N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation numérique

Thème

Intitulé du mémoire

Etude mathimatique d'un problème aux limites

Présenté par:

Gadi Zineb
Ghemima Kaouthar
Zegeub Hana

Sous la supervision de :

Mesaï Aoun Mohammed Salah

Abdelfeteh FAREH MCB

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciements

Nous à exprimer notre reconnaissance et nos remerciments les plus profonds à notre encadreur puissant " MESAÏ AOUN MOHAMMED SALAH " pour nous avoir proposé ce passionnant sujet, nous avoir aiguillé dans notre recherche, pour se patience, son encoucouragement et sa disponibilité ainsi le soutien trés précieux tout au long de cette étude.

Nous présentons nos veridiques remercimerciments à toute les personnes ayant contribué de prés oude lois à l'élaboration de ce mémoire.

Enfin, nous remerciens vivement nos familles pour l'aide matérielle et morale durant la période de prépasation.

Notations générales

	Si Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ $(n = 1; 2; 3)$.
$\bar{\Omega}$	l'adhérence de Ω.
Γ	la frontière de Ω supposée régulière.
$\Gamma_i\,(i = 1; 2; 3)$	une partie mesurable de la frontière Γ.
$\mathrm{mes}\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(n-1)$ dimenstionnelle de Γ_1.
ν	la normale unitaire sortante à Γ.
$\upsilon_\nu, \upsilon_\tau$	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel u défini sur Ω.
$C^1\left(\bar{\Omega}\right)$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\bar{\Omega}$.
$D\ (\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment .

différentiables et à support compact continu dans $\bar{\Omega}$

$D'\ (\Omega)$	l'espace de distributions sur $\bar{\Omega}$.
H	l'espace $L^2(\Omega)^n$.
$\mathcal{H}$	l'espace $L(\Omega)_s^{n*n}$.
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^n$.
$\mathcal{H}_1$	l'espace $\{\sigma \in \mathcal{H}\ /\ Div\ \sigma = (\partial_j\ \sigma_{ij}) \in H\ \}$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ.
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
H'_Γ	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$.
$\gamma : H_1 \to H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel et $n \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes:

H^n	l'espace $\{x \in (x_i) \mid x_i \in H, i = 1...n\}$
$H_S^{n\times n}$	l'espace$\{x \in (x_{ij}) \mid x_{ij} = x_{ji} \in H, i, j = 1...n\}$
$(.,.)_H$	le produit scalaire de H.
$\| . \|_H$	la norme de H.
H'	l'espace dual de H .
$\langle .,. \rangle_{H'\times H}$	le produit de dualité entre H' et H.
$x_n \to x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'èlèment x dans H.
$x_n \to x$	la convergence faibe de la suite (x_n) vers l'èlèment x dans H.
$\mathcal{L}(H)$	l'espace des applications linéaires et continues de H dans H.

Si de plus $[0,T]$ un intervalle de temps, $K \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$,on note par

$C\ ([0,T]\,; H)$	l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans H.
$\| . \|_{0.H}$	la norme de $C\ ([0,T]\,; H)$.
$C^1\ ([0,T]\,; H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0,T]$ dans H.
$\| . \|_{1.H}$	la norme de $C^1\ ([0,T]\,; H)$.
$L^p\,(0,T,H)$	l'espace des fonctions f mesurrables de $]0,T[$ dans H.

telles que$\int_0^T \mid f\,(t) \mid_H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$

$\| . \|_{0,T,H}$	la norme de $L^p\ (0,T;H)$
$W^{0,T}\,(0,T;H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p.
$\| . \|_{k,p,H}$	la norme de $W^{K,P}\,(0,T;H)$.

Autres notations:

S^n	l'espace des tenseurs symétrique du second ordre sur $\mathbb{R}^n$.
c	une constante générique strictement positive .
$p.p$	presque partout.
$t.q$	telle que

Table des matières

Introduction générale

Les problèmes de contact avec ou sans frottement entre corps déformables ou entre un corps et une fondation sont abondants en industrie et dans la vie de tous les jours. le simple contact entre une roue de voiture et une route, le piston avec la chemise, du train d'atterrissage avec le sol, ne sont que quelques exemples parmi bien d'autres.

Du fait de l'importance du phénomène, des études considérables ont été consacrées à ce sujet important qui est la modélisation mathématique en mécanique du contact.

La littérature concerne la modélisation, l'analyse mathématique, ainsi que l'approximation numérique des problèmes.

Le but de ce mémoire est de fournir une contribution dans l'étude d'un problème de contact sans frottement avec adhésion pour les matériaux viscoélastiques.

Pour le problème est étudié, nous commençons par décrire le problème mécanique de départ, et après avoir précisé les hypothèses sur les données, nous présentons une formulation variationnelle du problème mécanique pour laquelle nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible pour le modèle considéré.

Le processus d'adhésion est trés important dans le montage industriel où les parties non métalliques sont collées ensemble. récemment les matériaux composites ont atteint une proéminence parce qu'ils sont trés solides et légers, et par conséquent, ils ont une importance considérable dans l'aviation, l'exploration spatiale et l'industrie de l'automobile. Cependant les matériaux composites peuvent subir une délamination sous l'effet des tensions, où les différentes couches se détachent et bougent réciproquement l'une par rapport à l'autre. Pour modéliser le processus quand l'assemblage n'est pas permanent et le détachement peut se produire, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact. La principale nouvelle idée est l'introduction d'une variable interne de surface appelée champ d'adhésion qui prend ses valeurs entre zéro et un et qui décrit la densité fractionnaire des liens actifs sur la surface de contact.

Ce mémoire est composé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre on introduit des notations générales de la mécanique ainsi que la notation nécessaire à la compréhension de ce travail. On rappelle les différentes équations et conditions aux limites concernant le champ des déplacements et le champ des contraintes. on poursuit avec la formulation du problème mécanique qui sera traité.

Ensuite, dans le deuxième chapitre. On présente un rappel des principaux résultats de la théorie de la mécanique des milieux continus, ainsi que des rappels en analyse fonctionnelle restreint au seul cadre Hilbertien.

Enfin, dans le troisième chapitre on s'intéresse à l'étude d'un probléme aux limites qui décrive l'évolution quasistatique d'un corps viscoélastique de Kelvin-Voigt soumis à des forces surfaciques et des forces volumiques, en contact sans frottement. Le contact y est décrit par une condition de contact avec compliance normale et adhésion. L'évolution du champ d'adhésion est décrit par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Nous écrivons une formulation variationnelle du probléme mécanique et nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible, en utilisant des résultats sur les équations variationnelles d'évolution, suivis d'un argument de point fixe.

Chapitre 1

Formulation mathématique du problème aux limites

L'objet de ce chapitre est d'établir le modèle mathématique décrivant l'évolution d'un corps déformables ayant une loi viscoélastique sous l'action des efforts extérieurs. Ceci se traduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posées sur un domaine de $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$. Ce système comprend la loi de comportement du matériau, l'équation du mouvement du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre est consacrée aux rappels de quelques notions de base de la mécanique des milieux continus telles que le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations linéarisées et l'introduction des lois de comportement viscoélastiques. Il traite aussi les conditions aux limites de contact sans frottement avec adhésion d'un corps déformables avec une base rigide. La suite est reservée à la formulation du problème aux limites qui va faire l'objet de ce memoire.

1.1 Rappels de la mécanique des milieux continus

Dans cette section, après quelques rappels de mécanique des milieux continus, en partant de la modélisation du problème physique, nous présentons le formalisme des lois de comportement viscoélastiques. Ensuite, nous rappelons le système d'équations aux dérivées partielles qui sera l'objet de notre étude. Pour compléter le modèle, on présente quelques considérations physiques sur les conditions aux limites de contact sans frottement avec adhésion.

1.1.1 Contraintes et déformations

On considère un corps déformable occupant un domaine borné $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, et ayant une frontière Γ supposée assez régulière. L'objet du problème, du point de vue mécanique est l'étude dans un intervalle de temps $[0.T]$ de l'évolution du corps matériel due à l'application des forces extérieurs sur l'intérieur du corps et sur sa frontière et en adhésion avec une base sur une partie de sa frontière.

