

N d'ordre :
N de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Etude de l'existence et l'unicité de quelques
problèmes avec usure et
endommagement

Présenté par: Ferdia Raoudha

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Président	Azeb Ahmed Abdel Aziz	MCA	Univ. El Oued
Rapporteur	Aissaoui Adel	MCA	Univ. El Oued
Examineur	A.Mziene Said	MAA	Univ. El Oued

Année universitaire : 2019/2020

الإهداء

بسم الله الرحمن الرحيم
(قل إعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون)

صدق الله العظيم

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك .. ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك ..
ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك .. ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك
الله جل جلاله

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة .. ونصح الأمة .. إلى نبي الرحمة ونور العالمين ..
سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار .. إلى من علمني العطاء بدون انتظار .. إلى من أحمل اسمه
بكل افتخار .. أرجو من الله أن يمد في عمرك لترى ثماراً قد حان قطافها بعد طول انتظار
وستبقى كلماتك نجوم أهتدي بها اليوم وفي الغد وإلى الأبد ...
أبي العزيز

إلى ملاكي في الحياة .. إلى معنى الحب وإلى معنى الحنان والتفاني .. إلى بسمه الحياة وسر
الوجود إلى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايب
أمي الحبيبة

إلى من هم أقرب إليّ من روحي ... إلى من شاركني حزن الأم وبهم استمد عزتي وإصراري
اخوتي

إلى القلوب الطاهرة الرقيقة والنفوس البريئة ... إلى رياحين حياتي ... إلى أخواتي الغاليات وأخص
منهم أختي الحبيبة سارة

إلى صديقاتي اللواتي تسكن صورهن وأصواتهن أجمل اللحظات والأيام التي عشتها طيلة مشواري
الجامعي ... شكري الجزيل وامتناني
نزيهة ... شاهيناز .. كوثر ... ميمونة ... خلود

إلى كل من تذكرهم القلب ولم تسعهم السطور ... اليكم جميعاً أهدي ثمرة جهدي

الطالبة فريدة روضة

شكر و عرفان:

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم:
"من لم يشكر الناس لم يشكر الله" صدق رسول الله صلى الله عليه وسلم
الحمد لله على إحسانه و الشكر له على توفيقه وإمتهانه ونشهد أن لا إله إلا الله وحده لا شريك
له تعظيما لشأنه ونشهد أن سيدنا و نبينا محمد عبده و رسوله الداعي إلى رضوانه صلى الله عليه و
على آله و أصحابه و أتباعه و سلم.

بعد شكر الله سبحانه و تعالى على توفيقه لنا لإتمام هذا البحث المتواضع أتقدم بجزيل الشكر إلى
الوالدين العزيزين الذين أعانوني و شجعوني على الإستمرار في مسيرة العلم و النجاح، وإكمال
الدراسة الجامعية و البحث؛ كما أتوجه بالشكر الجزيل إلى من شرفني بإشرافه على مذكرة بحثي
الأستاذ الدكتور "عيساوي عادل" الذي لن تكفي حروف هذه المذكرة لإيفائه حقه بصبره
الكبير علي، ولتوجيهاته العلمية التي لا تقدر بثمن؛ والتي ساهمت بشكل كبير في إتمام وإستكمال
هذا العمل؛ إلى كل أساتذة قسم رياضيات ؛ كما أتوجه بخالص شكري و تقديري إلى كل من
ساعدني من قريب أو من بعيد على إنجاز وإتمام هذا العمل.
" رب أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي و على والدي و أن أعمل صالحا ترضاه و
أدخلني برحمتك في عبادك الصالحين"

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 1, 2, 3)$, on note par.

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω
Γ	la frontière de Ω , supposée souvent régulière.
$\Gamma_i (i = \overline{1, 3}, a, b)$	une partie de la frontière Γ .
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue (d-1) dimensionnelle de Γ_1 .
ν	la normale unitaire sortante à Γ .
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v définies sur $\overline{\Omega}$.
σ_ν, σ_τ	les composantes normale et tangentielle du champ tensoriel σ définies sur $\overline{\Omega}$.
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.
$D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω .
$D'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω .
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$.
$\mathcal{H}$	l'espace $L_s^2(\Omega)^{d \times d}$.
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$.
$\mathcal{H}_1$	l'espace $\{\sigma \in \mathcal{H} \text{ tel que } Div\sigma = (\sigma_{ij}) \in H\}$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
H'_Γ	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

H^d	l'espace $\{x = x_i/x_i \in H\}$.
$H_s^{d \times d}$	l'espace $\{x = x_{ij}/x_{ij} = x_{ji} \in H\}$.
$(\cdot, \cdot)_H$	le produit scalaire de H .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$	le produit de dualité entre H' et H .
$\ \cdot\ _H$	La norme de H .
H'	l'espace dual de H .
$\mathcal{L}(H)$	l'espace des applications linéaires et continues de H dans H .

Si de plus $[0, T]$ est un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par :

$C(0, T; H)$	l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans H .
$C^1(0, T; H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H .
$L^p(0, T; H)$	l'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H . telles que $\int_0^T u(t) _H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; H)}$	la norme de $L^p(0, T; H)$.
$W^{k,p}(0, T; H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p .
$\ \cdot\ _{W^{k,p}(0, T; H)}$	la norme de $W^{k,p}(0, T; H)$.

Pour une fonction u ; on note par

∇u	le gradient de u .
$\dot{u}, \ddot{u}$	les dérivées première et seconde de u par rapport au temps.
$\partial_i u$	la dérivées partielle de u par rapport à la i ème composante x_i .
$Div u$	la divergence de u .
∂u	le sous-différentiel (classique) de u .
$\varepsilon(u)$	la partie symétrique du gradient de $u = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$.

Autres notations

$\mathbb{S}^d$	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$.
I_d	le tenseur identité du second ordre sur $\mathbb{R}^d$.
Λ^p	puissance p de l'opérateur Λ .
0_d	le zéro de $\mathbb{R}^d$ et celui de $\mathbb{S}^d$.
c	des constantes génériques strictement positives.
$p.p.$	presque partout.

Table des matières

Notations	i
Introduction	v
1 Formulation mathématique des problèmes aux limites	1
1.1 Cadre physique de problème mécanique	1
1.2 Rappels de la mécanique des milieux continus	2
1.2.1 Contrainte et déformations	2
1.2.2 Phénomènes mécaniques	3
1.2.3 Lois comportement	4
1.3 Conditions aux limites	5
1.4 Lois de contact avec ou sans frottement	6
2 Problème de contact viscoélastique avec mémoire à long terme et une usure	9
2.1 Formulation du problème mécanique-Hypothèses	10
2.1.1 Problème Mécanique	10
2.1.2 Hypothèses	10
2.2 Formulation variationnelle	13
2.3 Existence et unicité de la solution	14
3 Problèmes de contact élasto-viscoplastique avec usure	24
3.1 Formulation du problème mécanique	24
3.1.1 Problème Mécanique	24
3.1.2 Hypothèses	26
3.2 Formulation variationnelle	27
3.3 Existence et unicité de la solution	29
A Outils Mathématiques	36
A.1 Espaces fonctionnels	37
A.1.1 Espaces L^p	37
A.1.2 Espaces L^∞	38

A.1.3	Espaces $W^{k,p}(0, T; H)$	38
A.1.4	Espaces $C^k(0, T; H)$	39
A.1.5	Espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence . . .	39
A.2	Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	43
A.2.1	Rappels sur les espaces de Hilbert	43
A.2.2	Opérateurs fortement monotones	45
A.3	Inégalité quasi variationnelle hyperbolique et d'évolution	45
A.4	Enoncés de certains théorèmes	48
A.5	Lemmes de type Gronwall	50

Introduction

Le contact viscoélastique est un phénomène physique bien discuté qui décrit le processus de déformation d'un corps viscoélastique lorsqu'il entre en contact avec une fondation rigide. Divers résultats théoriques et algorithmes numériques avec des applications ont été largement étudiés pour les problèmes de contact viscoélastique quasi statique dans la littérature (voir, par exemple, [30, 32, 62, 65]).

Afin de décrire le processus dynamiques de déformation d'un corps viscoélastique ou viscoplastique avec endommagement et usure lorsqu'il entre corps et fondation rigide, plusieurs problèmes de contact avec frottement ou sans frottement et usure ont été introduits et étudiés dans différentes conditions par exemple, nous renvoyons le lecteur à [11, 51, 56] et aux références qu'il contient. Il convient de mentionner que Chen et al. [11] ont été les premiers à dériver des estimations d'erreur de schémas totalement discrets pour résoudre les problèmes dynamique de contact de frottement en viscoélastique avec endommagement et usure. Récemment, Gasiński et al. [28] ont proposé un modèle mathématique pour décrire le contact de frottement quasi-statique avec usure d'un corps thermo viscoélastique et une fondation mobile. Très récemment, Jureczka et Ochal [37] ont obtenu l'analyse numérique et les simulations du problème de contact frottement quasi-statique avec usure.

Il est bien connu que Duvaut et Lions [19] ont été les premiers à étudier les problèmes viscoélastiques de contact quasi-statique dans le cadre des inégalités variationnelles. De puis lors, diverses inégalités variationnelles, inégalités et autres problèmes connexes ont été dérivés de différents phénomènes physiques dans la mécanique de contact et d'abondants résultats de recherche ont été obtenus pour leurs études ([31, 40, 42, 60, 61, 63, 64, 66, 69]). Récemment, Migórski et Zeng [43] ont étudié une classe d'inégalités variationnelles hyperboliques et appliqué leurs résultats pour étudier l'existence de solutions faibles pour le problème de contact dynamique sans usure.

Comme généralisation du problème de contact considéré dans [12], Chau et al. [7] ont présenté et étudié un problème de contact dynamique sans frottement et ont donné un schéma totalement discret pour résoudre ce problème. Bartosz [4] a considéré un problème de contact viscoélastique dynamique pour modifier le modèle traité par Ciulcu et al. [15]. En particulier, Bartosz [4] a établi l'existence de solutions faibles du problème de contact viscoélastique dynamique avec l'usure en utilisant le résultat de la surjectivité pour

une classe d'opérateurs de pseudomonotone dans le cadre des inégalités hémivariantes. Récemment, Cocou [16] a étendu le problème de contact statique considéré par Rabier et al. [48] à un problème de contact viscoélastique dynamique avec friction et a obtenu une existence et unicité de la solution faible pour un tel problème. Cependant, à notre connaissance, il n'y a pas d'étude sur le problème du contact viscoélastique dynamique avec frottement et usure dans la littérature existante. La motivation de cet article est de faire une nouvelle tentative dans cette direction.

Le but de ce mémoire est de fournir une contribution dans l'étude un modèle mathématique pour décrire un problème dynamique où quasistatique de contact en viscoélastique avec endommagement où elasto-viscoplastique et endommagement avec ou sans frottement et usure, dans lequel le comportement du matériau est suivi par la loi de comportement viscoélastique Kelvin-Voigt et le contact avec frottement est modélisé avec une usure régie par une version simplifiée de la loi d'Archard [66, 67] pour le champ de vitesse associé à une version de la loi de Coulomb du frottement sec. Par rapport au modèle de Bartosz et al. [4], l'effet du frottement sur la limite de contact a été considéré dans notre modèle afin de décrire le phénomène de contact avec frottement.

Chacun des problèmes est étudié selon le formalisme général suivant : nous commençons par décrire le problème mécanique de départ, et, après avoir précisé les hypothèses sur les données, nous présentons une formulation variationnelle du problème mécanique pour laquelle nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible pour le modèle considéré.

Outre les problèmes cités ci-dessus, il y a d'autres phénomènes réels et qui sont très importants tels que l'endommagement du matériau. Le sujet est extrêmement important dans l'ingénierie de conception, car il affecte directement la durée de vie utile de la structure ou du composant conçu. Il existe une très grande littérature d'ingénierie sur elle. Les modèles prenant en compte l'existence de les dommages internes de la matière sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. Nouveaux modèles généraux pour les dommages ont été tirées dans [25, 26] de la principe de la puissance virtuelle. L'analyse mathématique de problèmes unidimensionnels peut être trouvé dans [29]. Dans tous ce mémoire dommages du matériau est décrit par dommage. La fonction d'endommagement α varie entre 0 et 1. Quand $\alpha = 1$ il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, quand $\alpha = 0$ le matériau est complètement endommagé, quand $0 < \alpha < 1$ l'endommagement est partiel. Les problèmes de contact quasistatiques ont été investi dans [24, 30, 29, 50]. Dans ce mémoire la relation utilisée pour modéliser l'évolution du champ d'endommagement est la suivante

$$\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial_k\varphi(\alpha) \ni \phi(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha) \quad \text{ou} \quad \phi(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u}), \alpha).$$

où K est l'ensemble des fonctions test admissibles d'endommagement, ϕ étant la fonction source de l'endommagement.

Ce mémoire est composé de trois chapitres et annexe.

Dans le premier chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites.

Dans le second chapitre, on étudie, problème mécanique de contact avec usure, endommagement, frottement entre un corps viscoélastique avec mémoire longue et une base.

Nous dérivons une formulation variationnelle du problème mécanique et nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité en utilisant des résultats sur les inéquations variationnelles d'évolution, suivis d'un argument de point fixe.

Dans le troisième chapitre on étudie, problème mécanique de contact avec usure, endommagement, sans frottement entre un corps élasto-viscoplastique et une base. Nous dérivons une formulation variationnelle du problème mécanique, et nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible, en utilisant des résultats sur les équations variationnelles d'évolution, suivis d'un argument de point fixe.

Ensuite, et pour terminer ce mémoire, on insère une annexe qui comprend quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

Finalement, ce mémoire se termine par une conclusion dont on résume les principaux résultats obtenus durant l'étude du problème considéré.

Formulation mathématique des problèmes aux limites

L'objet de ce première chapitre est d'établir le modèle mathématique décrivant l'évolution d'un corps déformable et fondation ayant une loi viscoélastique avec mémoire longue et endommagement sous l'action des efforts extérieurs. Ceci se traduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posées sur un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$. Ce système comprend la loi de comportement du matériau, l'équation du mouvement entre du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre, nous fournirons le cadre physique utilisé dans ce mémoire et rappels de quelques notions de base de la mécanique des milieux continus, les lois de comportement des différents matériaux, le condition aux limites. Par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact avec ou sans frottement.

1.1 Cadre physique de problème mécanique

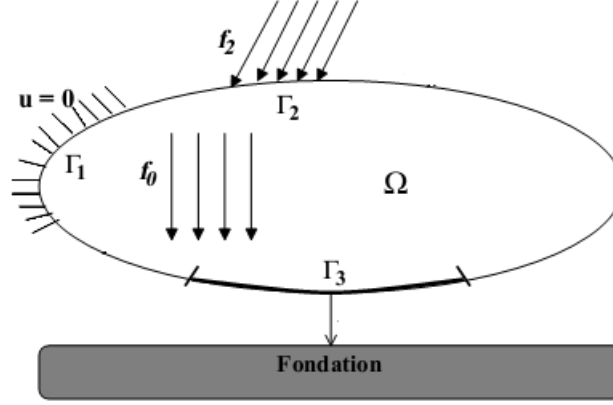
Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique et les modèles mathématiques des problèmes utilisés dans ce mémoire. Ensuite, nous indiquerons les formulations mathématiques pour les problèmes de contact avec endommagement entre du corps viscoélastique.

Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, avec une surface frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$, partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , telles que $mes(\Gamma_1) > 0$. Nous notons par $\boldsymbol{\nu}$ la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité $\mathbf{f}_2$ et dans Ω agissent des forces volumiques de densité $\mathbf{f}_0$. Nous supposons que $\mathbf{f}_2$ et $\mathbf{f}_0$ varient très lentement par rapport au temps et par conséquent le processus est quasistatique.

Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact avec frottement avec un obstacle sur la partie Γ_3 .

Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif sera

d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps, sous l'hypothèse des petites transformations.



Cadre physique : Problème mécanique .

Nous utiliserons ce cadre physique dans le second chapitre de ce mémoire.

1.2 Rappels de la mécanique des milieux continus

Dans cette section, après quelques rappels de mécanique des milieux continus, en partant de la modélisation du problème physique, nous présentons le formalisme des lois de comportement viscoélastiques. Ensuite, nous rappelons le système d'équations aux dérivées partielles qui sera l'objet de notre étude. Pour compléter le modèle, on présente quelques considérations physiques sur les conditions aux limites de contact sans frottement.

1.2.1 Contrainte et déformations

On considère un corps déformable occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, et ayant une frontière Γ supposée assez régulière. L'objet du problème, du point de vue mécanique est l'étude dans un intervalle de temps $[0, T]$ l'évolution du corps matériel due à l'application des forces extérieures sur l'intérieur du corps et sur sa frontière.

