



N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Sur la stabilité exponentielle des
 C_0 -semigroupes
Application a un système de type Timoshenko**

Présenté par: Ferdjani Reguia

Maiza Aicha

Soutenu devant le jury composé de

Abdelfeteh FAREH
Khadidja NISSE
Nadjat DOUDI

MCB
MCB
MAA

Rapporteur
Présidente
Examinatrice

Univ. d'El Oued
Univ. d'El Oued
Univ. d'El Oued

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciements

*Nous remercions tout d'abord **Dieu** le tout puissant qui nous a donné a puissance et la volonté pour achever ce travail.*

*Nous vifs remerciement vont également à notre encadreur **Dr. Abdelfeteh Fareh** qui nous a guidé durant ce semestre et qui ses conseils et remarque étaient très util pour réaliser ce mémoire.*

*Nous remercions encore, **Melle Nisse Khadidja** et **Mme Doudi Nadjjet** qui ont accepté d'examiner ce travail.*

Nous remerciement vont également à nous familles de leurs aides morals et materiels tout au long nous scolarité.

Notations générales

H^1, H_0^1, H^2	Espaces de Sbolev,
$B(X)$	Espace des opérateures linéaires bornés de X dans X ,
X'	Espace dual de X ,
$\langle, \rangle, (,)$	Produit scalaire dans la dualité X', X ,
∂	L'opérateur de différentiation partielle,
$D(\mathcal{A})$	Domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$,
$\rho(\mathcal{A})$	Ensemble résolvant de l'opérateur $\mathcal{A}$,
$\sigma(\mathcal{A})$	Spectre de l'opérateur $\mathcal{A}$,
$\overline{\lim}_{ \beta \rightarrow \infty} \ (i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\ $	$= \inf_{ \beta } \left(\sup_{k \geq \beta } \ (ikI - \mathcal{A})^{-1}\ \right),$
$D^\alpha u = \frac{\partial^{ \alpha } u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$	Dérivée partielle par rapport au multi-indice α ,
$C_0(\Omega)$	Fonctions continues à support compact dans Ω ,
$\mathcal{A}^*$	L'adjoint d'un opérateur $\mathcal{A}$,
$R(., T)$	Application résolvante de T .

Table des matières

Introduction générale	1
1 Rappels	3
1.1 Quelques inégalités utiles	3
1.2 Quelques propriétés spectrales	4
1.3 Semi-groupe fortement continue	6
1.4 Théorème de Lax-Milgram	8
1.5 Les espaces de Sobolev	9
1.5.1 Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$	9
1.5.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$	11
1.5.3 Espace $W_0^{1,p}(I)$	12
1.6 Théorème de Hille-Yosida	12
1.7 Résolution d'un problème d'évolution	13
2 Stabilité exponentielle	15
2.1 Notions de stabilité	15
2.2 Stabilité exponentielle	17
3 Existence et unicité de la solution d'un problème de type Timoshenko	26
3.1 Introduction	26
3.2 Existence et unicité	27
3.3 Stabilité exponentielle	36
Bibliographie	42

Introduction générale

Durant les trois dernières décennies, une intense importante a été donnée aux stabilités des systèmes des EDP modélisant des phénomènes physiques, chimiques ou biologiques.

Dans ce mémoire on va donner une démonstration rigoureuse du théorème (Gearhat 1978, Prüss 1984, Greiner 1985) qui lie la stabilité d'un système à l'étude de l'ensemble résolvant du générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $T(t)$, $t \geq 0$, puis on applique le théorème de Håug sur l'étude de la stabilité d'un système en visco-élasticité linéaire.

Notons qu'à une solution non triviale d'un système en EDP, il s'associe une énergie non nulle, si cette énergie est dissipative (la dérivée par rapport au temps est négative), le système va maintenir le repos après un certain période du temps, on dit, alors que le système est stable.

Ce mémoire se divise en trois chapitres constituées de :

Le premier chapitre est consacré aux définitions, et théorèmes importants lesquels nous avons besoin dans notre étude, tels que quelques inégalités utiles, la théorie des semi-groupes, les espaces des Sobolev, la théorie de Hille-Yosida, les opérateurs maximaux monotones.

Dans le second chapitre nous présentons quelques théorèmes de stabilité exponentielle d'un semi-groupe fortement continu, avec la preuve de théorème (Gearhart 1978, Prüss 1984, Greiner 1985).

Un problème de type Temoshenko était l'objet du troisième chapitre, l'existence et l'unicité ont été prouvés en utilisant le théorème de Hille-Yosida, la stabilité exponentielle de la solution a été démontrée.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre, on présentera quelques définitions et théorèmes fondamentales, les espaces de Sobolev et le théorème de Lax-Milgram et le théorème de Hille-Yosida que nous utiliserons dans les chapitres 2 et 3.

Commençons par rappeler quelques résultats généraux.

Théorème 1.0.1 (*Plancherel*)[5] Soient H un espace de Hilbert et $f \in L^2(\mathbb{R}, H)$, alors

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2,$$

i.e, $1/\sqrt{2\pi} \mathcal{F}$ est une isométrie, où $\mathcal{F}$ est le transformé de Fourier.

Théorème 1.0.2 (*Cauchy*) Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\mathcal{C}$ un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D .

Alors

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0.$$

1.1 Quelques inégalités utiles

Les inégalités suivantes sont d'une grande importance

Inégalité de Young

Soient p et q deux réels conjugués : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

En particulier si $u, v \in L^2(\Omega)$, alors

$$\int_{\Omega} |uv| \leq \varepsilon \int_{\Omega} |u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |v|^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$, alors,

$$\left| (u, v) \right| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in H.$$

1.2 Quelques propriétés spectrales

Définition 1.2.1 [1] Soit T un opérateur défini sur H , l'ensemble résolvant $\rho(T)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda I - T$ inversible.

Définition 1.2.2 [1] Soit T un opérateur défini sur H , le spectre $\sigma(T)$ est le complément de l'ensemble résolvant, i.e.

$$\sigma(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - T \text{ est non inversible} \right\}$$

Définition 1.2.3 [1] On appelle application résolvante de T :

$$R(\cdot, T) : \rho(T) \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow B(H)$$

$$\lambda \longrightarrow R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}.$$

Théorème 1.2.1 [3] Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $T \in B(H)$.

1. Si $|\lambda| > \|T\|$, alors $\lambda \notin \sigma(T)$.

2. $\sigma(T)$ est un ensemble fermé.

Théorème 1.2.2 [3] Soit X un espace de Banach et soit $\{x_n\}$ une suite dans X . Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ converge alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge.

Lemme 1.2.1 [3] Soit X un espace vectoriel normé.

1. $B(X)$ est une algèbre avec l'identité et donc un anneau avec l'identité.

2. Si $\{T_n\}$ et $\{S_n\}$ sont des séries de $B(X)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n T_n = ST$

Théorème 1.2.3 [3] Soit X un espace de Banach. Si $T \in B(X)$ est un opérateur tel que $\|T\| < 1$ alors $I - T$ est inversible et l'inverse est donnée par

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Preuve. Comme $\|T\| < 1$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n$ converge et par suite, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|$ converge également, car $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converge par le théorème (1.2.2).

Soit $S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ et soit $S_k = \sum_{n=0}^k T^n$. Ensuite, la série $\{S_k\}$ converge vers S dans $B(X)$. Nous avons

$$\|(I - T)S_k - I\| = \|I - T^{k+1} - I\| = \| - T^{k+1} \| \leq \|T\|^{k+1}$$

D'après $\|T\| < 1$ on en déduit que $\lim_{k \rightarrow \infty} (I - T)S_k = I$. Par conséquent

$$(I - T)S = (I - T) \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (I - T)S_k = I,$$

par le lemme (1.2.1). De même $S(I - T) = I$ alors $I - T$ est inversible et $(I - T)^{-1} = S$

■

1.3 Semi-groupe fortement continue

Définition 1.3.1 [6] Une famille $T(t)$ ($0 \leq t < \infty$) d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach X est appelée *semi-groupe fortement continue* (en bref, un C_0 -semigroupe) si

1. $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$,
2. $T(0) = I$,
3. Pour chaque $x \in X$, $T(\cdot)x$ est continue en t sur $[0, \infty)$.

