

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

***Sur quelques classes des problèmes
elliptiques non locaux***

Présenté par: Dahraoui saida

Zeghib zineb

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Président	Guesba Messaoud	M.C.A	Univ. El Oued
Rapporteur	Zaouche El Mehdi	M.C.A	Univ. El Oued
Examineur	Menaceur Bekar	M.C.B	Univ. El Oued



Dédicace

À *mon très* *cher Père*
et *ma très chère* *mère*, source de vie,
d'amour et d'affection. *****
À *mes frères* source d'espoir et de joie. *****
À toute *ma famille* source d'encouragement,
du don et d'intérêt. *****
À tous *mes amis* . *****
À tous *mes professeurs*. *****
À tous ceux qui m'ont soutenu.

*Je dédie cet hum-
ble tra-
vail*



❖ *Saida*

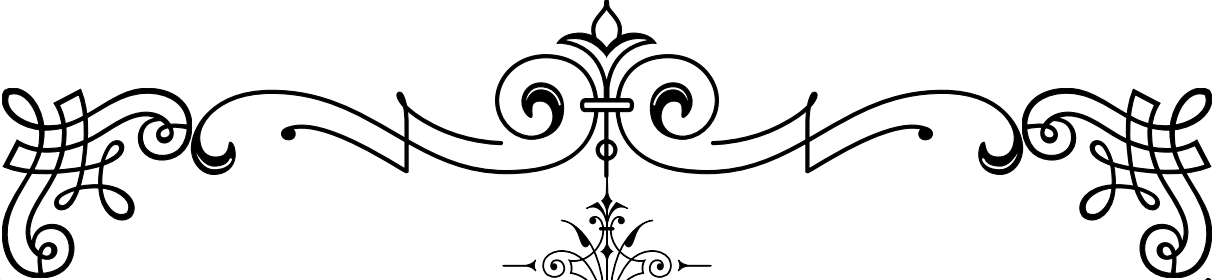
Dédicace

À mon père, *Zogheib*
Alarousi; ma mère *Hougui Becher*,
pour leur endurance et leurs sacrifices sans limites *****
À ma *grand-mère* et mon frère *Muhammad* (que
Dieu ait pitié d'eux) *****
À mes frères et sœurs *Maymouna, Fatma, Abde-
malek, Sara, Khaoula*, reconnaissance de leur
affection toujours constante *****
À mon cousin *Rania*, mon voisin
Hayat; mes amis, *Safa, Rebeh,*
Manal. *****

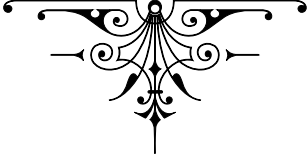
Je dédie cet humble travail.



❖ *Zineb*



Remerciements



*Tout d'abord, Nous remercions Allah Tout Puissant de nous avoir
aider à terminer ce mémoire .*

*La finalisation de ce travail n'aurait été possible sans l'aide
précieuse de personnes qui nous sont chères.*

*Nous voulons tout d'abord à remercier notre encadreur de
mémoire: D. Zaouche El Mehdi , pour son aide et son soutien
précieuses.*

*Nous remercions tous les enseignants qui nous ont donné une
partie de leur savoir et pour leurs aide précieuse.*

*Nous remercions également tous nos collègues d'étude,
particulièrement notre promotion de master mathématique,
2019/2020 à l'université de Chahid Hama Lakhdar El-Oued.*

*Nos plus précieuses pensées vont à nos familles qui nous
soutiennent inconditionnellement.*

Nos Remerciements spéciaux à eux .

*Enfin, Nous n'oublions pas de remercier toutes les personnes qui
nous ont apporté leur soutien et leur aide.*



❖ Merci Beaucoup

Notations

Ω	Ouvert de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	Frontière de Ω .
$C([a, b]; \mathbb{R})$	Espace des fonctions continues sur $[a, b]$.
$C^k([a, b]; \mathbb{R})$	Espace des fonctions k-fois continûment dérivables sur $[a, b]$.
$L^p(\Omega)$	Espace des fonctions puissance p-ième intégrables sur Ω .
$H^1(\Omega)$	Espace de Sobolev d'ordre 1.
$H_0^1(\Omega)$	Sous-espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ de trace nulle sur la frontière $\partial\Omega$.
$\ \cdot\ _\infty$	Norme dans l'espace $C([a, b]; \mathbb{R})$.
$\ \cdot\ _p$	Norme dans l'espace $L^p(\Omega)$.
$\ \cdot\ $	Norme dans l'espace $H_0^1(\Omega)$.
∇u	$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \text{grad } u$.
Δu	$\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{laplacien de } u$.
$\rightharpoonup$	Convergence faible.
$\rightarrow$	Convergence forte.
$\hookrightarrow$	L'injection continue.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$.
$p.p.$	Presque partout.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Rappels sur les espaces fonctionnelles	3
1.2 Quelques notions de convergence faible, de point critique et théorèmes de continuité et dérivabilité sous l'intégrale	8
1.3 Élément de la théorie de point fixe	11
1.4 Rappel sur la fonction de Green	13
1.5 Un principe de la méthode de Galerkin et la formule de Green	15
2 Existence de solutions pour certains problèmes elliptiques non locaux de type Kirchhoff	17
2.1 Resultat d'existence de solutions par la méthode de Galerkin	18
2.2 Resultat d'existence de solutions en utilisant la théorie de point critique . . .	22
3 Existence d'une solution positive pour un problème elliptique non local de type Carrier	27
3.1 Existence d'une solution positive pour un problème elliptique non local de type Carrier en dimension un	27
Bibliographie	38

Introduction

Ce mémoire explore l'étude de quelques classes de problèmes elliptiques non locaux engendrés par des équations aux dérivées partielles et une équation différentielle ordinaire qu'elles peuvent être utilisées pour modéliser plusieurs systèmes physiques et biologiques. Le but de ce mémoire est d'étudier l'existence de solutions pour certains problèmes elliptiques non locaux :

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = |u|^{p-1}u + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

et

$$\begin{cases} -a\left(\int_0^1 |u|^q dt\right) u''(t) = \alpha(t)g(u(t)) & \text{dans }]0, 1[, \\ u'(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N > 2$) à frontière régulière $\partial\Omega$, Δ est l'opérateur laplacien, $\|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$, $\lambda, p \in \mathbb{R}_+^*$, $q \in [1, +\infty[$ et $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $a : [0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, $g : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, $\alpha : [0, 1] \rightarrow]0, +\infty[$ sont des fonctions données qui satisfont quelques hypothèses.

Si $N = 1$ et $\Omega =]0, L[$, la vibration non linéaire d'une corde élastique (voir Kirchhoff [11]) est à l'origine de la première équation de (1) qu'elle est associée à

$$\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) - \left(P_0 + \frac{Eh}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial v(y, t)}{\partial x} \right|^2 dy \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < L, t > 0,$$

où v la flexion latérale, L est la longueur de la corde, t est le temps, ρ est la masse volumique, h est l'aire de la section transversale, E est le module d'Young et P_0 est la tension initiale. De tels problèmes elliptiques sont souvent appelés non locaux (de type de Kirchhoff) car l'équation n'est plus une identité ponctuelle et elle contient une intégrale sur Ω .

Dans [7] Carrier a également établi le modèle

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) = \left(P_0 + P_1 \int_0^L |v(y, t)|^2 dy \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t), \quad 0 < x < L, t > 0,$$

où P_0 et P_1 sont deux constantes.

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire, on prouve, sous certaines hypothèses relatives à M, f, p et λ , l'existence d'une solution de (1) en utilisant deux différentes méthodes de résolution, ce sont la méthode de Galerkin et la théorie de point critique. Le troisième chapitre est consacré à prouver l'existence d'une solution positive du problème (2) en utilisant le théorème du point fixe de Krasnoselskii (voir [10]) sous certaines hypothèses relatives à a, α et g . Nous donnons également deux exemples pour illustrer le résultat. Le premier chapitre contient des notions et quelques outils utilisés aux chapitres 2 et 3 concernant l'analyse fonctionnelle. Les résultats des chapitres 2 et 3 se trouvent dans [2] et [8].

Préliminaires

Ce premier chapitre sera consacré aux notions et résultats utilisés dans toute la suite du mémoire.

1.1 Rappels sur les espaces fonctionnelles

Espaces de Banach

Définition 1.1.1. [15] (*Espace vectoriel normé*)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une norme $\|\cdot\|$ sur E est une application

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

vérifiant

- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité);
- $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire);
- $\forall x \in E, (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ (séparation).

