REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR D'EL OUED
FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES
Département De Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales

Thème

Existence et multiplicité des solutions d'une classe d'équations intégrales et applications

Présenté par : Aichouche Nesrine Lamia

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mansour Abdelouahab	Président	Univ. El Oued
Guedda Lamine	Rapporteur	Univ. El Oued
Hariz Bekker Lourabi	Examinateur	Univ. El Oued

Promotion : 2021/2022

Remerciements

Avant toutes chose, je tiens à remercier **«Allah»** le tous puisant, pour m'avoir donné la force et la patience.

J'exprime ma profonde gratitude et mes remerciements :

À mon encadreur de mémoire **"Dr.Guedda Lamine"** Maitre de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour avoir accepté de m'encadrer, pour ses appréciations compétentes, son enseignement, son support, ses encouragements, ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Je tiens également à remercier les membres de jury pour l'honneur qu'ils mon fait en acceptant de siéger à ma soutenance. Un remerciement spécial et sincère à **"mes parents".**

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de ma famille.

mes sentiments de reconnaissance et mes remerciements chaleureux vont également à mes camarades de la promotion 2022 de Mathématiques et tous mes amis.

Dédicace

C'est avec l'aide de **DIEU** tout puissant que ce modeste travail a pu être réalisé,
DIEU qui m'a donné fois, raison et lucidité.
Merci mille fois et que **«Allah»** vont garde et protège
à mes chers parents **" Aichouche El Habib "** et **" selami . O "** pour leurs amours, leurs patience et leur encouragement qui n'a jamais cassé de me convenir durant mes années d'étude,
Mes sœurs **" Merieme, Amina, Hadjer "**.
Mess frère **" Riad, Tarek "**.
Mes proches amis.
Toute ma famille **" Aichouche et selami "**.
Tous mes collègues de ma promotion **2022**.

Table des matières

Notations générales

ε, δ	: Paramètres positifs.
$\varnothing$	: L'ensemble vide.
$\mathbb{R}$	: L'ensemble des nombres réels.
$\overline{\mathbb{R}}$	: La droite réelle achevée $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$.
$\mathbb{R}^n$	: L'espace euclidien de dimension n $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R})$ (n fois).
$\mathbb{R}_+$	: L'ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{N}$	: L'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{C}$	: L'ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{K}$	: Le corps $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.
$C(E, F)$	: L'espace des fonctions continues définies de E dans F.
$\mathscr{L}(H)$	: L'espace des applications linéaires et continues de H dans H.
$\mathscr{L}(E, F)$	: L'espace des applications linéaires et continues de E dans F.
$L(E, F)$	: L'espace des applications linéaires de E dans F.
E'	: Le dual topologique de E $(E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K}))$.
E''	: Le bidual de E $(E'' = \mathscr{L}(E', \mathbb{K}))$.
H	: Espace de Hilbert.
Ω	: Un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
$d(.,.)$	: distance.
μ	: Mesure.
Σ	: Tribu.
(E, Σ)	: Espace mesurable.
(E, Σ, μ)	: Espace mesuré.
J_x	: Application canonique.
$E \hookrightarrow F$	: L'injection continue.
$E \underset{c}{\hookrightarrow} F$	: L'injection compacte.
$\bigcap$	: Intersection.
$\bigcup$	: Réunion.
$\bar{A}$	: L'adhérence de A.

$B(x,\delta)$	: La boule ouverte de centre x et rayon δ.
∂B	: La frontière de B.
$\lvert . \rvert$	: Valeur absolue où module.
$\rightharpoonup$	: Convergence faible.
$\rightarrow$	: Convergence forte.
$\langle , \rangle$ ou $(,)$	: Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.
Γ	: Un sous-ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^n$.
$C(\Gamma)$	: L'espace de Banach réel des fonctions continues.
$\lVert . \rVert$	: Norme dans l'espace $L^2(\Gamma)$.
$\lVert . \rVert_C$	: Norme dans l'espace $C(\Gamma)$.
$\mathrm{mes}(\Gamma)$	: Mesure Γ.
(PS)	: Condition de Palais-Smale.
$(PS)_c$	: Condition de Palais-Smale au niveau c.
T	: L'opérateur linéaire.
I_H	: L'opérateur identité.
O_H	: L'opérateur nul.
T^*	: L'opérateur adjoint de l'opérateur T.
T^{-1}	: L'inverse d'un opérateur T.
$\sigma(T)$	: L'ensemble spectrale de T.
Id	: Application identité.
$T^{1/2}$	: La racine carrée d'un opérateur positif T.
$\mathcal{K}(E,F)$	: L'espace des opérateurs compacts.
$\inf(A)$	: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x < \inf(A) + \varepsilon$.
$\sup(A)$	: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ \sup(A) - \varepsilon < \sup(A)$.
$:=$	: Par définition.
p.p	: Presque partout.
i.e.	: C'est-à-dire.
ssi	: Si et seulement si.

Introduction générale

Une équation intégrale est définie comme une équation dans laquelle la fonction inconnue $u(t)$ à déterminer apparait sous le signe intégral. Le sujet des équations intégrales est l'un des outils les plus utiles en mathématiques pures et appliquées. Il a d'énormes applications dans de nombreux problèmes physiques avec des conditions initiales où aux limites associés à des équations différentielles ordinaires (EDO), fractionnaires (EDF) où à dérivées partielles (EDP).