Les inconnues du problème sont le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ où $\mathbb{S}^d = \mathbb{R}_s^{d \times d}$ est l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$ et le champ endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre des efforts extérieurs et le torseur des accélérations pour un système quelconque, conduit à l'équation du mouvement de cauchy

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (1.2.1)$$

Dans cette équation, ρ désigne la densité de masse, $\ddot{\mathbf{u}}$ est le champ des accélérations, $\mathbf{f}_0 : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ des densités des forces volumiques appliquées sur le corps et qui sont des données du problème, $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}$ est la divergence du champ des contraintes.

Ces processus d'évolution modélisée par (1.2.1) s'appellent processus dynamiques, dans certaines situations l'équation (1.2.1) peut se simplifier, par exemple dans le cas où $\dot{\mathbf{u}} = 0$, il s'agit d'un processus d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesses $\dot{\mathbf{u}}$, varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho\ddot{\mathbf{u}} = 0$, peut être négligé (processus quasistatiques). Dans ces deux cas l'équation (1.2.1) devient :

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (1.2.2)$$

Dans la suite, on va considérer des matériaux élastiques et viscoélastiques dans le cadre des petites transformations. Dans ce cas, on a besoin du champ des déformations linéarisé $\varepsilon : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ défini par :

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j \mathbf{u}_i + \partial_i \mathbf{u}_j), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (1.2.3)$$

où ∂_K représente l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable x_K . On précise en outre qu'on adopte la convention de l'indice muet. Souvent, pour marquer la dépendance du champ des déformations par rapport au champ des déplacements $\mathbf{u}$, on va le noter $\varepsilon(\mathbf{u})$.

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations caractérisant le comportement de chaque matériau, ce sont les lois de comportement que nous décrivons dans la section suivante.

1.2.2 Phénomènes mécaniques

Dans ce paragraphe exact, la note traite de quatre phénomènes, à savoir aux l'endommagement, l'adhésion, l'usure et le frottement

L'endommagement

L'endommagement est un phénomène très important en ingénierie, car il affecte directement la structure des machines. Il existe une littérature abondante sur ce sujet. Des modèles introduisant l'influence de l'endommagement interne du matériau ont été investis mathématiquement. Des modèles de l'endommagement ont été développés dans [26, 25] à partir du principe de la puissance virtuelle.

L'usure

L'usure est un problème majeur pour les matériaux. Lorsque deux corps entrent en contact avec frottement et glissement, les surfaces en contact s'en retrouvent usées, la surface la plus rigide use l'autre, les particules ainsi perdues des surfaces en contact forment alors une couche entre des corps est fondation.

Le frottement

La friction est la force de résistance qui se produit lorsque deux surfaces adjacentes se déplacent dans des directions opposées lorsqu'elles ont une force prééminente qui produit et produit une quantité de chaleur. La friction se produit entre les matériaux solides, liquides et gazeux ou toute combinaison de ceux-ci.

1.2.3 Lois comportement

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement.

L'équation du mouvement (1.2.1) ou l'équation d'équilibre (1.2.2), chacune des deux équations équivaut à d relations scalaires, et du point de vue mathématique cette équation ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple les d composantes $\mathbf{u}_i$ champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation. Du point de vue physique, chacune des équations (1.2.1) et (1.2.2) exprime une loi universelle valable pour tous les matériaux. Si donc cette équation sur saut à déterminer tous les paramètres, cela signifierait que, soumis à des conditions identiques, les divers milieux continus auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde. Donc chaque équation (1.2.1) ou (1.2.2) est insuffisante, à elle seule, à décrire l'équilibre des corps matériels, elle doit être complétée par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériau et que l'on désigne sous le vocable général la loi de comportement qui est une relation reliant le tenseur de contrainte, le tenseur de déformation et leurs dérivées.

On présente dans cette mémoire, la loi de comportement de matériaux viscoélastiques avec endommagement.

Lois de comportement des matériaux viscoélastiques.

L'investigation des propriétés mécaniques des matériaux tels que les pâtes, les huiles et les cires, a mis en évidence que certains phénomènes, tels que le fluage et la relaxation.

Ce sont les matériaux viscoélastiques. Parmi les lois viscoélastiques, nous citons la loi viscoélastique de Kelvin-Voigt qui s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{B}(\varepsilon(\mathbf{u}(t))) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.2.4)$$

Où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des fonctions constitutives non linéaires. $\mathcal{A}$ représente l'opérateur de viscosité et $\mathcal{B}$ est l'opérateur de élasticité.

Et pour un corps élastique lorsque $\mathcal{A} = 0$, la loi se réduit à

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}).$$

Nous rappelons qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{\mathbf{u}}) + b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}).$$

$\mathcal{A} = (a_{ijkl})$ est le tenseur de viscosité et $\mathcal{B} = (b_{ijkl})$ le tenseur d'élasticité, pour $i, j, k, l = 1, \dots, d$.

La loi de comportement (1.2.4) est une loi viscoélastique du type Kelvin-Voigt.

Si nous prenons en considération l'effet de l'endommagement du matériau durant le contact, nous arrivons une généralisation de la loi précédente qui est la loi de comportement viscoélastique avec endommagement ayant la forme

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{B}(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (1.2.5)$$

La loi de comportement viscoélastique avec mémoire longue et endommagements

Dans ce cas la loi de comportement est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \mathcal{B}(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)) + \int_0^t \mathcal{F}((t-s), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)) ds. \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (1.2.6)$$

où $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{ij})$ est un tenseur de relaxation. Si $\mathcal{F} = 0$, on retrouve la loi viscoélastique.

Nous passons maintenant aux conditions aux limites utilisées dans le chapitre 2.

La loi de comportement élasto viscoplastique avec endommagement

La loi de comportement d'un matériau élasto-viscoplastique avec endommagement ou ce dernier est causé par des déformations élastiques est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s))), \varepsilon(\mathbf{u}(s))) ds. \quad (1.2.7)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ représente le champ de contrainte, $\mathbf{u}$ représente le champ de déplacement et $\varepsilon(\mathbf{u})$ est le champ de tenseur linéaire. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des fonctions de viscosité et élasticité non linéaire, respectivement, $\mathcal{G}$ représente le tenseur de viscoplasticité où α est une variable interne représentant l'endommagement du matériau.

1.3 Conditions aux limites

On définit maintenant les conditions aux limites mécaniques sur chaque partie de Γ .

La condition aux limites de déplacement.

Le corps encastré dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1 \times (0, T)$, le champ des déplacements $\mathbf{u}$ est par conséquent nul

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T). \quad (1.3.1)$$

conditions aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité $\mathbf{f}_2$ agit sur la partie $\Gamma_2 \times (0, T)$, et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}$ satisfait

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2, \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T). \quad (1.3.2)$$

condition aux limites de bilatéral

Le contact entre le corps et la fondation est bilatéral si le contact est maintenu pendant le mouvement. Cette propriété se traduit mathématiquement dans 1.4

$$\mathbf{u}_\nu = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.3.3)$$

1.4 Lois de contact avec ou sans frottement

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont d'écrites à la fois en direction de la normale et dans le plan tangent, ces dernières étant appelées condition de frottement. En direction de la normale nous pouvons distinguer le contact unilatéral (lorsque l'obstacle est rigide), bilatéral (lorsqu'il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle), de compliance normale où usure (lorsque l'obstacle est déformable). A part le cas limite lorsque la contrainte tangentielle est nulle (le cas sans frottement).

Condition de contact avec usure

Nous avons maintenant de d'écrire les conditions aux limites sur la surface de contact Γ_3 . Nous introduisons la fonction de l'usure $w : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, qui mesure l'usure de la surface. L'usure est identifie comme le profondeur normale du matériau qui est perdue, le corps est en contact avec la fondation, il en résulte que

$$\mathbf{u}_\nu = -w, \quad \text{sur} \Gamma_3. \quad (1.4.1)$$

Ainsi, l'emplacement du contact se développe avec l'usure. Nous rappelons que l'effet de l'usure est sur Γ_3 , donc il est naturel de penser que $\mathbf{u}_\nu \leq 0$ sur Γ_3 , donc $w > 0$ sur Γ_3 . L'évolution de l'usure de la surface de contact est régie par une version simplifiée de la loi d'Archard (Vois[67])

$$\dot{w} = -k_1 \boldsymbol{\sigma}_\nu |\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|. \quad (1.4.2)$$

où $k_1 > 0$ est un coefficient d'usure, $\mathbf{v}^*$ est la vitesse tangentielle de la fondation et $|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|$ représente la vitesse de glissement entre la surface de contact et la fondation. Nous supposons que le mouvement de la fondation est uniforme, à savoir, $\mathbf{v}^*$ ne varie pas suivant le temps. On a la loi d'Archard

$$\dot{w} = -k_1 \mathbf{v}^* \boldsymbol{\sigma}_\nu. \quad (1.4.3)$$

L'utilisation de la loi simple (1.4.3) évite certains difficultés mathématique dans l'étude du problème mécanique de contact viscoélastique. Soit $\zeta = k_1 \mathbf{v}^*$ et $\beta = 1/\zeta$. En utilisant (1.4.1) et (1.4.3), nous avons

$$\sigma_\nu = \beta \dot{\mathbf{u}}_\nu. \quad (1.4.4)$$

Nous modélisons le contact avec frottement sec de Coulomb entre le corps de viscoélastique et la fondation comme suit

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| = \mu |\sigma_\nu|, \\ \sigma_\tau = -\lambda (\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*), \quad \lambda \geq 0. \end{cases} \quad (1.4.5)$$

où $\mu > 0$ est le coefficient de frottement. Naturellement, si $\dot{w} \geq 0$. Ainsi, il résulte de (1.4.1) et (1.4.3) que $\dot{\mathbf{u}}_\nu \leq 0$ et $\sigma_\nu \leq 0$ sur Γ_3 . Ainsi, les conditions (1.4.4) et (1.4.5) impliquent

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = \beta \|\dot{\mathbf{u}}_\nu\|, \\ \|\sigma_\tau\| = -\mu \sigma_\nu, \\ \sigma_\tau = -\lambda (\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*), \quad \lambda \geq 0. \end{cases} \quad (1.4.6)$$

Dans le cas sans frottement, l'usure augmente dans le temps, c'est-à-dire $\dot{w} > 0$, et donc à partir de (1.4.1), il en résulte $\mathbf{u}_\nu < 0$. Ainsi, la condition de contact (1.4.4) implique

$$-\sigma_\nu = \beta \|\dot{\mathbf{u}}_\nu\|. \quad (1.4.7)$$

Loi de frottement de type Coulomb

C'est une des lois de frottement les plus répandues et elle est plus réaliste. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer sous la forme :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu |\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu |\sigma_\nu| \implies \mathbf{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu |\sigma_\nu| \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \mathbf{u}_\tau. \end{cases} \quad (1.4.8)$$

où σ_τ est la contrainte tangentielle, $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement, $\mathbf{u}_\nu$, $\mathbf{u}_\tau$ représente le déplacement normale et tangentielle.

Loi de frottement de type Tresca

Cas statique

Nous modélisons le frottement avec la variante statique de la loi Tresca. Par les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\nu = 0, |\sigma_\tau| \leq g \\ |\sigma_\tau| < g \implies \mathbf{u}_\tau = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\ |\sigma_\tau| = g \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \mathbf{u}_\tau. \end{cases} \quad (1.4.9)$$

où $g > 0$ est le seuil de glissement, que nous considérons fixé. La condition $\mathbf{u}_\nu = 0$ traduit le fait que le contact est bilatéral et donc le corps ne décolle pas de la fondation.

L'inégalité $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq g$ veut dire que la force de frottement $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ est bornée par une valeur g fixé. Quand on a l'inégalité stricte $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| < g$, le glissement n'est pas possible et par conséquent les déplacements tangentiels sont nuls. Dans ces points le corps adhère à la fondation.

Lorsque $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| = g$ le glissement est possible. Dans ces points le corps peut glisser sur la fondation et la force de frottement s'oppose au glissement.

Cas dynamique

La version de la loi de Tresca dans le cas dynamique s'écrit de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}_\nu = 0, & |\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq g \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < g \Rightarrow & \dot{\mathbf{u}}_\tau = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = g \Rightarrow & \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau. \end{array} \right. \quad (1.4.10)$$

où $g > 0$ est le seuil de glissement, que nous considérons fixé. La condition $\mathbf{u}_\nu = 0$ traduit le fait que le contact est bilatéral et donc le corps ne décolle pas de la fondation.

L'inégalité $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq g$ veut dire que la force de frottement $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ est bornée par une valeur g fixé. Quand on a l'inégalité stricte $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| < g$, le glissement n'est pas possible et par conséquent les déplacements tangentiels sont nuls. Dans ces points le corps adhère à la fondation.

Lorsque $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| = g$ le glissement est possible. Dans ces points le corps peut glisser sur la fondation et la force de frottement s'oppose au glissement.

Problème de contact viscoélastique avec mémoire à long terme et une usure

Dans ce chapitre nous considérons une version d'un modèle dynamique décrivant le contact avec usure et endommagement et frottement entre un corps viscoélastique avec mémoire à long terme et une fondation.

On appelle l'endommagement causé par les déformations élastiques du matériau est modélisé par une variable interne des corps appelée champ d'endommagement.

Le problème est formulé comme un système qui comporte une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement. Notre but est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité par la construction des applications qui sont des contractions dans les espaces de Hilbert.

Cette section est divisée en trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, nous commençons par formuler le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Ensuite, dans le deuxième paragraphe nous donnons la formulation variationnelle du problème mécanique.

Enfin, dans le troisième paragraphe, nous énonçons et démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible relatif au problème.

La démonstration est réalisée en plusieurs étapes et s'appuie sur la théorie d'inéquation variationnelle d'évolution suivie et des arguments du point fixe.

2.1 Formulation du problème mécanique-Hypothèses

2.1.1 Problème Mécanique

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, et le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, et le champ endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{F}(t-s, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)) ds, \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.2)$$

$$\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (2.1.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2, \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (2.1.5)$$

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\sigma}_\nu = \beta \|\dot{\mathbf{u}}_\nu\|, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = -\mu \boldsymbol{\sigma}_\nu, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda(\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*), \quad \lambda > 0, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.1.6)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (2.1.7)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.1.8)$$

L'équation (2.1.1) représente l'équation du mouvement où $\mathbf{f}_0$ est la densité des forces volumiques agissent sur le corps déformable Ω et ρ désigne la densité de la masse. L'équation (2.1.2) représente la loi de comportement d'un matériau viscoélastique avec mémoire à long terme où $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{ij})$ est le tenseur de la relaxation. L'évolution du champ d'endommagement est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par relation (2.1.3) où ϕ est la fonction source de l'endommagement, (2.1.4)-(2.1.5) sont des conditions aux limites de traction, respectivement. Les conditions (2.1.6) représentent les conditions de contact de l'usure et frottement sec de Coulomb sur la partie Γ_3 de la frontière Ω . La relation (2.1.7) représente une condition aux limites de Neumann homogène où $\frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ représente la dérivée normale de α . Dans (2.1.8) nous considérons les conditions initiales où $\mathbf{u}_0$ est le déplacement initial, $\mathbf{v}_0$ la vitesse initiale et α_0 l'endommagement initial.