On dit alors que l'espace $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Définition 1.1.2. [15] (*Convergence d'une suite*)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeur dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On dit que la suite

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers élément $x \in E$ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.3. [15] (*Suite de Cauchy*)

Soit E un espace vectoriel normé de norme $\|\cdot\|$. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p, q \geq n_0 \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.4. [15] (*Espace de Banach*)

On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire dans lequel toute suite de Cauchy est convergente.

Espace de Hilbert et base hilbertienne

Définition 1.1.5. [15] (*Produit scalaire hermitien*)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On appelle produit scalaire hermitien sur E une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$$

qui vérifie

- $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (symétrie hermitienne) ;
- $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$ et $\langle x, y + \lambda z \rangle = \langle x, y \rangle + \bar{\lambda} \langle x, z \rangle$ (sesquilinearité) ;
- $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ (positive) ;
- $\forall x \in E, (\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ (définie positive).

Un produit scalaire réel définit de manière naturelle une norme sur l'espace vectoriel :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Définition 1.1.6. [15] (*Espace de Hilbert*)

On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Définition 1.1.7. [15] Soient H un espace de Hilbert et A un ensemble de H .

- On dit que A est dense dans H si $\overline{A} = H$.
- On dit que H est séparable s'il possède une suite de points qui est dense dans H .

Définition 1.1.8. [15] (**Base hilbertienne**)

Soit H un espace de Hilbert séparable. On appelle base hilbertienne de H tout sous-ensemble fini ou dénombrable $\{e_n\}_n$ qui vérifie

- (i) $\|e_n\| = 1$ et $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ si $n \neq m$,
- (ii) le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_n\}_n$ (par combinaisons linéaires finies) est dense dans H .

Théorème 1.1.1. [15]

Tout espace de Hilbert séparable admet au moins une base hilbertienne dénombrable.

Espaces des fonctions k -fois continûment différentiables et de fonctions intégrables

Définition 1.1.9. [6] (**L'espace $C^k([a, b]; \mathbb{R})$**)

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $[a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < +\infty$). L'espace $C^k([a, b]; \mathbb{R})$ est défini par l'espace des fonctions k -fois continûment dérivables sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est un espace de Banach quand on le munit de la norme

$$\|f\|_{C^k([a, b]; \mathbb{R})} = \sum_{n=0}^k \|f^{(n)}(x)\|_{\infty} = \sum_{n=0}^k \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)|.$$

En particulier, pour $k = 0$, $C^0([a, b]; \mathbb{R}) = C([a, b]; \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ muni de la norme

$$\|f\|_{C([a, b]; \mathbb{R})} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Définition 1.1.10. [4] (**L'espace $L^p(\Omega)$**)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx et $p \in [1, +\infty[$. L'espace $L^p(\Omega)$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

Pour tout $f \in L^p(\Omega)$, on note

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.1.1. [4] (*Inégalité de Hölder*)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p, p' \in [1, +\infty[$ deux exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Théorème 1.1.2. [12] (*Convergence dominée de Lebesgue*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f . On suppose qu'il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Alors $f \in L^p(\Omega)$ et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Théorème 1.1.3. [12] (*Réciproque du théorème de convergence dominée*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$ et une fonction $f \in L^p(\Omega)$ telles que $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Alors il existe une sous suite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telles que :

1. $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω ;
2. $\forall k \in \mathbb{N}, |f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω .

Espaces des Sobolev

Définition 1.1.11. [15] (*Espace des fonctions test*)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On appelle support de φ l'ensemble

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

- On dit que la fonction φ à support compact si il existe une partie compacte K de $\mathbb{R}^N$ telle que $\text{supp}(\varphi) \subset K$.
- On appelle l'espace des fonctions test et on note $\mathcal{D}(\Omega)$ (ou $C_c^\infty(\Omega)$) l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω .

Définition 1.1.12. [1] (**L'espace $H^1(\Omega)$**)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, \dots, N\}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\},$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de u au sens des distributions définie par :

$$\exists v \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Proposition 1.1.2. ([1],[4]) L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \right)^{1/2},$$

est un espace de Hilbert séparable.

Définition 1.1.13. [1] (**L'espace $H_0^1(\Omega)$**)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. C'est-à-dire

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

On note

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \text{ dans } \Omega \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Proposition 1.1.3. [1] (**Inégalité de Poincaré**)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Corollaire 1.1.1. [1]

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace. Alors la semi-norme

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.1.4. [1](Rellich)

Soit Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, alors de toute suite bornée de $H_0^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ (on dit que l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte) .

Théorème 1.1.5. [5](Rellich-Kondrachov pour $H_0^1(\Omega)$)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^1 . Alors, les injections suivantes sont compactes

1. Si $N < 2$, alors $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.
2. Si $N = 2$, alors $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $\forall p \in [1, +\infty[$.
3. Si $N > 2$, alors $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $\forall p \in [1, \frac{2N}{N-2}]$.

On particulier, on a toujours

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Théorème 1.1.6. [5]

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^1 . Alors, on a les injections continues suivantes :

1. Si $N > 2$, alors $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, où $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$.
2. Si $N = 2$, alors $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [2, +\infty[$.
3. Si $N < 2$, alors $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

1.2 Quelques notions de convergence faible, de point critique et théorèmes de continuité et dérivabilité sous l'intégrale

Définition 1.2.1. [12] (*Convergence faible*)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'un espace de Hilbert H muni de produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers x et on note $x_n \rightharpoonup x$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall y \in H.$$

Proposition 1.2.1. [12] Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'un espace de Hilbert H muni de norme noté $\|\cdot\|$ qui converge faiblement vers $x \in H$. Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans H et on a

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

Extremum d'une fonction, suite minimisante et coercivité

Définition 1.2.2. [12] Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.

- On dit que f admet un maximum en a si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$. On dit que f admet un minimum en a si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$.
- On parle aussi de maximum ou de minimum global de la fonction, et on dit que $f(a)$ est le maximum (resp. le minimum) de f sur I .
- On dit aussi que a est un extremum de f si c'est un maximum ou un minimum.

Théorème 1.2.1. [12] Soit I un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

Définition 1.2.3. [17] (*Suite minimisante*)

Soient X un espace de Banach et $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une suite minimisante pour J est une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$J(u_n) \rightarrow \inf J \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Définition 1.2.4. [17] (*Coercivité*)

Soient X un espace de Banach et $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle que J est coercive si :

$$\lim_{\|u\|_X \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty$$

Fonction définie par une intégrale et dérivation sous l'intégrale

Théorème 1.2.2. [9] (Continuité d'une intégrale à paramètre)

Soit un sous-ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide et soit une fonction $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est mesurable ;
2. pour presque partout $x \in \Omega$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur I ;
3. il existe une fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ Lebesgue-intégrable telle que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \forall t \in I.$$

Alors la fonction :

$$t \mapsto \int_{\Omega} f(x, t) dx$$

est continue sur l'intervalle I .

Théorème 1.2.3. [9] (Dérivation sous l'intégrale)

Soit un sous-ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide et soit une fonction $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est Lebesgue-intégrable ;
2. pour presque partout $x \in \Omega$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable de dérivée : $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$;
3. il existe une fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ Lebesgue-intégrable telle que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \forall t \in I.$$

Alors la fonction :

$$t \mapsto \int_{\Omega} f(x, t) dx$$

est dérivable sur I de dérivée :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(x, t) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Théorème 1.2.4. [9] Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u, v : I \rightarrow [a, b]$ deux fonctions de classe C^1 . Alors la fonction G définie sur l'intervalle I par

$$G(t) = \int_{u(t)}^{v(t)} f(x) dx$$

est de classe C^1 sur I et de dérivée :

$$G'(t) = v'(t)f(v(t)) - u'(t)f(u(t)).$$

1.3 Élément de la théorie de point fixe

Définition 1.3.1. [6] (*Point fixe*)

Soient X un espace de Banach et $T : X \rightarrow X$ un opérateur. On appelle point fixe de T tout point $x \in X$ tel que $Tx = x$.

Définition 1.3.2. [10] (*Opérateur continu*)

Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $T : X \rightarrow Y$ est appelé continu en $x \in X$, si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ qui converge par la norme vers x , $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge par la norme vers $T(x)$.

T est dit continu sur un ensemble $A \subset X$ si T est continu en tout point $x \in A$.

Définition 1.3.3. [10] (*Opérateur complètement continu*)

Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $T : X \rightarrow Y$ est appelé compact s'il transforme tout ensemble borné de X dans un ensemble relativement compact de Y . De plus, on dit que T est complètement continu sur X s'il est continu et compact.