Les inconnues du problème sont le champ des déplacements $u : \Omega\times\ [0.T] \to \mathbb{R}^n$, et le champ des contraintes $\sigma : \Omega\times\ [0.T] \to S^n$ *où* $S^n = \mathbb{R}_s^{n\times n}$ est l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^n$, et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3\times\ [0.T] \to [0.T]$. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre des efforts extérieurs et le torseur des accélérations pour un système quelconque, conduit à l'équation du mouvement

$$\rho\ddot{u} = Div\sigma + f_0 \qquad\qquad dans\ \ \Omega \times (0;T) \tag{1.1.1}$$

Dans cette équation, ρ désigne la densité de masse, $\ddot{u}$ est le champ des accélérations, $f_{\ 0} : \Omega \times [0.T] \to \mathbb{R}^n$ est le champ des densités des forces volumiques appliquées sur le corps et qui sont des données du problème, $Div\ \sigma$ est la divergence du champ des contraintes

Ces processus d'évolution modélisée par 1.1.1 s'appellent processus dynamiques, dans certaines situations l'équation 1.1.1 peut se simplifier, par exemple dans le cas où $\dot{u} = 0$ il s'agit d'un processus d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie trés lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho\ddot{u}$ peut être negligé (processus quasistatiques). Dans ces deux cas l'équation 1.1.1 devient :

$$Div\sigma + f_0 = 0 \qquad\qquad dans\ \ \Omega \times (0,T) \tag{1.1.2}$$

Dans la suite, on va considérer des matériaux élastiques et viscoélastiques dans le cadre des petites transformations. Dans ce cas, on a besoin du champ des déformations linéarisé $\varepsilon : \Omega \times [0.T] \rightarrow S^n$ donné par :

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_j u_i + \partial_i u_j\right) \qquad\qquad dans \;\; \Omega \times (0,T) \tag{1.1.3}$$

où ∂_k représente l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable x_k. On précise en outre qu'on adopte la convention de l'indice muet. Souvent, pour marquer la dépendance du champ des déformations ε par rapport au champ des déplacements u, on va le noter $\varepsilon(u)$.

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations caractérisant le comportement de chaque matériau, ce sont les lois de comportement que nous décrivons dans le paragraphe suivante.

1.1.2 Lois de comportement

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Nous présentons ci-dessous les lois de comportement viscoélastique traitées dans cette memoire.

Lois de comportement des matériaux viscoélastiques

La loi de comportement est de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \tag{1.1.4}$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ sont des fonctions constitutives non linéaires. $\mathcal{A} : \Omega \times S^n \rightarrow S^n$ représente l'opérateur de viscosité et $\mathcal{G} : \Omega \times S^n \rightarrow S^n$ désigne l'opérateur d'élasticité.

Et pour un corps élastique lorsque $\mathcal{A} = 0$, la loi se réduit à

$$\sigma = \mathcal{G}\varepsilon(u)$$

Nous rappelons qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})$ est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u) + g_{ijkl}(u)\,\varepsilon_{kl}(u) \tag{1.1.5}$$

$\mathcal{A}$=(a_{ijkl}) est le tenseur de viscosité et $\mathcal{G}$=(g_{ijkl}) le tenseur d'élasticité, pour $i, j, k, l = 1..n$

La loi de comportement 1.1.4 est une loi viscoélastique du type Kelvin-Voigt

1.1.3 Conditions aux limites de contact avec adhésion

On considère un corps déformable occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, avec une frontière $\partial\Omega = \Gamma$ supposée assez régulière, partitionnée en trois parties mesurables disjointes deux à deux : $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \phi$ pour $i \neq j$. Soit ν la normale unitaire sortante à Γ.

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ.

Le corps est encastré dans la partie Γ_1 $(0, T)$, le champ des déplacements y est par conséquent nul

$$u = 0 \qquad\qquad sur\ \ \Gamma_1 \times (0, T) \tag{1.1.6}$$

Une traction surfacique de densité f_2 agit sur $\Gamma_2 \times (0, T)$, et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy satisfait

$$\sigma\nu = f_2 \qquad\qquad sur\ \Gamma_2 \times (0, T) \tag{1.1.7}$$

Et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0. Enfin, nous supposons que le corps est éventuellement en contact avec une fondation sur $\Gamma_3\times$ $(0, T)$. Nous étudions, dans un intervalle de temps $[0.T]$, l'évolution du corps matériel dûe à l'application de forces de volumes et de surfaces et de l'adhésion avec une base sur une partie de sa frontière.

C'est ici que commence toute la richesse du problème et que réside notre intérêt, car les conditions sur la surface potentielle de contact Γ_3 peuvent être très diverses et donner ainsi lieu à une variété de modèles de contact avec ou sans frottement. Ici, nous nous limitons étudier le contact sans frottement avec adhésion qui est l'objet de ce memoire.

On note par υ_ν et υ_τ la composante normale et respectivement tangentielle de tout champ vectoriel

$$\upsilon = \upsilon_\nu \nu + \upsilon_\tau \quad où \quad \upsilon_\nu = \upsilon.\nu \tag{1.1.8}$$

De même, soit et la composante normale et respectivement tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy. Il vient: $\sigma_\nu = (\sigma\nu\ )_\nu$, $\sigma_\tau = (\sigma\nu\ )_\tau$, c'est à dire :

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu)_\nu \qquad\qquad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu \tag{1.1.9}$$

Ensuite, on va décrire les conditions de contact avec adhésion sur $\Gamma_3 \times (0,T)$ on introduit une variable interne d'état définie sur $\Gamma_3\times$ $(0,T)$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$.

Quand $\beta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, et quand $0 < \beta < 1$, c'est le cas d'une adhésion partielle .

On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale et adhésion

$$-\sigma_\nu = p_\nu (u_\nu) - p_\nu (\beta, u_\nu) \qquad\qquad sur\ \Gamma_3 \times (0,T) \tag{1.1.10}$$

où p est une fonction non négative. En particulier, on peut considérer le cas :

$$p_\nu (\beta, u_\nu) = \gamma_\nu \beta^2 R_\nu (u_\nu) \tag{1.1.11}$$

dans la quelle γ_ν est un confficient positif. Et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'opérateur de troncature donnée par

$$R_V(S) = \begin{cases} L & \text{si} \quad S < -L \\ -S & \text{si} \quad -L \leq S \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad S > 0 \end{cases} \tag{1.1.12}$$

Ici $L > 0$ est longueur caractéristique des liens.

Comme exemple de fonctions de compliance normale, nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = max\,\{0.r\}$.

Quand le champ d'adhésion est nul, 1.1.10 devient

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) \qquad sur \;\; \Gamma_3 \times (0,T) \tag{1.1.13}$$

ce qui représente la condition de compliance sans adhésion.

la contrainte tangentielle dépend seulement de l'intensité d'adhésionet du déplacement tangentiel.

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta, u_\tau) \qquad sur \; \Gamma_3 \times (0,T) \tag{1.1.14}$$

On peut considérer le cas :

$$p_\tau(\beta, u_r) = \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \tag{1.1.15}$$

dans la quelle est un confficient positif. Et la fonction $R_\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est l'opérateur de troncature donnée par

$$R_\tau(u) = \begin{cases} u & \text{si} \;\; \| u \| \;\; \leq \; L \\ L\frac{u}{\|u\|} & \text{si} \;\; \| u \| \;\; > \; L \end{cases} \tag{1.1.16}$$

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différente. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'evolution du champ d'adhésion employée au troisième chapitre est décrite par une équation différentielle de la forme.

$$\dot{\beta} = \left(-\beta\left(\gamma_\nu R_\nu\left(u_\nu\right)^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau\left(u_\tau\right)\parallel^2\right) - \varepsilon_\alpha\right)_+ \qquad sur\ \Gamma_3 \times\ (0,T) \tag{1.1.17}$$

$$\beta\left(0\right) = \beta_0 \qquad sur\ \Gamma \tag{1.1.18}$$

La relation 1.1.18 représente une condition initiale d'adhésion.

1.2 Formulation du problème

Problème viscoélastique de contact avec compliance normale et adhésion.

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega\times\ [0.T] \to \mathbb{R}^n$ et le champ des contraintes : σ : $\Omega \times [0.T] \to s^n$, et le champ d'adhésion : $\beta : \Gamma_3 \times [0.T] \to [0.1]$ tels que:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}\right) + \mathcal{G}\varepsilon\left(u\right) && dans \quad \Omega \times (0,T)\\
Div\sigma + f_0 &= 0 && dans \quad \Omega \times (0,T)\\
u &= 0 && sur \quad \Gamma_1 \times (0,T)\\
\sigma\nu &= f_2 && sur \quad \Gamma_2 \times (0,T)\\
-\sigma_\nu &= p_\nu\left(u_\nu\right) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu\left(u_\nu\right) && sur \quad \Gamma_3 \times (0,T)\\
-\sigma_\tau &= p_\tau\left(\beta, u_\tau\right) && sur \quad \Gamma_3 \times (0,T)\\
\dot{\beta} &= \left(-\beta\left(\gamma_\nu R_\nu\left(u_\nu\right)^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau\left(u_\tau\right)\parallel^2\right) - \varepsilon_\alpha\right) && sur \quad \Gamma_3 \times\ (0,T)\\
u\left(0\right) &= u_0 && dans\ \Omega\\
\beta\left(0\right) &= \beta_0 && dans\ \Gamma_3
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Rappels d'analyse

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, le lemme de Gronwoll, les équations variationnelles et quelques théorèmes qui seront d'une grand utilité pour les démonstrations.

2.1 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section les espaces de type Sobolev utilisés dans ce mémoire et associés aux opérateurs divergence et déformation. On rappelle aussi quelques espaces de fonction définies sur un intervalle réel et à valeurs dans un espace de Hilbert ou de Banach .

Pour plus de details sur les espaces de Soblev, on renvoit par exemple[2] ; [8] et [10].