Pour l'étude du problème mécanique (2.1.1)-(2.1.7) on considère les hypothèses suivantes

2.1.2 Hypothèses

Dans le paragraphe suivant, on va donner les hypothèses du problème.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \exists L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2))(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (d) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (2.1.9)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{B}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{B}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{B}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2))(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{B}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (c) \quad \mathcal{B}\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = \mathcal{B}\varepsilon_2 : \varepsilon_1, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } \mathcal{B}(0) \in \mathcal{H}, \\ (d) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{B}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (e) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{B}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (2.1.10)$$

L'opérateur tenseur de la relaxation $\mathcal{F} : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{F}(x, t, \varepsilon_1, \alpha_1) - \mathcal{F}(x, t, \varepsilon_2, \alpha_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} (\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + \|\alpha_1 - \alpha_2\|) \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, T], \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{F}(x, t, \varepsilon, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \quad \forall t \in [0, T], \alpha \in \mathbb{R}, \\ (c) \text{ L'application } t \mapsto \mathcal{F}(x, t, \varepsilon, \alpha) \text{ est continue sur } [0, T] \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}, \\ (d) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{F}(x, t, 0, 0) \in \mathcal{H}, \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (2.1.11)$$

La fonction de la source d'endommagement $\phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\phi} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\phi(x, \varepsilon_1, \alpha_1) - \phi(x, \varepsilon_2, \alpha_2)\| \leq L_{\phi} (\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + \|\alpha_1 - \alpha_2\|) \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) \text{ L'application } x \longrightarrow \phi(x, \varepsilon, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \alpha \in \mathbb{R}, \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow \phi(x, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (2.1.12)$$

Nous supposons que la fonction β , la masse volumique, les forces volumiques et traction surfaciques satisfont

$$\rho \in L^\infty(\Gamma_3), \rho(x) \geq \rho_* > 0 \quad \text{p.p } x \in \Omega, \quad (2.1.13)$$

$$\beta \in L^\infty(\Gamma_3), \beta(x) \geq \beta_* > 0 \quad \text{p.p } x \in \Gamma_3, \quad (2.1.14)$$

$$\mathbf{f}_0 \in H^2(0, T, H), \quad \mathbf{f}_2 \in H^2(0, T, L^2(\Gamma_2)^d). \quad (2.1.15)$$

Finalement les conditions initiales satisfait

$$\mathbf{u}_0 \in V, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \in H, \quad (2.1.16)$$

$$\alpha_0 \in K. \quad (2.1.17)$$

Le coefficient de frottement μ est tel que

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) > 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (2.1.18)$$

Pour l'étude du problème P , on définit le sous-espace fermé V de H_1 par

$$V = \{\mathbf{v} \in H_1 \mid \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}. \quad (2.1.19)$$

Nous définissons sur l'espace H un nouveau produit scalaire donné par

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_H = (\rho \mathbf{u}, \mathbf{v})_H \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H. \quad (2.1.20)$$

Et soit $\|\cdot\|_H$ la norme associée, c'est-dire que

$$\|\mathbf{v}\|_H = (\rho \mathbf{u}, \mathbf{v})_H^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1.21)$$

En utilisant hypothèse (2.1.13) il s'ensuit que $\|\cdot\|_V$ and $\|\cdot\|_H$ sont les normes équivalentes sur H . De plus, la cartographie par inclusion de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. On note V' l'espace dual de V . Identifier H avec son propre double, nous pouvons écrire le Gelfand triple

$$V \subset H \subset V'.$$

Nous définissons le forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$a(\xi, \zeta) = k \int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla \zeta dx. \quad (2.1.22)$$

Le théorème de représentation de Riesz, entraine l'existence d'un élément $\mathbf{f}(t) \in V'$ tel que

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T]. \quad (2.1.23)$$

On remarque que la condition (2.1.15) impliquent que

$$\mathbf{f} \in H^2(0, T, V'). \quad (2.1.24)$$

Ensuite, on note par $j : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \beta \|\mathbf{u}_\nu\| (\mu \|\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*\| + \mathbf{v}_\nu) da. \quad (2.1.29)$$

2.2 Formulation variationnelle

Nous supposons que $\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont des fonctions régulières satisfaisant (2.1.1)-(2.1.8), et soit $\mathbf{v} \in V$ et pour tout $t \in (0, T)$. En utilisant la formule de Green

$$(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in H_1.$$

Étant donné que de frontière régulière, constitué de trois parties disjointes. Nous simplifions le deuxième côté de l'égalité, on a

$$(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H = \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

En utilisant (2.1.1), (2.1.4) et (2.1.5) on obtient

$$(\rho \ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + (\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da. \quad (2.2.1)$$

Sur le deuxième côté de l'égalité précédente, la troisième intégration, avec prenant $\mathbf{v}$ comme $\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}$ et puisque $\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma}_{\nu} \cdot \mathbf{v}_{\nu} + \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot \mathbf{v}_{\tau}$, il vient que

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_3} (\boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})) da \\ &= - \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\nu}(t) (\mathbf{v}_{\nu} - \dot{\mathbf{u}}_{\nu}) da - \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\tau}(t) (\mathbf{v}_{\tau} - \dot{\mathbf{u}}_{\tau}) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \beta \|\dot{\mathbf{u}}_{\nu}\| (\mathbf{v}_{\nu} - \dot{\mathbf{u}}_{\nu}) da - \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\tau}(t) (\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{v}^*) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\tau}(t) (\dot{\mathbf{u}}_{\tau} - \mathbf{v}^*) da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} \beta \|\dot{\mathbf{u}}_{\nu}\| (\mathbf{v}_{\nu} - \dot{\mathbf{u}}_{\nu}) da + \int_{\Gamma_3} \|\boldsymbol{\sigma}_{\tau}(t)\| (\|\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{v}^*\|) da - \int_{\Gamma_3} \|\boldsymbol{\sigma}_{\tau}(t)\| (\|\dot{\mathbf{u}}_{\tau} - \mathbf{v}^*\|) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \beta \|\dot{\mathbf{u}}_{\nu}\| (\mathbf{v}_{\nu} - \dot{\mathbf{u}}_{\nu}) da + \int_{\Gamma_3} \beta \mu \|\dot{\mathbf{u}}_{\nu}\| (\|\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{v}^*\| - \|\dot{\mathbf{u}}_{\tau} - \mathbf{v}^*\|) da. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Et par conséquent de (2.2.1), (2.2.2) nous trouvons

$$\begin{aligned} & (\rho \ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V} + (\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + j(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{f}, (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{V' \times V}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Enfin, soit $\alpha \in K$ et pour tout $t \in [0, T]$. De la définition de $\partial \varphi_K$ et de (2.1.3), on obtient

$$(\dot{\alpha}(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} - k(\Delta \alpha(t), \zeta - \alpha(t)) \geq (\phi(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \zeta \in K.$$

En utilisant la formule de Green et (2.1.7)

$$(\Delta \alpha(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + (\nabla \alpha(t), \nabla (\zeta - \alpha(t)))_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} \frac{\partial \alpha(t)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot (\zeta - \alpha(t)) da,$$

$$(\Delta\alpha(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} = - \int_{\Omega} \nabla\alpha(t) \cdot \nabla(\zeta - \alpha(t)) dx.$$

En suite

$$\begin{aligned} & (\dot{\alpha}(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + k \int_{\Omega} \nabla\alpha(t) \cdot \nabla(\zeta - \alpha(t)) dx \\ & \geq \left(\phi(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \zeta - \alpha(t) \right)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après (2.1.22), on trouve

$$(\dot{\alpha}(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \zeta - \alpha(t)) \geq (\phi(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \zeta \in K. \quad (2.2.4)$$

De (2.1.2), (2.1.8), (2.2.3) et (2.2.4) on obtient la formulation variationnelle du problème P.

Problème P_V

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$ et le champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{F}(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)) ds, \quad t \in (0, T), \quad (2.2.5)$$

$$\begin{aligned} & (\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{\mathcal{H}} + (\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_H + j(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ & \geq (\mathbf{f}, (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{V' \times V}, \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

$$\begin{aligned} & \alpha(t) \in K, \quad (\dot{\alpha}(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \zeta - \alpha(t)) \\ & \geq (\phi(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in K, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \quad (2.2.8)$$

Un triplet de fonctions $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha\}$ du problème qui satisfont (2.2.5)-(2.2.8) s'appelle solution faible du problème (2.1.1)-(2.1.8).

2.3 Existence et unicité de la solution

Notre résultat principal concernant du problème P_V est la suivante.

Théorème 2.3.1. Soit les hypothèses (2.1.9)-(2.1.18) vérifiées. Supposons qu'il existe une constante $\beta_0 > 0$ de Γ_3 , tel que

$$\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)}(\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) < \beta_0, \quad (2.3.1)$$

$$c_\gamma^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)}(\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) < m_{\mathcal{A}} < 2c_\gamma^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)}(\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1), \quad (2.3.2)$$

où c_γ est une constante. Alors le problème P_V a une solution unique $\mathbf{u} \in C(0, T; V)$ satisfaisant

$$\dot{\mathbf{u}} \in C(0, T, H) \cap L^\infty(0, T; H), \quad \ddot{\mathbf{u}} \in C(0, T, H) \cap L^\infty(0, T; H), \quad (2.3.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (2.3.4)$$

$$\alpha \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (2.3.5)$$

Un $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha\}$ qui satisfait (2.2.5)- (2.2.8) est appelé solution faible pour le problème P_V . Nous concluons que, pour les hypothèses énoncées, le problème (2.1.1)-(2.1.8) a une unique solution (2.3.1)-(2.3.5).

Démonstration du Théorème 2.3.1

La démonstration du Théorème 2.3.1 sera conduite en plusieurs étapes. Elle est basé sur les résultats des équations d'évolution avec les opérateurs monotones et les arguments du point fixe, mais avec un choix différent de l'espace V et de la fonctionnelle j .

Nous supposons dans la suite que (2.1.9)-(2.1.18) sont vérifiés.

Soit $\eta \in L^2(0, T; V')$ donné. Dans cette première étape on considère le problème suivant

Problème P_V^η

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tell que

$$\begin{aligned} & (\ddot{\mathbf{u}}_\eta(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + (\eta(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))_{V' \times V} + j(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t), \mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t), \dot{\mathbf{u}}_\eta(t)) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))_{V' \times V} \\ & \forall \mathbf{v} \in V, t \in (0, T), \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}_\eta(0) = \mathbf{v}_0. \tag{2.3.7}$$

Pour résoudre le problème P_V^η nous utilisons le Théorème A.3.1 d'existence et d'unicité. Nous avons le résultat suivant

Lemme 2.3.1. Il existe une unique solution du problème P_V^η , et qui satisfait (2.3.3).

Démonstration.

Nous définissons l'opérateur $A : V \longrightarrow V'$

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \tag{2.3.8}$$

il résulte de (2.3.8) et (2.1.9)(a) que

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2\|_{V'} &= \|\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2)\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq L_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2)\|_{\mathcal{H}} \\ &= L_{\mathcal{A}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V. \end{aligned}$$

D'où A est lipschitzienne .

ce qui montre que A est continu, et ainsi de semi-continuos. Maintenant, par (2.3.8) et (2.1.9)(b), nous trouvons

$$\begin{aligned} (A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_{V' \times V} &= (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2))_{\mathcal{H}} \\ &\geq m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\geq m_{\mathcal{A}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2. \end{aligned}$$

D'où A est fortement monotone.

En utilisant la même chose que l'opérateur $B : V \longrightarrow V'$

$$(B\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (2.3.9)$$

il résulte de (2.3.9) et (2.1.10)(a) que

$$\begin{aligned} \|B\mathbf{u}_1 - B\mathbf{u}_2\|_{V'} &= \|\mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}_2)\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq L_{\mathcal{B}}\|\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \varepsilon(\mathbf{u}_2)\|_{\mathcal{H}} \\ &= L_{\mathcal{B}}\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V. \end{aligned}$$

D'où B est lipschitzienne.

Ce qui montre que B est continu, et ainsi de semi-continu. Maintenant, par (2.3.9) et (2.1.10)(b), nous trouvons

$$\begin{aligned} (B\mathbf{u}_1 - B\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_{V' \times V} &= (\mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}_2), \varepsilon(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2))_{\mathcal{H}} \\ &\geq m_{\mathcal{B}}\|\varepsilon(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\geq m_{\mathcal{B}}\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2. \end{aligned}$$

D'où B est fortement monotone.

On montre que B symétrique

en utilisant par (2.1.10)(c) satisfait (A.3.4)(c)

$$\begin{aligned} (B\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V' \times V} &= (\mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{B}\varepsilon_{i,j}(\mathbf{u})\varepsilon_{i,j}(\mathbf{v})dx \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{B}\varepsilon_{i,j}(\mathbf{v})\varepsilon_{i,j}(\mathbf{u})dx \\ &= (\mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{v}), \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} \\ &= (B\mathbf{v}, \mathbf{u})_{V' \times V}. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

On montre que $j(\eta, \cdot)$ est convexe, soit $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T], V)$, $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} j(\lambda\eta_1 + (1 - \lambda)\eta_2, \mathbf{v}) &= \int_{\Gamma_3} k\|\lambda\eta_{1,\nu} + (1 - \lambda)\eta_{2,\nu}\|(\mu\|\mathbf{v} - \mathbf{v}^*\| + \mathbf{v}_{\nu})da \leq \\ &\int_{\Gamma_3} k\lambda\|\eta_{1,\nu}\| + (1 - \lambda)\|\eta_{2,\nu}\|(\mu\|\mathbf{v} - \mathbf{v}^*\| + \mathbf{v}_{\nu})da = \\ &\lambda \int_{\Gamma_3} k\|\eta_{1,\nu}\|(\mu\|\mathbf{v} - \mathbf{v}^*\| + \mathbf{v}_{\nu})da + \\ &(1 - \lambda) \int_{\Gamma_3} k\|\eta_{2,\nu}\|(\mu\|\mathbf{v} - \mathbf{v}^*\| + \mathbf{v}_{\nu})da = \\ &\lambda j(\eta_1, \mathbf{v}) + (1 - \lambda)j(\eta_2, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

on en déduit que $j(\eta, \cdot)$ est une fonction convexe propre et pour tout $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{C}([0, T], V)$.

L'opérateur j défini par (2.1.29) satisfait (A.3.5)(b)

$$\begin{aligned}
j(\mathbf{g}, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{g}, \mathbf{v}_2) &= \int_{\Gamma_3} \beta |\mathbf{g}_\nu| (\mu |\mathbf{v}_{1,\tau} - \mathbf{v}^*| + \mathbf{v}_{1,\nu}) da - \int_{\Gamma_3} \beta |\mathbf{g}_\nu| (\mu |\mathbf{v}_{2,\tau} - \mathbf{v}^*| + \mathbf{v}_{2,\nu}) da \\
&= \int_{\Gamma_3} \beta |\mathbf{g}_\nu| (\mu |\mathbf{v}_{1,\tau} - \mathbf{v}^*| - \mu |\mathbf{v}_{2,\tau} - \mathbf{v}^*| + \mathbf{v}_{1,\nu} - \mathbf{v}_{2,\nu}) da \\
&\leq \int_{\Gamma_3} \beta |\mathbf{g}_\nu| (\mu \|\mathbf{v}_{1,\tau} - \mathbf{v}_{2,\tau}\| + |\mathbf{v}_{1,\nu} - \mathbf{v}_{2,\nu}|) da \\
&\leq \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3, \mathbb{R})} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{g}_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{v}_{1,\tau} - \mathbf{v}_{2,\tau}\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
&\quad + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3, \mathbb{R})} \|\mathbf{g}_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{v}_{1,\nu} - \mathbf{v}_{2,\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
&\leq \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3, \mathbb{R})} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|\mathbf{g}_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{v}_{1,\nu} - \mathbf{v}_{2,\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
&\leq \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3, \mathbb{R})} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|\mathbf{g}\|_{L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^d)} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^d)}.
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Rappeler le théorème de trace ([52]), il existe constant $c_\gamma > 0$ telle que

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^d)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)} \leq c_\gamma \|\mathbf{u}\|_V, \quad \forall \mathbf{u} \in L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^d).$$

Alors l'inégalité (2.3.12) peut être transformée comme suit

$$\begin{aligned}
j(\mathbf{g}, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{g}, \mathbf{v}_2) &= \int_{\Gamma_3} \beta |\mathbf{g}_\nu| (\mu |\mathbf{v}_{1,\tau} - \mathbf{v}^*| + \mathbf{v}_{1,\nu}) da \\
&\quad - \int_{\Gamma_3} \beta |\mathbf{g}_\nu| (\mu |\mathbf{v}_{2,\tau} - \mathbf{v}^*| + \mathbf{v}_{2,\nu}) da \\
&\leq c_\gamma^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|\mathbf{g}\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V.
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

et

$$\begin{aligned}
j(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}) - j(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}) &= \int_{\Gamma_3} \beta |\mathbf{g}_{1,\nu}| (\mu |\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*| + \mathbf{v}_\nu) da \\
&\quad - \int_{\Gamma_3} \beta |\mathbf{g}_{2,\nu}| (\mu |\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*| + \mathbf{v}_\nu) da \\
&\leq c_\gamma^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V.
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

La condition (A.3.5)(b) est donc vérifiée.

Ainsi, en utilisant (2.3.13)-(2.3.14), nous avons

$$\begin{aligned}
j(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_2) = \\
\int_{\Gamma_3} \beta |\mathbf{g}_{1,\nu}| (\mu |\mathbf{v}_{2,\tau} - \mathbf{v}^*| + \mathbf{v}_{2,\nu}) da - \int_{\Gamma_3} \beta |\mathbf{g}_{1,\nu}| (\mu |\mathbf{v}_{1,\tau} - \mathbf{v}^*| + \mathbf{v}_{1,\nu}) da + \\
\int_{\Gamma_3} \beta |\mathbf{g}_{2,\nu}| (\mu |\mathbf{v}_{1,\tau} - \mathbf{v}^*| + \mathbf{v}_{1,\nu}) da - \int_{\Gamma_3} \beta |\mathbf{g}_{2,\nu}| (\mu |\mathbf{v}_{2,\tau} - \mathbf{v}^*| + \mathbf{v}_{2,\nu}) da = \\
\int_{\Gamma_3} \beta |\mathbf{g}_{1,\nu}| (\mu |\mathbf{v}_{2,\tau} - \mathbf{v}^*| + \mathbf{v}_{2,\nu} - \mu |\mathbf{v}_{1,\tau} - \mathbf{v}^*| - \mathbf{v}_{1,\nu}) da - \\
\int_{\Gamma_3} \beta |\mathbf{g}_{2,\nu}| (-\mu |\mathbf{v}_{1,\tau} - \mathbf{v}^*| - \mathbf{v}_{1,\nu} + \mu |\mathbf{v}_{2,\tau} - \mathbf{v}^*| + \mathbf{v}_{2,\nu}) da \leq \\
\int_{\Gamma_3} \beta \|\mathbf{g}_{1,\nu}\| (\mu \|\mathbf{v}_{1,\tau} - \mathbf{v}_{2,\tau}\| + \|\mathbf{v}_{1,\nu} - \mathbf{v}_{2,\nu}\|) da - \\
\int_{\Gamma_3} \beta \|\mathbf{g}_{2,\nu}\| (\mu \|\mathbf{v}_{1,\tau} - \mathbf{v}_{2,\tau}\| + \|\mathbf{v}_{1,\nu} - \mathbf{v}_{2,\nu}\|) da \leq \\
\int_{\Gamma_3} \beta \|\mathbf{g}_{1,\nu} - \mathbf{g}_{2,\nu}\| (\mu \|\mathbf{v}_{1,\tau} - \mathbf{v}_{2,\tau}\| + \|\mathbf{v}_{1,\nu} - \mathbf{v}_{2,\nu}\|) da \leq \\
\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|\mathbf{g}_{1,\nu} - \mathbf{g}_{2,\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{v}_{1,\nu} - \mathbf{v}_{2,\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \\
\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \\
c_\gamma^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V.
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

De plus, en utilisant (2.1.24) nous avons $\mathbf{f} \in H^2(0, T; V')$.