Le développement de la science a conduit à la formation de nombreuses lois physiques, qui lorsqu'ils sont reformulés sous forme mathématique, apparaissent souvent comme des équations différentielles avec des conditions initiales (ou au bord) c'est pourquoi les équations différentielles et par suite les équations intégrales jouent un rôle très important dans la résolution de problèmes pratiques. Par exemple, la loi de Newton, selon laquelle le taux de variation de l'impulsion d'une particule est égale à la force agissant sur elle, peut-être traduite en langage mathématique comme équation différentielle.
De même, les problèmes survenant sur les circuits électriques, la cinétique chimique et le transfert de chaleur dans un milieu peuvent tous être représentés mathématiquement sous forme d'équations différentielles.

Une forme typique d'une équation intégrale d'inconnue $u(t)$ est de la forme :

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_{a(t)}^{b(t)} k(t,s)\, u(s)\, ds, \tag{P}$$

où $k(t,s)$ est appelé le noyau de l'équation intégrale (P), $a(t)$ et $b(t)$ sont les bornes d'intégration. On observe facilement que la fonction inconnue $u(t)$ apparaît sous le signe intégral. Il est à noter ici que le noyau $k(t,s)$ et la fonction $f(t)$ dans l'équation (P) sont des fonctions données, et λ est un paramètre constant.
Le premier objectif est de déterminer la fonction inconnue $u(t)$ qui satisfait l'équation (P) en utilisant un certain nombre de techniques de résolution.
On parle généralement de deux types d'équations intégrales, ce sont, les équations intégrales de Fredholm (Ivare Fredholm 1866 -1927) et de Volterra (Vito Volterra 1860-1940).

Elles sont importantes dans plusieurs domaines de physique : les équations de diffusion, le problème à frontière libre, les problèmes de contactes et de l'astrophysique. L'existence de solutions aux équations intégrales a été largement étudiée.
Depuis que A. Hammerstein a publié son article ([2]) en 1930, l'équation intégrale non linéaire de Hammerstein est devenue l'un de plus importants domaines d'application des concepts, techniques et méthodes d'analyse fonctionnelle non linéaire.
Dans ce mémoire ; nous étudions l'existence et la multiplicité des solutions de l'équation intégrale non linéaire de type Hammerstein suivante

$$u(t) = \int_{\Gamma} k(t,s) f(s,u(s)) ds \quad , \quad t \in \Gamma, \tag{P'}$$

où Γ est un sous-ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^n$ avec $\text{mes}(\Gamma) > 0$, qui peut être reformuler comme $K\mathbf{f}u = u$ dans l'espace de Hilbert réel $L^2(\Gamma)$. Sous certaines conditions sur l'opérateur linéaire K, on établit des conditions sur $\mathbf{f}$ capables de garantir que l'équation (P') a au moins une solution, une solution unique où une infinité de solutions.
Pour discuter de ce problème, l'approche utilisée est basée sur le principe de l'opérateur fortement monotone et la théorie des points critique. En argument, l'opérateur racine quadratique $K^{1/2}$ et ses propriétés jouent un rôle important dans la résolution.
Ce mémoire se décompose de quatre chapitres partagés comme suit :
Chapitre 1 : Nous présentons des notions préliminaires nécessaires et rappels pour la bonne compréhension de ce mémoire. Ce chapitre est divisé en trois sections. La première section présente des notions topologiques concernant les différents espaces comme : l'espace (métrique, vectoriel normé, Banach, Hilbert, mesurable, Lebesgue ...). Dans la deuxième section nous rappelons quelques inégalités et théorèmes utilisés dans ce travail. La troisième section présente quelques notions de l'analyse fonctionnelle importante par exemple : théorie des points critiques, condition de Palais-Smale et lemme du col.
Chapitre 2 : Ce chapitre est partagé en deux sections. La première section est consacré au rappels sur la théorie des opérateurs linéaires continus sur un espace de Hilbert, comme opérateur auto-adjoint, positif, racine carrée d'un opérateur positif et opérateur compact, ... et théorème Hilbert-Schmidt, dans la deuxième section nous présentons une application sur un type d'opérateurs compacts auto-adjoints.
Chapitre 3 : L'objet du troisième chapitre est l'étude de l'existence et la multiplicité des solutions pour l'équation intégrale non linéaire de Hammerstein dans l'espace de Hilbert réel $L^2(\Gamma)$. Sous certaines conditions sur l'opérateur linéaire K, on établit des conditions sur la non linéarité f avec lesquelles l'équation admet au moins une solution, une unique solution où une infinité de solutions.
Dans le dernier chapitre : Nous représentons des applications sur les résultats obtenues

dans le 3 ème chapitre à un problème aux limites de deuxième ordre et quatrième ordre.
À la fin de ce document, on donne une conclusion et la liste de références utilisée.

Chapitre 1

Préliminaires et outils de base

Dans ce chapitre, pour une meilleure présentation des démonstrations des résultats de ce travail, nous rappelons quelques définitions et résultats sur des notions topologiques où de l'analyse fonctionnelle.

1.1 Notions topologiques

1.1.1 Espace métrique

Définition 1.1.1. *[20]*

Soit E un ensemble non vide. On appelle distance (ou métrique) sur E, toute application : $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) \geq 0 \quad et \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation) ;

(ii) $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = d(y, x)$ (symétrique) ;

(iii) $\forall x, y, z \in E, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Dans ce cas, on dit que (E, d) est un espace métrique et on appelle $d(x, y)$ la distance entre x et y.

Exemple 1.1.

Soit d une application définie par :

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\to d(x, y) = |x^3 - y^3|. \end{aligned}$$

• On peut vérifier facilement que d remplit les trois conditions mentionnées et alors c'est bien une distance sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1.1.1. *[20]*

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Pour tout $x, y, z \in E$, on a $|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$.
2. Pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in E$, on a $d(x_1, x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1})$.