Nous désignons par S^n l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^n$ $(n = 2.3)$, "." et $\| \,.\, \|$ représentent le produit scalaire et la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et S^n, repectivement. Ainisi,

$$\begin{array}{rclccc} u.v & = & u_i v_i & \qquad \| v \| = (v.v)^{\frac{1}{2}} & \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^n \\ \sigma.\tau & = & \sigma_{ij}\tau_{ij} & \qquad \| T \| = (T.T)^{\frac{1}{2}} & \qquad \forall u, v \in S^n \end{array}$$

Ici et partout dans ce manuscrit, nous utilisons la convention de l'indice muet. Par ailleurs, l'indice aprés une virgule dénote la dérivée par rapport à la composante correspondante de la variable spatiale x. Dans toute la suite, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ est un domaine borné avec une frontière de Lipschitz notée Γ. Pour le champ de déplacements et le champ des contraintes nous utilisons les espaces suivants

On va utiliser aussi les notations

$$H = \left\{ u = (u_i) \ / \ u_i \in L^2(\Omega) \quad i = 1...N \right\} = L^2(\Omega)^N \tag{2.1.1}$$

$$\mathcal{H} = \left\{ \sigma = (\sigma_{ij}) \ / \ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \quad i = 1...N \right\} = L^2(\Omega)_S^{N\times N} \tag{2.1.2}$$

Les espaces H et H sont des espaces de Hilbert réels menus des produits scolaires canoniques

$$\begin{aligned} (u.v)_H &= \int_\Omega u_i v_i dx \qquad && \forall u.v \in H \\ (\sigma.T)_{\mathcal{H}} &= \int_\Omega \sigma_{ij} T_{ij} dx \qquad && \forall \sigma.T \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

Les normes associées à ces produits scolaires seront notées respéctivement par $\| \ . \ \|_H$et $\| \ . \ \|_{\mathcal{H}}$.

Compte tenu de l'identification de $L^2(\Omega)$ à un sous-espace de distrubutions sur Ω. Par conséquant, les opérateurs déformation et divergence peuvent ètre définis respéctivement sur les espaces H et $\mathcal{H}$. Pour l'instant, on rappelle la définition de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) / \partial_i u \in L^2(\Omega) ; i = 1...N \right\} \tag{2.1.3}$$

L'espace H^1 (Ω) est un espace Hilbert réel pour le produit scalaire

$$< u, v >_{H^1(\Omega)} = < u, v >_{L^2(\Omega)} + < \partial_i u, \partial_i v >_{L.^2(\Omega)} \qquad \forall u, v \in H^1(\Omega) \tag{2.1.4}$$

On notera la norme associée par $\| \ . \ \|_{H^1(\Omega)}$. On note de plus par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace férmé de $H^1(\Omega)$.

2.1.1 Espaces liés à l'opérateur déformation

Pour l'opérateur déformation défini par 1.1.5, il est naturel d'introduir l'espace

$$H_1 = \{u \in H \ \ / \ \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\} \tag{2.1.5}$$

On considère sur H_1 le produit scalaire

$$(u,v)_{H_1} = (u,v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \qquad \forall u, v \in H_1 \tag{2.1.6}$$

et note la norme associée par $\| \ . \ \|_{H_1}$. On obtient ainsi que l'injection $H_1 \subset H$ et l'opérateur déformation $\varepsilon : H_1 \to \mathcal{H}$ sont des opérateurs continus.

L'espace H_1 est un espace de Hilbert réel s'il muni du produit scalaire 2.1.6

Théorème 2.1.1 *Muni du produit scalaire $(.,.)_{H_1}$ l'espace H_1 est un espace de Hilbert réel .*

On munit maintenant l'espace produit $H^1(\Omega)^N$ du produit scalaire canonique et de la norme associée respéctivement par $(.,.)_{H^1(\Omega)^N}$ et $\| \ . \ \|_{H^1(\Omega)^N}$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.1.2 *On a l'égalité algébrique $H_1 = H^1(\Omega)^N$ et $\| \ . \ \|_{H_1}$, $\| \ . \ \|_{H^1(\Omega)^N}$ sont les normes équivalentes sur H_1*

On suppose maintenant que dans toute la suite, la frontière Γ de est de classe $C^{1,1}$.

Compte tenu du théorème précédent, toutes les propriétés de l'espace $H^1(\Omega)$ peuvent être transportées sur l'espace H_1 par passage aux espaces produit. Plus précisément, on a les résultats suivants :

1. $C^1\left(\bar{\Omega}\right)^N$ est dense dans H_1.

2. $H_1 \subset H$ avec injection compacte (Théorème de Rellich) .

3. Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H_1 \to L^2(\Omega)^N$ vérifiant L'égalité $\gamma u = u_{/\Gamma}$ pour tout $u \in C^1\left(\bar{\Omega}\right)^N$L'application γ est appelée application trace, Elle est définie comme le prolongement. Elle est définie comme le prolongement par densité

de l'application $u \to u_{/\Gamma}$ définie pour tout $u \in C^1\left(\bar{\Omega}\right)^N$. L'application trace $\gamma : H_1 \to L^2(\Omega)^N$ n'est pas surjective, L'image de H_1 par cette application est notée par γ: On a en outre .

4. $H_\Gamma \subset L^2(\Gamma)^N$ avec injection continue.

5. Il existe une application linéaire et continue $z : H_\Gamma \to H_1$ vérifiant l'égalité

$$\gamma(Z(\xi)) = \xi \qquad \forall \xi \in H_\Gamma \tag{2.1.7}$$

6. Le noyau de l'application trace est $H_0^1(\Omega)^N$ i.e .$H_0^1(\Omega)^N = \{u \in H_1 / \ \gamma u = 0\}$

Soit maintenant $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \phi$ pour $i \neq j$. et V est l'espace défini par

$$V = \{u \in H_1 \ / \ \gamma u = 0 \text{ p.p.sur } \Gamma_1\} \tag{2.1.8}$$

Théorème 2.1.3 *L'espace V est un sous-espace fermé de H_1.*

Théorème 2.1.4 (Inégalité de Korn) *Soit mes $\Gamma_1 > 0$. Alors il existe une constante $C > 0$ qui dépend de Ω et Γ_1 telle que*

$$\| \varepsilon(u) \|_{\mathcal{H}} \geqslant c \| u \|_{H_1} \qquad \forall u \in V \tag{2.1.9}$$

En utilisant ce résultat, il vient

Remarque 2.1.1 *Si mes $\Gamma_1 > 0$ alors "$u \to \| \varepsilon(u) \|_{\mathcal{H}}$"est une norme sur le sous-espace V défini par* 2.1.8*, équvalente à la norme canonique $\| \, . \, \|_{H_1}$*

Nous considérons le produit scalaire définie par

$$(u.v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \qquad \forall u, v \in V \tag{2.1.10}$$

et soit $\| \, . \, \|_V$ la norme associée, i.e

$$\| v \|_V = \| \varepsilon(v) \|_{\mathcal{H}} \qquad \forall v \in V \tag{2.1.11}$$

Par l'inégalité de Korn, il vient qui$\| \,.\, \|_{H_1}$et $\| \,.\, \|_V$sont des normes équivantentes sur V et ainsi $(V \ , \| \,.\, \|_V)$ est un espace de Hilbert réel. En outre, par le théorème de trace de

Soblev, il existe une constante $C_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω, Γ_1 et Γ_3 telle que:

$$\| v \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C_0 \| v \|_V \qquad \forall v \in V \tag{2.1.12}$$

2.1.2 Espace liés à l'opérateur divergence

Comme dans le cas de l'opérateur déformation, il est naturel d'introduire l'espace $\mathcal{H}_1$ lié à l'opérateur divergenc et défini par

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \ / \ Div \ \sigma \in H\} \tag{2.1.13}$$

sur lequel on considére le produit scalaire

$$< \sigma.T >_{\mathcal{H}_1} = < \sigma.T > + < Div\sigma.DivT >_H \qquad \forall \sigma, T \in \mathcal{H}_1 \tag{2.1.14}$$

on note la norme associée par $\| \,.\, \|_{\mathcal{H}_1}$. On obtient ainsi que l'injection $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ et l'opérateur divergenc. $Div \ \sigma : \mathcal{H}_1 \to H$ sont des opérateurs continus.