Définition 1.3.4. [6] Soient $E = C([a, b]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et A est un sous-ensemble de E .

- On dit que A est uniformément borné, s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|f(x)\|_\infty \leq C, \quad \forall x \in [a, b], \forall f \in A.$$

- On dit que A est équicontinue, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_\infty < \varepsilon, \forall f \in A.$$

Théorème 1.3.1. [16] (*Ascoli-Arzelà*)

Soit A un sous-ensemble de l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$. Alors, A est relativement compact si et seulement si les fonctions de A sont uniformément bornées et équicontinues.

Définition 1.3.5. [12] (*Ensemble convexe*)

Soit X un espace de Banach. On dit qu'une partie K de X est convexe si :

$$\forall x, y \in K, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in K.$$

Définition 1.3.6. [6] (*Ensemble fermé*)

Un ensemble C est fermé si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de C appartient à C .

Théorème 1.3.2. [13] (*Point fixe de Brouwer*)

Toute application continue d'une boule fermée de $\mathbb{R}^N$ dans elle-même admet un point fixe.

Théorème 1.3.3. [13] Soient $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ une application continue et $\overline{B}(0, r)$ la boule fermée de $\mathbb{R}^N$ centrée à l'origine et de rayon $r > 0$. Si $\langle F(x), x \rangle > 0$ pour tout $x \in \partial(\overline{B}(0, r))$, alors il existe $x_0 \in \overline{B}(0, r)$ tel que $F(x_0) = 0$.

Preuve. Par absurde, on suppose que $F(x) \neq 0$ pour tout $x \in \overline{B}(0, r)$. On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} g : \overline{B}(0, r) &\rightarrow \overline{B}(0, r) \\ x &\longmapsto -F(x) \frac{r}{|F(x)|} \end{aligned}$$

Comme g est continue et $\overline{B}(0, r)$ est une boule fermée, on déduit facilement du théorème du point fixe de Brouwer qu'il existe $x_0 \in \overline{B}(0, r)$ tel que

$$x_0 = g(x_0) = -F(x_0) \frac{r}{|F(x_0)|},$$

ce qui nous conduit à $|x_0| = r$. Puisque

$$\langle x_0, x_0 \rangle = -\frac{r}{|F(x_0)|} \langle F(x_0), x_0 \rangle,$$

il vient

$$\langle F(x_0), x_0 \rangle = -r|F(x_0)| < 0,$$

ce qui est absurde. ■

Définition 1.3.7. [10] (*Cône*)

Un sous-ensemble non vide P d'un espace de Banach E est dit cône sur E s'il est convexe, fermé et vérifie les deux conditions suivantes :

1) Pour tout $x \in P$ et $\lambda \geq 0$, implique $\lambda x \in P$.

2) Pour tout $x \in P$ et $-x \in P$ implique $x = 0$.

Théorème 1.3.4. [10](*Krasnoselskii*)

Soient E un espace de Banach, $P \subset E$ un cône de E , Ω_1 et Ω_2 deux ensembles ouverts bornés de E tels que $0 \in \Omega_1$ et $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. Soit $S : P \cap (\overline{\Omega_2}/\Omega_1) \rightarrow P$ un opérateur complètement continu tel que l'une des conditions suivantes soit satisfaite

(i) $\|Sx\| \leq \|x\|$ pour tous $x \in P \cap \partial\Omega_1$ et $\|Sx\| \geq \|x\|$ pour tous $x \in P \cap \partial\Omega_2$.

(ii) $\|Sx\| \geq \|x\|$ pour tout $x \in P \cap \partial\Omega_1$ et $\|Sx\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in P \cap \partial\Omega_2$.

Alors l'opérateur S admet au moins un point fixe dans $P \cap (\overline{\Omega_2}/\Omega_1)$.

1.4 Rappel sur la fonction de Green

On considère les équations différentielles ordinaires :

$$(H) \quad (py')' + py = 0,$$

$$(NH) \quad (py')' + py = f,$$

où $p \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, $p(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ ainsi que les conditions aux bords associées :

$$(CB)_h \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta, \end{cases}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ et δ sont des constantes telles que $|\alpha_1| + |\alpha_2|, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$.

Définition 1.4.1. On appelle fonction de Green associée au problème homogène $(H) - (CB)_h$ une fonction $G : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (a) G est continue sur $[a, b] \times [a, b]$;
- (b) G est symétrique : $G(t, s) = G(s, t)$ pour tout $(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$;
- (c) pour $s \in [a, b]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial G}{\partial t}(t, s)$ est continue pour tout $t \neq s$;
- (d) $\lim_{t \rightarrow s^+} \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) - \lim_{t \rightarrow s^-} \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) = \frac{1}{p(s)}$ pour tout $s \in [a, b]$;
- (e) pour $s \in [a, b]$, la fonction partielle $t \mapsto G(t, s)$ est une solution de l'équation (H) pour tout $t \neq s$;
- (f) pour $s \in [a, b]$, la fonction partielle $t \mapsto G(t, s)$ vérifie les conditions $(CB)_h$.

Théorème 1.4.1. (Existence et unicité de la fonction de Green)

Supposons que le problème homogène $(H) - (CB)_h$ n'admet pas de solution non triviale. Alors, il existe une (et une seule) fonction G ne dépendant pas de f , et dite fonction de Green, telle que, pour toute fonction f , la solution y du problème non homogène $(NH) - (CB)_h$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\forall t \in [a, b] : \quad y(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds.$$

Exemple 1.4.1. Considérons le problème suivante :

$$\begin{cases} -u''(t) = 0, & 0 < t < 1, \\ u'(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Construisons la fonction de Green de (1.1). On a, tout solution de (1.1) est de la forme $u(t) = at + b$. D'après les conditions aux bords associées, on obtient $a = b = 0$, ce qui montre que (1.1) n'admet pas de solution non triviale.

On considère maintenant la fonction de Green comme suit :

$$G(t, s) = \begin{cases} a_1(s)t + b_1(s), & 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ a_2(s)t + b_2(s), & 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

En utilisant les propriétés de la fonction de Green on obtient :

1. La fonction G est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$, alors

$$a_1(s)s + b_1(s) = a_2(s)s + b_2(s). \quad (1.3)$$

2. Il résulte de

$$\lim_{t \rightarrow s^+} \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) - \lim_{t \rightarrow s^-} \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) = -1, \quad \forall s \in [0, 1]$$

que

$$a_2(s) - a_1(s) = -1. \quad (1.4)$$

3. Comme G vérifie les conditions aux limites, il vient

$$a_1(s) = 0, \quad a_2(s) = -b_2(s). \quad (1.5)$$

De (1.4) et (1.5), on a

$$a_1(s) = 0, \quad a_2(s) = -1, \quad b_2(s) = 1. \quad (1.6)$$

En utilisant (1.2)-(1.3) et (1.6), on obtient

$$G(t, s) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ 1 - s, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}.$$

1.5 Un principe de la méthode de Galerkin et la formule de Green

La méthode de Galerkin est une méthode très générale. Ici, on essaie d'expliquer le principe de cette méthode pour résoudre certains problèmes de type (1). Si on veut trouver une solution du problème (1) dans l'espace $H_0^1(\Omega)$, il s'agit d'abord de construire une approximation de problèmes liée à une suite croissante de sous-espaces de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$. Ensuite, on essaie de résoudre le problème approché qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe à la limite quand la dimension des espaces d'approximation tend vers l'infini pour trouver une solution du problème (1).

Définition 1.5.1. [14] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour toute fonction scalaire $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et tout champ de vecteurs $F = (F_1, \dots, F_n) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ on définit

1. Gradient de u est l'application défini par

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)^T.$$

2. Divergence de F est la fonction définie par

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x).$$

3. Laplacien de u est la fonction définie par

$$\Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x).$$

Théorème 1.5.1. [14] (**Formule de Green**)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^1 . Soient u une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$ et v une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$. Alors

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) v(x) ds$$

où $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_i})_{1 \leq i \leq N}$ est le vecteur gradient de u et $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$ est la dérivée normale de u sur $\partial\Omega$ avec η est la normale extérieure à $\partial\Omega$.

Existence de solutions pour certains problèmes elliptiques non locaux de type Kirchhoff

On s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions pour la classe de problèmes elliptiques non locaux de type Kirchhoff suivante :

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = |u|^{p-1}u + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N > 2$) à frontière régulière $\partial\Omega$, $p \in]0, 1[\cup]1, \frac{N+2}{N-2}[$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions données. Par convention, $|0|^{p-1}0 = 0$ si $p \in]0, 1[$. Deux résultats d'existence de solutions pour telle classe sont donnés sous certaines hypothèses relatives à M , f , p et λ en utilisant deux différentes méthodes de résolution, ce sont la méthode de Galerkin et la théorie de point critique.