Dans la prochaine étape, soit $\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. On considère alors pour le champ d'endommagement le problème variationnel suivant

Problème $\mathbf{P}_V^\theta$

Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\theta : [0, T] \longrightarrow H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned}
\alpha_\theta(t) \in K, \quad (\dot{\alpha}_\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t)) \\
\geq (\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T),
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

$$\alpha_\theta(0) = \alpha_0. \tag{2.3.17}$$

Dans l'étude du problème de $\mathbf{P}_V^\theta$, nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.2. Il existe une solution unique du problème $\mathbf{P}_V^\theta$, et qui satisfait (2.3.5) .

Démonstration.

L'application d'inclusion de $(H^1(\Omega), |\cdot|_{H^1(\Omega)})$ dans $(L^2(\Omega), |\cdot|_{L^2(\Omega)})$ est continue et à image dense. Notant par $(H^1(\Omega))'$ l'espace dual de $H^1(\Omega)$ et identifiant le dual de $L^2(\Omega)$ avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$ pour désigner le produit de dualité entre H et $H^1(\Omega)$, nous avons

$$(\alpha, \xi)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\alpha, \xi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \alpha \in L^2(\Omega), \xi \in H^1(\Omega).$$

On sait que l'ensemble des endommagements admissibles K est un sous-ensemble vide, fermé et convexe dans $H^1(\Omega)$. Ainsi, le champ d'endommagement initial $\alpha_0 \in K$ dans (2.1.17).

Maintenant, en utilisant la définition (2.1.22) de la forme bilinéaire a , pour tout $\varphi, \xi \in H^1(\Omega)$, on a

$$a(\varphi, \xi) = a(\xi, \varphi).$$

et

$$|a(\varphi, \xi)| \leq 3k \|\nabla \varphi\|_H \|\nabla \xi\|_H \leq c \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\xi\|_{H^1(\Omega)}.$$

$$a(\varphi, \varphi) = k \|\nabla \varphi\|_M^2.$$

alors

$$a(\varphi, \varphi) + (k+1) \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq k \left(\|\nabla \varphi\|_H^2 + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

et d'où

$$a(\varphi, \varphi) + c_0 \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c_1 \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 \text{ avec } c_0 = k+1 \text{ et } c_1 = k.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du Théorème A.3.5 sont vérifiées. Ce qui conclut la preuve du lemme 2.3.2.

Enfin, à la suite de ces résultats et en utilisant les propriétés de l'opérateur $\mathcal{F}$ et la fonction ϕ pour $t \in [0, T]$, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda(\eta, \theta)(t) = (\Lambda^1(\eta, \theta)(t), \Lambda^2(\eta, \theta)(t)) \in V' \times L^2(\Omega). \quad (2.3.18)$$

définis par les égalités

$$(\Lambda^1(\eta, \theta)(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = \left(\int_0^t \mathcal{F}(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \alpha_\theta(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}) \right)_{\mathcal{H}}, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.3.19)$$

$$\Lambda^2(\eta, \theta)(t) = \phi(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), \alpha_\theta), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.3.20)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.3. Pour $(\eta, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ l'opérateur $\Lambda(\eta, \theta) : [0, T] \rightarrow V' \times L^2(\Omega)$ admet un unique point fixe note $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ tel que

$$\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*).$$

Démonstration.

Soit $(\eta, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ et soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ fixé et $\mathbf{v} \in V$.

Notons, pour $i=1,2$ et en utilisant (2.1.11)

$$\begin{aligned} & \| \Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t) \|_{V'}^2 \\ &= \left\| \int_0^t \mathcal{F}(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_1(s)), \alpha_1(s)) - \mathcal{F}(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_2(s)), \alpha_2(s)) ds \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \int_0^t \left\| \mathcal{F}(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_1(s)), \alpha_1(s)) - \mathcal{F}(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}_2(s)), \alpha_2(s)) \right\|_{\mathcal{H}}^2 ds, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\| \Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t) \|_{V'}^2 \leq C \left(\int_0^t \| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \|_V^2 ds + \int_0^t \| \alpha_1(s) - \alpha_2(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right). \quad (2.3.21)$$

Ensuite, en raison des régularités de $\mathbf{u}, \alpha_\theta$ exprimée en (2.3.3), (2.3.5) respectivement, on déduit de (2.3.21) que $\Lambda^1(\eta, \theta)(t) \in C(0, T; V')$. Par un argument similaire, de (2.3.20) et (2.1.12) il s'ensuit que

$$\| \Lambda^2(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^2(\eta_2, \theta_2)(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C (\| \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t) \|_V^2 + \| \alpha_1(t) - \alpha_2(t) \|_{L^2(\Omega)}^2). \quad (2.3.22)$$

par conséquent

$$\Lambda^2(\eta, \theta) \in C(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et } \Lambda(\eta, \theta) \in C(0, T; V' \times L^2(\Omega)).$$

Soit maintenant $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$. Nous utilisons la notation $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$, $\dot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \dot{\mathbf{u}}_i$, $\alpha_{\eta_i} = \alpha_i$, pour $i = 1, 2$. Des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (2.3.21) et (2.3.22) on a

$$\begin{aligned} \| \Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t) \|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 &\leq C (\| \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t) \|_V^2 + \| \alpha_1(t) - \alpha_2(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \int_0^t \| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \|_V^2 ds + \int_0^t \| \alpha_1(s) - \alpha_2(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds). \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

De plus, puisque $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ ont la même condition initiale, il s'ensuit que

$$\| \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t) \|_V \leq \int_0^t \| \dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s) \|_V ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3.24)$$

Combinons l'inégalité (2.3.24) avec (2.3.23) pour obtenir

$$\begin{aligned} \| \Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t) \|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\int_0^t \| \dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s) \|_V^2 ds + \right. \\ &\quad \left. \int_0^t \| \alpha_1(s) - \alpha_2(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right). \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

En utilisant l'inégalité (2.3.6) pour $\eta = \eta_1, \eta = \eta_2, \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}_1, \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}_2$, par addition des résultats obtenus nous avons

$$\begin{aligned} & (\rho(\ddot{\mathbf{u}}_1 - \ddot{\mathbf{u}}_2), \dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_2), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_1) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_2))_{\mathcal{H}} \\ &+ (\mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}_2), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_1) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_2))_{\mathcal{H}} + (\eta_1 - \eta_2, \dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2)_{V' \times V} \\ &+ j(\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_2) - j(\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_1) + j(\dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\mathbf{u}}_1) - j(\dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\mathbf{u}}_2) \geq 0. \end{aligned}$$

Combinons cette l'hypothèse avec (2.1.9),(2.1.10) et les inégalités fournies par les fonctionnelles j nous trouvons

$$(\rho^*)^2 \frac{d}{dt} \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\|_V^2 + m_{\mathcal{A}} \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\|_V^2 \leq L_{\mathcal{B}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\|_V + \|\eta_1 - \eta_2\|_{V'} \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\|_V \\ + c_{\gamma}^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\|_V^2.$$

On intègre cette inégalité par rapport au temps et par l'inégalité de Young

$$(\rho^*)^2 \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\|_V^2 + m_{\mathcal{A}} \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\|_V^2 ds \leq \frac{2}{m_{\mathcal{A}}} \int_0^t (L_{\mathcal{B}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\|_V + \|\eta_1 - \eta_2\|_{V'} \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\|_V \\ + c_{\gamma}^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\|_V^2) ds.$$

ce qui implique que

$$\int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_V ds \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'} ds + b \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3.26)$$

(2.3.24) dans (2.3.26) pour trouver

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'} ds + b \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3.27)$$

Utilisons encore une fois l'inégalité de Gronwall, pour déduire

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'} ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3.28)$$

De (2.3.16) on en déduit que

$$(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{V' \times V} + a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \leq (\theta_1 - \theta_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$

L'inégalité par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_0$ et l'inégalité $a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$ nous trouvons

$$\frac{1}{2} \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s))_{L^2(\Omega)} ds.$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{2} \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right).$$

Cette inégalité combinée avec l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3.29)$$

Il en résulte maintenant de ce qui précède et les estimations (2.3.28) et (2.3.29)

$$\|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^T \|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 ds \right).$$

Introduisons les notations suivantes

$$\begin{cases} I_1 = \int_0^t \|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\|_{V' \times L^2(\Omega)} ds \\ \vdots \\ I_k = \int_0^t \int_0^{s_{k-1}} \cdots \int_0^{s_1} \|(\eta_1, \theta_1)(r) - (\eta_2, \theta_2)(r)\|_{V' \times L^2(\Omega)} dr ds_1 \cdots ds_{k-1}, \quad \forall k \geq 2. \end{cases} \quad (2.3.30)$$

et par récurrence, en notant par Λ^m la puissance $m^{\text{ième}}$ de l'opérateur Λ , on obtient

$$\|\Lambda^m(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^m(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)} \leq C^m \left(\sum_{k=1}^m C_m^k I^{m-k} \|(\eta_1, \theta_1)(t) - (\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)} \right). \quad (2.3.31)$$

Pour tout $t \in [0, T]$ et $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I^{m-k}((\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)) &= \int_{m-k \text{ fois}} \cdots \int |(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)| \\ &\leq \int_0^t \int_{0_{m-k \text{ fois}}}^s \cdots \int_0^z \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|_{V' \times L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{t^{m-k}}{k!} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|_{V' \times L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{T^{m-k}}{k!} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|_{V' \times L^2(\Omega)} \\ \|\Lambda^m(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^m(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)} &\leq C^m \left(\sum_{k=1}^m C_m^k \frac{T^{m-k}}{k!} \|(\eta_1, \theta_1)(t) - (\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq \frac{(CT)^m}{m!} \|(\eta_1, \theta_1)(t) - (\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

cela implique que pour m assez grand l'opérateur puissance Λ^m de Λ est une contraction sur le espace de Banach $L^2(0, T, V' \times L^2(\Omega))$ et ainsi de Λ a un unique point fixe. Passons maintenant à la démonstration du Théorème 2.3.1.

Démonstration du Théorème 2.3.1

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver le Théorème 2.3.1.

Existence.

Soit $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ le point fixe de Λ défini par (2.3.18) et soient $\mathbf{u}_\eta, \alpha_\theta$ les solutions des problèmes $\mathbf{P}_V^\eta, \mathbf{P}_V^\theta$ pour $\eta = \eta^*, \theta = \theta^*$ c'est à dire $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\eta^*}, \alpha = \alpha_{\theta^*}$.

Nous désignons par σ la fonction donnée par (2.2.5). Clairement (2.2.5),(2.1.20) et (2.1.21) sont vérifiées.

Puisque $\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*)$ on déduit $(\Lambda(\eta^*, \theta^*), \mathbf{v}) = ((\eta^*, \theta^*), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T)$ et, gardant en tête (2.1.29), (2.3.5), on déduit que (2.1.22) est satisfaite.

La régularité(2.1.20) s'en suit de (2.1.24). En outre, puisque $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; V)$, il s'en suit de (2.1.8) et (2.1.2) que $\sigma \in L^\infty(0, T; \mathcal{H})$.

Choisissant maintenant $\mathbf{v} = \varphi$ où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^d$ dans (2.2.6) et utilisant (2.1.13) et (2.1.29) on trouve

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \text{Div } \sigma(t) + \mathbf{f}_0(t) \quad \text{p. p. } t \in (0, T).$$

Maintenant (2.1.13) et(2.2.5) la régularité exprimé dans (2.3.3) et l'égalité ci dessus impliquent que $\text{Div } \sigma \in L^2(0, T; V')$ lequel à son tour implique $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.

Unicité

La partie de l'unicité est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ , et de l'unicité des problèmes $\mathbf{P}_V^\eta, \mathbf{P}_V^\theta$. A cet effet, soit $\{\mathbf{u}, \sigma, \alpha\}$ la solution du problème (2.2.5)-(2.2.8) ayant la régularité (2.3.1) - (2.3.5), et on considère un élément $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ défini par

$$(\eta(t), \mathbf{v})_V = \left(\int_0^t \mathcal{F}(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}) \right)_{\mathcal{H}}, \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T]. \quad (2.3.32)$$

$$\theta(t) = \phi(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)). \quad (2.3.33)$$

L'équation (2.2.5),(2.2.6) et (2.3.32) qui la condition initiale $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ signifie que $\mathbf{u}$ est une solution de $\mathbf{P}_V^\eta$ et comme il résulte du lemme 2.3.1 que ce problème a une solution unique, notée $\mathbf{u}_\eta$ nous concluons que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\eta^*}. \quad (2.3.34)$$

L'équation (2.1.19),(2.3.29) et la condition initiale $\alpha(0) = \alpha_0$ impliquent maintenant que α est une solution de $\mathbf{P}_V^\theta$ du lemme 2.3.2 problème $\mathbf{P}_V^\theta$ a une solution unique, notée α_θ et il s'ensuit que

$$\alpha = \alpha_{\eta^*}. \quad (2.3.35)$$

En utilisant(2.3.18) et (2.3.32)-(2.3.35), nous concluons que $\Lambda(\eta, \theta) = (\eta, \theta)$ et par l'unicité du point de Λ fixe, il s'ensuit que

$$\eta = \eta^*, \quad \theta = \theta^*. \quad (2.3.36)$$

L'unicité de la solution est maintenant une conséquence de (2.3.34)-(2.3.35) avec l'équation

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}) + \int_0^t \mathcal{F}(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)) ds.$$

Problèmes de contact élasto-viscoplastique avec usure

Nous considérons ici un problème de contact sans frottement avec usure endommagement entre un corps élasto-viscoplastique et une fondation déformable dans un processus. L'endommagement est causé par les déformations élastiques du matériau est modélisé par une variable interne du corps appelée champ d'endommagement.

Le problème est formulé comme un système qui comporte une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement.

Cette section est divisée en trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, nous commençons par formuler le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Ensuite, dans le deuxième paragraphe nous donnons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans le troisième paragraphe, nous énonçons et démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible relatif au problème.

Les techniques employées sont basées sur la théorie des opérateurs monotones, suivi par des arguments de points fixes.

3.1 Formulation du problème mécanique

3.1.1 Problème Mécanique

La formulation classique du problème mécanique de contact sans frottement entre un corps élasto-viscoplastique avec endommagement et un fondation est la suivante .

Problème P

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, et le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

$$0 = \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.1)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)) ds, \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.2)$$

$$\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni \phi(\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.1.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2, \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.1.5)$$

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\sigma}_\nu = \beta\|\dot{\mathbf{u}}_\nu\|, \\ \mathbf{u}_\tau = 0, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\boldsymbol{\nu}} = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (3.1.7)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.1.8)$$

L'équation (3.1.1) représente l'équation d'équilibre où $\mathbf{f}_0$ est la densité des forces volumiques agissent sur le corps déformable Ω . (3.1.2) représente la loi de comportement d'un matériau élasto-viscoplastique avec endommagement, qui est causé par des déformations viscoplastiques.

(3.1.3) représente une inclusion différentielle décrivant l'évolution du champ d'endommagement où ϕ est une fonction source d'endommagement. φ_K est le sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K . Les conditions (3.1.4) et (3.1.5) sont des conditions déplacement traction, (3.1.6) représentent les conditions de contact de usure sans frottement sur la partie Γ_3 de la frontière Ω . La relation (3.1.7) représente une condition aux limites de Neumann homogène où $\frac{\partial\alpha}{\partial\boldsymbol{\nu}}$ représente la dérivée normale de α . Dans (3.1.8) nous considérons les conditions initiales où $\mathbf{u}_0$ est le déplacement initial et α_0 l'endommagement initial.