L'espace $\mathcal{H}_1$ est un espace de Hilbert réel s'il muni du produit scalaire 2.1.14

On peut prouver que l'espace

$$C^1\left(\bar{\Omega}\right)_S^{N \times N} = \left\{\sigma = (\sigma_{ij}) \ / \ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1\left(\bar{\Omega}\right) \quad i, j = 1...N\right\} \tag{2.1.15}$$

est dense dans $\mathcal{H}$. De plus, pour tout $\sigma \in C^1\left(\bar{\Omega}\right)_S^{N\times N}$, on note par $\sigma\nu$ le vecteur de composantes $(\sigma_{ij}\ \nu_j)\quad i=1..N$. Comme dans le cas de l'espace H_1, on peut définir l'application trace pour l'espace $\mathcal{H}_1$ à l'aide du résultat suivant :

Théorème 2.1.5 *Il existe une application linéaire, continue et surjective $\gamma : \mathcal{H}_1 \to H'_\Gamma$ telle que*

$$< \bar{\gamma}\sigma, \xi >_{H_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu.\xi da \tag{2.1.16}$$

pour tout $\xi \in H_\Gamma$ et $\sigma \in C^1\left(\bar{\Omega}\right)_S^{N\times N}$. pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, l'image $\bar{\gamma}\sigma \in H_\Gamma$ est un élément de H_Γ vérifiant l'églité

$$< \bar{\gamma}\sigma.\gamma u >_{\acute{H}_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(u))_{\mathcal{H}} + < Div\sigma.u > \qquad \forall u \in H_1 \tag{2.1.17}$$

De plus, il existe une application linéaire et continue $\bar{Z} : \acute{H}_\Gamma \to \mathcal{H}_1$ telle que

$$\bar{\gamma}\left(\bar{z}\left(\sum\right)\right) = \sum \qquad \forall \sum \in \acute{H}_\Gamma \tag{2.1.18}$$

Rappelons aussi la formule de Green ci-dessous :

$$(\sigma.\varepsilon(v))_H + (Div\sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu.vda \quad \forall v \in H_1 \tag{2.1.19}$$

On note par v_ν et v_τ la composante normale et respectivement tangentielle de tout champ vectoriel :

$$v_\nu = v.\nu \qquad v = v_\nu\nu + v_\tau$$

De meme, soit et la composante normale et respectivement tangentielle de tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$. Il vient : $\sigma_\nu = (\sigma\nu\ )_\nu$,$\sigma_T = (\sigma\nu\ )_T$, c'est à dire :

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu \qquad \sigma_T = \sigma_\nu - \sigma_\nu\nu$$

2.1.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

On rappelle les principaux rèsultats sur les fonctions dèfinies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espase de banach rèel. Nous notons par $C\left([0.T];X\right)$ et $C^1\left([0.T];X\right)$

les espacse des fonctions continues et continument diffèrentiaples sur $[0.T]$ avec valeur sur X respectivement avec les normes .

$$\| \quad x \|_{C([0.T],X)} = \max_{t\in[0.T]} \| x(t) \|_x$$
$$\| \quad x \|_{C^1([0.T],X)} = \max_{t\in[0.T]} \| x(t) \|_x + \max_{t\in[0.T]} \| \dot{x}(t) \|_x$$

soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \| \,.\, \|_X)$ un espace de Banach rèel. Nous notons par C_C $([0.T], X)$l'ensenble des fonctions continues à support compact dans $(0,T)$ à valeurs dans X .

Définition 2.1.1 *Une fonction $f : [0.T] \to X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0.T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$de fonctions appartenent à $C_C([0.T], X)$ tell que $\| f_n(t) - f(t) \|_X \to 0$ quand $x \to \infty$ pour tout $t \in [0.T] \setminus E$*

Définition 2.1.2 *Une fonction $f : [0.T] \to X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$de fonctions appartenant à C_C $([0.T], X)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \| f_n(t) - f(t) \|_X \, dt = 0$$

On a resultat suivant.

Théorème 2.1.6 (Bochner) *Une fonction $f : [0.T] \to X$ est dite mesurable et intégrable si et seulement si $x \to \| f(x) \|_X : [0.T] \to \mathbb{R}_+$ est intégrable. Dans ce cas*

$$\| \int_0^T f dt \|_X \leq \int_0^T \| f \|_X \, dt$$

soit $1 \leq p \leq \infty$ l'espace de Lebesgue $L^P(0,T,X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $f : (0,T) \to X$ mesurables telles que l'application $t \to \| f(t) \|_X$ appartient à $L^P(0,T)$

On sait que$L^P(0,T,X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{aligned}
\| \ f \|_{L^P(0,T,X)} &= (\int_0^T \| f(t) \|_x^p \, dt)^{\frac{1}{p}} \quad si \ 1 \leq p \leq \infty \\
\| \ f \|_{L^\infty(0,T,X)} &= \inf \{C > 0 / \| f(t) \|_X \leq C \qquad P.P.t \in (0,T)\} \ \ si \ P = \infty
\end{aligned}$$

par ailleurs, on a les résultats suivants.

1. $L^P(0,T,X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ est un espace de Banach.

2. Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_X$ alors $L^2(0,T,X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u,v)_{L^2(0,T,X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt$$

3. $L^r(0,T,X) \subset L^q(0,T,X)$ avec injection continue $1 \leq q \leq r \leq \infty$

4. Si X est un espace de Hilbert, alors

$$\begin{aligned}
L^P(0,T,X) &\subset L^q(0,T,X) \quad si \ 1 \leq p,q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
L^1(0,T,X) &\subset L^\infty(0,T,X)
\end{aligned}$$

où $L^P(0,T,X)$ reprèsente le dual de l'espace $L^P(0,T,X)$, $1 \leq p \leq \infty$

Théorème 2.1.7 *soit* $1 \leq p \leq \infty$ *un espace de banach reffexif et soit* $u \in L^P(0,T,X)$ *Les propriètès suivants sont èquivalentes:*

1. $u \in W^{1,P}(0,T,X)$

2. u admet un reprèsentant absolument continu presque partout dérivable ayant ladèrivée forte dans$L^P(0,T,X)$

3. Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^P(0,T,X)$ telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s) \, ds \qquad \forall t \in [0.T]$$

si X est un espace réàexif,alors toute fonction $u \in W^{1,P}(0,T,X)$ est fortement dérivable $P.P$ sur $(0,T)$ et $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ $P.P$ sur $(0,T)$ par ailleurs $W^{1,1}(0,T,X)$ coincide avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes $u : [0.T] \to X$

Etant donné un entier $K \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$ on dé... nit par récurrence l'espace

$$W^{K,P}(0,T,X) = \left\{ u \in W^{k-1,P}(0,T,X) ; \dot{u} \in W^{k-1,P}(0,T,X) \right\}.$$

on vérifie aisément que $u \in W^{k,p}(0,T,X)$ si et seulement s'il existe k fonctions $g_1....g_k$ telles que

$$\int_0^T u(t)\,\varphi^{(j)}(t)\,dt = (-1)\int_0^T g_{(j)}(t)\,\varphi(t)\,dt \qquad \forall\varphi \in C_c^{\infty}(I), \forall j = 1,...k$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j de On peut donc considérer les dérivée successives $\dot{u} = g_{1,}$ $u^{(2)} = g_2....u^{(K)} = g_k$. l'espase $W^{k,p}(0,T,X)$ est un espase de banach muni de la norme

$$\| u \|_{W^{k,p}(0,T,X)} = \| u \|_{L^P(0,T,X)} + \sum \| u^{(\alpha)} \|_{L^P(0,T,X)}$$

pour plus de détails sur les résultats de ce paragraphe nous renvoyons par exemple aux références[3, 4, 9]

2.2 Lemme de type Gronwall

Nous rappelons ici un lemme classi que nous aide pour établir l'unicité de la solution dans chapitre suivent. Pour avoir plus de détails , on pourra consulter par exemple [52] , [82]

Lemme 2.2.1 *Soient $m, n \in C([0.T], \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0.T]$ et soit $a \geq 0$ une constante $\phi \in C([0.T], \mathbb{R})$. est une fonction telle que*

(1) si

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^T m(t)\,ds + \int_0^T n(t)\,\phi(t)\,ds \qquad \forall t \in [0.T]$$

alors

$$\varphi(t) \leq (a + \int_0^T m(t)\,ds)\exp(\int_0^T n(t)\,ds) \qquad \forall t \in [0.T]$$

(2)si

$$\varphi(t) \leq m(t)\,ds + a \cdot \int_0^T \phi(s)\,ds \qquad \forall t \in [0.T]$$

alors

$$\int_0^T \varphi(s) \leq \exp(aT) \cdot \int_0^T \phi(s)\,ds \qquad \forall t \in [0.T]$$

2.3 Analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans cette section , nous commençons de rappeler quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert, et sur les opérateurs fortement monotones, et particulierement des résultats d'existence et d'unicité concernant une équation variationnelle , et à la présentation du théorème de Cauchy-Lipschitz.

2.3.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(.,.)_H$ un produit scalaire sur H c'est à dire: $(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\| \, . \, \|_H$l'application de $H \to \mathbb{R}_+$définie par

$$\| u \|_H = < u, u >_H^{\frac{1}{2}} \tag{2.3.1}$$

et on rappelle que$\| \, . \, \|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$(u,v)_H \leqslant \| u \|_H \| v \|_H \qquad \forall u, v \in H \tag{2.3.2}$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme définie par $Div\sigma$ $+f_0 = 0$ dans $\Omega \times (0.T)$

Dans la suite, H désigne un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire ainsi que de la norme associée notés respectivement par $(.,.)_H$ et $\| \cdot \|_H$. On note aussi par H' l'espqces dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme

$$\| \eta \|_{H'} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|< \eta, v >|_{H' \times H}}{\| v \|_H} \tag{2.3.3}$$

où $< .,. >_{H' \times H}$représente la dualité entre H' et H.