Pour trouver la formulation variationnelle on multiplie la première équation de (2.1) par une fonction test régulière φ et on intègre par parties. Ce calcul est principalement formel au sens où l'on suppose l'existence et la régularité de la solution u afin que tous les calculs effectués soient licites. À l'aide de la formule de Green (voir le Théorème 1.5.1), on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|u|^{p-1}u + \lambda f(x)) \varphi dx &= -M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \Delta u \cdot \varphi dx \\ &= M(\|u\|^2) \left\{ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \varphi ds \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Comme u doit satisfaire une condition aux limites de Dirichlet, $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on choisit un

espace de Hilbert V tel que toute fonction $\varphi \in V$ vérifie aussi $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$. Dans ce cas, l'égalité (2.2) devient

$$\int_{\Omega} (|u|^{p-1}u + \lambda f(x)) \varphi \, dx = M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx. \quad (2.3)$$

Pour que le terme de gauche de (2.3) ait un sens il suffit que $\varphi, f \in L^2(\Omega)$, $|u|^{p-1}u\varphi \in L^1(\Omega)$ et pour que le terme de droite de (2.3) ait aussi un sens il suffit que ∇u et $\nabla \varphi$ appartienne à $(L^2(\Omega))^N$. Par conséquent, un choix raisonnable pour l'espace de Hilbert est $V = H_0^1(\Omega)$ (à l'aide des théorèmes 1.1.5 et 1.1.6). En conclusion, la formulation variationnelle proposée pour (2.1) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} (|u|^{p-1}u + \lambda f(x)) \varphi \, dx, \\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (2.4)$$

2.1 Resultat d'existence de solutions par la méthode de Galerkin

Théorème 2.1.1.

Soient $f \in L^2(\Omega)$, $f \neq 0$ et $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour une certaine constante $m_0 > 0$,

$$M(s) \geq m_0, \quad \forall s \geq 0. \quad (2.5)$$

Alors,

- (i) si $0 < p < 1$, le problème (2.4) admet une solution non triviale pour tout $\lambda > 0$,
- (ii) si $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que le problème (2.4) admet une solution non triviale pour $0 < \lambda \leq \lambda_0$.

Preuve.

Soit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit $V_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ l'espace vectoriel de dimension finie n engendré par $\{e_1, \dots, e_n\}$. Les espaces $(V_n, \|\cdot\|)$ et $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ sont

isométriques dont tout élément $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ peut être identifié à $v = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ et $\|v\| = |\xi|$. Alors, on écrit

$$\mathbb{R}^n \ni (\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi = v = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in H_0^1(\Omega).$$

Considérons l'application $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$F(u_n) = (F_1(u_n), \dots, F_n(u_n))$$

avec $u_n = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ et pour tout $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} F_k(u_n) &= M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla e_k dx - \int_{\Omega} (|u_n|^{p-1} u_n + \lambda f(x)) e_k dx \\ &= M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right) \cdot \nabla e_k dx - \int_{\Omega} (|u_n|^{p-1} u_n + \lambda f(x)) e_k dx \\ &= M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \nabla e_i \right) \cdot \nabla e_k dx - \int_{\Omega} (|u_n|^{p-1} u_n + \lambda f(x)) e_k dx \\ &= M(\|u_n\|^2) \sum_{i=1}^n (\xi_i \int_{\Omega} \nabla e_i \cdot \nabla e_k dx) - \int_{\Omega} (|u_n|^{p-1} u_n + \lambda f(x)) e_k dx \\ &= M(\|u_n\|^2) \xi_k \|e_k\|^2 - \int_{\Omega} (|u_n|^{p-1} u_n + \lambda f(x)) e_k dx \\ &= M(\|u_n\|^2) \xi_k - \int_{\Omega} |u_n|^{p-1} u_n e_k dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) e_k dx. \end{aligned}$$

Montrons que F_k est continue. Soit $(u_n^j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers une limite u_n dans $(V_n, \|\cdot\|)$ et on note

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} u_n^j = u_n \text{ dans } (V_n, \|\cdot\|). \quad (2.6)$$

Il existe $\xi^j = (\xi_1^j, \dots, \xi_n^j)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ tels que $\xi^j = u_n^j$, $\xi = u_n$ et

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \xi^j = \xi \text{ dans } (\mathbb{R}^n, |\cdot|). \quad (2.7)$$

On écrit,

$$F_k(u_n^j) = M(\|u_n^j\|^2) \xi_k^j - \int_{\Omega} |u_n^j|^{p-1} u_n^j e_k dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) e_k dx.$$

On utilise (2.6)-(2.7), la continuité de M et le théorème de convergence dominée, il vient

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} F_k(u_n^j) = M(\|u_n\|^2) \xi_k - \int_{\Omega} |u_n|^{p-1} u_n e_k dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) e_k dx.$$

D'où, $\lim_{j \rightarrow +\infty} F_k(u_n^j) = F_k(u_n)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ pour tout $k = 1, \dots, n$ et F est continue. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \langle F(u_n), u_n \rangle &= \sum_{k=1}^n F_k(u_n) \xi_k \\ &= M(\|u_n\|^2) \sum_{k=1}^n \xi_k^2 - \int_{\Omega} |u_n|^{p-1} u_n \left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right) dx \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} f(x) \left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right) dx \\ &= M(\|u_n\|^2) \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) u_n dx. \end{aligned}$$

En appliquant les inégalités de Hölder et de Poincaré et le Théorème 1.1.5, on obtient pour certaines constantes c_1 et c_2 ,

$$\int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx \leq c_1 \|u_n\|^{p+1}, \quad (2.8)$$

$$\left| \int_{\Omega} f(x) u_n dx \right| \leq \|f\|_2 \|u_n\|_2 \leq c_2 \|f\|_2 \|u_n\|. \quad (2.9)$$

En utilisant (2.5) et (2.8)-(2.9), il vient

$$\begin{aligned} \langle F(u_n), u_n \rangle &\geq m_0 \|u_n\|^2 - c_1 \|u_n\|^{p+1} - \lambda c_2 \|f\|_2 \|u_n\| \\ &\geq (m_0 \|u_n\| - c_1 \|u_n\|^p - \lambda c_2 \|f\|_2) \|u_n\|. \end{aligned}$$

Si $p \in]0, 1[$ et $\lambda > 0$, on obtient pour $\|u_n\|$ suffisamment grand,

$$m_0 \|u_n\| - \lambda c_2 \|f\|_2 > c_1 \|u_n\|^p$$

et si $p \in]1, \frac{N+2}{N-2}[$ et $\|u_n\|$ suffisamment petit ($\|u_n\| \in]0, (\frac{m_0}{c_1})^{\frac{1}{p-1}}[$), il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$, on a

$$m_0 \|u_n\| - c_1 \|u_n\|^p > \lambda c_2 \|f\|_2.$$

Alors, on en déduit qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\langle F(u_n), u_n \rangle > 0 \quad \text{si } \|u_n\| = r.$$

D'après le Théorème 1.3.3, il existe $u_n \in V_n$ avec $\|u_n\| < r$ tel que :

$$F(u_n) = 0$$

qui peut s'écrire comme suit

$$M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla e_k dx = \int_{\Omega} (|u_n|^{p-1} u_n + \lambda f(x)) e_k dx, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, on trouve

$$M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla e_k dx = \int_{\Omega} (|u_n|^{p-1} u_n + \lambda f(x)) e_k dx, \quad \forall n \geq k. \quad (2.11)$$

Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, on en déduit, d'après le Théorème 1.1.5, qu'il existe une sous-suite $(u_{n_j})_{j \in \mathbb{N}} \subset (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\gamma \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega) \text{ quand } j \rightarrow +\infty, \quad (2.12)$$

$$u_{n_j} \rightarrow u \text{ fortement dans } L^q(\Omega) \text{ quand } j \rightarrow +\infty, \quad \forall q \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right], \quad (2.13)$$

$$\|u_{n_j}\| \rightarrow \gamma \text{ dans } \mathbb{R} \text{ quand } j \rightarrow +\infty. \quad (2.14)$$

En utilisant (2.14) et la continuité de M , on obtient

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} M(\|u_{n_j}\|^2) = M(\lim_{j \rightarrow +\infty} \|u_{n_j}\|^2) = M(\gamma^2). \quad (2.15)$$