Définition 1.3.2 [7] Le générateur infinitésimal de $T(t)$ est l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ de domaine

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

défini par

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \quad \text{pour } x \in D(\mathcal{A}).$$

Proposition 1.3.1 [5] Soit $T(t)$ un C_0 -semigroupe. Il existe deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \text{pour } 0 \leq t < \infty. \quad (1.1)$$

Proposition 1.3.2 [5] Pour un opérateur borné $\mathcal{A}$ sur un espace de Banach X , le spectre $\sigma(\mathcal{A})$ est toujours compact et non vide, d'où son rayon spectral

$$r(\mathcal{A}) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\},$$

est finie et satisfait $r(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}\|$.

Définition 1.3.3 [5] Soit $A : D(\mathcal{A} \subset X \longrightarrow X$ un opérateur fermé. Alors

$$S(\mathcal{A}) := \sup \left\{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \right\}$$

est appelée la borne spectrale de $\mathcal{A}$.

Pour le générateur $\mathcal{A}$ d'un semigroupe fortement continu $\tau = (T(t))_{t \geq 0}$, la borne spectrale $S(\mathcal{A})$ est toujours dominé par la borne de croissance

$$\omega_0 = \omega_0(\tau) = \inf \left\{ \omega \in \mathbb{R} \text{ il existe } M_\omega \geq 1 \text{ tel que } \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0. \right\}$$

Définition 1.3.4 [5] Pour la borne spectrale $S(\mathcal{A})$ de générateur $\mathcal{A}$ et pour la borne de croissance ω_0 du semigroupe généré $(T(t))_{t \geq 0}$, on a

$$\begin{aligned} -\infty \leq S(\mathcal{A}) \leq \omega_0 &= \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| \\ &= \frac{1}{t_0} \log(r(T(t_0))) < \infty \end{aligned}$$

pour chaque $t_0 > 0$. En particulier, le rayon spectral de l'opérateur de semigroupe $T(t)$ est donné par

$$r(T(t)) = e^{\omega_0 t} \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.3.1 [5] Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur l'espace de Banach X et soit $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ les constante qui vérifient

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Pour le générateur $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ de $(T(t))_{t \geq 0}$ les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds \tag{1.2}$$

existe pour tout $x \in X$, alors $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ et $R(\lambda, \mathcal{A}) = R(\lambda)$.

2. Si $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega$, alors $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, et le résolvant $R(\lambda, \mathcal{A})$ est donné par l'expression l'intégrale (1.2).

3. $\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}$ pour tout $\operatorname{Re}\lambda > \omega$.

Corollaire 1.3.1 [5] Soit $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\tau = (T(t))_{t \geq 0}$ sur X . Alors

$$T(t)x = \frac{(k-1)!}{t^{k-1}} \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\omega - in}^{\omega + in} e^{\lambda t} R(\lambda, \mathcal{A})^k x d\lambda$$

pour tout $\omega > \omega_0(\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, $t > 0$, et $x \in D(\mathcal{A}^k)$.

Proposition 1.3.3 [5] Pour chaque $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ on a

$$d(\lambda, \sigma(\mathcal{A})) = \frac{1}{r(R(\lambda, \mathcal{A}))} \geq \frac{1}{\|R(\lambda, \mathcal{A})\|}.$$

1.4 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.4.1 [2] On dit qu'une forme bilinéaire

$$a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

est :

1. Continue, s'il existe une constante C telle que

$$|a(u, v)| \leq C|u||v| \quad \forall u, v \in H,$$

2. Coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq \alpha |v|^2 \quad \forall v \in H.$$

Théorème 1.4.1 (Lax- Milgram) [2] Soit H un espace de Hilbert, $a(., .)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur H et $L : H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue.

Alors, il existe $u \in H$ unique solution du problème

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H,$$

de plus si a est symétrique u définie par

$$\frac{1}{2}a(u, u) - L(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}(v, v) - L(v) \right\}$$

1.5 Les espaces de Sobolev

Soit $I =]a, b[$ un intervalle (borné ou non) et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

1.5.1 Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Définition 1.5.1 [2] Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$; on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Définition 1.5.2 [2] On pose

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \left\{ C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}$$

Définition 1.5.3 [2] L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est défini par

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \quad \exists g \in L^p(I) \quad \text{tel que} \quad \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

On pose

$$H^1(I) = W^{1,2}(I).$$

Pour $u \in W^{1,p}(I)$ on note g par u' est on l'appelle dérivée faible de u .

Proposition 1.5.1 L'espace $W^{1,p}$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

est un espace de Banach (ou parfois, si $1 < p < \infty$, de la norme équivalente

$$(\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}).$$

L'espace H^1 est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2};$$

est un espace de Hilbert.

La norme associée

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme de H^1 .

1.5.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$

Définition 1.5.4 [2] *Étant donnés un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace*

$$W^{m,p}(I) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(I), u' \in W^{m-1,p}(I) \right\}.$$

On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

On vérifie aisément que pour $u \in W^{m,p}(I)$ on peut considérer les dérivées successives

$u' = g_1, (u')' = g_2 \dots$ jusqu'à l'ordre m ; on les note $Du, D^2u \dots D^m u$.

L'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

et l'espace H^m est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

1.5.3 Espace $W_0^{1,p}(I)$

Définition 1.5.5 [2] *Étant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture de $C_0^1(I)$ dans $W^{1,p}(I)$. On note $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.*

Remarque 1.5.1 *Si I est borné $W_0^{1,p}(I)$ sera muni de la norme $\|u\|_{W_0^{1,p}} = \sum_{1 \leq i \leq n} \|D_i u\|_{L^2}$, c'est une norme équivalente à celle induite par $W^{1,p}(I)$.*

L'espace $W_0^{1,p}(I)$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}(I)$; l'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1 .

Théorème 1.5.1 [2] *Soit $u \in W^{1,p}(I)$, alors $u \in W_0^{1,p}(I)$ si et seulement si $u = 0$ sur ∂I , où ∂I est la frontière de I .*

1.6 Théorème de Hille-Yosida

Soit $T(t)$ un C_0 -semigroupe. D'après le théorème 1.3.1 il s'ensuit qu'il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tel que $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$ pour $t \geq 0$.

Définition 1.6.1 [7] *Si $\omega = 0$, $T(t)$ est dit uniformément borné et si de plus $M = 1$ il est appelé C_0 -semigroupe de contractions.*

Théorème 1.6.1 (Hille-Yosida) [7] *Un opérateur linéaire (non borné) $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe de contraction $T(t)$, $t \geq 0$ si et seulement si :*

1. $\mathcal{A}$ est fermé et $\overline{D(\mathcal{A})} = X$.

2. L'ensemble résolvant $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ contient $\mathbb{R}^+$ et pour tout $\lambda > 0$,

$$\|R(\lambda : \mathcal{A})\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Remarque 1.6.1 [7] Soit $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal d'un semigroupe de contraction $T(t)$. L'ensemble résolvant de $\mathcal{A}$ contient toujours le demi-plan ouvert droit, i.e, $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subseteq \rho(\mathcal{A})$ et pour λ

$$\|R(\lambda, \lambda)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}.$$

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

Définition 1.6.2 [2] Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire non-borné.

