2, \Psi_1 \rangle = \lambda_1 \langle \Psi_2, \Psi_1 \rangle \tag{3.75}$$

$$\langle \overline{\lambda}_2 \Psi_2, \Psi_1 \rangle = \lambda_1 \langle \Psi_2, \Psi_1 \rangle \tag{3.76}$$

$$\lambda_2 \langle \Psi_2, \Psi_1 \rangle = \lambda_1 \langle \Psi_2, \Psi_1 \rangle \tag{3.77}$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$,alors $\langle \Psi_2, \Psi_1 \rangle = 0$

Exemple 3.2.4 *1)La matrice de transformation linéaire entre des deux bases orthonormées est un opérateur unitaire.*

En effet, supposons que $\{\varphi_n(x)\}$ *et* $\Psi_n(x)\}$ *sont les deux bases ortonormées hilbertiennes et que*

$$\Psi_n(x) = \sum_m \varphi_m(x) U_{mn} \tag{3.78}$$

Alors, d'une part :

$$\langle \Psi_n, \Psi_k \rangle = \delta_{n,k} \tag{3.79}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_n, \Psi_k \rangle &= \sum_m \sum_{m'} \langle \varphi_m U_{mn}, \varphi_{m'} U_{m'k} \rangle \\ &= \sum_m \sum_{m'} \langle \varphi_m, \varphi_{m'} \rangle \overline{U}_{mn} U_{m'k} \\ &= \sum_m \overline{U}_{mn} U_{mk} = \sum_m U^*_{nm} U_{mk} \end{aligned} \tag{3.80}$$

Nous avons utilisé $\langle \varphi_m, \varphi_{m'} \rangle = \delta_{m,m'}$*.De 3.79 et 3.80 :*

$$\sum_m U^*_{nm} U_{mk} = \delta_{n,k} \tag{3.81}$$

qui signifit que $U^*_{nm} = U^{-1}_{nm}$*. donc* U *est unitaire.*

2)Si A *est un opérateur hermitien, alors*

$$U = e^{iA} \tag{3.82}$$

est un opérateur unitaire.

L'exponentiel d'un opérateur pourrait être définit par la série :

$$e^{iA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iA)^n \tag{3.83}$$

où $(A)^n$ *est définit comme un produit des opérateurs,* $A^n = AA...A$*. Alors :*

$$(e^{iA})^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} ((iA)^n)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iA^*)^n = e^{-iA^*} = e^{-iA} \tag{3.84}$$

Nous avons utilisé :$(A^n)^* = (AA...A) = A^* A^* ... A^* = (A^*)^n$*, et que* $A^* = A$ *pour* A *est hermitien. Donc on a :*

$$U^* = (e^{iA})^* = e^{-iA} \tag{3.85}$$

Pour UU^* *on obtient :*

$$UU^* = e^{iA} e^{-iA} \tag{3.86}$$

Les opérateurs iA *et* $-iA$ *dans les deux exponontiels commutent entre eux, car is sont identiques. Dans le cas de commutation on peux multiplier des exponontiels des opérateurs comme des exponontiels des nombres ou des variables ordinaires. On trouve :*

$$UU^* = 1 \tag{3.87}$$

où=1 est un opérateur d'identité. Donc U est unitaire, $U^* = U^{-1}$.

3)Exemple physique des opérateurs de spin d'une particule dans la mécanique quantique :

$$\overrightarrow{\sigma} = \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \tag{3.88}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.89}$$

$\overrightarrow{\sigma}$ *sont appelées les matrices de Pauli. L'opérateur de spin d'une particule fermionique, d'un électron en particulier, est donné par l'opérateur :*

$$\overrightarrow{s} = \frac{\overrightarrow{\sigma}}{2} \tag{3.90}$$

On vérifie facilement que $\overrightarrow{\sigma}$ *et* $\overrightarrow{s}$ *sont des opérateurs (des matrices) hermitiens :*

$$\overrightarrow{\sigma}^* = \overrightarrow{\sigma}, \quad \overrightarrow{s}^* = \overrightarrow{s} \tag{3.91}$$

L'opérateur :

$$U(\overrightarrow{w}) = e^{i\frac{\overrightarrow{\sigma}}{2}\overrightarrow{w}} \tag{3.92}$$

est un opérateur de rotation de spin, $\overrightarrow{w}$ *sont les angles de rotation.* $U(\overrightarrow{w})$ *est un opérateur unitaire. Il faut observer que l'opérateur de spin s et l'opérateurs de rotation* $U(\overrightarrow{w})$*, ils agissent, dans la mécanique quantique, sur des fonctions d'onde de la forme :*

$$\Psi_\alpha(\overrightarrow{r}) \tag{3.93}$$

où $\overrightarrow{r}$ *est une variable spaciale et* α *est un indice spinoriel, prenant deux valeurs* $\alpha = 1, 2$*, pour une particule avec un spin, donc avec des degrés de liberté internes en plus de sa position dans l'espace,* $\overrightarrow{r}$*. On considère dans ce cas l'espace de Hilbert plus général, des fonctions qui dépendent de* $\overrightarrow{r}$*, mais en plus de l'indice spinoriel* α*. Les opérateurs* $\overrightarrow{s}$ *et* $U(\overrightarrow{w})$ *agissent sur cet indice comme le font des matrices sur un vecteur bidimensionnel :*

$$\overrightarrow{s}\Psi_\alpha(\overrightarrow{r}) = \sum_\beta (\overrightarrow{s})_{\alpha,\beta}\Psi_\beta(\overrightarrow{r}), \quad U(\overrightarrow{w})\Psi_\alpha(\overrightarrow{r}) = \sum_\beta U(\overrightarrow{w})_{\alpha,\beta}\Psi_\beta(\overrightarrow{r}) \tag{3.94}$$