Propriétés élémentaires

Etant donné $\eta \in H'$,il existe $f \in H$ unique tel que

$$< \eta, v >_{H' \times H} = (f, v)_H \qquad \forall v \in H \tag{2.3.4}$$

On a de plus

$$\| \eta \|_{H'} = \| f \|_H \tag{2.3.5}$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire.

L'application $\eta \to f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et son dual H'.

Théorème du point fixe

On va commencer par rappeler un résultat classique qui est le théorème de point fixe de Banach. Ce résultat intervient dans les démonstrations de bon nombre des résultats d'existence et d'unicité étaablis dans les chapitres précédents

Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $F : X \to X$ une application contractante, c'est-à-dire qu'il existe un réel k vérifiant $0 < K < 1$ tel que

$$d(F(x_1), F(x_2)) \leqslant kd(x_1, x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in X$$

L'application F admet alors un point fixe unique $x \in X$ i.e $F(x) = x$

2.3.2 Opérateurs fortement monotones

Dans ce paragraphe nous commenons par un pref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considére un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $(.,.)_H$ et de la norme associée $\| \ . \ \|_H$et $A : H \to H$ un opérateur non - linéaire.

L'opérateur A est dit :

a monotone si

$$(Au - Av, u - v)_H \geqslant 0 \qquad \forall u, v \in H \tag{2.3.6}$$

b fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_H \geqslant m \mid u - v \mid_H^2 \qquad \forall u, v \in H \tag{2.3.7}$$

c de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$\| \ Au - Av \ \|_H \leqslant M \ \| \ u - v \ \|_H^2 \qquad \forall u, v \in H \tag{2.3.8}$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.3.1 *Soit $A : H \to H$ un opérateur fortement monotone et de Lpschitz..*

Alors pour tout $f \in H$ il existe un élément unique $u \in H$ tel que $Au = f$.

Le résultat précédent est un cas particulier du théorème de Minty-Browder (voirpar exemple [3] p:8). Il nous prouve que tout opérateur $A : H \to H$ fortement monotone et de Lpschitz est inversile.

plus précisement, on a :

Théorème 2.3.2 *Soit $A : H \to H$ un opérateur fortement monotone et de Lpschitz.*

Alors son inverse $A^{-1} : H \to H$ est également fortement monotone et de Lpschitz.

2.3.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Nous allons rappeler dans ce paragraphe un résultat sur les équations d'évolution.

Théorème 2.3.3 *Soit* $(X, \| \, . \, \|_X)$ *un espace de Banach réel et soit* $F(t, .) : X \to X$ *un opérateur défni p.p sur* $(0.T)$ *,qui satisfait les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \| F(t.x) - F(t.y) \|_X \leqslant L_F \| x - y \|_x \quad \forall x, y \in X \; .p.p. \quad t \in (0.T) \end{cases} \tag{2.3.9}$$

Ilexiste $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ tel que $F(., x) \in L^p(0.T.X) \ \ \forall x \in X$

Alors , pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T, X)$ telle que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t.x(t)) \quad \text{p.p} \ \ t \in (0.T) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.3.10}$$

Chapitre 3

Etude d'un problème quasistatique de contact avec compliance normale et adhésion

Nous considérons ici un problème quasistatique de contact sans frottement avec compliance normale et adhésion entre un corps viscoélastique et une fondation déformable. Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface, du champ d'adhésion. Le problème est formulé comme un système couplé d'une équation variationnelle en déplacement et une équation différentielle pour le champ d'adhésion. Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section, nous commençons par formuler le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Ensuite, dans la deuxième section nous donnons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans la troisième section, nous énonçons et démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible du problème mécanique.

Les techniques employées sont basées sur la théorie des opérateurs monotones, suivi par des arguments du points fixes.

3.1 Formulation du problème mécanique-Hypothèses

Nous considérons un corps viscoélastique qui à l'instant $t = 0$ occupé un domaine borné

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $n = (2.3)$ de frontière régulière, constitué de trois parties disjointes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ tel que mes $\Gamma_1 > 0$, Soit $T > 0$ et soit $[0.T]$ l'intervalle de temps en question.

Ce corps est encastré sur $\Gamma_1 \times$ $(0, T)$, soumis à une densité de forces volumiques f_0 sur $\Omega \times$ $[0.T]$, et des forces surfaciques de densité f_2 sur $\Gamma_2 \times$ $(0, T)$, et en contact avec une fondation déformable le long de Γ_3. De plus le contact, avec cette fondation, est supposée avec adhésion.

Le problème mécanique qu'on étudie est le problème du chapitre 1.

Problème 3.1.1 ***Problème 3.1.2 (P)*** *: Trouver le champ des déplacements* $u : \Omega \times [0.T] \to \mathbb{R}^n$, *le champ des contraintes* $\sigma : \Omega \times$ $[0.T] \to S_n$ *,et le champ d'adhésion* $\beta : \Omega \times$ $[0.T] \to [0.1]$ *tels que*

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \qquad \textit{dans } \Omega \times (0.T) \tag{3.1.1}$$

$$Div\sigma + f_0 = 0 \qquad \textit{dans } \Omega \times (0.T) \tag{3.1.2}$$

$$u = 0 \qquad \textit{sur } \Gamma_1 \times (0.T) \tag{3.1.3}$$

$$\sigma\nu = f_2 \qquad \textit{sur } \Gamma_2 \times (0.T) \tag{3.1.4}$$

$$-\sigma_{\mathcal{V}} = p_{\mathcal{V}}(u_{\mathcal{V}}) - \gamma_{\mathcal{V}}\beta^2 R_{\mathcal{V}}(u_{\mathcal{V}}) \qquad \textit{sur } \Gamma_3 \times (0.T) \tag{3.1.5}$$

$$-\sigma_{\mathcal{T}} = p_{\mathcal{T}}(\beta, u_{\mathcal{T}}) \qquad \textit{sur } \Gamma_3 \times (0.T) \tag{3.1.6}$$

$$\dot{\beta} = \left(-\beta\left(\gamma_{\mathcal{V}} R_{\mathcal{V}}(u_{\mathcal{V}})^2 + \gamma_{\mathcal{T}} \parallel R_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}) \parallel^2\right) - \varepsilon_\alpha\right) \qquad \textit{sur } \Gamma_3 \times \ (0.T) \tag{3.1.7}$$

$$u(0) \ = u_0 \qquad \textit{dans } \Omega \tag{3.1.8}$$

$$\beta(0) = \beta_0 \qquad\qquad dans\ \Gamma_3 \tag{3.1.9}$$

L'équation 3.1.1 représente la loi de comportement viscoélastique, la relation 3.1.2 représente l'équation d'équilibre où f_0 est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable Ω. Les conditions 3.1.3-3.1.4 sont les conditions déplacement-traction. Les conditions 3.1.5-3.1.7 représentent les conditions de contact avec compliance normale et adhésion sur la partie Γ_3 de la frontière Ω. Finalement, la relation 3.1.8-3.1.9 représente les conditions initiales. Pour l'étude du problème mécanique 3.1.1-3.1.9 on introduit, l'ensemle :$Z = \{\theta \in L^\infty(0.T.L^2(\Gamma_3))\ \ 0 \leqslant \theta \leqslant 1\ \forall t \in [0.T]\ \text{ pp sur } \Gamma_3\}$ et on considére les hypothèses suivantes:

Nous supposons que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times S_n \to S_n$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{c}
(a)\text{Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\
\| \mathcal{A}(x.\varepsilon_1) - \mathcal{A}(x.\varepsilon_2) \| \leqslant L_{\mathcal{A}} \| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \| \\
\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_n \ \text{ p.p.x} \in \Omega \\
(b)\text{Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\
(\mathcal{A}(x.\varepsilon_1) - \mathcal{A}(x.\varepsilon_2)) . (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geqslant m_{\mathcal{A}} \| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \| \\
\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_n \ \text{ p.p.x} \in \Omega \\
(c)\text{L}'\text{application } x \to \mathcal{A}(x.\varepsilon) \ \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\
\forall \varepsilon \in S_n \\
(d)\text{L}'\text{application } x \to \mathcal{A}(x.0) \in \mathcal{H}
\end{array}\right. \tag{3.1.10}$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times S_n \to S_n$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{c}
(a)\text{Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\
\| \mathcal{G}(x.\varepsilon_1) - \mathcal{G}(x.\varepsilon_2) \| \leqslant L_{\mathcal{G}} \| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \| \\
\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_n \ \text{ p.p.x} \in \Omega \\
(b)\text{L}'\text{application } x \to \mathcal{G}(x.\varepsilon) \ \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\
\forall \varepsilon \in S_n \\
(d)\text{L}'\text{application } x \to \mathcal{G}(x.0) \in \mathcal{H}
\end{array}\right. \tag{3.1.11}$$