Démonstration.

1. D'après les propriétés (ii) et (iii), on a $d(x,z) \leq d(x,y) + d(z,y)$ et $d(z,y) \leq d(x,z) + d(x,y)$, d'où $d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y)$ et $d(z,y) - d(x,z) \leq d(x,y)$.
   Par conséquent, on a $|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$.
2. On appelle I_n l'inégalité que l'on cherche à montrer. Il est clair que I_1 est vraie.
   Supposons que I_n est vraie, i.e., que l'on a $d(x_1, x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1})$. Par l'inégalité triangulaire, on a $d(x_1, x_{n+2}) \leq d(x_1, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})$, d'où :

$$d(x_1, x_{n+2}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+1} d(x_i, x_{i+1}).$$

   Donc I_{n+1} est vraie. Par conséquent, I_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

La démonstration est terminée. ■

Exemple 1.2.

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, l'application :

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\to d(x,y) = |x-y|, \end{aligned}$$

définit une distance, appelée distance usuelle sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.3.

Soient E un ensemble, $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une application définie par :

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

est une distance appelée discrète, dans ce cas le couple (E, d) est appelé espace métrique discret.

Remarque 1.1. *[20]*

Sur l'espace $\mathbb{R}^n$, on peut définir plusieurs distances faisant intervenir les distances entre les composantes.
Soient $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit,

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|, \\ d_2(x, y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\ d_\infty(x, y) &= \max_{1\leq i\leq n} |y_i - x_i|. \end{aligned}$$

1.1.2 Espace vectoriel normé

Définition 1.1.2. ***(Norme)****[15]*

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle une norme sur l'espace E toute application notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que :

(i) $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (séparation) ;

(ii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité) où $|\lambda|$ désigne respectivement la valeur absolue si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou le module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$;

(iii) $\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.1.3. ***(Espace normé)****[15]*

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\| \cdot \|$.
La proposition suivante précise en quel sens les espaces vectoriels normés sont des espaces métriques.

Proposition 1.1.2. *[15]*

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé. La distance associée à la norme est l'application :

$$\begin{aligned} d : E \times E &\to \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\to \|x - y\|. \end{aligned}$$

Démonstration.

(i) Pour $(x, y) \in E^2,\ d(x, y) = 0 \Rightarrow \|x - y\| = 0 \Rightarrow (x - y = 0) \Rightarrow (x = y)$.

(ii) Pour $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned} d(y,x) &= \|y - x\| \\ &= \| -(x-y)\| \\ &= |-1|\|x-y\| \\ &= \|x-y\|. \end{aligned}$$

(iii) Pour $(x, y, z) \in E^3$,

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \|x - z\| \\ &= \|(x-y)+(y-z)\| \\ &\leq \|x-y\| + \|y-z\| \\ &= d(x,y)+d(y,z). \end{aligned}$$

La démonstration est terminée. ■

Définition 1.1.4. *[20]*

Deux normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ définies sur l'espace vectoriel E sont dites équivalentes s'ils existent deux constantes positives α, β tels que,

$$\alpha\|.\|_2 \leq \|.\|_1 \leq \beta\|.\|_2.$$

Par exemple, on définit les normes $\|x\|_1, \|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$ pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par,

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + \cdots + |x_n|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}, \\ \|x\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} \{|x_1| + \cdots + |x_n|\}. \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}^n$ les trois normes $\|x\|_1, \|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$ sont équivalentes.

Théorème 1.1.1. *[20]*

Généralement, dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

1.1.3 Espace de Banach

Définition 1.1.5. ***(Suite convergente)****[20]*

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, $(x_n)_n \in E$ une suite de points de E et $x \in E$. On dit que la suite $(x_n)_n \in E$ converge vers x si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}:\ n \geq N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon,$$

et on écrit $x_n \to x$.

Définition 1.1.6. ***(Convergence faible)[9]***

On dit qu'une suite $(x_n) \subset E$ converge faiblement vers x, si

$$\forall f \in E',\ (f, x_n) \longrightarrow (f, x),$$

et on écrit $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition 1.1.3. *[9]*

Lorsque E est de dimension finie, une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

Définition 1.1.7. ***(Suite de Cauchy)[20]***

Une suite $(x_n)_n \in E$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Proposition 1.1.4. *[20]*

1. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.

Remarque 1.2. *[20]*

Il est aisé de voir que toute suite convergente est de Cauchy. L'inverse n'est pas forcément vérifié, puisqu'il existe des suite de Cauchy qui ne convergent pas. Citons comme exemple.

Exemple 1.4.

Dans $E =]-1, 1[$, la suite $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_n$ est de Cauchy puisque la même suite converge vers 1 dans $\mathbb{R}$, mais $1 \notin E$.

Définition 1.1.8. ***(Espace complet)[20]***

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ d'éléments de E est convergente dans E : Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ :\ \forall p, q \geqslant N_\varepsilon,\ \text{on a}\ \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Implique l'existence d'un élément $x \in E$, tel que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$

Définition 1.1.9. ***(Espace de Banach)[25]***

Tout espace vectoriel normé complet est dit espace de Banach.

Exemple 1.5.

1. Tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach.
2. $(C([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

1.1.4 Espace de Hilbert

Définition 1.1.10. ***(Produit scalaire)[11]***

Soit H un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur H est une forme hermitienne définie positive sur H, qui vérifie les conditions suivantes :

(i) $(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in H \quad$ (positive) ;

(ii) $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad$ (définie positive) ;

(iii) $\overline{(x,y)} = (y,x) \quad \forall x,y \in H \quad$ (symétrie hermitienne) ;

(iv) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z) \quad \forall x,y,z \in H \quad$ (sesquilinéaire) ;

(v) $(\lambda x,y) = \lambda(x,y) \quad \forall x,y \in H \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Alors (x,y) est dit produit scalaire de x et y, et on note par $(,)$ ou $\langle .,. \rangle$.

Définition 1.1.11. *[11]*

On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On pose $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. On peut démontrer que cette application définit une norme sur l'espace préhilbertien H.

Définition 1.1.12. ***(Espace de Hilbert)[11]***

On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Définition 1.1.13. ***(Famille orthonormale)[20]***

Soient H un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et $x,y \in H$. On dit que x et y sont orthogonaux si $(x,y) = 0$.

Définition 1.1.14. *[20]*

Soient $\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$ une famille d'éléments de H, on dit que la famille $\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$ est orthonormale, si

$$(e_i,e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i = j, \\ 0, & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Théorème 1.1.2. *[20]*

Soient H un espace de Hilbert, (e_n) une famille orthonormée dans H. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La suite $\{e_n, n \geq 1\}$ est une base hilbertienne de H.
2. Tout élément x de H s'écrit sous la forme
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n.$$
3. Quels que soient x, y dans H, on a
$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) \overline{(y, e_n)}.$$
4. Pour tout $x \in H$, on a l'égalité de Parseval
$$\|x\|^2 = \sum_{n \geq 1} |(x, e_n)|^2 .$$

1.1.5 Espace mesurable

Définition 1.1.15. *[8]*

Soit E un ensemble non vide. On appelle tribu ou σ-algèbre sur E une famille Σ de parties de E possédant les propriétés suivantes :

(i) $E \in \Sigma$;

(ii) Si $A \in \Sigma$, alors $E \backslash A \in \Sigma$;

(iii) Si $A_n \in \Sigma$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

• On appelle espace mesurable tout couple (E, Σ) formé par un ensemble E et une tribu Σ sur E.

• Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une algèbre sur E.

• Si E un espace topologique la tribu Borélienne sur E notée $\mathcal{B}(E)$ est la plus petite tribu contenant la topologie de E.

Définition 1.1.16. *[8]*

Soit (E, Σ) un espace mesurable. On appelle mesure positive toute application μ : $\Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) μ est σ-additive, c'est à dire que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Σ disjoints deux à deux (i.e., $A_n \cap A_m = \varnothing$, si $n \neq m$), on a

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right).$$

• Le triplet (E, Σ, μ) est appelé espace mesuré.

1.1.6 Espaces de Lebesgue $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$

Définition 1.1.17. *[10]*

Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On note par $L^p(\Omega)(1 \leqslant p < \infty)$ la classe de toute les fonctions mesurables f définies dans Ω, où

$$\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty.$$

La fonctionnelle $\|.\|_p$ définie par :

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}},$$

est une norme dans $L^p(\Omega)$, pour $1 \leqslant p < \infty$.

• Dans le cas particulier, $p = 2$, pour u et v données dans $L^2(\Omega)$, l'application

$$(u, v) \to (u, v) := \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

définit un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$, dont la norme induite est définie par :

$$\|f\| = \left[\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.1.18. *[10]*

On pose :

$$L^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable}, \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leqslant C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

La fonctionnelle $\|.\|_{L^\infty}$ définie par :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C,\ |f(x)| \leqslant C \text{ p.p sur } \Omega\},$$

est une norme pour $p = \infty$.

Remarque 1.3.

Si $f \in L^\infty$ on a

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty} \quad \text{p.p sur } \Omega.$$

Lemme 1.1.1. *[25]*

- L'espace $L^p(\Omega)$, muni de la norme $\|.\|_p$ est un espace de Banach.
- L'espace $L^2(\Omega)$, muni de la norme $\|.\|_2$ est un espace de Hilbert.

1.1.7 Espace réflexif - Espace séparable

Définition 1.1.19. ***(Injection canonique)*** *[9]*

Soit E un espace de Banach.
On appelle injection canonique l'application définie comme suit :

$$\begin{aligned} J : E &\to E'' \\ x &\to J(x), \end{aligned}$$

où $(J(x), f) = (f, x), \quad \forall f \in E'$.
Autrement dit :

$$\begin{aligned} J(x) : E' &\to \mathbb{R} \\ f &\to J(x)(f) = f(x). \end{aligned}$$

Définition 1.1.20. *[9]*

On dit que E est réflexif, si $J(E) = E''$ (i.e., l'injection canonique J est surjective de E sur E'').

Théorème 1.1.3. *[9]*

Si E est un espace de Banach alors :

$$E \text{ réflexif } \Leftrightarrow E' \text{ est réflexif.}$$

Remarque 1.4.

L^2 est réflexif.

Définition 1.1.21. *[9]*

On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense, c'est-à-dire ($\bar{D} = E$ et D dénombrable).

Théorème 1.1.4. *[9]*

Soit E un espace de Banach, si E' est séparable alors E l'est aussi. La réciproque est en général fausse.