On dit que $\mathcal{A}$ est dissipatif si

$$(\mathcal{A}v, v) \leq 0 \quad \forall v \in D(\mathcal{A}),$$

$\mathcal{A}$ est maximal $\operatorname{Im}(I + \mathcal{A}) = H$ i.e.

$$\forall f \in H, \quad \exists u \in D(\mathcal{A}) \quad \text{tel que} \quad u + \mathcal{A}u = f.$$

On dit que $\mathcal{A}$ est monotone si $-\mathcal{A}$ est dissipatif i.e $(\mathcal{A}u, u) \geq 0$ pour tout $u \in D(\mathcal{A})$.

Théorème 1.6.2 (Lumer-Phillips)[4] Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire et $D(\mathcal{A})$ dense dans H . Alors, $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un

C_0 -semigroupe de contractions si et seulement si :

1. $\mathcal{A}$ est dissipatif.

2. Il existe $\lambda > 0$ tel que $\operatorname{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = H$. ($\mathcal{A}$ est maximal).

1.7 Résolution d'un problème d'évolution

Etant donné, le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0 & \text{sur } \Omega \times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.3)$$

Théorème 1.7.1 (Hille-Yosida) [2] Soit $\mathcal{A}$ un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in D(\mathcal{A})$ il existe une fonction unique

$$u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(\mathcal{A}))$$

solution du (1.3).

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |\mathcal{A}u(t)| \leq |\mathcal{A}u_0| \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 1.7.1 [2] L'intérêt principal du théorème 1.7.1 réside dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution (1.3) on se ramène à vérifier que $\mathcal{A}$ est maximal monotone, c'est-à-dire, à étudier l'équation stationnaire $u + \lambda \mathcal{A}u = f$.

Chapitre 2

Stabilité exponentielle

2.1 Notions de stabilité

Définition 2.1.1 [6] *Le semigroupe $T(t) = e^{At}$ est dit être exponentiellement stable s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $M \geq 1$ telle que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 2.1.2 [5] *Un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ est dit :*

1. *Uniformément exponentiellement stable s'il existe $\varepsilon > 0$ telle que :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\varepsilon t} \|T(t)\| = 0.$$

2. *Uniformément stable si :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\| = 0.$$

3. *fortement stable si :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)x\| = 0 \quad \forall x \in X.$$

4. *faiblement stable si :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle T(t)x, x' \rangle = 0 \quad \forall x \in X \quad \text{et} \quad x' \in X'.$$

Proposition 2.1.1 [5] *Pour un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $(T(t))_{t \geq 0}$ est uniformément exponentiellement stable.
2. $(T(t))_{t \geq 0}$ est uniformément stable.
3. Il existe $\varepsilon > 0$ telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\varepsilon t} \|T(t)x\| = 0 \quad \forall x \in X$.

Preuve. Il est clair que, (1) implique (2) et (3).

D'après la définition (1.3.4) $e^{\omega_0 t} = r(T(t)) \leq \|T(t)\|$ pour tout $t \geq 0$ car :

$$\omega_0 = \inf_{t \geq 0} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|.$$

Alors $\omega_0 \geq \frac{1}{t} \log \|T(t)\| \quad \forall t \geq 0$, donc $e^{\omega_0 t} \leq \|T(t)\| \quad \forall t \geq 0$, (2) implique

$\omega_0 < 0$ ($\omega_0 := \inf\{\omega \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\omega t} \|T(t)\| = 0\}$), donc $\exists \omega$ tel que $\omega_0 < \omega < 0$

tel que $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-\omega t} \|T(t)\| = 0$.

On choisit $\varepsilon = -\omega$

alors $\lim_{t \rightarrow 0} e^{\varepsilon t} \|T(t)\| = 0$ donc (1).

Si (3) est vérifiée, alors $(e^{\varepsilon t} T(t))_{t \geq 0}$ est fortement donc uniformément, bornée, alors

$\exists \alpha > 0$ tel que : $\|e^{\varepsilon t} T(t)\| \leq \alpha$

$$\implies e^{\varepsilon t} \|T(t)\| \leq \alpha$$

$$\implies e^{\frac{\varepsilon}{2} t} \|T(t)\| \leq \alpha e^{-\frac{\varepsilon}{2} t}$$

qui implique $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{\varepsilon}{2} t} \|T(t)\| = 0$ donc (1) ■

Proposition 2.1.2 *Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semigroupe de générateur A , alors $(T(t))_{t \geq 0}$ est uniformément exponentiellement stable si et seulement si*

$$\omega_0 < 0.$$

Proposition 2.1.3 *Pour un semigroupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$, les assertions suivante sont équivalentes*

1. $\omega_0 < 0$, i.e, $(T(t))_{t \geq 0}$ est uniformément exponentiellement stable.
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\| = 0$.
3. $\|T(t_0)\| < 1$ pour certain $t_0 > 0$.
4. $r(T(t_1)) < 1$ pour certain $t_1 > 0$.

Preuve. Voir [5] ■

2.2 Stabilité exponentielle

Théorème 2.2.1 [6] *Soit $T(t) = e^{At}$ un C_0 -semi-groupe sur un espace de Hilbert.*

Alors $T(t)$ est exponentiellement stable si et seulement si

$$\sup\{\operatorname{Re}\lambda; \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} < 0 \quad (2.1)$$

et

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda \geq 0} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty. \quad (2.2)$$

Théorème 2.2.2 [6] *Soit $T(t) = e^{At}$ un C_0 -semigroupe des contractions sur un*

espace de Hilbert. Alors $T(t)$ est exponentiellement stable si et seulement si

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \quad (2.3)$$

et

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty. \quad (2.4)$$

Dans la suite on donne la preuve de l'équivalence de ces deux théorème à la condition que $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$ est un C_0 -semigroupe des contractions sur espace de Hilbert.

Preuve. D'abord, nous provons que (2.1)-(2.2) implique (2.3) et (2.4)

Supposon que $\sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} < 0$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, si $Re\lambda \geq 0$ on a $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A})$ par suite $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, donc (2.1) entraîne (2.3).

Si $\sup_{Re\lambda > 0} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty$, alors

$$\|(ikI - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \sup_{Re\lambda \geq 0} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty \quad \forall k \geq |\beta|$$

donc

$$\sup_{k \geq |\beta|} \|(ikI - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \sup_{Re\lambda \geq 0} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty$$

ce qui implique que

$$\inf_{|\beta|} \left(\sup_{k \geq |\beta|} \|(ikI - \mathcal{A})^{-1}\| \right) < \infty$$

on a

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty$$

alors (2.2) entraîne (2.4).

Ensuite, nous prouvons que (2.3)-(2.4) implique (2.1) et (2.2) à condition que

$\|T(t)\| \leq 1$. D'après la remarque (1.6.1) l'ensemble résolvant $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ contient le demi-plan ouvert droit, i.e $\{\lambda : Re\lambda > 0\} \subseteq \rho(\mathcal{A})$, et $\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{Re\lambda}$.

Ceci implique que pour tout $\delta_0 < 0$ donné, quand $Re\lambda > |\delta_0|$, nous avons

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{Re\lambda} < \frac{1}{|\delta_0|}$$

alors

$$\sup_{Re\lambda \geq |\delta_0|} \|\lambda I - \mathcal{A}\|^{-1} < \frac{1}{|\delta_0|} \tag{2.5}$$

Deuxièmement, nous montrons qu'il existe $\sigma_0 < 0$ avec $|\sigma_0|$ étant suffisamment petite telle que $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \{\lambda, \operatorname{Re}\lambda \leq \sigma_0\}$.

En effet soit $\lambda = \mu + i\nu$,

$$\lambda I - \mathcal{A} = \mu I + i\nu I - \mathcal{A} = (\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I)(i\nu I - \mathcal{A}).$$

D'après (2.3) $i\nu I - \mathcal{A}$ est inversible et pour $|\mu|$ est suffisamment petit, par théorème (1.2.3) $\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I$ est inversible.