Dans le paragraphe pour l'étude du problème P, on considère les hypothèses suivantes

3.1.2 Hypothèses

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ IL exists } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2))(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (d) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.1.9)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{B}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{B}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{B}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2))(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{B}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{B}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d \\ (d) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{B}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.1.10)$$

L'opérateur de viscoplasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \alpha_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \alpha_2)\| \leq L_{\mathcal{G}} (\|\sigma_1 - \sigma_2\| + \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + \|\alpha_1 - \alpha_2\|), \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}_d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, T], \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}_d, \quad \forall t \in [0, T], \alpha \in \mathbb{R}, \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.1.11)$$

La fonction $\phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\phi} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\phi(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \alpha_1) - \phi(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \alpha_2)\| \leq L_{\phi} (\|\sigma_1 - \sigma_2\| + \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + \|\alpha_1 - \alpha_2\|), \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) \text{ L'application } x \longrightarrow \phi(x, \sigma, \varepsilon, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \alpha \in \mathbb{R}, \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow \phi(x, 0, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.1.12)$$

Nous supposons que les forces volumiques et traction surfaciques et la fonction d'adhésion satisfont

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(0, T; H), \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (3.1.13)$$

$$\beta \in L^\infty(\Gamma_3), \beta(x) \geq \beta_* > 0 \quad \text{p.p } x \in \Gamma_3. \quad (3.1.14)$$

Finalement les conditions initial satisfait

$$\mathbf{u}_0 \in V, \quad \mathbf{v}_0 \in H, \quad (3.1.15)$$

$$\alpha_0 \in K. \quad (3.1.16)$$

Pour l'étude du problème P , on définit le sous-espace fermé V de H_1 par

$$V = \{\mathbf{v} \in H_1 \mid \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}. \quad (3.1.17)$$

Nous définissons le forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$a(\xi, \zeta) = k \int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla \zeta dx. \quad (3.1.18)$$

Le théorème de représentation de Riesz, entraine l'existence d'un élément $\mathbf{f}(t) \in V'$ tel que

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V \times V} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T]. \quad (3.1.19)$$

On remarque que la condition (3.1.13) impliquent que

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T, V). \quad (3.1.20)$$

Ensuite, on note par $j : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \beta \|\mathbf{u}_\nu\| \mathbf{v}_\nu da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (3.1.21)$$

3.2 Formulation variationnelle

Nous supposons que $\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont des fonctions régulières satisfaisant (3.1.1)-(3.1.8), et soit $\mathbf{v} \in V, t \in (0, T)$.

En utilisant la formule de Green

$$(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in H_1.$$

Étant donné que de frontière régulière, constitué de trois parties disjointes. Nous simplifions le deuxième côté de l'égalité, on a

$$(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H = \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

En utilisant (3.1.1), (3.1.4) et (3.1.5) on obtient

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da. \quad (3.2.1)$$

De la condition (3.1.6) on obtient

$$\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da = \int_{\Gamma_3} (\boldsymbol{\sigma}_{\nu}, \mathbf{v}_{\nu}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{\tau}, \mathbf{v}_{\tau}) da = - \int_{\Gamma_3} \beta \|\mathbf{u}_{\nu}\| \mathbf{v}_{\nu} da.$$

Et par conséquent, de (3.1.5) et de (3.2.1) nous trouvons

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{V \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \text{p.p } t \in (0, T). \quad (3.2.2)$$

Enfin, soit $\alpha \in K$ et pour tout $t \in [0, T]$. De la définition de $\partial\varphi_K$ et de (3.1.3), on obtient

$$\begin{aligned} & (\dot{\alpha}(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} - k(\Delta\alpha(t), \zeta - \alpha(t)) \\ & \geq (\phi(\boldsymbol{\sigma}(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \zeta \in K. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green et (3.1.7)

$$(\Delta\alpha(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + (\nabla\alpha(t), \nabla(\zeta - \alpha(t)))_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} \frac{\partial\alpha(t)}{\partial\boldsymbol{\nu}} \cdot (\zeta - \alpha(t)) da,$$

$$(\Delta\alpha(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} = - \int_{\Omega} \nabla\alpha(t) \cdot \nabla(\zeta - \alpha(t)) dx.$$

En suite

$$\begin{aligned} & (\dot{\alpha}(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + k \int_{\Omega} \nabla\alpha(t) \cdot \nabla(\zeta - \alpha(t)) dx, \\ & \geq \left(\phi(\boldsymbol{\sigma}(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \zeta - \alpha(t) \right)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après (3.1.18), on trouve

$$\begin{aligned} & (\dot{\alpha}(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \zeta - \alpha(t)) \\ & \geq (\phi(\boldsymbol{\sigma}(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \zeta \in K. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Problème P_V

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, et le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}_d$ et le champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) \\ & + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)) ds \quad \text{P.P. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{V \times V}, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned} & \alpha(t) \in K, \quad (\dot{\alpha}(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \zeta - \alpha(t)) \\ & \geq (\phi(\boldsymbol{\sigma}(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in K, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \quad (3.2.7)$$

3.3 Existence et unicité de la solution

Notre résultat principal concernant le bien posé du problème P_V est la suivante.

Théorème 3.3.1. Supposons que (3.1.9)(3.1.16) sont satisfaites. Alors il existe β_0 qui ne dépend que sur $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3$ et $\mathcal{A}$ tel qu'il existe une solution unique $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha\}$ du problème P_V . Si

$$\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \beta_0, \quad (3.3.1)$$

De plus, la solution satisfait

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T, H), \quad \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V'), \quad (3.3.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; V), \quad (3.3.3)$$

$$\alpha \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.3.4)$$

Les fonctions $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha\}$ qui satisfait (3.2.4)-(3.2.6) s'appellent une solution faible du problème mécanique

Démonstration du théorème 3.3.1

La démonstration du Théorème 3.3.1 sera conduite en plusieurs étapes. Elle est basé sur les résultats des équations d'évolution avec les opérateurs monotones et les arguments du point fixe, mais avec un choix différent de l'espace V et de la fonctionnelle j .

Nous supposons dans la suite que (3.1.9)(3.1.16) sont vérifiés.

Soit $\eta \in L^2(0, T; V)$ donné. Dans cette première étape on considère le problème de viscosité suivant :

problème P_V^η

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\eta(t), \mathbf{v})_{V \times V} + j(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{V \times V}, \quad (3.3.5)$$

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in (0, T),$$

$$\mathbf{u}_\eta(t) = \mathbf{u}_0. \quad (3.3.6)$$

Lemme 3.3.1. Il existe une unique solution du problème P_V^η , et qui satisfait (3.3.2).

Démonstration.

En utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous définissons l'opérateur $A : V \rightarrow V$ par

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V \times V} = (\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u})), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (3.3.7)$$

Soient $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$. En utilisant (3.3.7) et la définition de j donnée par (3.1.21), nous trouvons

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2\|_V &= \|\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_2)\|_{\mathcal{H}} + C_0^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \\ &\leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \varepsilon(\mathbf{u}_2)\|_{\mathcal{H}} + C_0^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \\ &= (L_{\mathcal{A}} + C_0^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V. \end{aligned}$$

De même pour tout $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$ on a

$$(A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_{V \times V} \geq (m_{\mathcal{A}} - C_0^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V. \quad (3.3.8)$$

Soit $\beta_0 = \frac{m_{\mathcal{A}}}{C_0^2}$, il est clair que β_0 est positive qui dépend de Ω , Γ_3 et $\mathcal{A}$. Alors A est fortement monotone sur V si

$$\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \beta_0.$$

Compte tenu de (3.1.20) et du fait que $\mathbf{f} - \eta$. Il s'ensuit maintenant d'un résultat classique qu'il existe une unique fonction $\mathbf{v}_\eta \in L^\infty(0, T; V)$ qui satisfait

$$A\mathbf{v}_\eta(t) + \eta(t) = \mathbf{f}(t) \quad \text{p.p.} \quad t \in (0, T). \quad (3.3.9)$$

Soit $\mathbf{u}_\eta : [0; T] \rightarrow V$ la fonction définie par

$$\mathbf{u}_\eta(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_\eta(s) ds \quad \forall t \in (0, T). \quad (3.3.10)$$

Il s'ensuit de (3.3.7)-(3.3.10) que $\mathbf{u}_\eta$ est une solution du problème variationnel P_V^η , et qui satisfait (3.3.2) ce qui termine la partie d'existence du lemme 3.3.1. La partie d'unicité résulte de l'unicité de l'équation (3.3.9) qui dépend du temps, ce qui conclut la démonstration.

Dans la prochaine étape, soit $\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. On considère alors pour le champ d'endommagement le problème variationnel suivant.

Problème $\mathbf{P}_V^\theta$ Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\theta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ tel que

$$\alpha_\theta(t) \in K, \quad (\dot{\alpha}_\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t)) \quad (3.3.11)$$

$$\forall \zeta \in K, \quad \geq (\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

$$\alpha_\theta(0) = \alpha_0. \quad (3.3.12)$$

Dans l'étude du problème de $\mathbf{P}_V^\theta$, nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3.2. Il existe une solution unique du problème $\mathbf{P}_V^\theta$, et qui satisfait (3.3.4).

Démonstration.

L'application d'inclusion de $(H^1(\Omega), |\cdot|_{H^1(\Omega)})$ dans $(L^2(\Omega), |\cdot|_{L^2(\Omega)})$ est continue et à image dense. Notant par $(H^1(\Omega))'$ l'espace dual de $H^1(\Omega)$ et identifiant le dual de $L^2(\Omega)$ avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$ pour désigner le produit de dualité entre H et $H^1(\Omega)$, nous avons

$$(\alpha, \xi)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\alpha, \xi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \alpha \in L^2(\Omega), \xi \in H^1(\Omega).$$

On sait que l'ensemble des endommagements admissibles K est un sous-ensemble vide, fermé et convexe dans $H^1(\Omega)$. Ainsi, le champ d'endommagement initial $\alpha_0 \in K$ dans (3.1.16).

Maintenant, en utilisant la définition (3.1.18) de la forme bilinéaire a , pour $\varphi, \xi \in H^1(\Omega)$, on a

$$a(\varphi, \xi) = a(\xi, \varphi),$$

et

$$|a(\varphi, \xi)| \leq 3k \|\nabla \varphi\|_H \|\nabla \xi\|_H \leq c \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\xi\|_{H^1(\Omega)},$$

$$a(\varphi, \varphi) = k \|\nabla \varphi\|_M^2,$$

alors

$$a(\varphi, \varphi) + (k+1) \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq k \left(\|\nabla \varphi\|_H^2 + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

et d'où

$$a(\varphi, \varphi) + c_0 \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c_1 \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 \text{ avec } c_0 = k+1 \text{ et } c_1 = k.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du Théorème A.3.5 sont vérifiées. Ce qui conclut la preuve du Lemme 3.3.2.

Dans l'étape suivante, nous utilisons le champ de déplacement $\mathbf{u}_\eta$ obtenu dans le Lemme 3.3.1, le champ d'endommagement α_θ obtenu dans le Lemme 3.3.2 pour construire le problème de Cauchy associé de champ du tenseur des contraintes.

Problème $P_V^{\eta, \theta}$

Trouver le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{\eta, \theta} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ solution du problème

$$\boldsymbol{\sigma}_{\eta, \theta}(t) = \mathcal{B}(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t))) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}_{\eta, \theta}(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \alpha_\theta(s)) ds \quad \text{p.p.} \quad \forall t \in (0, T). \quad (3.3.13)$$

Lemme 3.3.3. Il existe une unique solution du problème $P_V^{\eta, \theta}$ qui satisfait (3.3.3).

D'autre part si $\mathbf{u}_{\eta_i}, \alpha_{\theta_i}$ et $\boldsymbol{\sigma}_{\eta_i, \theta_i}$ représentent la solution des problèmes $P_V^{\eta_i}, P_V^{\theta_i}$ et $P_V^{\eta_i, \theta_i}$ pour $i = 1, 2$ respectivement alors il existe $c \succ 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_{\eta_1, \theta_1}(t) - \boldsymbol{\sigma}_{\eta_2, \theta_2}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C \left(\|\mathbf{u}_{\eta_1}(t) - \mathbf{u}_{\eta_2}(t)\|_V^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_{\eta_1}(s) - \mathbf{u}_{\eta_2}(s)\|_V^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\alpha_{\theta_1}(s) - \alpha_{\theta_2}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Démonstration.

Soit l'application $\boldsymbol{\Sigma}_{\eta, \theta} : L^2(0, T; \mathcal{H}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{H})$ donnée par

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\eta, \theta} \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{B}(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t))) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \alpha_\theta(s)) ds. \quad (3.3.15)$$

nous utilisons (3.1.11),(3.3.16) à obtenir pour tous $t \in (0, T)$,

$$\|\Sigma_{\eta,\theta}\sigma(t) - \Sigma_{\eta,\theta}\sigma(t)\|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds. \quad (3.3.16)$$

Il résulte de cette inégalité que pour n assez grand, un pouvoir $\Sigma_{\eta,\theta}^n$ de la cartographie $\Sigma_{\eta,\theta}$ est une contraction de l'espace de Banach $L^2(0, T; \mathcal{H})$ et, par conséquent existe un élément unique $\sigma_{\eta,\theta} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ tel que $\Sigma_{\eta,\theta}\sigma(t) = \sigma(t)$. En outre, qui $\sigma_{\eta,\theta}$ est l'unique solution au problème de $P_V^{\eta,\theta}$, et en utilisant (3.3.13), la régularité de u_{η} , α_{θ} et les propriétés des opérateurs $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$, il s'ensuit que $\sigma_i \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.

Considérons maintenant $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in L^2(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$, et pour $i = 1, 2$ désigner $u_{\eta_i} = u_i, \sigma_{\eta_i, \theta_i} = \sigma_i, \alpha_{\theta_i} = \alpha_i$. Nous avons

$$\sigma_i(t) = \mathcal{B}(\varepsilon(u_i(t))) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_i(s), \varepsilon(u_i(s)), \alpha_i(s)) ds \quad \text{p.p.} \quad t \in (0, T). \quad (3.3.16)$$

et en utilisant les propriétés (3.1.10),(3.1.11) de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$, nous trouver

$$\begin{aligned} \|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C (\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\quad + \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 + \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds). \end{aligned}$$

Nous utilisant le lemme de Gronwall, on obtient (3.3.14).

Enfin, à la suite de ces résultats et en utilisant les propriétés de les opérateurs $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{G}$ et la fonction ϕ pour $t \in [0, T]$, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda(\eta, \theta)(t) = (\Lambda^1(\eta, \theta)(t), \Lambda^2(\eta, \theta)(t)) \in V \times L^2(\Omega) \quad (3.3.17)$$

définis par les égalités

$$\begin{aligned} (\Lambda^1(\eta, \theta)(t), \mathbf{v})_{V \times V} &= (\mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}_{\eta}(t)) + \\ &\quad \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta,\theta}(s), \varepsilon(\mathbf{u}_{\eta}(s)), \alpha_{\theta}(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

$$\Lambda^2(\eta, \theta)(t) = \phi(\sigma_{\eta,\theta}(t), \varepsilon(\mathbf{u}_{\eta}(t)), \alpha_{\theta}(t)), \quad (3.3.19)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3.4. Pour $(\eta, \theta) \in L^2(0, T; V \times L^2(\Omega))$ l'opérateur $\Lambda(\eta, \theta) : [0, T] \rightarrow V \times L^2(\Omega)$ admet un unique point fixe note $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V \times L^2(\Omega))$ tel que $\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*)$.

Démonstration.

Soie $(\eta, \theta) \in L^2(0, T; V \times L^2(\Omega))$ et soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ fixé et $v \in V$.

Nous utilisons la notation $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i, \dot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \dot{\mathbf{u}}_i, \alpha_{\eta_i} = \alpha_i, \boldsymbol{\sigma}_{\eta_i, \theta_i} = \boldsymbol{\sigma}_i$, pour $i=1,2$ et en utilisant les hypothèses (3.1.9)-(3.1.12)

$$\begin{aligned} & \|\Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_V^2 \\ &= \|\mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}_1(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}_1(s), \varepsilon(\mathbf{u}_1(s)), \alpha_1(s)) ds \\ & \quad - \mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}_2(t)) - \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}_2(s), \varepsilon(\mathbf{u}_2(s)), \alpha_2(s)) ds\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq L_{\mathcal{B}}\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 + L_{\mathcal{G}} \int_0^t (\|\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 + \\ & \quad \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 + \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds. \end{aligned}$$

Nous utilisons estimation (3.3.14) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \|\Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_V^2 \\ &\leq C(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 + \int_0^t (\|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_V^2 \\ & \quad + \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 + \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds). \end{aligned}$$

D'autre part, on sait que $\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \dot{\mathbf{u}}_i(s) ds$, pour tout $t \in (0, T)$

$$\|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 \leq \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_V^2 ds \quad (3.3.20)$$

Appliquons l'inégalité par (3.3.20) devient

$$\begin{aligned} & \|\Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t (\|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_V^2 \\ & \quad + \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 + \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds. \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Ensuite, en raison des régularités de $\mathbf{u}, \alpha_\theta$ exprimée en (3.3.2)-(3.3.4) respectivement, on déduit de (3.3.21) que $\Lambda^1(\eta, \theta)(t) \in C(0, T; V)$.

Par un argument similaire, de (3.3.19), (3.3.14) et (3.1.12) il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \|\Lambda^2(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^2(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^t (\|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_V^2 \right. \\ & \quad + \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 + \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds \\ & \quad \left. + \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Par conséquent, $\Lambda^2(\eta, \theta) \in C(0, T; L^2(\Omega))$ et $\Lambda(\eta, \theta) \in C(0, T; V \times L^2(\Omega))$.