Corollaire 1.1.1. *[9]*

Soit E un espace de Banach alors :

$$[E \text{ est réflexif et séparable}] \Leftrightarrow [E' \text{ est réflexif et séparable}].$$

Théorème 1.1.5. *[9]*

1. L'espace $L^p(\Omega)$ est de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
2. L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.
3. L'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

1.2 Inégalités et théorèmes utiles

1.2.1 Inégalité de Hölder

Théorème 1.2.1. *[9]*

Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on note q l'exposant conjugué de p, c'est-à-dire, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$. Alors

(i) $fg \in L^1(\Omega)$ et

(ii) $\int_\Omega |fg| \leq \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q$.

1.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.2.2. *[9]*

Soient f, $g \in L^2(\Omega)$. Alors, nous avons que

$$\int_\Omega |fg| \leq \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2.3 Théorème de Fubini

Théorème 1.2.3. *[9]*

Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, on suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, alors pour presque tout $x \in \Omega_1$:

$$F(x,y) = L^1_y(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$:

$$F(x,y) = L^1_x(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} F(x,y)dy \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

1.2.4 Partie compacte

Définition 1.2.1. *[15]*

Soit (E, τ) un espace topologique. Un recouvrement ouvert d'une partie A de E est une famille $(\theta_i)_{i\in \mathrm{I}}$ d'ouverts vérifiant :

$$\mathrm{A} \subset \cup_{i\in\mathrm{I}}\theta_i, \quad \mathrm{I} \subset \mathbb{N} \text{ quelconque.}$$

Définition 1.2.2. ***(Ensemble compact)****[15]*

Soit (E, d) espace métrique.

1. On dit que (E, d) est un espace compact si et seulement si de tout recouvrement de E par des ouverts de E, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. En d'autres termes, si $E = \cup_{i\in\mathrm{I}}\theta_i$ où les θ_i sont des ouverts, il existe J fini, $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ telle que $E = \cup_{i\in\mathrm{J}}\theta_i$.
2. Une partie A de E est compacte si et seulement si de tout recouvrement ouvert de A par des ouverts de E, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Définition 1.2.3. *[15]*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ espace normé. Une partie A de E est dite compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous suite convergente dans A.

Exemple 1.6.

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie et en particulier dans $\mathbb{R}$ les parties compactes sont les parties fermées bornées.

Définition 1.2.4. ***(Ensemble relativement compact)****[15]*

Soient E espace topologique, K un sous espace de E, on dit que K est relativement compact si $\overline{K}$ est compact.

Définition 1.2.5. ***(Ensemble borné)****[9]*

Soient E un espace vectoriel normé, $K \subset E$. On dit que K est borné si :

$$\exists r > 0, \text{ telle que : } K \subset B(0, r).$$

1.2.5 Injections continues - Injections compactes

Définition 1.2.6. *(Injections continues)[9]*

Soient E, F deux espaces de Banach.
On dit que E s'injecte d'une façon continue dans F et on note $E \hookrightarrow F$ si :

(i) $E \subset F$;

(ii) $j : E \longrightarrow F$ est continue.

$$\|u\|_F \leqslant c\|u\|_E.$$

Définition 1.2.7. *(Injections compactes)[9]*

Soient E, F deux espaces de Banach.
On dit que E s'injecte d'une façon compacte dans F et on note $E \underset{c}{\hookrightarrow} F$ si $E \hookrightarrow F$ d'une façon continue et tout borné de E est relativement compacte dans F.

1.2.6 Théorème d'Arzela-Ascoli

Définition 1.2.8. *(Applications lipschitziennes)[25]*

Une application $f : (E, d_E) \longrightarrow (F, d_F)$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y).$$

Si de plus $k < 1$, on dit que f est une contraction.

Définition 1.2.9. *(Semi-continuité)[14]*

On a les définitions suivantes :

1. Une fonctionnelle $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement **(s.c.i.)** au point x_0, si pour toute suite $(x_n) \subset E$ telle que $x_n \longrightarrow x_0$, on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n).$$

2. On dit que f est faiblement semi-continue inférieurement **(f.s.c.i.)** au point x_0 si pour toute suite $(x_n) \subset E$ telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n).$$

Définition 1.2.10. ***(Continuité)[25]***

Soient (E, d_E), (F, d_F) deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ est une application, on dit que f est continue en $x_0 \in E$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in E,\ d_E(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Remarque 1.5.

Une application f est continue sur E si et seulement si elle est continue en tout point x_0 de E.

Définition 1.2.11. ***(Équicontinuité)[15]***

Soient (E, d_E), (F, d_F) deux espaces métriques : $\mathcal{F} \subset C(E, F)$ et $x_0 \in E$. On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue en x_0, si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E,\ d_E\left(x_0, x\right) < \delta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{F} : d_F\left(f\left(x_0\right), f(x)\right) < \varepsilon.$$

On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue sur E. S'il est équicontinue en tout points de E.

Théorème 1.2.4. ***(Ascoli-Arzela)[4]***

Soient $C(K, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues, $M \subset C(K, \mathbb{R})$. Alors M est relativement compact dans $C(K, \mathbb{R})$ ssi :

1. M est uniformément borné, i.e., $\exists c > 0, \forall x \in M,\ |x(t)| \leqslant c,\ \forall t \in K.$
2. M est équicontinue, i.e., pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, telle que :
   $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon,\ \forall t_1, t_2 \in K,\ \forall x \in M.$

1.3 Quelques notions de l'analyse fonctionnelle

1.3.1 Dérivée au sens de Fréchet

Définition 1.3.1. *[24]*

Soient E, F deux espaces vectoriels normés U un ouvert de E, a un point de U et $f : U \to F$ une application. On dit que f est différentiable en a s'il existe $g_a \in \mathscr{L}(E, F)$ et une application o définie au voisinage de 0_E telles que, pour tout h assez proche de 0_E :

$$f(a + h) - f(a) = g_a(h) + o(h),$$

et
$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|o(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$
L'application g_a est appelée la différentielle (au sens de Fréchet) de f en a et noté $Df(a)$.