Ainsi (2.3) implique $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \{\lambda, \operatorname{Re}\lambda \leq \sigma_0 < 0\}$ avec $|\sigma_0|$ suffisamment petit,

par conséquent $\sigma_0(\mathcal{A}) = \sup\{\operatorname{Re}\lambda, \lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \leq \sigma_0 < 0\}$ et pour $\operatorname{Re}\lambda \leq |\delta_0| \leq |\sigma_0|$,

$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq 2M$ car d'après (2.4) $\sup_{\nu \in \mathbb{R}} \|(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq M$ et on choisit

$|\mu| \leq \frac{1}{2M}$ d'abord, on a

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| &= \|(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}(\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I)^{-1}\| \\ &\leq \|(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\| \|(\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I)^{-1}\| \\ &\leq M \|(\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I)^{-1}\| \end{aligned} \tag{2.6}$$

et $|\mu| \leq \frac{1}{2M} \leq \frac{1}{2\|(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\|}$, alors

$$\|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq |\mu| \|(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{2M} M < 1$$

donc par le théorème (1.2.3) $\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I$ est inversible et l'inverse est donnée par

$$(\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1})^n$$

donc

$$\begin{aligned}
\|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I\| &= \|\sum_{n=0}^{\infty} (\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1})^n\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|(\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1})^n\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|(\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1})\|^n \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\|^n}{1 - \|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\|} \\
\text{comme } \|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\| &< 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\|^n}{1 - \|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\|} = \frac{1}{1 - \|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\|} \\
\text{donc}
\end{aligned}$$

$$\|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I\| \leq \frac{1}{1 - \|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\|}$$

comme $\|(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq M$ et $|\mu| < \frac{1}{2M}$ on a

$$\|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I\| \leq 2 \quad (2.7)$$

additionnons (2.6) et (2.7), on obtient

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq 2M.$$

En combinant ceci avec (2.5) on obtient (2.2). ■

Théorème 2.2.3 (*Gearhart 1978, Prüss 1984, Greiner 1985*)[5] *Un semi-groupe fortement continu $\tau = (T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert H de générateur infinitésimal $\mathcal{A}$, alors $(T(t))_{t \geq 0}$ est uniformément exponentiellement stable si et seulement si le demi-plan $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ est contenu dans l'ensemble résolvant $\rho(\mathcal{A})$ du générateur $\mathcal{A}$ avec le résolvant satisfaisant*

$$M := \sup_{\operatorname{Re} \lambda > 0} \|R(\lambda, \mathcal{A})\| < \infty. \quad (2.8)$$

Preuve. Si $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semigroupe uniformément exponentiellement stable alors

d'après la proposition 2.1.2 $\omega_0 < 0$ et comme $\omega_0 = \inf \left\{ \omega \in \mathbb{R} \text{ il existe } M_\omega \geq 1 \right.$
 $\left. \text{tel que } \|T(t)\| \geq M_\omega e^{\omega t} \forall t \geq 0. \right\}$, alors $\exists \omega : \text{tel que } \omega_0 < \omega < 0$

d'après le théorème 1.3.1 (3) on a

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - \omega} \quad \forall \operatorname{Re} \lambda > \omega$$

donc $\sup_{\operatorname{Re} \lambda > 0} \|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \sup_{\operatorname{Re} \lambda > 0} \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - \omega} \leq \frac{M}{-\omega}$ donc l'estimation (2.8).

Supposons que $\exists i\lambda_0 \in i\mathbb{R} : i\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{A})$, alors pour ε assez petit $\varepsilon + i\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$

$$d(\varepsilon + i\lambda_0, \sigma(\mathcal{A})) \leq \varepsilon$$

d'après le corollaire 1.3.3 on a

$$\|R(\varepsilon + i\lambda_0, \mathcal{A})\| \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$ alors $\|R(\varepsilon + i\lambda_0, \mathcal{A})\| \rightarrow +\infty$ et $\operatorname{Re}(\varepsilon + i\lambda_0) = \varepsilon > 0$, ce que contredit

le fait que $\sup_{\operatorname{Re} \lambda > 0} \|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \frac{M}{-\omega}$ donc $\forall \lambda_0 \in \mathbb{R}, i\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A})$, par conséquent

$i\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$, alors $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, donc l'estimation (2.8) s'étend par continuité à

$$\operatorname{Re} \lambda \geq 0.$$

Ensuite, on prends $\omega > |\omega_0| + 1$ et considérons le semi-groupe réechelonné $(T_{-\omega}(t))_{t \geq 0}$

avec

$$T_{-\omega}(t) := e^{-\omega t} T(t).$$

Puis, d'après (1.2) dans le théorème 1.3.1 et pour $x \in H, s \in \mathbb{R}$, on a

$$R(\omega + is, \mathcal{A})x = R(is, \mathcal{A} - \omega)x = \int_0^\infty e^{-ist} T_{-\omega}(t) x dt.$$

Utilisant la transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}, H) \longrightarrow (\mathbb{R}, H)$, nous obtenons

$$R(\omega + is, \mathcal{A})x = \mathcal{F}(T_{-\omega}(\cdot)x)(s)$$

où nous prolongeons $T_{-\omega}(\cdot)$ à $\mathbb{R}$ en mettant $T_{-\omega}(t) := 0$ pour $t < 0$.

$(T_{-\omega}(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable, car :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon \in \mathbb{R}, \exists M_\varepsilon \geq 1, \|T(t)\| \leq M_\varepsilon e^{\alpha_\varepsilon t}.$$

Comme $\omega_0 := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \exists M_\omega \geq 1 \text{ tel que } \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0\}$, donc

$\omega_0 \leq \alpha_\varepsilon < \omega_0 + \varepsilon$, on peut choisir $\alpha_\varepsilon = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}$, alors

$$\begin{aligned} \|T_{-\omega}(t)\| &= \|e^{-\omega t} T(t)\| \leq M_\varepsilon e^{-(\omega - \alpha)t} \\ &\leq M_\varepsilon e^{-(\omega - \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2})t} \end{aligned}$$

comme $\omega > |\omega_0| + 1 \implies \omega > \omega_0 + 1$

$$\implies \omega - \omega_0 > 1$$

$$\implies -(\omega - \omega_0) < -1$$

$$\implies -(\omega - \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2}) < -1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

donc $\|T_{-\omega}(t)\| \leq M_\varepsilon e^{-(1 - \frac{\varepsilon}{2})t}$, pour $\varepsilon < 2$ $(T_{-\omega}(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable.

Nous avons $T_{-\omega}(\cdot)x \in L^2(\mathbb{R}, H)$, car :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \|T_{-\omega}(t)x\|^2 dt &= \int_0^{+\infty} \|T_{-\omega}(t)x\|^2 dt \\ &= \|x\|^2 \int_0^{+\infty} \|T_{-\omega}(t)\|^2 dt, \end{aligned}$$

puisque $(T_{-\omega}(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable alors, il existe une constante posi-

tive α et $M \geq 1$ telle que :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \|T_{-\omega}(t)x\|^2 dt &\leq \|x\|^2 \int_0^{+\infty} M^2 e^{-2\alpha t} dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|x\|^2 M^2. \end{aligned}$$

C'est à ce point que nous utilisons l'hypothèse que H est un espace de Hilbert pour conclure, d'après le théorème 1.0.1, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(\omega + is, \mathcal{A})x\|^2 ds = 2\pi \int_0^\infty \|T_{-\omega}(t)x\|^2 dt \leq L^2 \|x\|^2$$

pour une certaine constante $L > 0$ et pour $x \in H$.