Soit maintenant $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in L^2(0, T; V \times L^2(\Omega))$. Des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (3.3.21) et (3.3.22) on a

$$\begin{aligned} & \|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^t (\|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_V^2 \right. \\ & \quad + \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 + \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds \\ & \quad \left. + \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

Combinons l'inégalité (3.3.20) avec (3.3.23) pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 &\leq C \int_0^t (\|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_V^2 \\ &\quad + \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 + \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds. \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

En utilisant l'inégalité (3.3.6), par addition des résultats obtenus nous avons

$$\begin{aligned} (A\dot{\mathbf{u}}_1(t) - A\dot{\mathbf{u}}_2(t), \dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t))_{V \times V} = \\ (\eta_1(t) - \eta_2(t), \dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t))_{V \times V} \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Combinons cette inégalité (3.3.8) avec (3.3.25) nous trouvons

$$(m_{\mathcal{A}} - C_0^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\|_V^2 \leq \|\eta_1 - \eta_2\|_{V'} \|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2\|_V.$$

Par conséquent

$$\|\dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t)\|_V \leq c \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{V'} \quad \forall t \in [0, T].$$

Utilisons (3.3.20)

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'} ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.3.26)$$

De (3.3.11) on en déduit que

$$(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \leq (\theta_1 - \theta_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$

Intégrer l'inégalité par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_0$ et l'inégalité $a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$ nous trouvons

$$\frac{1}{2} \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s))_{L^2(\Omega)} ds.$$

Ce qui implique que

$$\frac{1}{2} \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right).$$

Cette inégalité combinée avec l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.3.27)$$

Il en résulte maintenant de ce qui précède et les estimations (3.3.26) et (3.3.27)

$$\|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^T \|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 ds \right).$$

En réitérant m fois l'inégalité précédente, on obtient

$$\|\Lambda^m(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^m(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V \times L^2(\Omega)} \leq \frac{(CT)^m}{m!} \|(\eta_1, \theta_1)(t) - (\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V \times L^2(\Omega)}.$$

cela implique que pour m assez grand l'opérateur puissance Λ^m de Λ est une contraction sur le espace de Banach $L^2(0, T; V \times L^2(\Omega))$ et ainsi de Λ a un unique point fixe. Passons maintenant à la démonstration du théorème 3.3.1.

Démonstration du théorème 3.3.1

Existence.

Soit $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V \times L^2(\Omega))$ le point fixe de Λ défini par (3.3.18) et (3.3.19) et soit $\mathbf{u}_\eta, \alpha_\theta, \boldsymbol{\sigma}$ les solutions des problèmes $P_V^\eta, P_V^\theta, P_V^{\eta, \theta}$ pour $\eta = \eta^*, \theta = \theta^*$ c'est à dire $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\eta^*}, \alpha = \alpha_{\theta^*}$ et $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}_{\eta^*})) + \boldsymbol{\sigma}_{\eta^*, \theta^*}$ obtenues dans Lemmes 3.3.1, 3.3.2 et 3.3.3. Les égalités $\Lambda^1(\eta^*, \theta^*) = \eta^*$ et $\Lambda^2(\eta^*, \theta^*) = \theta^*$ combinées avec (3.3.18)-(3.3.19) montrent que (3.2.4)-(3.2.6) sont satisfaites. La régularité (3.3.2) s'ensuit de (3.1.20). En outre, puisque $\mathbf{u} \in W^{1, \infty}(0, T; V)$, il s'en suit de (3.2.4), (3.1.9) que $\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.

Choisissant maintenant $\mathbf{v} = \varphi$ où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^d$ dans (3.2.5) et utilisant (3.2.4), (3.1.19) on trouve

$$0 = \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (3.3.28)$$

Maintenant (3.3.2) et (3.3.28) impliquent que $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; V)$ ce qui implique $\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.

On conclut que le triplet $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha\}$ est une solution du problème (3.1.1)-(3.1.8) et qui satisfait (3.3.1)-(3.3.4).

Unicité.

La partie de l'unicité est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ , et de l'unicité des problèmes P_V^η, P_V^θ . A cet effet, soit $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha\}$ la solution du problème (3.2.4)-(3.2.7) ayant la régularité (3.3.1)-(3.3.4), et on considère un élément $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ défini par

$$A\dot{\mathbf{u}}(t) + \eta(t) = \mathbf{f}(t) \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (3.3.29)$$

$$(\eta(t), \mathbf{v})_{V \times V} = (\mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T]. \quad (3.3.30)$$

$$\theta(t) = \phi(\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)). \quad (3.3.31)$$

L'équation (3.2.6), (3.3.31) et (3.3.27) et la condition initiale $\alpha(0) = \alpha_0$ impliquent maintenant que α est une solution de $\mathbf{P}_V^\theta$ du lemme 3.3.2 problème $\mathbf{P}_V^\theta$ a une solution unique, notée α_θ et il s'ensuit que

$$\alpha = \alpha_{\theta^*}. \quad (3.3.32)$$

En utilisant (3.3.17), (3.3.30)-(3.3.32) nous concluons que $\Lambda(\eta, \theta) = (\eta, \theta)$ et par l'unicité du point de Λ fixe, il s'ensuit que

$$\eta = \eta^*, \quad \theta = \theta^*. \quad (3.3.33)$$

L'unicité de la solution est maintenant une conséquence de (3.3.30)-(3.3.32) avec l'équation

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)) ds.$$

Annexe A

Outils Mathématiques

Afin de faciliter la lecture de cet ouvrage, il nous est paru utile de rappeler, dans cette dernière chapitre de la mémoire, quelques espaces. Cet annexe est divisé en quatre paragraphes.

Nous commençons dans le premier paragraphe de rappeler quelques espaces L^p , $W^{k,p}$, espace de Hilbert, espace liés à l'opérateur déformation et espace liés à l'opérateur divergence, deuxième paragraphe éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert, et sur les opérateurs fortement monotones, et particulièrement des résultats d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques, et à la présentation du théorème de Cauchy-Lipschitz.

La deuxième paragraphe concerne Inégalité quasi variationnelle hyperbolique, d'évolution et particulièrement des résultats d'existence, d'unicité concernant les inéquations variationnelles hyperbolique et à la présentation du théorème de Cauchy-Lipschitz. On y introduit les espaces de distributions, les espaces de type Sobolev associés à l'opérateur déformation, à l'opérateur divergence, et on présente leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace.

Ensuite troisième paragraphe, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, à la présentation du théorème de Cauchy-Lipschitz. et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

Le dernier paragraphe on cite aussi dans cette partie quelques lemmes du type Gronwall qui sont utilisés tout le long de ce travail et quelques théorèmes que nous utilisons dans cette mémoire.

Toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire sont introduits dans cette section.

Dans toute la suite, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné avec une frontière de Lipschitz notée Γ . Pour le champ de déplacements et le champ des contraintes nous utilisons les espaces suivants

A.1 Espaces fonctionels

A.1.1 Espaces L^p

Espaces L^p , avec $1 \leq p < +\infty$

Soient (Ω, T) un espace mesuré, $1 \leq p < +\infty$ et $f \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(E, T)$ (c'est-à-dire $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, mesurable). On remarque que $|f|^p \in \mathcal{M}$, car $|f|^p = \varphi \circ f$ où φ est la fonction continue (donc borélienne) définie par $\varphi(s) = |s|^p$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. (Noter que $p > 0$ et on rappelle que $|s|^p = e^{p \ln |s|}$ pour $s \neq 0$ et $|s|^p = 0$ pour $s = 0$). La quantité $\int |f|^p dx$ est donc bien définie et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Ceci va nous permettre de définir les espaces de fonctions de puissance p -ième intégrable.

On retrouve, pour $p = 1$, la définition de l'espace des fonctions intégrables.

Définition 1. Soient (Ω, T) un espace mesuré, $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, et f une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}$ mesurable.

1). On dit que $f \in L^p(\Omega) = L^p(\Omega, T)$ si $\int_{\Omega} |f|^p dx < +\infty$. On pose alors

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{A.1.1})$$

2). On dit que $f \notin L^p(\Omega) = L^p(\Omega, T)$ si $\int_{\Omega} |f|^p dx = +\infty$.

De manière analogue au cas $p = 1$ on quotiente les espaces L^p par la relation d'équivalence p.p. afin que l'application $f \mapsto \|f\|_{L^p}$ définisse une norme sur l'espace vectoriel des classes d'équivalence.

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ est un espace de Banach.

Si $p = 2$, alors $L^2(\Omega)$ est l'espace des classes d'équivalence de fonctions mesurables de carré intégrable sur Ω .

Le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ est défini pour toutes $f, g \in L^2(\Omega)$ par

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (\text{A.1.2})$$

L'espace $L^2(\Omega)$, muni par la norme

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.1.3})$$

est un espace de Hilbert.

Lemme A.1.1. (Inégalité de Young) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (\text{A.1.4})$$

Lemme A.1.2. (Inégalité de Hölder) Soient (Ω, T, m) un espace mesuré et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Alors, $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_1 = \|fg\|_p \|fg\|_q. \quad (\text{A.1.5})$$

Lemme A.1.3. (Inégalité de Minkowski) Soient (Ω, T, m) un espace mesuré et $p \in]1, +\infty[$. Soit $f, g \in L^p(\Omega)$. Alors $f + g \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (\text{A.1.6})$$

A.1.2 Espaces L^∞

Définition 2. Soient (Ω, T) un espace mesuré, $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, et f une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}$ mesurable.

- 1). On dit que f est essentiellement bornée, ou encore que $f \in L^\infty(\Omega)$ s'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| \leq C$.p.p.
- 2). si $f \in L^\infty(\Omega)$, on pose $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C \in \mathbb{R}_+ ; |f| \leq Cp.p.\}$
- 3). si $f \notin L^\infty(\Omega)$, on pose $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty$.

A.1.3 Espaces $W^{k,p}(0, T; H)$

On rappelle que $W^{k,p}(0, T; H)$ est l'espace des distributions vectorielles $\mathbf{u} \in D'(0, T; H)$ telle que $D_j \mathbf{u} \in L^p(0, T; H)$ pour $j = \overline{0, k}$, D_j désignant la dérivée d'ordre j au sous des distributions.

Si $1 \leq p \leq +\infty$, $W^{k,p}(0, T; H)$ est un espace de Banach réel pour la norme définie par

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{k,p}(0,T;H)} = \left(\sum_{j=0}^k \int_0^t |D_j \mathbf{u}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall \mathbf{u} \in W^{k,p}(0, T; H). \quad (\text{A.1.7})$$

En particulier, $W^{k,2}(0, T; H)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire définie par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{W^{k,2}(0,T;H)} = \sum_{j=0}^k \int_0^t (D_j \mathbf{u}(t), D_j \mathbf{v}(t))_H dt. \quad (\text{A.1.8})$$

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W^{k,2}(0, T; H). \quad (\text{A.1.9})$$

D'autre part, $W^{k,\infty}(0, T; H)$ est un espace de Banach réel pour la norme définie par

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{k,\infty}(0,T;H)} = \sum_{j=0}^k \sup_{[0,T]} |D_j \mathbf{u}(t)|_H. \quad (\text{A.1.10})$$

$$\forall \mathbf{u} \in W^{k,\infty}(0, T; H). \quad (\text{A.1.11})$$

Pour le cas particulier $k = 0$, on remarque que

$$W^{0,p}(0, T; H) = L^p(0, T; H). \quad (\text{A.1.12})$$

et on note alors la norme $L^p(0, T; H)$ par $\|\cdot\|_{L^p(0,T;H)}$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, on définit aussi, pour $k \in \mathbb{N}$, l'espace $C^k(0, T; H)$ des fonctions $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow H$ telles que pour tout $j = \overline{0, k}$ les dérivées $\frac{d^j \mathbf{u}}{dt^j}$ existe et sont continue sur $[0, T]$, on note, en particulier, $C^0(0, T; H)$ par $C(0, T; H)$.

A.1.4 Espaces $C^k(0, T; H)$

L'espace $C^k(0, T; H)$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|\mathbf{u}\|_{C^k(0,T;H)} = \sum_{j=0}^k \max_{t \in [0,T]} \left| \frac{d^j \mathbf{u}}{dt^j}(t) \right|_H, \quad \forall \mathbf{u} \in C^k(0, T; H). \quad (\text{A.1.13})$$

En particulier, les normes sur les espaces $C(0, T; H)$ et $C^1(0, T; H)$ sont données par

$$\|\mathbf{u}\|_{C(0,T;H)} = \max_{t \in [0,T]} |\mathbf{u}(t)|_H. \quad (\text{A.1.14})$$

$$\|\mathbf{u}\|_{C^1(0,T;H)} = \max_{t \in [0,T]} |\mathbf{u}|_H + \max_{t \in [0,T]} |\dot{\mathbf{u}}|_H. \quad (\text{A.1.15})$$

$$\forall \mathbf{u} \in C^k(0, T; H). \quad (\text{A.1.16})$$

A.1.5 Espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence

On introduit dans cette partie les espaces de type sobolev utilisés en mécanique de contact, à savoir les espaces de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation, ainsi que les espaces de fonction à valeurs vectorielles. On présente en plus leurs principales propriétés, notamment les théorème de trace. On rappelle aussi quelques espaces de fonction définies sur un intervalle réel et à valeurs dans un espace de Hilbert. Pour plus de détails sur les espace de Sobolev et les espaces de distributions.

Espace de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation. Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$). Et $\|\cdot\|$ représentent le produit scalaire et la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$, respectivement. Ainsi,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i, \quad \|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}, \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d.$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma_{ij} \cdot \tau_{ij}, \quad \|\boldsymbol{\tau}\| = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d.$$

Ici et partout dans ce manuscrit nous utilisons la convention de l'indice muet. Par ailleurs, l'indice après une virgule dénote la dérivée par rapport à la composante correspondante de la variable spatiale x . Dans toute la suite, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné

avec une frontière de Lipschitz notée Γ . Pour le champ de déplacements et le champ des contraintes nous utilisons les espaces suivants

On va utiliser aussi les notations

$$H = \{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_i)/\mathbf{u}_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1, N}\} = L^2(\Omega)^N. \quad (\text{A.1.17})$$

Où le espace $\mathcal{H}$ sont défini par

$$\mathcal{H} = \{\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_{ij})/ \boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{\sigma}_{ij} \in L^2(\Omega), \quad i, j = \overline{1, N}\} = L^2(\Omega)_s^{N \times N}. \quad (\text{A.1.18})$$

Les espaces H et $\mathcal{H}$ sont des espace Hilbert réels menus des produit scolaires canoniques

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \int_{\Omega} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H, \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{ij} \boldsymbol{\tau}_{ji} dx, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}.$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement par $\|\cdot\|_H$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Compte tenu de l'identification de $L^2(\Omega)$ à un sous-espace de distributions sur Ω .

Par conséquent, les opérateurs déformation et divergence peuvent être définis respectivement sur les H et $\mathcal{H}$. Pour l'instant, on rappelle la définition de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)/ \partial_i \mathbf{u} \in L^2(\Omega), \quad i = \overline{1, N}\}. \quad (\text{A.1.19})$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1(\Omega)} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} + (\partial_i \mathbf{u}, \partial_i \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega). \quad (\text{A.1.20})$$

On notera la norme associée par $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. On note plus par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace fermé de $H^1(\Omega)$.

Espace liés à l'opérateur déformation

Pour l'opérateur déformation défini par (1.2.3), il est naturel d'introduire l'espace

$$H_1 = \{\mathbf{u} \in H/\varepsilon(\mathbf{u}) \in \mathcal{H}\}. \quad (\text{A.1.21})$$

On considère sur H_1 le produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_1} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H + (\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_1. \quad (\text{A.1.22})$$

Et note la norme associée par $\|\cdot\|_{H_1}$. On obtient ainsi que l'injection $H_1 \subset H$ et l'opérateur déformation $\varepsilon : H_1 \longrightarrow \mathcal{H}$ sont des opérateurs continus.

Théorème A.1.1. Muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H_1}$ l'espace H_1 est espace Hilbert réel.

On munit maintenant l'espace produit $H_1(\Omega)^N$ du produit scalaire canonique et de la norme associée respectivement par $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)^N}$ et $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^N}$. On a alors le résultat suivant :

Théorème A.1.2. On l'égalité algébrique $H_1 = H^1(\Omega)^N$ et $\|\cdot\|_{H_1}, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)^N}$ sont les normes équivalentes sur H_1 .