Remarque 1.6. *[24]*

La différentielle de f en a est unique.

Définition 1.3.2. *[24]*

On dit qu'une application f est différentiable sur un ouvert U si elle est différentiable en tout point $x \in U$. Dans ce cas, on appelle différentielle de f l'application

$$\begin{aligned} Df : U &\to \mathscr{L}(E, F) \\ x &\mapsto Df(x). \end{aligned}$$

Si de plus Df est continue, on dit que f est continûment différentiable, où que f est de classe C^1.

Proposition 1.3.1. *[24]*

Si $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset E \to F$ sont différentiables respectivement sur des ouverts U et V d'un même espace E, alors leur somme $f + g$ est différentiable sur $U \cap V$ et
$$\mathrm{d}(f + g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g,$$
c'est-à-dire que pour tout $x \in U \cap V$ et pour tout $h \in E$,
$$\mathrm{d}(f + g)(x) \cdot h = \mathrm{d}f(x) \cdot h + \mathrm{d}g(x) \cdot h.$$
De plus, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est différentiable et
$$\mathrm{d}(\lambda f) = \lambda \mathrm{d}f.$$

Théorème 1.3.1. *[24]*

Si $f : U \subset E \to F$ est différentiable en un point $x \in U$ et si $g : V \subset F \to G$ est différentiable en $f(x) \in V$, alors la fonction composée $g \circ f : U \subset E \to G$ est différentiable en x et
$$\mathrm{d}(g \circ f)(x) \cdot h = \mathrm{d}\, g(f(x)) \cdot (\mathrm{d}f(x) \cdot h) \quad \forall x \in U \quad \textit{et} \quad \forall h \in E.$$

Autrement dit
$$\mathrm{d}(g \circ f)(x) = \mathrm{d}g(f(x)) \circ \mathrm{d}f(x) \quad \forall x \in U.$$

Théorème 1.3.2. *[5]*

Soit E un espace de Banach réel réflexif. Si la fonctionnelle $J : E \to \mathbb{R}$ est semi-continue faiblement inférieure et satisfait $\lim_{\|x\| \to \infty} J(x) = +\infty$, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $J(x_0) = \inf_{x \in E} J(x)$. De plus, si J est aussi Fréchet différentiable sur E, alors $J'(x_0) = 0$.

Notations :

Soit $C^1(E, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctionnelles différentiables au sens de Fréchet et leurs dérivées de Fréchet sont continues sur E.

1.3.2 Théorie des points critiques

Définition 1.3.3. ***(Point critique)****[14]*

Soit Ω un ouvert d'un espace de Banach E. Supposons que $J \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. On dit que $u \in \Omega$ est un point critique de J, si :

$$dJ(u) = 0.$$

Dans ce cas

$$c = J(u),$$

s'appelle une valeur critique de la fonctionnelle J. Un point non critique s'appelle point régulier.

1.3.3 Condition de Palais-Smale

Définition 1.3.4. *[14]*

Soit $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe $C^1(E, \mathbb{R})$ sur E. On dit qu'une suite (u_n) est de Palais-Smale pour la fonctionnelle J si

(i) $J(u_n)$ est bornée dans $\mathbb{R}$;

(ii) $J'(u_n) \longrightarrow 0$ dans E'.

Définition 1.3.5. *[14]*

Soit $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe $C^1(E, \mathbb{R})$. On dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (**PS**), si toute suite (u_n) de E telle que

(i) $J(u_n)$ est bornée dans $\mathbb{R}$;

(ii) $J'(u_n) \longrightarrow 0$ dans E',

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

Définition 1.3.6. *[14]*

Soit $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe $C^1(E, \mathbb{R})$. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c, $(\mathbf{PS})_c$, si toute suite (u_n) de E telle que

(i) $J(u_n) \longrightarrow c$ dans $\mathbb{R}$;

(ii) $J'(u_n) \longrightarrow 0$ dans E',

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.
Il est clair que si J satisfait la condition $(\mathbf{PS})$, alors J satisfait la condition $(\mathbf{PS})_c$.

Corollaire 1.3.1.

Soit J une fonctionnelle de classe $C^1(E, \mathbb{R})$ minorée et vérifiant la condition de Palais-Smale au niveau c. Alors J atteint son minimum c.

1.3.4 Lemme du col (Lemme de Mountain Pass)

Théorème 1.3.3. ***(Lemme de mountain pass)*** *[21]*

Soient E un espace de Banach, $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $J(0) = 0$ et que :

(i) il existe $\rho > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $J(u) \geq \alpha$ pour tout $u \in E$ avec $\|u\| = \rho$;

(ii) il existe $u_0 \in E$ avec $\|u_0\| \geqslant \rho$ tels que $J(u_0) < \alpha$.

Alors J possède une valeur critique c telle que $c \geq \alpha$. De plus, c peut être caractérisé comme

$$c := \inf_{\varphi \in \mathscr{B}} \max_{v \in \varphi([0,1])} J(v),$$

où

$$\mathscr{B} := \{\varphi \in C([0,1], E) : \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = u_0\}.$$

Théorème 1.3.4. *[18, 21]*

Soient E un espace réel de Banach de dimension infinie, $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ soit pair, satisfasse la condition $(\mathbf{PS})$ et $J(0) = 0$. Supposons que $E = V \oplus X$, où V est de dimension finie, et J satisfait :

(i) il existe $\alpha > 0$ et $\rho > 0$ tels que $J(u) \geqslant \alpha$ pour tout $u \in X$ avec $\|u\| = \rho$;

(ii) pour tout sous-espace de dimension finie $W \subset E$, il existe $R = R(W) > 0$ tel que $J(u) \leqslant 0$ pour tout $u \in W$ avec $\|u\| \geqslant R$.