C'est dans ce sens que les matrices de dimension fini, bidimensionnelles, représentent des opérateurs dans l'espace de Hilbert généralisé. On peut ajouter que dans la mecanique quantique non-relativiste la dynamique de spin d'une particule est indépendante de son déplacement dans l'espace est, par conséquence, la fonction d'onde pourrait être pris dans la forme factorise :

$$\Psi_\alpha(\overrightarrow{r}) = \Psi(\overrightarrow{r}) \times \chi_\alpha \tag{3.95}$$

Exemple 3.2.5 ***(pratique) :***

Vérifier que :

1)

$$(\sigma_x)^2 = (\sigma_y)^2 = (\sigma_z)^2 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.96}$$

2)

$$\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z, \quad \sigma_y\sigma_z = i\sigma_x, \quad \sigma_z\sigma_x = i\sigma_y \tag{3.97}$$

3)

$$[\sigma_x, \sigma_y] = \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2i\sigma_z \tag{3.98}$$

$$[\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x, \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y \tag{3.99}$$

Observons que 1), 2) et 3) pourraient être mis dans la forme générale suivante :

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}1 + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{3.100}$$

où $i, j = 1, 2, 3(oux, y, z)$ *;* ε_{ijk} *est un symbole entièrement antisymétrique dans ses indices :* $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = 1$ *reste des composantes sont zéros. L'équation 3.100 définit l'algébre (la règle de multiplication) des matrices de Pauli.*

On se pose ensuite le problème de démontrer l'équation suivante :

$$e^{i}\frac{\overrightarrow{\sigma}}{2}\overrightarrow{w} = e^{i(\overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{n})\frac{w}{2}} = cos\frac{w}{2} + i(\overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{n})sin\frac{w}{2} \tag{3.101}$$

où

$$w = |\overrightarrow{w}|, \quad \overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{w}}{w} \tag{3.102}$$

Le groupe de rotation engendré par des matrices $U(\overrightarrow{w}) = exp\{i\frac{\sigma}{2}\overrightarrow{w}\}$ *est appelé le groupe* $SU(2)$ *: spécial, unitaire, qui agit sur des vecteurs à 2 composantes.*

Conclusion

On a étudié dans ce mémoire, les caractérisations fondamentales des opérateurs linéaires continus auto adjoints d'un espace de Hilbert vers le même espace de Hilbert. Dans les chapitre trois de ce travail nous avons apporté deux applications différentes illustrées dans le domaine de la théorie des opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert vers autre espace de Hilbert. La première application concerne l'étude des opérateurs linéaires continus de deux variables (opérateurs 2-linéaires bornés sur les ensembles 2-normés). Aussi les Théorèmes de Banach-Steinhause pour les opérateurs 2-linéaires bornés La deuxième application s'occupe à étudier et les représentation matricielles des opérateurs linaires continus auto adjoints sur un espace de Hilbert séparable (on considère une base orthonormée puis on trouve la propriétés matricielle des opérateurs linéaires continus autoadjoints associés .On trouve enfin des résultats sur le spectre opérateur linéaire continu autoadjoint sur un espace de Hilbert séparable, Le spectre d'un opérateur linéaire continu auto adjoint sur un espace de Hilbert séparable est bien expliqué dans cette deuxième application. On trouve que tout opérateur auto adjoint possède des valeurs propres réelles.

Bibliographie

[1] W. Hengartner, M. Lambert, C. Reischer. *Introduction à L'analyse Fonctionnelle*, 1981.

[2] H. Brezis. *Analyse fonctionelle Théorie et Applications*, 1987.

[3] L. Schwartz. *Analyse 1, théorie des ensembles et topologie*, 1997.

[4] T. Bag, S.K. Samanta, Finite Dimensional fuzzy normed linear spaces, J. Fuzzy Math. 11(2003) no. 3, 687-705

[5] A.L. Narayan and S. Vijayabalaji, Fuzzy n-normed linear space, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2005 : 24 (2005), 3963- 3977

[6] R.M. Soma sundaram and Thangaraj Beaula, Some Aspects of 2-fuzzy 2- normed linear spaces, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 32 (2) (2009), 211-221.

[7] S. Gähler, Lineare 2-normierte Räume, Math. Nachr. 28 (1964), 1-43.

[8] A. Khan, Lipschitz 2-operators, Math. Seminar Notes, Kobe Univ. 10 (1982), 367-372

[9] S.S. Kim, Y.J. Cho and A. White, Linear operators on linear 2-normed spaces, Glasnik Mat. 27(47) (1992), 63-70.

[10] Z. Lewandowska, Linear operators on generalized 2-normed spaces, Bull. Math. Soc. Sc. Math. Roumanie 42 (1999), 353-368.

[11] Z. Lewandowska, Generalized 2-normed spaces, Slupskie Prace Matematyczno-Fizyczne 1 (2001), 33-40.

[12] Z. Lewandowska, On 2-normed sets, Glasnik Mat. 38 (2003), 99-110.

[13] Z. Lewandowska, Banach-Steinhaus Theorems for bounded linear operators with values in a generalized 2-normed space, Glasnik Mat. 38 (2003), 329-340.

[14] A. White, 2-Banach spaces, Math. Nachr. 42 (1969), 43-60.

[15] J. P Aubin, Analyse Fonctionnelle appliqueé, Tome 2, presses universitaire de France, 1987.

[16] W. Hengartner, M. Lambert, C. Reischer. Introduction à L'analyse Fonctionnelle, 1981.