En outre, si $k \in \mathbb{N}^*$ est fixé, il résulte de (2.12)-(2.13) et du théorème de convergence dominée et sa réciproque, pour une suite extraite encore notée n_j , que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |u_{n_j}|^{p-1} u_{n_j} e_k dx = \int_{\Omega} |u|^{p-1} u e_k dx, \quad (2.16)$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \nabla u_{n_j} \cdot \nabla e_k dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla e_k dx. \quad (2.17)$$

Combinant (2.11) et (2.15)-(2.17), on trouve

$$M(\gamma^2) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla e_k dx - \int_{\Omega} (|u|^{p-1} u + \lambda f(x)) e_k dx = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Comme le sous-espace vectoriel engendré par $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ (par combinaisons linéaires finies) est dense dans $H_0^1(\Omega)$, il vient

$$M(\gamma^2) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} (|u|^{p-1} u + \lambda f(x)) \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (2.18)$$

Pour $\varphi = u \in H_0^1(\Omega)$, on obtient

$$M(\gamma^2) \|u\|^2 - \int_{\Omega} (|u|^{p+1} + \lambda f(x) u) dx = 0. \quad (2.19)$$

D'autre part, on utilise (2.10) et le fait que $(e_k)_{1 \leq k \leq n_j}$ est une base de V_{n_j} , on obtient

$$M(\|u_{n_j}\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_{n_j} \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} (|u_{n_j}|^{p-1} u_{n_j} + \lambda f(x)) \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in V_{n_j},$$

ce qui nous conduit, pour $\varphi = u_{n_j} \in V_{n_j}$, à

$$M(\|u_{n_j}\|^2) \|u_{n_j}\|^2 - \int_{\Omega} (|u_{n_j}|^{p+1} + \lambda f(x) u_{n_j}) dx = 0,$$

En faisant tendre j vers $+\infty$, on obtient

$$M(\gamma^2) \gamma^2 - \int_{\Omega} (|u|^{p+1} + \lambda f(x) u) dx = 0. \quad (2.20)$$

On déduit alors de (2.19) et (2.20) que

$$M(\gamma^2) \|u\|^2 = M(\gamma^2) \gamma^2$$

et comme $M(\gamma^2) > 0$, il vient

$$\|u\| = \gamma.$$

On insère $\gamma = \|u\|$ dans (2.18) pour voir que u est une solution non triviale de (2.4) puisque $\lambda f \neq 0$ p.p. dans Ω . ■

2.2 Resultat d'existence de solutions en utilisant la théorie de point critique

Théorème 2.2.1.

On suppose que les hypothèses du Théorème 2.1.1 sont satisfaites, M est croissante, f change de signe sur Ω et $\lambda > 0$. Alors, pour tout $p \in]0, 1[$, le problème (2.1) admet une solution non triviale à énergie négative.

Preuve.

Pour prouver l'existence d'une solution du problème (2.4), on cherche un point critique de la fonctionnelle d'énergie suivante :

$$J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto J(u) = \frac{1}{2} \tilde{M}(\|u\|^2) - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) u dx$$

où

$$\tilde{M}(t) = \int_0^t M(s)ds.$$

En appliquant les inégalités de Hölder et de Poincaré et le Théorème 1.1.5, on obtient pour certaines constantes c_1 et c_2 ,

$$\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \leq c_1 \|u\|^{p+1}, \quad (2.21)$$

$$\left| \int_{\Omega} f(x)u dx \right| \leq \|f\|_2 \|u\|_2 \leq c_2 \|f\|_2 \|u\|. \quad (2.22)$$

En utilisant (2.5) et (2.21)-(2.22), il vient

$$J(u) \geq \frac{1}{2} m_0 \|u\|^2 - \frac{c_1}{p+1} \|u\|^{p+1} - c_2 \lambda \|f\|_2 \|u\|. \quad (2.23)$$

Comme $p \in (0, 1)$, la fonctionnelle J est coercive au sens suivant :

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty. \quad (2.24)$$

Soient $\alpha = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v)$ et $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ une suite minimisante qui satisfait :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} J(u_j) = \alpha. \quad (2.25)$$

Il résulte de (2.23) et de

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{2} m_0 \|u\|^2 - \frac{c_2}{p+1} \|u\|^{p+1} - c_3 \lambda \|f\|_2 \|u\| \right\} = +\infty$$

que $\alpha \neq -\infty$. En outre, la suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, on suppose par l'absurde que $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, donc,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|u_j\| = +\infty. \quad (2.26)$$

En utilisant (2.23) et (2.26), il vient

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} J(u_j) = +\infty, \quad (2.27)$$

ce qui contredit (2.25). Alors, d'après le Théorème 1.1.5, il existe une sous-suite $(u_{j_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telles que

$$u_{j_k} \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega) \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty, \quad (2.28)$$

$$u_{j_k} \rightarrow u \quad \text{fortement dans } L^q(\Omega) \quad \forall q \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right[\quad \text{quand } k \rightarrow +\infty. \quad (2.29)$$

La fonction M étant strictement positive, $\tilde{M}$ est croissante. Donc, comme

$$\|u\| \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \|u_{j_k}\|,$$

on obtient

$$\tilde{M}(\|u\|^2) \leq \tilde{M}((\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \|u_{j_k}\|)^2). \quad (2.30)$$

Par ailleurs, comme $\tilde{M}$ est continue et $\|u_{j_k}\| \geq 0$, on a bien

$$\tilde{M}((\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \|u_{j_k}\|)^2) = \tilde{M}(\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \|u_{j_k}\|^2) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \tilde{M}(\|u_{j_k}\|^2). \quad (2.31)$$

Combinant (2.30) et (2.31), il vient

$$\tilde{M}(\|u\|^2) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \tilde{M}(\|u_{j_k}\|^2). \quad (2.32)$$

De plus, il résulte de (2.28)-(2.29) que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u_{j_k}|^{p+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f(x) u_{j_k} dx \right\} = \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f(x) u dx. \quad (2.33)$$

On déduit alors de (2.32) et (2.33) que l'on a

$$J(u) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf J(u_{j_k}),$$

ce qui nous conduit à

$$\alpha \leq J(u) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf J(u_{j_k}) = \alpha.$$

D'où,

$$J(u) = \alpha = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v),$$

ce qui montre que J atteint son infimum en u . Pour montrer que u est solution de la formulation variationnelle (2.4), on définit la fonction suivante :

$$j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto j(t) = J(u + t\xi)$$

où $\xi \in H_0^1(\Omega)$. D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, j est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$j'(t) = M(\|u + t\xi\|^2) \int_{\Omega} \nabla(u + t\xi) \cdot \nabla \xi dx - \int_{\Omega} |u + t\xi|^{p-1} (u + t\xi) \xi dx \\ - \lambda \int_{\Omega} f(x) \xi dx \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

et comme

$$j(0) = J(u) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v) \leq J(u + t\xi) = j(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

le point 0 est un point de minimum pour j . D'où

$$j'(0) = M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi dx - \int_{\Omega} |u|^{p-1} u \xi dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) \xi dx = 0 \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega).$$

Donc $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution du problème (2.4) et puisque f change de signe sur Ω , u est une solution non triviale.

Finalement, la solution u est d'énergie négative. En effet, on considère

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : f(x) > 0\}, \quad \Omega^- = \{x \in \Omega : f(x) \leq 0\}.$$

Soient $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $0 \neq \varphi \geq 0$, $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega^+$ et $t \in]0, 1[$. On a

$$J(t\varphi) = \frac{1}{2} \tilde{M}(\|t\varphi\|^2) \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |t\varphi|^{p+1} dx \\ - \lambda \int_{\Omega^+} f(x) t\varphi dx - \lambda \int_{\Omega^-} f(x) t\varphi dx. \quad (2.34)$$

Comme $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega^+$ et $\varphi \geq 0$, on obtient

$$\int_{\Omega^-} f(x) t\varphi dx = 0 \quad (2.35)$$

et

$$\int_{\Omega^+} f(x) t\varphi dx > 0. \quad (2.36)$$

Combinant (2.34), (2.35) et (2.36), il vient

$$J(t\varphi) \leq \frac{1}{2} \tilde{M}(\|t\varphi\|^2) - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} |\varphi|^{p+1} dx.$$

Puisque M est croissante, on a pour tout $t \in]0, 1[$,

$$M(s) \leq M(\|t\varphi\|^2) \leq M(\|\varphi\|^2) \quad \forall s \in]0, \|\varphi\|^2[,$$

ce qui nous conduit à

$$\tilde{M}(\|t\varphi\|^2) \leq M(\|\varphi\|^2)\|t\varphi\|^2.$$

D'où,

$$J(t\varphi) \leq \frac{1}{2}M(\|\varphi\|^2)\|\varphi\|^2 t^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} |\varphi|^{p+1} dx.$$

Alors pour t suffisamment petit, on a bien $J(t\varphi) < 0$ dès que $p \in (0, 1)$. Donc

$$J(u) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v) \leq \inf_{0 < t < 1} J(t\varphi) < 0,$$

ce qui achève la preuve du théorème. ■

Existence d'une solution positive pour un problème elliptique non local de type Carrier

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence d'une solution positive pour un problème elliptique non local de type Carrier en dimension un en utilisant le théorème du point fixe de Krasnoselskii. En outre, nous donnons deux exemples pour illustrer le résultat.