Alors J possède une suite non borné de valeurs critiques.

Théorème 1.3.5. ***(Théorème Linking)*** *[19, 22, 23]*

Soient $E = V \oplus X$ un espace de Banach réel avec $\dim V < \infty$, $\rho > r > 0$ et $z \in X$ tel que $\|z\| = r$. Définir

$$\begin{aligned}
&M = \{u = y + \lambda z : \|u\| \leqslant \rho,\ \lambda \geqslant 0,\ y \in V\},\\
&M_0 = \{u = y + \lambda z : y \in V,\ \|u\| = \rho,\ \lambda \geqslant 0 \text{ ou } \|u\| \leqslant \rho,\ \lambda = 0\},\\
&N = \{u \in X : \|u\| = r\}.
\end{aligned}$$

Soit $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ tel que

$$b = \inf_{u \in N} J(u) > a = \max_{u \in M_0} J(u).$$

Si J satisfait la condition $(\mathbf{PS})_c$ avec

$$c = \inf_{\gamma \in \Upsilon} \max_{u \in M} J(\gamma(u)), \quad \Upsilon = \left\{\gamma \in C(M, E) : \gamma|_{M_0} = id\right\},$$

alors c est une valeur critique de J.

Chapitre 2

Théorie des opérateurs linéaires continus sur un espace de Hilbert et applications

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats de base sur les opérateurs linéaires définis sur un espace de Hilbert. Puis, nous présentons une application sur un type d'opérateurs compacts auto-adjoints.

2.1 Rappels sur la théorie des opérateurs

2.1.1 Opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert

Définition 2.1.1. *[3]*

Une application $T : H \to H$ où H est un espace de Hilbert, est dit opérateur linéaire si T satisfait les deux conditions suivantes :

(i) **additive**

$T(x+y) = T(x) + T(y)$ pour tous $x, y \in H$;

(ii) **homogène**

$T(\lambda x) = \lambda T(x), \forall \lambda \in \mathbb{R} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \forall x \in H.$

Notations :

- On note d'habitude les opérateurs par $T, R, S, A, U, \ldots$
- Pour alléger les écritures, l'image d'un vecteur $x \in H$ par l'opérateur T sera généralement notée Tx.

- I_H : l'opérateur **identité** dans H,

$$\begin{array}{rcl} I_H : H & \to & H \\ x & \to & I_H x = x. \end{array}$$

- O_H : l' opérateur **nul** dans H,

$$\begin{array}{rcl} 0_H : H & \to & H \\ x & \to & 0_H x = 0. \end{array}$$

- On notera $\ker T$ **le noyau** de l'opérateur T, i.e.,

$$\ker T = \{x \in H; \quad Tx = 0\},$$

et aussi noté parfois $N(T)$.

2.1.2 Opérateur continu - Opérateur contractant

Définition 2.1.2. *(Opérateur continu)[9]*

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et T un opérateur linéaire de E dans F. On dit que T est continu en $x_0 \in E$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \|x - x_0\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\|_F \leqslant \varepsilon.$$

L'opérateur T est dit continu si T est continu en tout $x \in E$.

Définition 2.1.3. *(Opérateur contractant)[9]*

Soit T un opérateur d'un espace normé E dans lui-même. On dit que T est un opérateur contractant (ou simplement une contraction) s'il existe une constante k, $0 \leqslant k < 1$ telle que pour tout x et y de E on a :

$$\|T(x) - T(y)\|_E \leqslant k\|x - y\|_E.$$

Théorème 2.1.1. *[3]*

Soit T un opérateur linéaire définit sur un espace de Hilbert H.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est uniformément continu.
2. T est continu.
3. T est continu en 0.

4. $\exists C > 0,\ \forall x \in H,\ \|x\| \leq 1 \Longrightarrow \|Tx\| \leq C.$
5. $\exists C > 0,\ \forall x \in H,\ \|Tx\| \leq C\|x\|.$

Démonstration.

• Il est clair que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3).

• Montrons que 3) $\Longrightarrow$ 4), la continuité de T à 0 se traduit pour $\varepsilon = 1$

$$\exists \delta > 0 :\ \forall x \in H,\ \|x\| < \delta \Longrightarrow \|Tx\| < 1,$$

alors, pour $x \in H :\ \|x\| < 1$ on a $\left\|\frac{\delta x}{2}\right\| < \delta$ et par suite

$$\left\|T\left(\frac{\delta x}{2}\right)\right\| < 1,$$

donc

$$\|Tx\| < \frac{2}{\delta} = C.$$

• Montrons que 4) $\Longrightarrow$ 5), Soit $x \in H :\ x \neq 0$, alors, $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq 1$ et par suite,

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq C,$$

donc $\|Tx\| \leq C\|x\|$, pour $x = 0$ on a $\|T(0)\| = C\|0\|$.