D'après l'équation résolvante nous avons

$$\begin{aligned} \left((\omega + is)I - \mathcal{A} \right)^{-1} + \omega(isI - \mathcal{A})^{-1} \left((\omega + is)I - \mathcal{A} \right)^{-1} &= (is - \mathcal{A})^{-1} \left((is - \mathcal{A}) \left((\omega + is)I - \mathcal{A} \right)^{-1} + \omega \left((\omega + is)I - \mathcal{A} \right)^{-1} \right) \\ &= (is - \mathcal{A})^{-1} \left((is - \mathcal{A}) + \omega I \right) \left((\omega + is)I - \mathcal{A} \right)^{-1} \\ &= (is - \mathcal{A})^{-1} \left(((is + \omega)I - \mathcal{A}) \right) \left((\omega + is)I - \mathcal{A} \right)^{-1} = (is - \mathcal{A})^{-1} \end{aligned}$$

on a

$$R(is, \mathcal{A}) = R(\omega + is, \mathcal{A}) + \omega R(is, \mathcal{A})R(\omega + is, \mathcal{A})$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ et d'après (2.8) on obtient

$$\|R(is, \mathcal{A})\| \leq M$$

donc

$$\begin{aligned} \|R(is, \mathcal{A})x\| &= \left\| \left(R(\omega + is, \mathcal{A}) + \omega R(is, \mathcal{A})R(\omega + is, \mathcal{A}) \right) x \right\| \\ &= \left\| \left(I + \omega R(is, \mathcal{A}) \right) R(\omega + is, \mathcal{A})x \right\| \\ &\leq (\|I\| + \|\omega R(is, \mathcal{A})\|) \|R(\omega + is, \mathcal{A})x\| \\ &\leq (1 + M\omega) \|R(\omega + is, \mathcal{A})x\| \end{aligned}$$

pour tout les $s \in \mathbb{R}$ et tout $x \in H$.

En combinant ces faits, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \|R(is, \mathcal{A})x\|^2 ds &\leq (1 + M\omega)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \|R(\omega + is, \mathcal{A})x\|^2 ds \\ &\leq (1 + M\omega)^2 . L^2 . \|x\|^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

pour tout $x \in H$.

Comme $\|T\| = \|T^*\|$ pour chaque $T \in \mathcal{L}(H)$, par symétrie l'estimation est vraie pour le résolvant du générateur $\mathcal{A}^*$ du semi-groupe adjoint $(T(t)^*)_{t \geq 0}$ i.e,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(is, \mathcal{A}^*)y\|^2 ds \leq (1 + M\omega)^2 . L^2 . \|y\|^2 \quad (2.10)$$

pour tout $y \in H$.

Ensuite, nous utilisons la formule d'inversion du corolaire 1.3.1 pour $k = 2$

on conclut que

$$\begin{aligned} (tT(t)x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\omega + is)t} (R(\omega + is, \mathcal{A})^2 x, y) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} (R(is, \mathcal{A})x, R(-is, \mathcal{A}^*)y) ds \end{aligned}$$

pour tous $x \in D(\mathcal{A}^2)$ et $y \in H$. Pour la deuxième égalité, nous avons utilisé le théorème (1.0.2), qui est applicable puisque $R(\lambda, \mathcal{A})$ est uniformément borné pour $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ et donc

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})x\| = \frac{1}{|\lambda|} \|R(\lambda, \mathcal{A})\mathcal{A}x + x\| \leq \frac{1}{|\lambda|} (M\|\mathcal{A}x\| + \|x\|).$$

Avec, (2.9), (2.10), et l'inégalité de Cauchy-Schwarz cela donne

$$\begin{aligned}(tT(t)x, y) &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(is, \mathcal{A})x\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(is, \mathcal{A}^*)x\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{(1 + M\omega)^2 \cdot L^2}{2\pi} \|x\| \cdot \|y\|\end{aligned}$$

pour tous $x, y \in D(\mathcal{A}^2)$. Comme $D(\mathcal{A}^2)$ est dense dans H , cela implique

$$\begin{aligned}\|tT(t)\| &= \sup\{|(tT(t)x, y)| : x, y \in D(\mathcal{A}^2), \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &\leq \frac{(1 + M\omega)^2 \cdot L^2}{2\pi}.\end{aligned}$$

par suite $\|T(t)\| \leq \frac{(1 + M\omega)^2 \cdot L^2}{2\pi t}$.

Donc $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\| = 0$ et par suite $T(t)$ est uniformément exponentiellement stable d'après la proposition 2.1.3. ■

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution d'un problème de type Timoshenko

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudiera l'existence et l'unicité de la solution d'un système linéaire de type Timoshenko, en utilisant le théorème de Hille-Yosida.

On considère le problème suivant :

$$\rho_1 u_{tt} - k(u_x + \psi)_x + u_t = 0 \quad \text{dans }]0, 1[\times]0, +\infty[, \quad (3.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x + \psi) + \psi_t = 0 \quad \text{dans }]0, 1[\times]0, +\infty[, \quad (3.2)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = 0 \quad t > 0, \quad (3.3)$$

où u est le déplacement transversal, ψ l'angle de rotation et ρ_1, ρ_2, k, b sont des coefficients constitutives que l'on suppose positives.

On désigne par $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert est

$$\mathcal{H} := [H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)]^2,$$

on le munit du produit scalaire :

$$\langle U, \tilde{U} \rangle = \int_0^1 [k(u_x + \psi)(\tilde{u}_x + \tilde{\psi}) + \rho_1 v \tilde{v} + \rho_2 \varphi \tilde{\varphi} + b\psi_x \tilde{\psi}_x] dx,$$

où $U = (u, v, \psi, \varphi)^T$, $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\psi}, \tilde{\varphi})^T \in \mathcal{H}$.

La norme de $\mathcal{H}$ correspondant est donnée par

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^1 [k(u_x + \psi)^2 + \rho_1 v^2 + \rho_2 \varphi^2 + b\psi_x^2] dx,$$

et on définit l'énergie du système (3.1)-(3.2) par

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 [\rho_1 u_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + b\psi_x^2 + k(u_x + \psi)^2] dx$$

3.2 Existence et unicité

On pose $v = u_t$ et $\varphi = \psi_t$ le système (3.1)-(3.2) et (3.3) s'écrit

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = \frac{k}{\rho_1}(u_{xx} + \psi_x - v), \\ \psi_t = \varphi, \\ \varphi_t = \frac{1}{\rho_2}(b\psi_{xx} - ku_x - k\psi - \varphi), \end{cases}$$

ce qu'on peut écrire sous la forme

$$\begin{cases} \mathcal{A}U &= U_t, \\ U(0) &= U_0, \end{cases} \quad (3.4)$$

où $U := (u, v, \psi, \varphi)^T$ et $\mathcal{A}$ est l'opérateur différentiel

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \partial_{xx} & \frac{-1}{\rho_1} I & \frac{k}{\rho_1} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{k}{\rho_2} \partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2} \partial_{xx} - \frac{k}{\rho_2} I & \frac{-1}{\rho_2} I \end{pmatrix}$$

où I est l'opérateur identité. Le domaine de $\mathcal{A}$ est alors

$$D(\mathcal{A}) = [(H^2([0, 1]) \cap H_0^1([0, 1])) \times H_0^1([0, 1])]^2.$$

Théorème 3.2.1 *Pour tout $U_0 = (u_0, v_0, \psi_0, \varphi_0) \in \mathcal{H}$ le problème (3.4) admet une solution unique $U = (u, v, \psi, \varphi)$ satisfaisant*

$$(u, v, \psi, \varphi) \in C([0, +\infty[, \mathcal{H}).$$

De plus, si $U_0 \in D(\mathcal{A})$ alors la solution satisfait

$$U \in C([0, +\infty[, D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty[, \mathcal{H}).$$