La fonction $p_v : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{c}(a)\text{Il existe } L_v > 0 \text{ tel que}\\ \parallel p_v\left(x.v_1\right) - p_v\left(x.v_2\right) \parallel \leqslant L_v \parallel v_1 - v_2 \parallel\\ \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R} \ \text{ p.p.x} \in \Gamma_3\\ (b)\text{L}'\text{application } x \rightarrow p_v\left(x.v\right) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3\\ \forall v \in \mathbb{R}\\ (c)\text{L}'\text{application } x \rightarrow p_v\left(x.v\right) = 0 \text{ pour tout } v \leqslant 0\end{array}\right. \tag{3.1.12}$$

La fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{c}(a)\text{Il existe } L_{\mathcal{T}} > 0 \text{ tel que}\\ \parallel p_{\mathcal{T}}\left(x.v_1\right) - p_{\mathcal{T}}\left(x.v_2\right) \parallel \leqslant L_{\mathcal{T}} \parallel v_1 - v_2 \parallel\\ \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R} \ \text{ p.p.x} \in \Gamma_3\\ (b)\text{L}'\text{application } x \rightarrow p_{\mathcal{T}}\left(x.v\right) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3\\ \forall v \in \mathbb{R}\\ (c)\text{L}'\text{application } x \rightarrow p_{\mathcal{T}}\left(x.v\right) = 0 \text{ pour tout } v \leqslant 0\end{array}\right. \tag{3.1.13}$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν,γ_τ et ε_α satisfont:

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty\left(\Gamma_3\right) \quad , \varepsilon_\alpha \in L^2\left(\Gamma_3\right) \ \gamma_\nu, \gamma_\tau \geqslant 0 \text{ p.p sur } \Gamma_3 \tag{3.1.14}$$

On suppose que les forces volumiqes et la traction surfacique ont la régularité

$$f_0 \in C\left([0.T], H\right), \quad f_2 \in C\left([0.T], L^2\left(\Gamma_2\right)^n\right) \tag{3.1.15}$$

Pour l'étude du probléme P, on a besion de definir le sous-espace fermé V de H_1 par :

$$V = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

et on le munit du produit scalaire défini par 2.1.15, et de la norme définie par 2.1.16 Finallement, les conditions initiales satisfait

$$u_0 \in V \tag{3.1.16}$$

$$\beta_0 \in L^2\left(\Gamma_3\right) \text{ et } 0 \leqslant \beta_0 \leqslant 1 \text{ p.p } x \in \Gamma_3 \tag{3.1.17}$$

Le théorème de représentation de Riesz, entraine l'existence d'un élément $f(t) \in V$ tel que

$$(f\left(t\right).\mathrm{v})_V = (f_0\left(t\right).v)_H + (f_2\left(t\right).v)_{L^2(\Gamma_2)} \;\; \forall v \in V \;\text{,p.p } t \in (0,T) \tag{3.1.18}$$

Soit $j : L^\infty\left(\Gamma_3\right) \times v \times v \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle

$$j\left(\beta,u,v\right) = \int_{\Gamma_3} p_\nu\left(u_\nu\right) u_\nu d\Gamma - \int_{\Gamma_3} p_\nu\left(\beta.u_\nu\right) v_\nu d\Gamma + \int_{\Gamma_3} p_\tau\left(\beta.u_\tau\right).v_\tau d\Gamma \;\; \forall \beta \in L^\infty\left(\Gamma_3\right),\; \forall u,v \in V \tag{3.1.19}$$

Les conditions 3.1.12 et 3.1.13 entrainent que l'intégrale 3.1.19 est bien définie. Et on note que la condition 3.1.18 implique

$$f \in C\left(0,\mathcal{T},V\right) \tag{3.1.20}$$

3.2 Formulation variationnelle

En utilisant la formule de Green

$$\left(\sigma,\varepsilon\left(v\right)\right)_{\mathcal{H}} + \left(Div\sigma,v\right)_H = \int_\Gamma \sigma\nu.vd\Gamma \;\forall v \in H_1$$

on a

$$\int_\Omega \sigma\varepsilon\left(v\right)dx + \int_\Omega Div\sigma.vdx = \int_{\Gamma_1}\sigma\nu.vd\Gamma + \int_{\Gamma_2}\sigma\nu.vd\Gamma + \int_{\Gamma_3}\sigma\nu.vd\Gamma \;\; \forall v \in V$$

En utilisant 3.1.2,3.1.3,3.1.4 on obtient

$$\int_\Omega \sigma\varepsilon\left(v\right)dx + \int_\Omega f_0 vdx = \int_{\Gamma_2} f_2\left(t\right)vd\Gamma + \int_{\Gamma_3}\sigma\nu.vda \;\; \forall v \in V$$

et, puisque $\sigma\nu.v = \sigma_\nu.v_\nu + \sigma_\tau.v_\tau = -p_v\left(u_\nu\right)v_\nu + \gamma_{\mathcal{V}}\beta^2\left(-R\left(u_{\mathcal{V}}\right)\right) + v_\nu - p_\tau\left(\beta,u_\tau\right)_{V_\tau}$ il vient

$$\int_\Omega \sigma\varepsilon\left(v\right)dx = \int_\Omega f_0 vdx + \int_{\Gamma_2} f_2\left(t\right)vd\Gamma - \int_{\Gamma_3} p_\nu\left(u_v\right)u_\nu d\Gamma + \int_{\Gamma_3} p_\nu\left(\beta.u_\nu\right)v_\nu d\Gamma - \int_{\Gamma_3} p_\tau\left(\beta.u_\tau\right)v_\nu d\Gamma$$

D'après 3.1.18 et 3.1.19 nous obtenons

$$(\sigma(t), \varepsilon(v)_H + j(\beta(t), u(t), v)) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V \quad \text{p.p } t \in (0, t) \tag{3.2.1}$$

De 3.1.1, 3.1.7 − 3.1.9 et 3.2.1, on obtient la formulation variationnelle du problème P.

Problème 3.2.1 ***Problème 3.2.2*** ***(P_V)*** *: Trouver le champ des déplacements* $u : [0;T] \to V$*, et le champ des contraintes* $\sigma : [0;T] \to \mathcal{H}$*, et le champ d'adhésion* $\beta : [0;T] \to L^\infty(\Gamma_3)$ *tels que*

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t)) \qquad p.p \;\; t \in (0.T) \tag{3.2.2}$$

$$\dot{\beta} = \left(-\beta\left(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu)^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_\tau) \parallel^2\right) - \varepsilon_\alpha\right) \qquad p.p \;\; t \in \;(0.T) \tag{3.2.3}$$

$$(\sigma(t), \varepsilon(w)_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), w)) = (f(t), w)_V \quad \forall w \in V \quad p.p\ t \in (0, t) \tag{3.2.4}$$

$$u(0) \; = u_0 \qquad dans\ \Omega \tag{3.2.5}$$

$$\beta(0) = \beta_0 \qquad dans\ \Gamma_3 \tag{3.2.6}$$

Un triplet de fonctions $\{u, \sigma, \beta\}$ du problème P_V qui satisfaient 3.2.2 − 3.2.6 s'appelle solution faible du problème 3.1.1 − 3.1.9.

3.3 Existence et unicité de la solution

Notre intéret principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel P_V

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses* 3.1.10 − 3.1.13 *et* 3.1.14 − 3.1.17*, le problème variationnel* P_V *admet une solution unique* $\{u, \sigma, \beta\}$ *ayant la régularité suivante:*

$$u \in C^1(0, T, V) \tag{3.3.1}$$

$$\sigma \in C(0, T, \mathcal{H}_1) \tag{3.3.2}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T, L^\infty(\Gamma_3)) \cap Z \tag{3.3.3}$$

On conclut que, sous les hypothèses $3.1.10 - 3.1.13$ et $3.1.14 - 3.1.17$, le problème P a une unique solution faible qui satisfait $3.3.1 - 3.3.3$

Démonstration du théorème 3.3.1

La démonstration du Théorème sera conduite en plusieurs étapes. Elle est basée sur les résultats des équations d'évolution avec les opérateurs monotones et les arguments du point fixe, mais avec un choix différent de l'espace V et de la fonctionnelle j .

Nous supposons dans la suite que $3.1.10 - 3.1.13$ et $3.1.14 - 3.1.17$ sont vérifiés.

Soit $\eta \in C(0, T, V)$ donné. Dans cette première étape on considère le problème de viscosité suivant :

Problème 3.3.1 (P_V^η) *Trouver le champ des déplacements* $u_\eta : [0; T] \to V$*, tel que*

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\eta(t), v)_v = (f(t), v)_v \quad \forall v \in V \quad p.p. \ t \in (0.T) \tag{3.3.4}$$

$$u_\eta(0) = u_0 \tag{3.3.5}$$

Lemme 3.3.1 *Il existe une unique solution du problème* P_v^η *et qui satisfait* 3.3.1.

Démonstration du lemme 3.3.1

On définit l'opérateur $A : V \to V$ par

$$(Au, v) = (\mathcal{A}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \tag{3.3.6}$$

En utilisant 1.1.10,1.1.11 et 3.1.10(a) on montre que A est fortement monotone et de Lipschitz sur V.