3.1 Existence d'une solution positive pour un problème elliptique non local de type Carrier en dimension un

On étudie l'existence d'une solution positive du problème :

$$\begin{cases} -a \left(\int_0^1 |u|^q dt \right) u''(t) = h(t)f(u(t)) & t \in]0, 1[, \\ u'(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $q \in [1, +\infty[$, $a : [0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ sont deux fonctions continues et croissantes,

$$h \in C([0, 1], \mathbb{R}), \quad 0 < h_0 = \inf_{t \in [0, 1]} h(t) \leq h_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} h(t) \quad (3.2)$$

et pour un certain $b \in]0, 1[$:

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{f((1-b)t)}{ta(t^q)} > \frac{1}{h_0 b(1-b/2)}, \quad (3.3)$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{ta(b(1-b)^{qt^q})} < \frac{1}{h_\infty}. \quad (3.4)$$

Théorème 3.1.1.

Sous les hypothèses ci-dessus sur q , a , h et f , le problème (3.1) admet une solution positive.

Preuve.

On veut appliquer le théorème du point fixe de Krasnoselskii (voir le Théorème 1.3.4) pour prouver l'existence d'une solution positive au problème (3.1). Soit

$$G(t, s) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ 1 - s, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

la fonction de Green du problème

$$\begin{cases} -u'' = g(t), & 0 < t < 1, \\ u'(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

où $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue (voir l'Exemple 1.4.1). Notons que l'unique solution du problème (3.5) est donnée par (voir le Théorème 1.4.1) :

$$\forall t \in [0, 1] : u(t) = \int_0^1 G(t, s)g(s)ds.$$

Donc, si $u \in C([0, 1])$ est une solution de (3.1), alors u est aussi solution de

$$\forall t \in [0, 1] : u(t) = \int_0^1 G(t, s) \frac{h(s)f(u(s))}{a \left(\int_0^1 |u|^q dt \right)} ds \quad (3.6)$$

en remplaçant g par la fonction

$$s \mapsto \frac{h(s)f(u(s))}{a \left(\int_0^1 |u|^q dt \right)}.$$

Réciproquement, si u est une solution de (3.6), on a bien $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ et

$$\forall t \in [0, 1] : u'(t) = - \int_0^t \frac{h(s)f(u(s))}{a \left(\int_0^1 |u|^q dt \right)} ds, \quad u''(t) = - \frac{h(t)f(u(t))}{a \left(\int_0^1 |u|^q dt \right)}.$$

Comme $u'(0) = u(1) = 0$, la fonction u est une solution de (3.1). On considère

$$S : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1]), \varphi \mapsto S\varphi$$

où

$$\forall t \in [0, 1] : S\varphi(t) = \int_0^1 G(t, s)h(s) \frac{f(\varphi(s))}{a \left(\int_0^1 |\varphi|^q dt \right)} ds, \quad (3.7)$$

qui est une application bien définie d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres (voir le Théorème 1.2.2) puisque $G \in C([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{R})$, $\varphi \in C([0, 1], \mathbb{R})$ et f, h sont des fonctions continues de sorte que la fonction

$$t \mapsto \int_0^1 G(t, s)h(s) \frac{f(\varphi(s))}{a \left(\int_0^1 |\varphi|^q dt \right)} ds$$

appartient à $C([0, 1], \mathbb{R})$ pour toute fonction $\varphi \in C([0, 1], \mathbb{R})$. On va chercher un point fixe positif de l'application S en appliquant le théorème du point fixe de Krasnoselskii. Notons que $C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach. Le reste de la preuve se fait en trois étapes successives.

Étape 1 : $S : E^+ \rightarrow E^+$ est continue et compacte où

$$E^+ = \{\varphi \in E; \varphi(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in [0, 1]\}.$$

• S est continue. Soient $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset E^+$ une suite et $\varphi \in E^+$ telles que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|\varphi_j - \varphi\|_\infty = 0. \quad (3.8)$$

Ceci nous conduit à

$$\forall t \in [0, 1] : \lim_{j \rightarrow +\infty} |\varphi_j(t) - \varphi(t)| = 0 \quad (3.9)$$

et pour une certaine constante $\rho > 0$:

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1] : \varphi_j(t), \varphi(t) \in [0, \rho]. \quad (3.10)$$

On a

$$\begin{aligned}
|S\varphi_j(t) - S\varphi(t)| &= \left| \int_0^1 G(t,s)h(s) \frac{f(\varphi_j(s))}{a\left(\int_0^1 |\varphi_j|^q dt\right)} ds - \int_0^1 G(t,s)h(s) \frac{f(\varphi(s))}{a\left(\int_0^1 |\varphi|^q dt\right)} ds \right| \\
&= \left| \int_0^1 G(t,s)h(s) \frac{f(\varphi_j(s)) - f(\varphi(s))}{a\left(\int_0^1 |\varphi_j|^q dt\right)} ds \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{1}{a\left(\int_0^1 |\varphi_j|^q dt\right)} - \frac{1}{a\left(\int_0^1 |\varphi|^q dt\right)} \right\} \int_0^1 G(t,s)h(s)f(\varphi(s))ds \right| \\
&\leq \frac{1}{a\left(\int_0^1 |\varphi_j|^q dt\right)} \int_0^1 G(t,s)h(s)|f(\varphi_j(s)) - f(\varphi(s))|ds \\
&\quad + \left| \frac{1}{a\left(\int_0^1 |\varphi_j|^q dt\right)} - \frac{1}{a\left(\int_0^1 |\varphi|^q dt\right)} \right| \int_0^1 G(t,s)h(s)f(\varphi(s))ds. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Comme $0 \leq G \leq 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|S\varphi_j - S\varphi\|_\infty &\leq \frac{\|f(\varphi_j) - f(\varphi)\|_\infty}{a\left(\int_0^1 |\varphi_j|^q dt\right)} \int_0^1 h(s)ds \\
&\quad + \left| \frac{1}{a\left(\int_0^1 |\varphi_j|^q dt\right)} - \frac{1}{a\left(\int_0^1 |\varphi|^q dt\right)} \right| \int_0^1 h(s)f(\varphi(s))ds. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

De (3.8), (3.10), la continuité uniforme de f sur $[0, \rho]$ et la continuité de a , il vient

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\|f(\varphi_j) - f(\varphi)\|_\infty}{a\left(\int_0^1 |\varphi_j|^q dt\right)} = 0. \tag{3.13}$$

D'autre part, en utilisant (3.9)- (3.10) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir le Théorème 1.1.3), on obtient

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_0^1 |\varphi_j|^q dt = \int_0^1 |\varphi|^q dt,$$

ce qui nous conduit à

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} a\left(\int_0^1 |\varphi_j|^q dt\right) = a\left(\int_0^1 |\varphi|^q dt\right) \tag{3.14}$$

puisque a est continue. Combinant (3.13) et (3.14), on déduit de (3.12) que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|S\varphi_j - S\varphi\|_\infty = 0. \tag{3.15}$$

D'où la continuité de $S : E^+ \rightarrow E^+$.

• $S : E^+ \rightarrow E^+$ est compacte. Soit $A \subset E^+$ un ensemble borné. On pose

$$B = \{S\varphi; \varphi \in A\}.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in A, \forall t_1, t_2 \in [0, 1] : \\ |S\varphi(t_1) - S\varphi(t_2)| \leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| h(s) \frac{f(\varphi(s))}{a \left(\int_0^1 |\varphi|^q dt \right)} ds. \end{aligned} \quad (3.16)$$

En utilisant (3.16), la continuité uniforme de G sur $[0, 1] \times [0, 1]$, la continuité des fonctions h, f, a et le fait que A est borné de $(E, \|\cdot\|_\infty)$, on déduit que B est équicontinue de E en tout $t \in [0, 1]$. D'autre part, comme A est borné dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et h, f, a sont continues, l'ensemble

$$B(t) = \{S\varphi(t); \varphi \in A\}$$

est borné dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors, $B(t)$ est relativement compact. D'après le théorème Ascoli-Arzelà (voir le Théorème 1.3.1), on déduit que l'ensemble B est relativement compact. Donc, $S : E^+ \rightarrow E^+$ est compacte.