On suppose maintenant que dans toute la suite, la frontière Γ de Ω est de classe C^1 . Compte tenu du théorème précédent, toutes les propriétés de l'espace $H^1(\Omega)$ peuvent être transportées sur l'espace H_1 par passage aux espaces produit. Plus précisément, on a les résultats suivants :

1. $C^1(\overline{\Omega})^N$ est dense dans H_1 .
2. $H_1 \subset H$ avec injection compacte (Théorème de Rellich).
3. Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H_1 \longrightarrow L^2(\Gamma)^N$ vérifiant l'égalité

$$\gamma \mathbf{u} = \mathbf{u}|_{\Gamma}, \quad \forall \mathbf{u} \in C^1(\overline{\Omega})^N. \quad (\text{A.1.23})$$

L'application γ est appelée application trace. Elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{u}|_{\Gamma}$ définie pour tout $\mathbf{u} \in C^1(\overline{\Omega})^N$. L'application trace $\gamma : H_1 \longrightarrow L^2(\Gamma)^N$ n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par γ . On a en outre :

4. $H_{\Gamma} \subset L^2(\Gamma)^N$ avec injection et continue.
5. Il existe une application linéaire continue $\mathbf{z} : H_{\Gamma} \longrightarrow H_1$ vérifiant l'égalité

$$\gamma(\mathbf{z}(\xi)) = \xi \quad \forall \xi \in H_{\Gamma}. \quad (\text{A.1.24})$$

6. Le noyau de l'application trace est $H_0^1(\Omega)^N$ telle que $H_0^1(\Omega)^N = \{\mathbf{u} \in H_1 / \gamma \mathbf{u} = 0\}$.
Soit maintenant $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et V est l'espace défini par

$$V = \{\mathbf{u} \in H_1 / \gamma \mathbf{u} = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_1\}. \quad (\text{A.1.25})$$

Théorème A.1.3. L'espace V est un sous-espace fermé de H_1 .

Théorème A.1.4. (*Inégalité de Korn*) : Soit $mes(\Gamma_1) > 0$. Alors il existe une constante $C > 0$ qui dépend de Ω et Γ_1 telle que

$$\|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{\mathcal{H}} \geq C \|\mathbf{u}\|_{H_1} \quad \forall \mathbf{u} \in V. \quad (\text{A.1.26})$$

En utilisant ce résultat, il vient

Remarque A.1.5. Si $mes(\Gamma_1) > 0$ alors $\mathbf{u} \rightarrow \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{\mathcal{H}}$ est une norme sur le sous-espace V défini par (A.1.25), équivalent à la norme canonique $\|\cdot\|_{H_1}$.

Une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [44]p.79. Sur V nous considérons le produit scalaire par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (\text{A.1.27})$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, telle que

$$\|\mathbf{v}\|_V = \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (\text{A.1.28})$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|\cdot\|)$ est un espace de Hilbert réel.

En outre, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $C_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que :

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (\text{A.1.29})$$

Il résulte par l'inégalité de Korn que $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert réel.

La preuve de l'inégalité peuvent être trouvée dans [38]p.79.

Espace liés à l'opérateur divergence

Comme dans le cas l'opérateur déformation, il est naturel d'introduire l'espace $\mathcal{H}_1$ lié à l'opérateur divergence et défini par

$$\mathcal{H}_1 = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} / \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in H\}. \quad (\text{A.1.30})$$

sur lequel on considère le produit scalaire

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}_1} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \text{Div } \boldsymbol{\tau})_H \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}_1. \quad (\text{A.1.31})$$

On note la norme associée par $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$. On obtient ainsi que l'injection $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ et l'opérateur divergence. $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$ sont des opérateurs continus.

Théorème A.1.6. Muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_1}$ l'espace $\mathcal{H}_1$ est un espace de Hilbert réel.

On peut prouver que l'espace

$$C^1(\bar{\Omega})_s^{N \times N} = \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) / \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\bar{\Omega}), \quad i, j = \overline{1, N}\} \quad (\text{A.1.32})$$

est dense dans $\mathcal{H}$. De plus, pour tout $\boldsymbol{\sigma} \in C^1(\bar{\Omega})_s^{N \times N}$, on note par $\boldsymbol{\sigma}\nu$ le vecteur de composantes $(\sigma_{ij}\nu_j)$, $i = \overline{1, N}$. Comme dans le cas de l'espace H_1 , on peut définir l'application trace pour l'espace $\mathcal{H}_1$ à l'aide de résultat suivant :

Théorème A.1.7. Il existe une application linéaire, continue et surjective $\bar{\gamma} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H'_\Gamma$ telle que

$$\langle \bar{\gamma}\boldsymbol{\sigma}, \xi \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}\nu \cdot \xi da. \quad (\text{A.1.33})$$

pour tout $\xi \in H_\Gamma$ et $\boldsymbol{\sigma} \in C^1(\bar{\Omega})_s^{N \times N}$. Pour tout $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1$, l'image $\bar{\gamma}\boldsymbol{\sigma} \in H'_\Gamma$ est élément de H'_Γ vérifiant l'égalité

$$\langle \bar{\gamma}\boldsymbol{\sigma}, \gamma\mathbf{u} \rangle_{H'_\Gamma \times H\Gamma} = (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})_H \quad \forall \mathbf{u} \in H_1. \quad (\text{A.1.34})$$

De plus, il existe une application linéaire et continue $\bar{\mathbf{z}} : H'_\Gamma \rightarrow Q_1$ telle que

$$\bar{\gamma}(\bar{\mathbf{z}}(\sum)) = \sum \quad \forall \sum \in H'_\Gamma. \quad (\text{A.1.35})$$

Rappelons aussi la formule de Green ci-dessous :

$$(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H = \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in H_1. \quad (\text{A.1.36})$$

On note par $\mathbf{v}_\nu$ et $\mathbf{v}_\tau$ la composante normale et respectivement tangentielle de tout champ vectoriel :

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

De même, soit $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ et $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ la composante normale et respectivement tangentielle de tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}$. Il vient : $\boldsymbol{\sigma}_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})_\nu$ et $\boldsymbol{\sigma}_\tau = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau})_\tau$, c'est à dire :

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}_\nu - \boldsymbol{\sigma}_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

A.2 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Cette section comporte des rappels de quelques résultats d'analyse non linéaire utilisés tout au long de cette thèse. On précise que pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section de consulter par exemple Brézis [5], Yosida [66] et Sofonéa [53].

A.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H c'est à dire : $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive. on note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\|\mathbf{u}\|_H = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_H^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.2.1})$$

et on rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie *l'inégalité de Cauchy-Schwartz*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H \leq \|\mathbf{u}\|_H \|\mathbf{v}\|_H \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H. \quad (\text{A.2.2})$$

Dans la suite, H désigne un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire ainsi que de la norme associée notés respectivement par $(\cdot, \cdot)_H$ et $\|\cdot\|_H$. On note aussi par H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme

$$\|\eta\|_{H'} = \sup \frac{|\langle \eta, \mathbf{v} \rangle|_{H' \times H}}{\|\mathbf{v}\|_H} \quad \mathbf{v} \in H \quad \mathbf{v} \neq 0_H. \quad (\text{A.2.3})$$

ou $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente la dualité entre H' et H .

Propriétés élémentaires

Théorème A.2.1. (*Théorème de représentation de Riesz-Fréchet*) étant donné $\eta \in H'$, il existe $\mathbf{f} \in H$ unique tel que

$$\langle \eta, \mathbf{v} \rangle_{H' \times H} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_H \quad \forall \mathbf{v} \in H. \quad (\text{A.2.4})$$

On a de plus

$$|\eta|_{H'} = |\mathbf{f}|_H.$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'application $\eta \mapsto \mathbf{f}$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et son dual H' .

Théorème du point fixe - Théorème de Lax-Milgram

On va commencer par rappeler un résultat classique qui est le théorème de point fixe de Banach. Ce résultat intervient dans les démonstrations de bon nombre des résultats d'existence et d'unicité établis dans les chapitres précédents.

Théorème A.2.2. Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $F : X \rightarrow X$ une application contractante, c'est-à-dire qu'il existe un réel k vérifiant $0 < k < 1$ tel que

$$d(F(x_1), F(x_2)) \leq kd(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

L'application F admet alors un point fixe unique $x \in X$ tel que $F(x) = x$.

Soit maintenant $a : H \times H \rightarrow R$ une forme bilinéaire sur $H \times H$. La forme a est dite

- 1) continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que $|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M|\mathbf{u}|_H|\mathbf{v}|_H \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$.
- 2) coercive s'il existe un réel $m > 0$ tel que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq m|\mathbf{u}|_H^2 \quad \forall \mathbf{u} \in H.$$

Remarque A.2.3. Soient $A : H \rightarrow H$ un opérateur et $a : H \times H \rightarrow R$ la forme définie par

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_H \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H. \quad (\text{A.2.5})$$

On a alors les propriétés suivantes :

- i) a est bilinéaire si et seulement si A est linéaire.
- ii) a est continue si et seulement si A est continu.
- iii) a est coercive si et seulement si A est défini positif.

Le second rappel de ce paragraphe concerne le théorème de Lax-Milgram.

Théorème A.2.4. (*Lemme de Lax-Milgram*) : Soit $a : H \times H \rightarrow R$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\mathbf{f} \in H$, il existe un unique $\mathbf{u} \in H$ tel que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_H \quad \forall \mathbf{v} \in H. \quad (\text{A.2.6})$$

A.2.2 Opérateurs fortement monotones

Dans cette section nous commençons par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et de la norme associée $\|\cdot\|_H$ et $A : H \rightarrow H$ un opérateur non-linéaire.

L'opérateur A est dit :

- a) fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_H \geq m\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_H^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H. \quad (\text{A.2.7})$$

- b) de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_H \leq M\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_H \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H. \quad (\text{A.2.8})$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème A.2.5. Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.

Alors pour tout $\mathbf{f} \in H$ il existe un élément unique $\mathbf{u} \in H$ tel que $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$.

Le résultat précédent est un cas particulier du théorème de Minty-Browder. Il nous prouve que tout opérateur $A : H \rightarrow H$ fortement monotone et de Lipschitz est inversible.

Plus précisément, on a :

Théorème A.2.6. Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors son inverse $A^{-1} : H \rightarrow H$ est également fortement monotone et de Lipschitz.

Nous considérons maintenant quelques théorèmes importants qui sont utilisés le long de ce mémoire

A.3 Inégalité quasi variationnelle hyperbolique et d'évolution

La modélisation de plusieurs classes de problème physiques conduit aux inégalités quasi variationnelles hyperboliques ou d'évolution, dans lesquelles la fonctionnelle différentielle dépend la solution elle même. Ces dernière sont appelé inégalités quasi variationnelles hyperboliques. Nous donnons par la suite un résultat l'existence et l'unicité pour ce type de problèmes.

Pour cela, nous considérons un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $(\cdot; \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$. Pour résoudre cette inéquation, étant donné deux opérateurs de symétrie A et $B : V \rightarrow V'$, un fonctionnel $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, et deux valeurs initiales $\mathbf{u}_0 \in H$, $\mathbf{v}_0 \in H$ et une fonction propre $\mathbf{f} \in V$. Compte tenu de ces données, nous considérons inégalités quasi variationnelles hyperboliques suivante

Problème I

$$(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + (A(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + (B(\varepsilon(\mathbf{u}(t))), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + j(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t)) - j(\dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)), \quad (\text{A.3.1})$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (\text{A.3.2})$$

pour résoudre le problème I , supposons les hypothèses suivantes (Voir [10]p.6).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } m_A > 0 \text{ tel que} \\ \quad (A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \geq m_A \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V. \\ \text{(b) Il existe } L_A \text{ tel que} \\ \quad \|A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2\|_V \leq L_A \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V, \end{array} \right. \quad (\text{A.3.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } m_B > 0 \text{ tel que} \\ \quad (B\mathbf{u}_1 - B\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \geq m_B \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V. \\ \text{(b) Il existe } L_B \text{ tel que} \\ \quad \|B\mathbf{u}_1 - B\mathbf{u}_2\|_V \leq L_B \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V, \\ \text{(c) pour tout } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \\ \quad (B\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, B\mathbf{v}). \end{array} \right. \quad (\text{A.3.4})$$

et cela $j : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction semi-continue.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) IL existe } L_j > 0 \text{ tel que} \\ \quad j(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_2) + j(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_2) \\ \quad \leq L_j \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_X \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V \quad \forall \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \\ \text{(b) Il existe } C_j > 0 \text{ tel que} \\ \quad j(\mathbf{g}, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{g}, \mathbf{v}_2) \leq C_j \|\mathbf{g}\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V, \\ \quad j(\mathbf{v}_1, \mathbf{g}) - j(\mathbf{v}_2, \mathbf{g}) \leq C_j \|\mathbf{g}\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V, \quad \forall \mathbf{g}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V. \end{array} \right. \quad (\text{A.3.5})$$

La fonction $\mathbf{f}$ satisfait

$$\mathbf{f} \in H^2([0, T]; V'). \quad (\text{A.3.6})$$

Enfin, pour tout $\mathbf{u} \in V$

$$j(\mathbf{u}, \cdot) \text{ est fonction convexe dans } V. \quad (\text{A.3.7})$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problèmes (A.3.1)-(A.3.2) est donnée par résultat suivant :

Théorème A.3.1. supposons que les hypothèses (A.3.3)-(A.3.7) sont satisfaites.

Alors, il existe solution unique $\mathbf{u} \in C(0, T; V)$ satisfaisant

$$\dot{\mathbf{u}} \in C(0, T, H) \cap L^\infty(0, T; H), \quad \ddot{\mathbf{u}} \in C(0, T, H) \cap L^\infty(0, T; H).$$

Une démonstration du Théorème se trouve par exemple dans [10].p.17.

Remarque A.3.2. Nous tenons à mentionner les faits suivants :

- a) l'hypothèse (A.3.5)(a) a été introduite pour la première fois par Han et al. [30] pour étudier une classe d'inégalités quasi-variationnelles paraboliques.
- b) les hypothèses (A.3.5)(b) et (A.3.7) implique que $j(\mathbf{u}, \cdot)$ est une fonction convexe continue dans V pour tout $\mathbf{u} \in V$.

Dans la troisième chapitre du mémoire, nous utiliserons un résultat abstrait sur les inégalités quasi variationnelles hyperboliques d'évolution. Ce résultat concerne les problèmes du type suivant :

Problème II

$$\begin{cases} A\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \end{cases} \quad (\text{A.3.8})$$

Nous imposons les hypothèses suivantes aux données du problème II.

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } m_A > 0 \text{ tel que} \\ \quad (A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \geq m_A \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V. \\ \text{(b) Il existe } L_A \text{ tel que} \\ \quad \|A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2\|_V \leq L_A \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V, \end{cases} \quad (\text{A.3.9})$$

La fonction $\mathbf{f}$ satisfait

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; H). \quad (\text{A.3.10})$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème (A.3.8) est donnée par résultat suivant :

Théorème A.3.3. supposons que le hypothèse (A.3.9), (A.3.10) sont satisfaites.

Alors, il existe solution unique $\mathbf{u} \in C(0, T; V)$ satisfaisant

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T, H).$$

Problème III

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= F(t, x(t)) \quad p.p. \ t \in (0, T), \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

Théorème A.3.4. (Cauchy-Lipschitz) Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $(0, T)$, qui satisfait les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x_1) - F(t, x_2)\|_X \leq L_F \|x_1 - x_2\|_X \quad \forall x_1, x_2 \in X, p.p. \ t \in (0, T), \end{cases}$$

il existe $1 \leq p < +\infty$ tel que $F(., x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X$.

Alors pour tout $x' \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$.

Pour des détails sur ce théorème on peut renvoyer le lecteur par exemple à [57].p.60.

Problème IV

$$\begin{aligned} & (\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{V' \times V} + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \\ & \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_H \quad \forall \mathbf{v}.p.p \in K, t \in [0, T]. \\ & \mathbf{u}(0) = 0. \end{aligned}$$

Théorème A.3.5. Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit, K est un sous ensemble fermé non vide, et convexe de V , et soit $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et symétrique qui satisfait

il existe $c_1 > 0$ et C_0 la condition de coercivite

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + C_0 |\mathbf{v}|_H^2 \geq \zeta |\mathbf{v}|_V^2 \quad \mathbf{v} \in V. \quad (\text{A.3.11})$$

Alors pour tout $\mathbf{u}_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; H)$, il existe unique fonction $\mathbf{u}$ qui satisfait

$$\mathbf{u} \in H^1(0, T; H) \cap L^2(0, T; V).$$

$$\mathbf{u}(t) \in K \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour les démonstrations de théorèmes on peut regarder dans [50].

A.4 Enoncés de certains théorèmes

Théorème de Banach (point fixe)

Théorème A.4.1. Soit X un espace de Banach. K est un ensemble fermé et non vide de X . On suppose que $\Lambda : K \rightarrow K$:

1- Λ est une contraction, telle que $\alpha \in [0, 1)$ tel que :

$$\|\Lambda \mathbf{u} - \Lambda \mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in K. \quad (\text{A.4.1})$$

Donc il existe une solution unique $\mathbf{u} \in K$ de l'équation $\Lambda \mathbf{u} = \mathbf{u}$, telle que Λ un point fixe unique dans K .

2- Λ^m est une contraction pour m un entier positif, donc Λ a un point fixe unique dans K .

Fonctions convexe

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et a valeur dans $]-\infty, +\infty]$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(t\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{v}) \leq t\varphi(\mathbf{u}) + (1-t)\varphi(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X, t \in]0, 1[. \quad (\text{A.4.2})$$

Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que X est un espace de Hilbert et K un sous-ensemble de l'espace X .