En effet $\forall u, v, w \in V$

$$\begin{aligned} \| < Au - Av, w >_V \| &= \| < \mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v), \varepsilon(w) >_{\mathcal{H}} \| \\ &\leqslant \| \mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v) \|_{\mathcal{H}} \| \varepsilon(w) \|_{\mathcal{H}} \\ &\leqslant L_A \| u - v \|_V \| w \|_V \qquad \forall u, v \in V \end{aligned}$$

d'où A est lipschitzienne.

De même pour tout $u, v \in V$ on a

$$(Au - Av, u - v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v), \varepsilon(u) - \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \geqslant m \| \varepsilon(u) - \varepsilon(v) \|_V^2$$

d'après l'inégalité de Korn, il vient

$$(Au - Av, u - v)_V \geqslant m_{\mathcal{A}} \parallel u - v \parallel_V^2 \quad \forall u, v \in V$$

d'où est A est fortement monotone.

Compte tenu de 3.1.20 et du fait que $\eta \in C(0, T, V)$ on a $f - \eta \in C(0, T, V)$. Il s'ensuit maintenant d'un résultat classique qu'il existe une unique fonction $v_\eta \in C(0, T, V)$ qui satisfait

$$Av_\eta(t) + \eta(t) = f(t) \quad \text{p.p } t \in (0.T) \tag{3.3.7}$$

Soit $u_\eta : [0; T] \to V$ la fonction définie par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s)\, ds + u_0 \qquad \forall t \in [0.T] \tag{3.3.8}$$

Il s'ensuit de $3.3.6 - 3.3.8$ que u_η est une solution du probléme variationnel P_V^η ,et qui satisfait 3.3.1, ce qui termine la partie d'existence du lemme. La partie d'unicité résulte de l'unicité de l'équation 3.3.7 qui dépend du temps, ce qui conclut la démonstration. ■

Pour tout $\eta \in C(0, T, V)$ nous notons dans la suite par u_η la solution du probléme P_V^η, obtenue dans le lemme 3.3.1. Dans la prochaine étape, on résout l'équation 3.2.3 du champ d'adhésion dans le cas $u = u_\eta$

Alors, on considére le probléme d'évolution suivant :

Problème 3.3.2 ($\mathbf{Q}_V^n$) *: Trouver le champ d'adhésion $\beta_\eta : [0; T] \to L^\infty(\Gamma_3)$ tel que*

$$\dot{\beta}_\eta(t) = -\left(\beta_\eta(t)\left(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau(t))\|^2\right) - \varepsilon_\alpha\right) \quad p.p.t \in [0.T] \tag{3.3.9}$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0 \tag{3.3.10}$$

En utilisant la version du théorème Cauchy-Lipschitz et les arguments du point fixe de Banach on a le resultat suivant.

Lemme 3.3.2 *Il existe une unique solution du problème Q_V^n et qui satisfait* 3.3.3.

Démonstration du lemme 3.3.2

Dans un but de simplification omettons l'écriture explicite de la dépendance des diverses fonctions sur $x \in \Gamma_3$ considérons la fonctions de trace $F_\eta : [0;T] \times L^2(\Gamma_3) \to L^2(\Gamma_3)$ définie par

$$F_\eta(t,\beta) = -\left(\beta_\eta(t)\left(\gamma_\nu R_\nu(u_{\eta\nu}(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_{\eta\tau}(t))\|^2\right) - \varepsilon_\alpha\right)_+$$

pour $t \in [0.T]$ et $\beta \in L^2(\Gamma_3)$. Il s'ensuit que F_η est Lipschitz continue d'aprés le deuxème argume et cela uniformément dans le temps. D'ailleurs pour n'importe quel $\beta \in L^2(\Gamma_3)$ la fonction $t \to F_\eta(t,\beta)$ appartient à $L^\infty([0.T], L^2(\Gamma_3))$. Ainsi en utilisant une version du Théorème de cauchy-Lipschitz nous obtenons qu'il existe une fonction unique $\beta_\eta \in W^{1,\infty}([0.T], L^2(\Gamma_3))$ qui résout le probléme Q_V^n . Notons que la restrictions $0 \leqslant \beta_\eta \leqslant 1$ est incluse implicitement dans le problème varitionnel P_V. En effet 3.3.9 et 3.3.10 et de la supposition que $0 \leqslant \beta_0 \leqslant 1$ p.p. sur Γ_3. La fonction $t \to \beta_\eta(x,t)$ diminue et sa dérivée disparait quant $\beta_\eta(t)\left(\gamma_\nu R_\nu(u_{\eta\nu}(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_{\eta\tau}(t))\|^2\right) \leqslant \varepsilon_\alpha$. Combinant ces propriétés avec l'inégalité $0 \leqslant \beta(0) \leqslant 1$ nous déduisons $0 \leqslant \beta_\eta(t) \leqslant 1$ pour tout $t \in [0;T]$, p.p sur Γ_3 ce qui montre que $\beta \in Z$. ■

Maintenant, pour chaque $\eta \in W^{1,\infty}(0,T,V)$, nous notations par u_η la solution du probléme P_V^η fournie dans le Lemme 3.3.1 et par β_η la solution du probléme Q_V^n fournie dans le Lemme 3.3.2. En outre, nous appliquons le théorème de représentation de Riesz pour définir la fonction $\Lambda : [0;T] \to V$ par

$$(\Lambda_\eta(t), v)_V = (\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j\left(\beta_\eta(t), u_\eta(t), v\right) \qquad \forall v \in V \quad t \in [0.T] \qquad (3.3.11)$$

Nous avons le résultat suivant

Lemme 3.3.3 *Pour tout* $\eta \in C([0,T];V)$*; la fonction :* $\Lambda_\eta : [0;T] \to V$ *est continue.En outre, il existe un unique élément* $\eta^* \in C([0,T];V)$ *telle que* $\Lambda\eta^* = \eta^*$.

Démonstration du lemme 3.3.3

Soit $\eta \in C([0,T];V)$ et soit t_1, t_2Utilisant 3.3.10, 3.1.18,**??**, **??** et **??**on obtient :

$$\begin{aligned}\| \Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2) \|_V \leq & \| (\mathcal{G}\varepsilon u_\eta(t_1) - \mathcal{G}\varepsilon u_\eta(t_2)) \|_{\mathcal{H}} + C_0 \| P_\nu u_{n\nu}(t_1) - P_\nu(u_{n\nu}(t_1) \|_{L^2(\Gamma_3)} \\ & + C_0 \| \beta_\eta^2(t_1) R_\nu(u_{n\nu}(t_1))_+ - \beta_\eta^2(t_2) R_\nu(u_{n\nu}(t_2))_+ \|_{L^2(\Gamma_3)} \\ & + C_0 \| P_\tau\left(\beta_\eta(t_1)\right) \| R_\nu(u_{n\nu}(t_1)) \| - P_\nu\left(\beta_\eta(t_2)\right) \|\end{aligned}$$

$R_\tau(u_{n\nu}(t_1)) \|\|_{L^2(\Gamma_3)}$

de l'inégalité $0 \leq \beta_\eta \leq 1$, et des propriétés des opérateurs $\mathcal{G}$, R_ν et R_ν , nous trouvons alors que

$$\| \Lambda_\eta (t_1) - \Lambda_\eta (t_2) \|_V \leq c \| u_\eta (t_1) - \ u_\eta (t_1) \|_v \ +c \| \beta_\eta (t_1) - \beta_\eta (t_2) \|_{L^2(\Gamma_3)} . \tag{3.3.12}$$

Comme $u_\eta \in C^1 ([0,T] ; V)$ et $\beta_\eta \in W^{1,\infty} ([0,T] ; L^2 (\Gamma_3))$ nous déduisons de l 'inégalité 3.3.11 que $\Lambda\eta \in C \ ([0,T] ; V)$.