Il suffit de prouver que $\mathcal{A}$ est dissipative et $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Preuve. Dissipativité de $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ \frac{k}{\rho_1}u_{xx} - \frac{1}{\rho_1}v + \frac{k}{\rho_1}\psi_x \\ \varphi \\ -\frac{k}{\rho_2}u_x + \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}\psi - \frac{1}{\rho_2}\varphi \end{pmatrix}$$

alors,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^1 [k(v_x - \varphi)(u_x - \psi) + ku_{xx}v - v^2 + k\psi_xv + ku_x\varphi \\ &\quad + b\psi_{xx}\varphi - k\psi\varphi - \varphi^2 + b\varphi_x\psi_x]dx \\ &= k \int_0^1 v_x u_x dx + k \int_0^1 v_x \psi dx + k \int_0^1 \varphi u_x dx + k \int_0^1 \varphi \psi dx + k \int_0^1 u_{xx} v dx \\ &\quad - \int_0^1 v^2 dx + k \int_0^1 \psi_x v dx + k \int_0^1 u_x \varphi dx + b \int_0^1 \psi_{xx} \varphi dx - k \int_0^1 \psi \varphi dx \\ &\quad - \int_0^1 \varphi^2 dx + b \int_0^1 \varphi_x \psi_x dx \\ &= k[vu_x]_0^1 - \int_0^1 u_{xx} v dx + [\psi v]_0^1 - k \int_0^1 v \psi_x dx + k \int_0^1 u_{xx} v dx - \int_0^1 v^2 dx \\ &\quad + k \int_0^1 \psi_x v dx + b[\psi_x \varphi]_0^1 - b \int_0^1 \varphi_x \psi_x dx - \int_0^1 \varphi^2 + b \int_0^1 \varphi_x \psi_x dx \\ &= - \int_0^1 v^2 dx - \int_0^1 \varphi^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{A}$ dissipatif.

Pour montrer que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, on prend $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in \mathcal{H}$, et on cherche

$U = (u, v, \psi, \varphi)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de

$$\mathcal{A}U = F,$$

ceci s'écrit en termes de composants, comme suit

$$v = f_1, \quad (3.5)$$

$$ku_{xx} - v + k\psi_x = \rho_1 f_2, \quad (3.6)$$

$$\varphi = f_3, \quad (3.7)$$

$$-ku_x + b\psi_{xx} - k\psi - \varphi = \rho_2 f_4, \quad (3.8)$$

substituons (3.5) et (3.7) dans (3.6) et (3.8) respectivement on obtient

$$ku_{xx} + k\psi_x = \rho_1 f_2 + f_1 \quad (3.9)$$

$$-ku_x + b\psi_{xx} - k\psi = \rho_2 f_4 + f_3 \quad (3.10)$$

Il reste à prouver qu'il existe u et ψ satisfaisant

$$ku_{xx} + k\psi_x = \rho_1 f_2 + f_1 = g_1 \in L^2(0, 1) \quad (3.11)$$

$$-ku_x + b\psi_{xx} - k\psi = \rho_2 f_4 + f_3 = g_2 \in L^2(0, 1) \quad (3.12)$$

On définit l'espace $W = H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$.

En multipliant les deux équations (3.11) et (3.12) par des fonctions $\tilde{u} \in C_0^1(0, 1)$,

$\tilde{\psi} \in C_0^1(0, 1)$ respectivement et on intègre sur $[0, 1]$, on obtient

$$k \int_0^1 u_{xx} \tilde{u} dx + k \int_0^1 \psi_x \tilde{u} dx = \int_0^1 g_1 \tilde{u} dx,$$

$$-k \int_0^1 u_x \tilde{\psi} dx + b \int_0^1 \psi_{xx} \tilde{\psi} dx - k \int_0^1 \psi \tilde{\psi} dx = \int_0^1 g_2 \tilde{\psi} dx,$$

ce qui implique que

$$k[u_x \tilde{u}]_0^1 - k \int_0^1 u_x \tilde{u}_x dx + k[\psi \tilde{u}]_0^1 - k \int_0^1 \psi \tilde{u}_x dx = \int_0^1 g_1 \tilde{u} dx,$$

$$-k \int_0^1 u_x \tilde{\psi} dx + b[\psi_x \tilde{\psi}]_0^1 - b \int_0^1 \psi_x \tilde{\psi}_x dx - k \int_0^1 \psi \tilde{\psi} dx = \int_0^1 g_2 \tilde{\psi} dx,$$

donc

$$-k \int_0^1 u_x \tilde{u}_x dx - k \int_0^1 \psi \tilde{u}_x dx = \int_0^1 g_1 \tilde{u} dx, \quad (3.13)$$

$$-k \int_0^1 u_x \tilde{\psi} dx - b \int_0^1 \psi_x \tilde{\psi}_x dx - k \int_0^1 \psi \tilde{\psi} dx = \int_0^1 g_2 \tilde{\psi} dx, \quad (3.14)$$

additionnons (3.13) et (3.14), on obtient

$$-\int_0^1 (g_1 \tilde{u} + g_2 \tilde{\psi}) dx = k \int_0^1 u_x \tilde{u}_x dx + k \int_0^1 \psi \tilde{u}_x dx + k \int_0^1 u_x \tilde{\psi} dx + b \int_0^1 \psi_x \tilde{\psi}_x dx + k \int_0^1 \psi \tilde{\psi} dx$$

pour $U := (u, \psi)$ et $\tilde{U} := (\tilde{u}, \tilde{\psi})$ on définit sur W une forme bilinéaire $a(., .)$ et une

forme linéaire $L(.)$ par

$$a(U, \tilde{U}) = k \int_0^1 u_x \tilde{u}_x dx + k \int_0^1 \psi \tilde{u}_x dx + k \int_0^1 u_x \tilde{\psi} dx + b \int_0^1 \psi_x \tilde{\psi}_x dx + k \int_0^1 \psi \tilde{\psi} dx$$

$$L(\tilde{U}) = -\int_0^1 (g_1 \tilde{u} + g_2 \tilde{\psi}) dx.$$

On applique le théorème de Lax-Milgram, sur l'espace W pour la forme bilinéaire

$a(U, \tilde{U})$ et la forme linéaire $L(\tilde{U})$.

1) Continuité de $a(., .)$

$$\left| a(U, \tilde{U}) \right| = \left| \int_0^1 k u_x \tilde{u}_x + k \psi \tilde{u}_x + k u_x \tilde{\psi} + b \psi_x \tilde{\psi}_x + k \psi \tilde{\psi} dx \right|,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned}
|a(U, \tilde{U})| &\leq k\|u_x\|_{L^2}\|\tilde{u}_x\|_{L^2} + k\|\psi\|_{L^2}\|\tilde{u}_x\|_{L^2} + k\|u_x\|_{L^2}\|\tilde{\psi}\|_{L^2} \\
&\quad + b\|\psi_x\|_{L^2}\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2} + k\|\psi\|_{L^2}\|\tilde{\psi}\|_{L^2}, \\
&\leq \max(k, b) \left(\|u\|_{H_0^1}\|\tilde{u}\|_{H_0^1} + \|\psi\|_{H_0^1}\|\tilde{u}\|_{H_0^1} + \|\psi\|_{H_0^1}\|\tilde{\psi}\|_{H_0^1} + \|u\|_{H_0^1}\|\tilde{\psi}\|_{H_0^1} \right) \\
&\leq C_1 \left(\|u\|_{H_0^1} + \|\psi\|_{H_0^1} \right) \left(\|\tilde{u}\|_{H_0^1} + \|\tilde{\psi}\|_{H_0^1} \right) \\
&\leq C_1 \|U\|_W \|\tilde{U}\|_W.
\end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est continue.