Définition 3. On appelle fonction indicatrice de K , la fonction Ψ_K définie par

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{u} \in K \\ +\infty & \text{si } \mathbf{u} \notin K \end{cases} \quad (\text{A.4.3})$$

Définition 4. Soit une fonction $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{u}$ un élément de l'espace X tel que $j(\mathbf{u}) \neq \pm\infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u , noté $\partial j(\mathbf{u})$ est l'ensemble défini par

$$\partial j(\mathbf{u}) = \{\mathbf{u}' \in X' \mid j(\mathbf{v}) \geq j(\mathbf{u}) + (\mathbf{u}', \mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in X\}. \quad (\text{A.4.4})$$

Le crochet $(.,.)$ désignant la dualité entre X' et X .

Tout élément $\mathbf{u}'$ de l'ensemble $\partial j(\mathbf{u})$ est appelé sous-gradient de la fonction j en $\mathbf{u}$.

La fonction j est dite sous-différentiable en $\mathbf{u}$ si $\partial j(\mathbf{u}) \neq \emptyset$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point $\mathbf{u}$ de l'espace X .

Nous pouvons caractériser le sous-différentiel $\partial \Psi_K$ d'une fonction indicatrice Ψ_K d'un ensemble convexe non vide

$$\partial \Psi_K(u) = \{\mathbf{u}' \in X' \mid (\mathbf{u}', \mathbf{v} - \mathbf{u}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in K\}. \quad (\text{A.4.5})$$

Équations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous allons rappeler dans ce paragraphe deux résultats sur les équations d'évolution et un résultat sur les inéquations variationnelles d'évolution.

Équation aux dérivées partielles d'évolution

Théorème A.4.2. Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur hémicontinu et monotone satisfaisant.

$$\exists \omega > 0, \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \quad (A\mathbf{v}, \mathbf{v})_{V' \times V} \geq \omega \|\mathbf{v}\|_V^2 + \lambda \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (\text{A.4.6})$$

$$\|A\mathbf{v}\|_{V'} \leq C(\|\mathbf{v}\|_V + 1) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (\text{A.4.7})$$

pour des constantes $\omega > 0, C > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Étant donné $\mathbf{u}_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; H)$, il existe une fonction unique $\mathbf{u}$ qui satisfait.

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; V').$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) + A\mathbf{u}(t) = f(t) \quad \text{pp} \quad t \in [0, T].$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

A.5 Lemmes de type Gronwall

nous rappelons ici les lemmes classique du type Gronwall qui interviennt dans de nombreux problèmes de magoration et d'estimation d'erreur, en particulier pour établir l'unicité de la solion. pour avoir plus de détails sur les rappeles figurant dans cette section, on pourra concsulter par exemple [47, 58].

Lemme A.5.1. Soient $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$ une constante. Si $\phi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

(1)

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

alors

$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + a. \int_0^t n(s)\phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

alors

$$\int_0^1 \phi(t) \leq \exp^{aT} . \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient :

Corollaire A.5.1. Soit $n \in C([0, T], \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

alors

$$\phi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

la corollaire A.5.1 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivant .on suppose deux solution, en notons par ϕ la norme de la différence entre ces solution, on essaie ensuite de majorer ϕ sous la forme

$$\phi(t) \leq \int_0^t n(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

avec une certaine fonction $n \leq 0$. L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ϕ .

Lemme A.5.2. Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds + \int_0^t n(s)\phi^2(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

alors

$$|\phi(t)| \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

dans le cas particulier $m = 0$, lemme devient :

Corollaire A.5.2. Soient $n \in C([0, T], \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t n(s)\phi^2(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

alors

$$|\phi(t)| \leq a \cdot \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Conclusion

Dans cette mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution de deux problèmes aux limites de contact en mécanique, le premier problème est un problème mécanique de contact avec usure et endommagement frottement entre un corps viscoélastique avec mémoire longue et une base, le deuxième problème est un problème mécanique de contact sans frottement avec usure et endommagement entre un corps élasto-viscoplastique et une base.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ces problèmes. Comme la frontière des corps et les données des problèmes ont des bonnes régularités, donc, la solution du problème mécanique et du problème variationnelle est la même.

On a montré l'existence et l'unicité de la solution des problèmes précédents par l'utilisation des arguments suivants : équation variationnelle dépendant du temps, équation variationnelle d'évolution, inéquation variationnelle d'évolution du type parabolique, équation différentielle, le lemme Gronwall et point fixe.

Bibliographie

- [1] R. S. Adams, *Sobolev spaces*, Academic press, New York(1975).
- [2] A. Aissaoui, N. Hemici, *Bilateral contact problem with adhesion and damage*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations No. 18(2014), 1-16.
- [3] V. Barbu, *Optimal control of variational inequalities*, Research Notes in Mathematics Vol. 100,Pitman, Boston, 1984.
- [4] K. Bartosz, *Hemivariational inequality approach to the dynamic viscoelastic sliding contact problem with wear*, Nonlinear Anal. TMA 65(3)(2006), 546-566.
- [5] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*. Masson. Paris ,1987.
- [6] J.J. Bikerman, *Thermodynamics, adhesion, and sliding friction*, J. Lube. Technol. 92(1970), 243-247 .
- [7] O. Chau, J. R. Fernandez, W. Han, et al, *Variational and numerical analysis of a dynamic frictionless contact problem with adhesion*, Comput. Appl. Math. 156(1)(2003), 127-157.
- [8] M. Campo, J.R. Fernández,W. Han, M. Sofonea, *A dynamic viscoelastic contact problem with normal compliance and damage*, Finite Elem. Anal. Des. 42 (2005), 1-24.
- [9] O. Chau, J.R. Fernández, M. Shillor, M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, J. Comput. Appl. Math. 159(2003), 431-465.
- [10] Tao. Chen, Nan-jing. Huang and Yi-bin. Xiao *Variational and numerical analysis of a dynamic viscoelastic contact problem with friction and wear*,2019.
- [11] J. Chen, W. Han, M. Sofonea, *Numerical analysis of a quasistatic problem of sliding frictional contact with wear*, Meth. Appl. Anal. 7(4)(2000), 687-704.
- [12] O. Chau, M. Shillor M. Sofonea, *Dynamic frictionless contact with adhesion*, J. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP). 55(2004),32-47.

- [13] O. Chau, M. Shillor, M. Sofonea, *Dynamic Frictionless Contact with adhesion*, J. Appl. Meth. Phys. (ZAMP). 55(2004),431-465.
- [14] P. G. Ciarlet, *Elasticité Tridimensionnelle*, Masson, Paris ,1986.
- [15] C. Ciulcu, T. V. Hoarau-Mante, M. Sofonea, *Viscoelastic sliding contact problems with wear*, Math. Comput. Model. 36 (2002), 861-874.
- [16] M. Cocou, *A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity*, Nonlinear Anal. RWA 22(2015), 508-519.
- [17] M. Cocu, R. Rocca, *Existence Results for Unilateral Quasistatic Contact Problems with Friction and Adhesion*, Math. Model. and Numer. Anal. 34(2000), 981-1001.
- [18] A.Curien and C. A *model of adhesion added to contact with friction*, in contact Martine and MDP Monteiro Marques (Eds.),Kluwer Dordrecht. (2002),161-168.
- [19] G. Duvaut and J.L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [20] G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique* (in French) [The inequalities in mechanics and physics], Travaux et Recherches Mathématiques, No. 21, Dunod, Paris,1972.
- [21] J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, *Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion*, Math. Comput. Modelling. 37(2003), 1317-1333.
- [22] M. Frémond, *Adhérence des solides*, J Mécanique Théorique et appliquée. 6(1987), 383-407.
- [23] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér.II.295(1982),913-916.
- [24] M. Frémond, KL. Kuttler and M. Shillor, *Existence and uniqueness of solution gor a one-dimensional damage*, J. Math. Anal. Appl. 229(1999),271-294 .
- [25] M. Frémond, KL. Kuttler, B. Nedjar, M. Shillor, *One-dimensional models of damage*, Adv. Math. Sci. Appl. 8(2)155(1998), 541-570.
- [26] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage in concrete : The unilateral phenomenon*, Nucl. Eng. Des. 155(1995),323-335.
- [27] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage in gradient of damage and principle of virrtual work* , Int. J. Solids. Stuct.33(8)(1996), 1083-1103 .
- [28] L. Gasiński, A. Ochal, M. Shillor, *Quasistatic thermoviscoelastic problem with normal compliance,multivalued friction and wear diffusion*, Nonlinear Anal. RWA 2016, 27 : 183-202.

- [29] W. Han, K.L. Kuttler, M. Shillor and M. Sofonea, *Elasti Beam in Adhesive Contact*, Int. J. Solids Structures .39 (2002), 1145-1164.
- [30] W. Han, M. Shillor and M. Sofonea, *Variational and Numerical Analysis of A Quasi-static Viscoelastic Problem with Normal Compliance, Friction and Damage*, J. Comput.Appl. Math. 137(2001), 377-398.
- [31] W. Han, M. Sofonea, *Evolutionary variational inequalities arising in viscoelastic contact problems*, SIAM J. Numer. Anal. 38(2)(2000), 556-579.
- [32] W. Han, M. Sofonea ; *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics 30, Americal Mathematical Society, Providence, RI-Intl.Press, Sommerville, MA, 2002.
- [33] W. Han, M. Sofonea ; *Numerical Analysis of a Frictionless Contact Problem for Elastic-Viscoplastic Materials*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng .190(2000), 179-191.
- [34] N. Hemici, B. Awbi,M. Sofonea ; *Viscoelastic problem contact with compliance normal and adhesion*, Annals of University of Bucarest .51(2002) 131-142.
- [35] N. Hemici, M. Sofonea ; *Analysis of dynamic bilateral contact problem with adhesion*, Proceedings of the Fourth International Conference on Applied Mathematics and Engineering Sciences,(CIMASI 2002), Casablanca (2002), CD-ROM.
- [36] L. Jianu, M. Shillor, M.Sofonea ; *A viscoelastic bilateral frictionless contact problem with*, Applic.Anal .80(2001), 233-255.
- [37] M. Jureczka, A. Ochal, *Numerical analysis and simulations of contact problem with wear*, Comput. Math. Appl. 2018, DOI :10.1016/j.camwa.2018.08.044.
- [38] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et Applications aux équations elliptiques*, Springer-Verlag ,1993.
- [39] N. Kikuchi, T.J. Oden, *Contact Problems Elasticity*, A Study of varitional Inequalities and Finite Element MethodsSIAM, Philadelphia,1988.
- [40] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, SIAM, New York-London, 1980.
- [41] Z.Lerguet , *Analyse de Quelques Problèmes de contact avec frottement et Adhésion* ,Thèse de Doctorat,Université Ferhat Abbas - Sétif ,2008.
- [42] W. Li, X. Li, N.J. Huang, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with normal compliance and friction*, Appl. Anal. 93(9)(2014), 1948-1962.
- [43] S. Migórski, S. Zeng, *Noncoercive hyperbolic variational inequalities with applications to contact mechanics*, J. Math. Anal. Appl. 455(2017), 619-637.

- [44] J. Necas and I. Hlavacek, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introductzon*, Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [45] J. Necas , I. Hlavàcek , *Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies : An introduction*, Studies in Applied Mechanics, Vol. 3, Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.
- [46] P.D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanical and Applications*, Birkh-guser, Basel, 1985.
- [47] I.R. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, 1993.
- [48] P. J. Rabier, O.V. Savin, *Fixed points of multi-valued maps and static Coulomb friction problems*, J. Elasticity 58(2)(2000), 155-176
- [49] M. Raous, L. Cangémi, M. Cocu ; *A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 177(1999), 383-399.
- [50] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea ; *Analysis of a quasistatic viscoelastic problem with friction and damage*, Adv. Math. Sci. Appl. 10(2002), 173-189 .
- [51] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, *Quasistatic viscoelastic contact with normal compliance and friction*, J. Elasticity 51(2)(1998), 105-126.
- [52] T. Roubicek, *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*, Springer, Berlin, 2013.
- [53] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris ,1967.
- [54] L. Selmani, L. Chouchane ; *A frictionless contact problem with adhesion and damage*, Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume .33(2006), 94-107 .
- [55] M. Selmani, L. Selmani ; *A Dynamic Frictionless Contact Problem with Adhesion and Damage*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 55(2007), 17-34 .
- [56] M. Shillor, M. Sofonea, *A quasistatic viscoelastic contact problem with friction*, Int. J. Engng. Sci. 38(2000), 1577-1533.
- [57] P. Suquet. *Plasticité et homogénéisation*, Thesis, University of Paris VI ,1982.
- [58] M. Sofonea, *Problèmes Mathématiques en Élasticité et Viscoplasticité, Cours de DEA de Mathématiques Appliquées*, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 1991.
- [59] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 276, Chapman Hall/CRC Press, New york, 2006.

- [60] M. Sofonea, A. Matei, *Variational Inequalities with Applications*, Springer, New York, 2009.
- [61] M. Sofonea, A. Matei, Y.B. Xiao, *Optimal control for a class of mixed variational problems*, submitted
- [62] M. Sofonea, Y.B. Xiao, *Fully history-dependent quasivariational inequalities in contact mechanics*, Appl. Anal. 95 (2016), 2464-2484.
- [63] M. Sofonea, Y.B. Xiao, *Tykhonov well-posedness of elliptic variational-hemivariational inequalities*, Electron. J. Differ. Equ. 2019 :64 (2019), 1-19.
- [64] M. Sofonea, Y.B. Xiao, M. Couderc, *Optimization problems for elastic contact models with unilateral constraints*, Z. Angew. Math. Phys. 70 : 1 (2019), <https://doi.org/10.1007/s00033-018-1046-2>.
- [65] M. Sofonea, Y.B. Xiao, M. Couderc, *Optimization problems for a viscoelastic frictional contact problem with unilateral constraints*, Nonlinear Anal. RWA 50 (2019), 86-103.
- [66] N. Strömberg, *Continuum Thermodynamics of Contact, friction and wear*. Thèse de Ph.D, Linköping University, Sweden ,1995.
- [67] N. Strömberg. L. Johansson and A. Klarbring, *Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear*, Int. J. Solids Structures.33(1996), 1817-1836 .
- [68] D. Tabor, *Wear-A critical synoptic view*, J. Lubr. Technol. 99(1977), 387-395 .
- [69] Y.B. Xiao, M. Sofonea, *Generalized penalty method for elliptic variational- hemivariational inequalities*, Appl. Math. Optim. (2019), <https://doi.org/10.1007/s00245-019-09563-4>.

Résumé

L'objet de cette mémoire l'étudier deux problèmes mécanique aux limites de contact avec ou sans frottement et usure et endommagement entre un corps élasto-viscoplastique ou viscoélastique avec longue mémoire et un base. Ici nous considérons des lois de comportement non linéaires pour des matériaux viscoélastiques et élasto- viscoplastiques dans les processus quasistatiques et dynamiques. Pour ces problèmes nous obtenons des formulations variationnelles suivies des résultats d'existence et d'unicité des solutions faibles. Les techniques employées sont basées sur la théorie des opérateurs monotones suivis d'une version du théorème de Cauchy-Lipschitz et des arguments du point fixe de Banach.

Mots clés : Viscoélasticité, élasto-viscoplastique, contact sans frottement, usure, endommagement, processus dynamique, inéquation d'évolution , inéquation quasi variationnelle, opérateur monotone, point fixe, solution faible.

Abstract

The object of this memory to study two mechanical problems at the limits of contact with or without friction and wear and damage between an elasto-viscoplastique or viscoelastic body with long memory and a base. Here we consider the constitutive equations for nonlinear viscoelastic materials in the dynamic process. For these problems we obtain variational formulations followed by the results of existence and uniqueness of weak solutions. The techniques used are based on the theory of monotone operators followed by a version of Cauchy - Lipschitz theorem and the argument of Banach fixed point.

Keywords : Viscoelasticity, elasto-viscoplastique, frictionless, wear, damage, process dynamic, evolution inequality, quasi-variational inequality, monotone operator, point fixed, weak solution.

ملخص

الهدف من هذه الذاكرة هو دراسة مشكلتين ميكانيكيتين على حدود التماس مع أو بدون احتكاك و التآكل و ضرر بين الجسم اللزوجة المرنة أو اللزوجة ذات الذاكرة الطويلة والقاعدة. نعتبر قوانين السلوك للمواد اللزجة المرنة غير الخطية في العملية الديناميكية. من اجل هذه المسائل نحصل على نتائج وجود و وحدانية للحلول الضعيفة. وتعتمد التقنيات المستخدمة على نظرية المؤثرات الرتبية تليها نسخة من نظرية كوشي ليبشيتز و نظرية النقطة الثابتة لبناخ.

كلمات مفتاحية : لزوجة، لزوجة مرنة ، الاتصال بدون احتكاك، التآكل، التلف، عملية ديناميكية، المتباينة التطورية ، المتباينة شبه تغيرية، مؤثر رليب، نقطة ثابتة، حل ضعيف.