Nous déduisons maintenant des estimations pour les solutions des problèmes intermédiaires . À cet effet nous concedérons $\eta_1, \eta_2 \in C \ ([0,T] ; V)$ et nous notons

$u_{\eta_i} = u_i$, $\dot{u}_{\eta_i} = v_{\eta_i} = v_i$, $\beta_{\eta_i} = \beta_i$ pour $i = 1, 2$.Soit $t \in [0,1]$ Il s' ensuit de 3.3.8 que

$$(\mathcal{A}\varepsilon (v_1) - \mathcal{A}\varepsilon (v_2) , \varepsilon (v_1) - \varepsilon (v_2))_{\mathcal{H}} + \langle \eta_1 - \eta_2, v_1 - v_2 \rangle_v = 0 \qquad P.P \ t \in (0,1)$$

sur $[0,T]$ et, en utilisant les propriétés de l'opérateur $\mathcal{A}$, nous trouvons

$$\| v_1 (s) - v_2 (s) \|_V \leq C \| \eta_1 (s) - \eta_2 (s) \|_V \qquad \forall s \in [0;T] \tag{3.3.13}$$

D'ailleurs, comme u_1 et u_2 ont la même valeur initiale, il s'ensuit que

$$\| u_1 (t) - u_2 (t) \|_V \leq \int_0^t \| v_1 (s) - v_1 (s) \|_V \, ds \qquad \forall t \in [0;T] \tag{3.3.14}$$

Nous intégrons maintenant 3.3.8 nt avec l'état initial 3.3.9 pour obtenir

$$\beta_i (t) = \beta_0 - \int_0^t (\gamma_\nu \beta_i (t) R_\nu (u_\nu (t) R_\nu (u_\nu (t))^2 + \gamma_\tau \beta_i (t) \| R_\tau (u_\tau (t)) \|^2 - \varepsilon_a)_+ ds; \quad i = 1.2$$

Alors

$$\| \beta_1 (t) - \beta_2 (t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \| \beta_1 (t) R_\nu (u_{1\nu} (s))^2 - \beta_2 (t) R_\nu (u_{2\nu} (s))^2 \|_{L^2(\Gamma_3)} ds$$

$$+C \int_0^t \| \beta_1 (s) \| R_\tau (u_{1\tau} (s))^2 \| - \beta_2 (s) \| R_\tau (u_{2\tau} (s))^2 \| \|_{L^2(\Gamma_3)} ds$$

En utilisant la définition des opérateurs de troncation R_ν et R_ν et en écrivant que $\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2$ après quelques calculs èlèmentaires nous trouvons

$$\| \beta_1 (t) - \beta_2 (t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \left(\int_0^t \| \beta_1 (s) - \beta_2 (s) \|_{L^2(\Gamma_3)} \ ds \ + \int_0^t \ \| u_{1\nu} (s) - u_{2\nu} (s) \quad \|_{L^2(\Gamma_3)} \ ds \right) \tag{3.3.15}$$

D'autre part, en utilisant des arguments semblables à celui de la preuve 3.3.11 nous trouvons

$$\| \Lambda_{\eta_1}(t) \quad - \ \Lambda_{\eta_2}(t) \quad \|_V \leq C \ \ \| u_1(t) - u_2(t) \|_V + \| \beta_1(t) - \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \tag{3.3.16}$$

Nous combinons les inégalités 3.3.12-3.3.15 pour obtenir

$$\| \Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2 \|_V \leq C \int_0^t \| \eta_1(s) - \eta_2(s) \|_V \, ds; \quad \forall t \in [0,T]$$

En réitérant n fois l'inégalité on obtient :

$$\| \Lambda^n\eta_1 - \Lambda^n\eta_2 \|_{C(0,T,V)} \leq \frac{(CT)^n}{n!} \| \eta_1 - \eta_2 \|_{C(0,T,V)},$$

ce qui implique que pour n suffisamment grand une puissance Λ^n de Λ est une contraction dans l'espace de Banach $C\ (0,T,V)$,ce qui conclut la preuve. ∎

Démonstration du théorème 3.3.1

Existence: Soit $\eta^* \in C\ (0,T,V)$ le point fixe de Λ défini par 3.3.10, et soit u ,β la solution des problèmes $P\,_V^\eta$ et Q_V^η pour $\eta = \eta^*$c'est-à-dire $u = u_{\eta^*}, \beta = \beta_{\eta^*}$.Clairement, les égalités 3.2.2-3.2.5 viennent des problèmes $P\,_V^\eta$ et Q_V^η. Nous désignons par σ la fonction donnée par 3.2.2. Il résulte que ,3.2.2, et 3.2.3et 3.2.5 sont vérifiées.

De plus $\Lambda\eta^* = \eta^*$, on déduit

$$(\Lambda\eta^*(t), v) = (\eta^*(t), v)\, \forall v \in v, \quad P.P \ \ t \in [0,T]$$

et gardant en tête 3.2.4,3.3.10 on déduit que l'égalité 3.2.4 est satisfaite.

La régularité 3.2.6 s'ensuit de 3.1.19 pendant que la régularité sont 3.3.2 des conséquences du lemme .En outre, puisque $u \in C\ ^1(0,T,V)$, il s'en suit de 3.2.2

et 3.1.10, 3.1.11 que $\sigma \in C\ (0,T,\mathcal{H})$ Choisissant maintenant $\omega = \varphi \in D\ (\Omega)^n$ dans 3.2.2 et utilisant 3.1.17 on trouve

$$Div\ \sigma(t) + f_0(t) = 0 \qquad P.P \quad t \in [0,T] \tag{3.3.17}$$

Maintenant 3.2.6 et 3.3.16 impliquent que $Div\ \sigma \in C\ (0,T,H)$ ce qui implique $\sigma \in C$ $(0,T,\mathcal{H}_1)$

On conclut que le triplet $\{u,\sigma,\beta\}$ est une solution du problème et 3.1.1-3.1.9 et qui satisfait 3.2.6-3.3.2 ce qui conclut l'existence de la solution.

Unicite

La partie de l'unicité est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ et de l'unicité des problèmes $P\,_V^\eta$ et Q_V^η.A cet effet, soit $\{u, \sigma, \beta\}$ la solution du problème 3.2.2-3.2.5 ayant la régularité 3.2.6-3.3.2, et on considère un élément $\eta \in ([0,T]\,;V)$ défini par

$$\eta\,(t) = f\,(t) - Au\,(t) \tag{3.3.18}$$

Il s'en suit de 3.3.5-3.3.7 et 3.3.17

$$u = u_\eta \tag{3.3.19}$$

Et d'après le lemme, il existe une unique solution β_η du problème Q_V^η et qui satisfait 3.3.2, 3.2.3 et 3.2.4 impliquent que

$$\beta = \beta_\eta \tag{3.3.20}$$

Nous utilisons maintenant 3.3.10 ,3.2.2,et 3.2.4 pour voir que

$$(\Lambda\eta\,(t)\,, v) = (\eta\,(t)\,, v) \qquad \forall v \in v, P.P \quad t \in [0,T]$$

Ce qui implique que $\Lambda\eta = \eta$. Comme Λ a un point fixe unique, on conclut que

$$\eta = \eta^* \tag{3.3.21}$$

La partie d'unicité du théorème est maintenant une conséquence des égalités 3.3.18-3.3.20 et de 3.2.1 ■

Bibliographie

[1] A. Matei, " Modélisation Mathématique en Mécanique du Contact", Thése de Doctorat de l'Université de Perpignan (2002).

[2] H. Brézis, Equations et Inéquations non Linéaires dans les Espaces Vectoriels en Dualité, Ann. Inst. Fourrier, 18 (1968), p 115-175.

[3] M. Cocu and R. Rocca, " Existence Results for Unilateral Quasistatic Contact Problems with Friction and Adhesion ", Math. Model. and Numer. Anal. 34, (2000), 981-1001.

[4] M. Frémond, "*Adhérence des Solides*", Journal. Mécanique Théorique et Appliquée 6 (1987), 383-407.

[5] M. Sofonea and A. Matei, " *An Elastic Contact Problem with Adhesionand Normal Compliance*" preprint.

[6] O. Chau, J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, " *Variational and Numerical Analysisofa QuasistaticViscoelastic contact problem with adhesion*" , J. Comput. Appl. Math, 159 (2003), 431-465.

[7] O. Kavian, "*Introduction àlathéorie despoints critiques et Applications aux équations elliptiques*" , Springer-Verlag (1993).

[8] P. A. Raviart et J. M. Thomas, "Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles", Masson, Paris (1992).

[9] P. G. Ciarlet, " *Elasticité Tridimensionnelle*" , Masson, Paris (1986).

[10] R. S. Adams," *Sobolev spaces*" , Academic press, New York (1975).

[11] V. Barbu, “ Non linear Semigroups and Differential Equations in Banach spaces”, Editura Academiei, Bucharest-Noordhoff, Leyden (1976).

[12] W. Han, M. Sofonea, “Numerical Analysis of a Frictionless Contact Problem for Elastic-Viscoplastic Matriels ” Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 190(2000), 179-191.

ملخص

في هذه المذكرة درسنا وجود ووحدانية الحل لمسألة حديه في ميدان ميكانيك التواصل. المسالة هي تواصل بتلاصق بين جسم مرن وقاعدة. استعملنا صيغة Green **للحصول على الشكل التغايري للمسألة** ثم برهنا عن وجود ووحدانية الحل بالحجج التالية : **معادلة** تغايريه **مرتبطة بالزمن, معادلة** تفاضلية ونقطة ثابتة.

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites en mécanique de contact. Le problème est un contact avec adhésion entre un corps élastique et une base. On a idilise la formule de green pour obtenir la formulation variationnelle du problème–puis. On a moutré l'escistnce et l'unicité de la solution par les argrument suivant: équation différentielle et point fixe .

Motsclés: équation variationnelle dépendent du temps, équation difféнentielle, point fixe .

Abstract

In this thesis, we studied the existence and uniqueness of the solution of boundary contact problem. The problem is a contact with adlosion between an elastic body and a base. We used the green 's formula for obtain the variational founcelation of the problem and we proved the existence ce and uniqueness of the solution by the follouing argruments: variational equation time dependent, differential equation and fixed point.

Key words: variational equation time dependent, differential equation, fixed point.