Étape 2 : On pose

$$P = \left\{ \varphi \in E; \varphi \geq 0 \text{ et } \min_{t \in [0, b]} \varphi(t) \geq (1 - b)\|\varphi\|_\infty \right\}$$

et on montre que P est un cône de E et $S(P) \subset P$.

• P un sous-ensemble convexe non vide de E . Il est clair $P \subset E$ et $P \neq \emptyset$ puisque $0 \in P$.

De plus, si $\alpha \in [0, 1]$ et $\varphi, \psi \in E$ telles que $\varphi, \psi \geq 0$ et

$$\min_{t \in [0, b]} \varphi(t) \geq (1 - b)\|\varphi\|_\infty, \quad \min_{t \in [0, b]} \psi(t) \geq (1 - b)\|\psi\|_\infty,$$

on a $(1 - \alpha)\varphi + \alpha\psi \geq 0$ et

$$\begin{aligned} (1 - b)\|(1 - \alpha)\varphi + \alpha\psi\|_\infty &\leq (1 - b)\{(1 - \alpha)\|\varphi\|_\infty + \alpha\|\psi\|_\infty\} \\ &\leq (1 - \alpha)\|\varphi\|_\infty + \alpha\|\psi\|_\infty \\ &\leq \min_{t \in [0, b]} ((1 - \alpha)\varphi + \alpha\psi)(t), \end{aligned}$$

ce qui montre bien que P est convexe.

- P est un fermé de E . Soit $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset P$ une suite admettant une limite $\varphi \in E$. Donc,

$$\forall j \in \mathbb{N} : \varphi_j \geq 0, \quad (3.17)$$

$$\forall j \in \mathbb{N} : (1-b)\|\varphi_j\|_\infty \leq \min_{t \in [0,b]} \varphi_j(t) \leq \varphi_j(s) \quad \forall s \in [0,b], \quad (3.18)$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|\varphi_j\|_\infty = \|\varphi\|_\infty, \quad (3.19)$$

$$\forall t \in [0,1] : \lim_{j \rightarrow +\infty} |\varphi_j(t) - \varphi(t)| = 0. \quad (3.20)$$

En passant à la limite dans (3.17) et (3.18) et utilisant (3.19) et (3.20), on trouve

$$\varphi \geq 0, \quad (1-b)\|\varphi\|_\infty \leq \varphi(s) \quad \forall s \in [0,b],$$

ce qui nous conduit à

$$\varphi \geq 0, \quad (1-b)\|\varphi\|_\infty \leq \min_{s \in [0,b]} \varphi(s).$$

Donc, $\varphi \in P$ et P est un fermé de E .

- Si $\lambda \geq 0$ est un nombre réel et $\varphi \in P$, on a $\lambda\varphi \geq 0$ et

$$(1-b)\|\lambda\varphi\|_\infty = (1-b)\lambda\|\varphi\|_\infty \leq \lambda \min_{t \in [0,b]} \varphi(t) = \min_{t \in [0,b]} (\lambda\varphi)(t),$$

d'où $\lambda\varphi \in P$.

- Il est clair que si $\varphi \in P$, $-\varphi \in P$ on a $\varphi \geq 0$, $-\varphi \leq 0$. D'où, $\varphi = 0$.
- Montrons que $S(P) \subset P$. Soit $\varphi \in P$. Comme $G \geq 0$ et $h, f, a \geq 0$, il vient $S\varphi \geq 0$. De plus, si on pose

$$g(s) = \frac{h(s)f(\varphi(s))}{a \left(\int_0^1 |\varphi|^q dt \right)},$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\min_{t \in [0, b]} S\varphi(t) &= \min_{t \in [0, b]} \left(\int_0^t (1-t)g(s)ds + \int_t^1 (1-s)g(s)ds \right) \\
&\geq \min_{t \in [0, b]} \left(\int_0^t (1-b)g(s)ds + \int_t^1 (1-s)g(s)ds \right) \\
&\geq (1-b) \min_{t \in [0, b]} \left(\int_0^t g(s)ds + \int_t^1 (1-s)g(s)ds \right) \\
&\geq (1-b) \min_{t \in [0, b]} \left(\int_0^t (1-s)g(s)ds + \int_t^1 (1-s)g(s)ds \right) \\
&= (1-b) \int_0^1 (1-s)g(s)ds \\
&= (1-b) \max_{t \in [0, 1]} \left(\int_0^t (1-s)g(s)ds + \int_t^1 (1-s)g(s)ds \right) \\
&\geq (1-b) \max_{t \in [0, 1]} \left(\int_0^t (1-t)g(s)ds + \int_t^1 (1-s)g(s)ds \right) \\
&= (1-b) \max_{t \in [0, 1]} \int_0^1 G(t, s)g(s)ds = (1-b)\|S\varphi\|_\infty,
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que

$$\min_{t \in [0, b]} S\varphi(t) \geq (1-b)\|S\varphi\|_\infty.$$

D'où, $S\varphi \in P$.

Étape 3 : Montrons que la condition (i) de le Théorème 1.3.4 est satisfaite.

On a

$$\begin{aligned}
S\varphi(0) &= \int_0^1 G(0, s) \frac{h(s)f(\varphi(s))}{a \left(\int_0^1 |\varphi|^q dt \right)} ds \\
&\geq \int_0^b G(0, s) \frac{h(s)f(\varphi(s))}{a \left(\int_0^1 |\varphi|^q dt \right)} ds
\end{aligned}$$

puisque la fonction

$$s \mapsto G(0, s) \frac{h(s)f(\varphi(s))}{a \left(\int_0^1 |\varphi|^q dt \right)}$$

est non négative sur $[0, 1]$ et $[0, b] \subset [0, 1]$. Comme

$$\forall \varphi \in P, \forall s \in [0, b] : \quad \varphi(s) \geq (1-b)\|\varphi\|_\infty$$

et f, a sont des fonctions croissantes, on obtient

$$\begin{aligned} S\varphi(0) &\geq \frac{f((1-b)\|\varphi\|_\infty)}{a(\|\varphi\|_\infty^q)} \int_0^b G(0, s)h(s)ds \\ &\geq \frac{f((1-b)\|\varphi\|_\infty)}{a(\|\varphi\|_\infty^q)} h_0 \int_0^b G(0, s)ds \\ &= \frac{f((1-b)\|\varphi\|_\infty)}{a(\|\varphi\|_\infty^q)} h_0 b(1-b/2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

D'autre part, d'après (3.3), il existe une constante $R_1 > 0$ telle que

$$\|\varphi\|_\infty \leq R_1 \Rightarrow \frac{f((1-b)\|\varphi\|_\infty)}{\|\varphi\|_\infty a(\|\varphi\|_\infty^q)} \geq \frac{1}{h_0 b(1-b/2)}. \quad (3.22)$$

Combinant (3.21) et (3.22), il vient

$$\|\varphi\|_\infty \leq R_1 \Rightarrow \|S\varphi\|_\infty \geq S\varphi(0) \geq \|\varphi\|_\infty.$$

Donc, si on pose

$$\Omega_1 = \{\varphi \in E; \|\varphi\|_\infty < R_1\},$$

on trouve

$$\|S\varphi\|_\infty \geq \|\varphi\|_\infty \quad \forall \varphi \in P \cap \partial\Omega_1. \quad (3.23)$$

Par ailleurs, si $\varphi \in P$ et $s \in [0, b]$, on a

$$|\varphi(s)|^q \geq (1-b)^q \|\varphi\|_\infty^q,$$

ce qui nous conduit à

$$\int_0^b |\varphi(s)|^q ds \geq b(1-b)^q \|\varphi\|_\infty^q.$$

Comme a est croissante, on en déduit que

$$a\left(\int_0^b |\varphi(s)|^q ds\right) \geq a(b(1-b)^q \|\varphi\|_\infty^q).$$