2) Coercivité de $a(.,.)$

$$a(U, U) = k \int_0^1 u_x^2 dx + 2k \int_0^1 \psi u_x dx + b \int_0^1 \psi_x^2 dx + k \int_0^1 \psi^2 dx$$

en utilisant l'inégalité de Young, on aura

$$\begin{aligned}
- \int_0^1 u_x \psi dx &\leq \int_0^1 |u_x \psi| dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 \psi^2 dx
\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^1 u_x \psi dx \geq -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 u_x^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 \psi^2 dx$$

on a

$$\begin{aligned}
a(U, U) &\geq k \int_0^1 u_x^2 dx - 2k \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 \psi^2 dx \right) + b \int_0^1 \psi_x^2 dx + k \int_0^1 \psi^2 dx \\
&\geq (k - k\varepsilon) \int_0^1 u_x^2 dx + \left(k - \frac{k}{\varepsilon} \right) \int_0^1 \psi^2 dx + b \int_0^1 \psi_x^2 dx
\end{aligned}$$

en prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
a(U, U) &\geq \frac{k}{2} \int_0^1 u_x^2 dx - k \int_0^1 \psi^2 dx + b \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
&\geq \frac{k}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + b \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
&\geq \min\left(\frac{k}{2}, b\right) \int_0^1 (u_x^2 + \psi_x^2) dx
\end{aligned}$$

notons que $\int_0^1 u_x^2 dx$ et $\int_0^1 \psi_x^2 dx$ définie une norme sur $H_0^1(0, 1)$ on aura

$$a(U, U) \geq C_2 \|U\|_W^2$$

Donc $a(., .)$ est coercive.

3) Continuité de L

$$\begin{aligned}
|L(\tilde{U})| &= \left| \int_0^1 g_1 \tilde{u} dx + \int_0^1 g_2 \tilde{\psi} dx \right| \\
&\leq \|g_1\|_{L^2} \|\tilde{u}\|_{L^2} + \|g_2\|_{L^2} \|\tilde{\psi}\|_{L^2} \\
&\leq \max\left(\|g_1\|_{L^2}, \|g_2\|_{L^2}\right) \left(\|\tilde{u}\|_{L^2} + \|\tilde{\psi}\|_{L^2}\right) \\
&\leq C_3 \left(\|\tilde{u}\|_{H_0^1} + \|\tilde{\psi}\|_{H_0^1}\right) \\
&\leq C_3 \|\tilde{U}\|_W.
\end{aligned}$$

Donc $L(.)$ est continue.

$a(., .)$ est bilinéaire, continue et coercive sur W , et $L(.)$ est linéaire et continue sur W . D'après le théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique $(u, \psi)^T \in W = H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$ telle que

$$a(U, \tilde{U}) = L(\tilde{U}), \quad \forall \tilde{U} \in W.$$

ce qui signifie que $u \in H_0^1(0, 1)$, $\psi \in H_0^1(0, 1)$, $v = f_1 \in H_0^1(0, 1)$ et $\varphi = f_3 \in H_0^1(0, 1)$,
il reste à montrer que $u, \psi \in H^2(0, 1)$.

En prenant $(\tilde{u}, \tilde{\psi}) = (\tilde{u}, 0) \in C_0^1(0, 1) \times C_0^1(0, 1) \subset W$ dans (3.13) elle devient

$$-k \int_0^1 u_x \tilde{u}_x dx - k \int_0^1 \psi \tilde{u}_x dx = \int_0^1 g_1 \tilde{u} dx$$

alors

$$\int_0^1 u_x \tilde{u}_x dx = - \int_0^1 \frac{1}{k} (-k\psi_x - g_1) \tilde{u} dx$$

ce qui signifie que u_x admet une dérivée faible dans $L^2(0, 1)$, car $-k\psi_x - g_1 \in L^2(0, 1)$,

et on a

$$u_{xx} = (u_x)_x = \frac{1}{k} (-k\psi_x - g_1)$$

par suite $u_x \in H_0^1(0, 1)$ donc $u \in H^2(0, 1)$. De la même manière si on prend

$(\tilde{u}, \tilde{\psi}) = (0, \tilde{\psi})$, on prouve que $\psi \in H^2(0, 1)$.

Donc, $\exists (u, v, \psi, \varphi)^T \in D(\mathcal{A})$ qui vérifie $\mathcal{A}U = F$ pour tout $F \in \mathcal{H}$, et $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Le théorème de Hille-Yosida assure l'existence et l'unicité d'une solution

de (3.4), ceci termine la démonstration. ■

Lemme 3.2.1 *soit (u, ψ) est la solution du (3.1)-(3.2) alors l'énergie $E(t)$ vérifie*

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^1 u_t^2 - \int \psi_t^2 \leq 0$$

Preuve. On multiplie (3.1) par u_t et on intègre sur $]0, 1[$, il vient

$$\rho_1 \int_0^1 u_{tt} u_t dx - k \int_0^1 u_{xx} u_t dx - k \int_0^1 \psi_x u_t dx + \int_0^1 u_t^2 dx = 0,$$

ce qui implique que

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t^2 dx - k[u_x u_t]_0^1 + k \int_0^1 u_x u_{xt} dx - k[\psi u_t]_0^1 + k \int_0^1 \psi u_{xt} dx + \int_0^1 u_t^2 dx = 0,$$

vu que $u = 0$ et $\psi = 0$ en 0 et 1 donc

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_x^2 dx + k \int_0^1 \psi u_{xt} dx + \int_0^1 u_t^2 dx = 0,$$

et par suite

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_x^2 dx + k \int_0^1 \psi u_{xt} dx = - \int_0^1 u_t^2 dx. \quad (3.15)$$

On multiplie (3.2) par ψ_t on intègre sur $[0, 1]$, il vient

$$\rho_2 \int_0^1 \psi_{tt} \psi_t dx - b \int_0^1 \psi_{xx} \psi_t dx + k \int_0^1 u_x \psi_t dx + k \int_0^1 \psi \psi_t dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx = 0,$$

ce qui implique que

$$\frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx - b[\psi_x \psi_t]_0^1 + b \int_0^1 \psi_x \psi_{xt} dx + k \int_0^1 u_x \psi_t dx + \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi^2 dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx = 0,$$

donc

$$\frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx + k \int_0^1 u_x \psi_t dx + \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi^2 dx = - \int_0^1 \psi_t^2 dx, \quad (3.16)$$

combinons (3.15) et (3.16) on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_x^2 dx + k \int_0^1 \psi u_{xt} + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& + k \int_0^1 u_x \psi_t dx + \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi^2 dx = - \int_0^1 u_t^2 dx - \int_0^1 \psi_t^2 dx, \\
& \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_x^2 dx + k \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi u_x dx + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& + \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi^2 dx = - \int_0^1 u_t^2 dx - \int_0^1 \psi_t^2 dx, \\
& \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 [\rho_1 u_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + b \psi_x^2 + k(u_x + \psi)^2] dx \right\} = - \int_0^1 u_t^2 dx - \int_0^1 \psi_t^2 dx
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq 0,$$

alors le système (3.1)-(3.2) est dissipatif

■

3.3 Stabilité exponentielle

Lemme 3.3.1 *Soit $\mathcal{A}$ est l'opérateur défini dans (3.4), alors*

$$\{i\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A}). \quad (3.17)$$

Preuve. La preuve sera donnée en trois étapes :

1. Puisque $0 \in \rho(\mathcal{A})$ alors, en utilisant le théorème (1.2.3) on constate que $(i\lambda\mathcal{A}^{-1} - I)$ est inversible pour $\|\lambda\mathcal{A}^{-1}\| < 1$. Par conséquent, $I\lambda i - \mathcal{A} = \mathcal{A}(i\lambda\mathcal{A}^{-1} - I)$

est inversible pour $|\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$. En outre, $\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|$ est continue dans l'intervalle $(-\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1})$.

2. Si $\sup \left\{ \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|, \quad |\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \right\} = M < \infty$, alors, pour $|\lambda_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$ l'opérateur

$$i\lambda I - \mathcal{A} = (i\lambda_0 I - \mathcal{A}) \left(I - i(\lambda_0 - \lambda)(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1} \right)$$

est inversible si $\|i(\lambda_0 - \lambda)(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}\| < 1$ ce qui donne $|\lambda_0 - \lambda| \|(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}\| < 1$, alors $|\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{\|(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}\|} \leq \frac{1}{M}$ en utilisant la définition de M on obtient, $i\lambda I - \mathcal{A}$ est inversible pour $|\lambda_0 - \lambda| < M^{-1}$.