En outre, il résulte de (3.4) qu'il existe une constante $R_2 > R_1$ telle que

$$\|\varphi\|_\infty \geq R_2 \Rightarrow \frac{f(\|\varphi\|_\infty)}{\|\varphi\|_\infty} \frac{1}{a(b(1-b)^q \|\varphi\|_\infty^q)} < \frac{1}{h_\infty}.$$

Par conséquent, si $\|\varphi\|_\infty \geq R_2$, on obtient

$$\begin{aligned} S\varphi(t) &= \int_0^1 G(t, s)h(s) \frac{f(\varphi(s))}{a\left(\int_0^1 |\varphi|^q dx\right)} ds \\ &\leq \frac{h_\infty f(\|\varphi\|_\infty)}{a\left(\int_0^1 |\varphi|^q dx\right)} \int_0^1 G(t, s) ds \\ &\leq \frac{h_\infty f(\|\varphi\|_\infty)}{a(b(1-b)^q \|\varphi\|_\infty^q)} < \|\varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

en utilisant (3.2) et la croissance de la fonction f . Alors, si on pose

$$\Omega_2 = \{\varphi \in E; \|\varphi\|_\infty < R_2\}$$

on obtient

$$\|S\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \quad \forall \varphi \in P \cap \partial\Omega_2. \quad (3.24)$$

On déduit de (3.23) et (3.24) que la condition (i) de Théorème 1.3.4 est satisfaite. On conclut que l'application S admet un point fixe u dans $P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ qui est une solution positive du problème (3.1) telle que

$$\forall t \in [0, 1]: \quad u(t) = \frac{1}{a\left(\int_0^1 |u|^q dt\right)} \int_0^1 G(t, s)h(s)f(u(s))ds.$$

■

Exemple 3.1.1.

Soient $b \in]0, 1[$, $q \in]1, +\infty[$ et $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant (3.2). Considérons

$$\forall t \in [0, +\infty[: \quad f(t) = \frac{2te^t}{h_0 b(1-b)(1-b/2)}, \quad a(t) = e^t.$$

Les fonctions f , a sont continues et croissantes sur $[0, +\infty[$ et

$$\forall t \in]0, +\infty[: \quad \frac{f((1-b)t)}{ta(t^q)} = \frac{2}{h_0 b(1-b/2)e^{-(1-b)t+t^q}}, \quad (3.25)$$

$$\frac{f(t)}{ta(b(1-b)^q t^q)} = \frac{2}{h_0 b(1-b)(1-b/2)e^{-t+b(1-b)^q t^q}}. \quad (3.26)$$

Il résulte de (3.25)-(3.26) que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f((1-b)t)}{ta(t^q)} = \frac{2}{h_0 b(1-b/2)} > \frac{1}{h_0 b(1-b/2)},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{ta(b(1-b)qt^q)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{h_0 b(1-b)(1-b/2)e^{t^q(b(1-b)^q - t^{1-q})}} = 0 < \frac{1}{h_\infty}.$$

Donc, les fonction f, a et h satisfont aux hypothèses du Théorème 3.1.1 et le problème

$$\begin{cases} -u''(t)e^{\int_0^1 |u|^q dx} = h(t) \frac{2u(t)e^{u(t)}}{h_0 b(1-b)(1-b/2)} & t \in]0, 1[, \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

a une solution positive $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in [0, 1] : u(t) = \frac{2}{h_0 b(1-b)(1-b/2)} e^{-\int_0^1 |u|^q dx} \int_0^1 G(t, s) h(s) u(s) e^{u(s)} ds,$$

où G est la fonction de Green du problème (3.5).

Exemple 3.1.2.

Soient $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant (3.2), $b \in]0, 1[$ et $q \in [1, +\infty[$. Considérons

$$\forall t \in [0, +\infty[: f(t) = \frac{2t \ln(t+2)}{h_0 b(1-b)(1-b/2)}, \quad a(t) = (t^{1/q} + 1) \ln 2.$$

On a

$$\forall t \in]0, +\infty[: \frac{f((1-b)t)}{ta(t^q)} = \frac{2 \ln((1-b)t+2)}{h_0 b(1-b/2)(t+1) \ln 2},$$

$$\frac{f(t)}{ta(b(1-b)qt^q)} = \frac{2 \ln(t+2)}{h_0 b(1-b)(1-b/2)(b^{1/q}(1-b)t+1) \ln 2}.$$

D'où,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f((1-b)t)}{ta(t^q)} = \frac{2}{h_0 b(1-b/2)} > \frac{1}{h_0 b(1-b/2)},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{ta(b(1-b)qt^q)} = 0 < \frac{1}{h_\infty}.$$

Comme $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, $a : [0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ sont des fonctions continues et croissantes, le problème

$$\begin{cases} -u''(t)(\|u\|_q + 1) \ln 2 = h(t) \frac{2u(t) \ln(u(t)+2)}{h_0 b(1-b)(1-b/2)} & t \in]0, 1[, \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

admet une solution positive $u \in C^2([0, 1]; \mathbb{R})$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons vu trois méthodes pour résoudre certains problèmes elliptiques non locaux pour des équations aux dérivées partielles et une équation différentielle ordinaire qu'ils apparaissent naturellement dans plusieurs phénomènes de sciences appliquées. Ces méthodes sont la méthode de Galerkin, la théorie de point critique et le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Bibliographie

- [1] G. Allaire, F. Alougs : *Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles*, Ecole polytechnique, 16 janvier 2015.
- [2] N. Azzouz, A. Bensedik : *Existence Results for an Elliptic Equation of Kirchhoff-Type with Changing Sign Data*, *Funkcial. Ekvac.* 55 (2012) 55-66.
- [3] F. Bosio : *Cours d'analyse élémentaire*, Université de Poitiers, Licence de Sciences 1 ère année Parcours renforcé 2L03R, Université de Poitiers , 2007-2008.
- [4] H. Brezis : *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer-Verlag New York, 2011.
- [5] H. Brezis : *Analyse fonctionnelle Théorie et Application*, Dunod, Paris, 1999.
- [6] R. F. Brown : *A Topological Introduction to Nonlinear Analysis*, Birkhäuser, Boston, Mass, USA, 2nd edition, 2004.
- [7] G. F. Carrier : *On the nonlinear vibrations problem of elastic string*, *Quart. J. Appl. Math.* 3 (1945) 157-165.
- [8] F.J.S.A. Corrêa : *On positive solutions of nonlocal and non variational elliptic problems*, *Nonlinear Analysis* 59 (2004) 1147–1155.
- [9] F. De Marçay : *Intégrales dépendant de paramètres*, Département de Mathématiques d'Orsay Université, Paris-Sud, France.
- [10] D. Guo, V. Lakshmikantham : *Nonlinear problems in abstract cones*, Academic Press Inc., Boston, New York, 1988.

- [11] G. R. Kirchhoff : *Vorlesungen über mathematische physik : Mechanik*, Teuber, Leipzig, 1876, Section 29.7.
- [12] O. Kavian : *Introduction a la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, vol. 13, 1993.
- [13] H. Le Dret : *Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires*, Paris, 2012.
- [14] A. Munnier : *Espaces de sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles*, Nancy Université, France, 2007-2008.
- [15] J. Pierre, A. Roux : *Équations aux dérivées partielles cours et exercices corrigés*, Paris, 2015.
- [16] L. Schwartz : *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Edition Hermann, Paris, 1970.
- [17] M. Struwe : *Variational Methods : Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, vol. 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge*, Springer, Berlin, Germany, 3rd edition, 2000.

Résumé

Ce mémoire a pour but d'étudier l'existence de solutions de quelques classes de problèmes elliptiques non locaux engendrés par des équations aux dérivées partielles et une équation différentielle ordinaire en utilisant la méthode de Galerkin, la théorie de point critique et le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Mots Clés : Problèmes elliptiques non locaux, Méthode de Galerkin, Point critique, Théorème du point fixe de Krasnoselskii, Existence.

Abstract

The aim of this work is to study the existence of solutions for some classes of nonlocal elliptic problems related to partial differential equations and an ordinary differential equation using the Galerkin method, the critical point theory and the Krasnoselskii's fixed point theorem.

Key Words: Nonlocal elliptic equations, Galerkin method, Critical point, Krasnoselskii's fixed point, Existence.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة وجود حلول لبعض فئات من المسائل الناقصية غير المحلية المرفقة بمعادلات تفاضلية ذات مشتقات جزئية ومعادلة تفاضلية عادية باستعمال طريقة قالاركين، النقطة الحدية ونظرية النقطة الصامدة. الكلمات المفتاحية: المسائل الناقصية غير المحلية، طريقة قالاركين، النقطة الحدية، نظرية النقطة الصامدة، حل.