Par conséquent, si nous choisissons λ_0 assez proche de $\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$ l'ensemble $\{i\lambda, |\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} + M^{-1}\} \subset \rho(\mathcal{A})$ car, $i\lambda I - \mathcal{A}$ inversible pour $|\lambda_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$ et $|\lambda_0 - \lambda| < M^{-1}$, comme $||\lambda_0| - |\lambda|| < |\lambda_0 - \lambda|$, alors $|\lambda_0| - |\lambda| < M^{-1}$, qui implique

$$\begin{aligned} |\lambda| &< M^{-1} + |\lambda_0| \\ &< M^{-1} + \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \end{aligned}$$

et $\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|$ est continue dans l'intervalle $\left(-\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - M^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} + M^{-1} \right)$. Alors, le sous-ensemble $\{i\lambda, |\lambda| < \sigma\} \subset \rho(\mathcal{A})$ peut être prolongé si $\sup \left\{ \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|, |\lambda| < \sigma \right\} < \infty$.

3. Supposons que $\{i\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ n'est pas inclu dans $\rho(\mathcal{A})$, de (2) ci-dessus, on conclut qu'il existe $\sigma \geq \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$ tel que $\{i\lambda, |\lambda| < \sigma\} \subset \rho(\mathcal{A})$, mais $\sup \left\{ \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|, |\lambda| < \sigma \right\} = \infty$. Dans ce cas, nous pouvons trouver une suite de nombres réels (λ_n) et une suite de vecteurs unitaires $(U_n) \subset D(\mathcal{A})$, telle que $|\lambda_n| < \sigma$,

$\lambda_n \longrightarrow \sigma$ et

$$\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n\| \longrightarrow 0. \quad (3.18)$$

C'est à dire

$$i\lambda_n u_n - v_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H_0^1 \quad (3.19)$$

$$i\rho_1 \lambda_n v_n - kD^2 u_n + v_n - kD\psi_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2 \quad (3.20)$$

$$i\lambda_n \psi_n - \varphi_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H_0^1 \quad (3.21)$$

$$i\rho_2 \lambda_n \varphi_n + kDu_n - bD^2 \psi_n - k\psi_n + \varphi_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2 \quad (3.22)$$

Nous avons tout d'abord

$$Re\langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n \rangle \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{et } Re\langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n \rangle &= Re\langle i\lambda_n U_n, U_n \rangle - \langle \mathcal{A}U_n, U_n \rangle \\ &= -Re\langle \mathcal{A}U_n, U_n \rangle \\ &= \|v_n\|^2 + \|\varphi_n\|^2 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} v_n &\longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2, \\ \varphi_n &\longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2. \end{aligned}$$

On prend le produit scalaire de (3.20), (3.22) par u_n, ψ_n dans $\mathcal{H}$ on obtient respectivement

$$i\rho_1 \lambda_n \langle v_n, u_n \rangle + k\|Du_n\|^2 + \langle v_n, u_n \rangle + k\langle \psi_n, Du_n \rangle \longrightarrow 0, \quad (3.23)$$

$$i\rho_2 \lambda_n \langle \varphi_n, \psi_n \rangle + k\langle Du_n, \psi_n \rangle + b\|D\psi_n\|^2 - k\|\psi_n\|^2 + \langle \varphi_n, \psi_n \rangle \longrightarrow 0. \quad (3.24)$$

Puisque $v_n \longrightarrow 0$ dans L^2 , λ_n est bornée et d'après (3.19), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{i\lambda_n} = 0,$$

alors

$$u_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2$$

donc

$$\langle v_n, u_n \rangle \longrightarrow 0.$$

Puisque $\varphi_n \longrightarrow 0$, λ_n est bornée et d'après (3.21), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{i\lambda_n} = 0,$$

alors

$$\psi_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2,$$

et comme $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ donc $\|Du_n\|_{L^2}$ est bornée, on a

$$\langle \psi_n, Du_n \rangle \longrightarrow 0.$$

Ensuite, d'après (3.23) et (3.24) on a respectivement

$$\begin{aligned} \|Du_n\|^2 &\longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2, \\ \|D\psi_n\|^2 &\longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2. \end{aligned}$$

Enfin

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \|Du_n\|^2 + \|v_n\|^2 + \|D\psi_n\|^2 + \|\varphi_n\|^2 \longrightarrow 0,$$

ce qui contredit le fait que $\|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 = 1$ et la preuve (3.17) est complète.

■

Lemme 3.3.2 *Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur défini ci-dessus, alors*

$$\overline{\lim}_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty. \quad (3.25)$$

Preuve. La preuve sera donnée par l'argument de la contradiction.

Supposant (3.25) n'est pas vrai, alors, il existe une suite $(\lambda_n) \subset \rho(\mathcal{A})$, $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ et une suite de vecteurs unitaires (U_n) .

Comme dans le lemme précédent,

$$\operatorname{Re}\langle (i\lambda_n I - A)^{-1} U_n, U_n \rangle = \|v_n\|^2 + \|\varphi_n\|^2 \rightarrow 0,$$

par conséquent, $v_n \rightarrow 0$, $\varphi_n \rightarrow 0$ dans L^2 , d'après (3.19) et (3.21) on trouve

$$i\lambda_n u_n \rightarrow 0 \text{ et } i\lambda_n \psi_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2$$

de même $u_n \rightarrow 0$ et $\psi_n \rightarrow 0$ dans L^2 car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{i\lambda_n} = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_n}{i\lambda_n} = 0$$

On prend le produit scalaire de (3.20) par u_n dans $\mathcal{H}$ on obtient

$$\rho_1 \langle i\lambda_n u_n, v_n \rangle + k \|Du_n\|^2 + \langle u_n, v_n \rangle - k \langle u_n, D\psi_n \rangle \rightarrow 0, \quad (3.26)$$

en utilisant le fait que $D\psi_n$ et Du_n sont bornés nous déduisons que

$$\rho_1 \langle i\lambda_n u_n, v_n \rangle + \langle u_n, v_n \rangle - \langle u_n, D\psi_n \rangle \rightarrow 0,$$

par conséquent, (3.26) conduit à

$$\|Du_n\| \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2.$$

On prend le produit scalaire de (3.22) par ψ_n dans $\mathcal{H}$ on obtient

$$\rho_2 \langle i\lambda_n \psi_n, \varphi_n \rangle + k \langle \psi_n, Du_n \rangle + b \|D\psi_n\|^2 - k \|\psi_n\|^2 + \langle \psi_n, \varphi_n \rangle \rightarrow 0, \quad (3.27)$$

alors

$$\rho_2 \langle i\lambda_n \psi_n, \varphi_n \rangle + k \langle \psi_n, Du_n \rangle - k \|\psi_n\|^2 + \langle \psi_n, \varphi_n \rangle \longrightarrow 0,$$

D'après (3.27) nous obtenons

$$\|D\psi_n\| \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2.$$

En combinant tous les résultats ci-dessus, nous concluons que $U_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{H}$

qu'est en contradiction avec $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$. ■

Bibliographie

- [1] B. Beauzamy, *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*, Elsevier Science PUBLISHERS B.V.1988.
- [2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Application*, Masson, Paris, 1983.
- [3] Bryan P. Rynne, Martin A. Youngson, *Linear Functional Analysis*, Springer-Verlage London Limited 2008.
- [4] Ioan I.Vrabie, *C_0 -Semigroups and applications*, Elsevier Science B. V. 2003.
- [5] Klaus-Jochen Engel, Rainer Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Alfred A.Knopf, 1995.
- [6] Z. Liu, S. Zheng, *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, Chapman & Hall, 1999.
- [7] A.Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Sepringer-Verlag New York, 1983
- [8] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos, N. N. O. Castro, *Exponential stability for the thimoshenko system with two weak dampings*, Elsevier Ltd. All rights reserved, 2005.