• Montrons que 5) $\Longrightarrow$ 1), Soient $x, y \in H$ et soit $\varepsilon > 0$, puisque,

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq C\|x - y\|,$$

alors, pour que $\|Tx - Ty\| < \varepsilon$, il suffit que, $C\|x-y\| < \varepsilon$, ce qui se vérifie si $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{C}$.
Il suffit donc de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$.
La démonstration est terminée. ■

Définition 2.1.4. ***(Opérateurs bornés)[3]***

Soit T un opérateur linéaire définit sur un espace de Hilbert H.
On dit que T est borné, s'il existe $c > 0$ tel que :

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \text{ pour tout } x \in H.$$

Notations :

On note par $\mathscr{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires et bornés sur un espace de Hilbert H.

Définition 2.1.5. *[3]*

On définit la norme de l'opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$ par :

$$\|T\| = \inf\{c > 0 : \|Tx\| \leq c\|x\|, \quad \forall x \in H\}.$$

Théorème 2.1.2. *[3]*

Pour tout opérateur linéaire et borné T, on a :

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\substack{\|x\|_E \leq 1 \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Exemple 2.1.

1. $I : \mathbb{C}([0,1]) \to \mathbb{C}([0,1])$ est bien borné car :

$$\|Ix\| = \|x\| \leq c\|x\|, \ \forall c \geq 1.$$

2. L'opérateur de multiplication T défini sur l'espace $\mathbb{C}([1,2])$, alors :

$$\begin{aligned} \|Tf\| &= \sup_{x \in [1,2]} |(Tf)x| \\ &= \sup_{x \in [1,2]} |xf(x)| \\ &\leq 2\|f\| \quad (c = 2) \quad \forall f \in \mathbb{C}([1,2]), \end{aligned}$$

donc T est borné.

Théorème 2.1.3. ***(L'adjoint d'un opérateur)****[3]*

Soient H un espace de Hilbert, $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur linéaire et continu. Alors, il existe un opérateur unique noté $T^* \in \mathscr{L}(H)$ tel que

$$(Tx, y) = (x, T^*y), \ \forall x, y \in H.$$

Définition 2.1.6. *[3]*

L'opérateur T^* définit ci-dessus est appelé l'opérateur adjoint de T.

2.1.3 Quelques classes d'opérateurs

Définition 2.1.7. ***(Définitions de quelques classes d'opérateurs)****[3, 4]*

- **Opérateur Auto-adjoint :**
  Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ on dit que T est un opérateur auto-adjoint si $T = T^*$, i.e.,

$$(Tx, y) = (x, Ty), \ \forall x, y \in H.$$

- **Opérateur positif :**
Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ on dit que T est un opérateur positif et que l'on note $T \geq 0$. Si T est auto-adjoint et
$$(Tx, x) \geq 0, \ \forall x \in H.$$

- **Racine carrée d'un opérateur positif :**
Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur positif, on dit que l'opérateur S est racine carrée de T si
$$S^2 = T.$$
Et on note $S = T^{\frac{1}{2}}$ (où $S = \sqrt{T}$).
Remarque La racine carrée d'un opérateur positif est unique.

- **Opérateur isométrie :**
On dit $T \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur isométrie (ou isométrique). Si
$$T^*T = I.$$
Ou bien,
$$\|Tx\| = \|x\|, \forall x \in H.$$

- **Opérateur normal :**
On dit que $T \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur normal si T commute avec son adjoint, i.e.,
$$T^*T = TT^*.$$

- **Opérateur unitaire :**
On dit l'opérateur $U \in \mathscr{L}(H)$ est unitaire si
$$U^*U = UU^* = I.$$
C'est-à-dire $U^{-1} = U^*$.

- **Opérateur monotone :**
  . T est monotone si
$$(T(u) - T(v), u - v) \geq 0, \quad \forall u, v \in E.$$
  . T est strictement monotone si
$$(T(u) - T(v), u - v) > 0, \quad \forall u, v \in E \text{ avec } u \neq v.$$

. T est fortement monotone s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$(T(u) - T(v), u - v) \geq c\|u - v\|_E^2, \quad \forall u, v \in E.$$

Théorème 2.1.4. ***(Principe de l'opérateur fortement monotone)[13]***

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel réflexif. Supposons que $T : E \to E'$ soit un opérateur continu et qu'il existe $c > 0$ tel que

$$(Tu - Tv, u - v) \geqslant c\|u - v\|^2, \quad u, v \in E.$$

Alors $T : E \to E'$ est un homéomorphisme entre E et E'.

2.1.4 Opérateur compact

Définition 2.1.8. *[4]*

Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$ un opérateur linéaire.
On dit que T est compact si l'image de toute partie bornée B de E est une partie relativement compact dans F.
L'espace des opérateurs compacts se note $\mathcal{K}(E, F)$.

Exemple 2.2.

1. Si $\dim T(E) < +\infty$ (on dit alors que T est de rang fini), alors T est compact.
2. Si $K \in L^2([0,1]^2)$, l'opérateur $T_K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ défini par :

$$(T_K f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy,$$

   est compact.

Proposition 2.1.1. *[4]*

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $T \in L(E, F)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est compact.
2. L'image de la boule unité $B_E(0, 1)$ de E est relativement compact dans F.
3. De toute suite bornée (x_n) de F on peut extraire de (Tx_n) une sous suite convergente (Tx_{n_k}).

Théorème 2.1.5. *[12]*

Soient E un espace normé, F un espace de Banach et $(T_n)_n$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F. Si

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Alors, T est compact.

Proposition 2.1.2. *[4]*

Soient $T \in L(E,F)$, $S \in L(F,Z)$.
Si l'un des opérateurs T, S est compact alors, ST est compact.

Définition 2.1.9. ***(Opérateur complètement continu)***

L'opérateur T est dit complètement continu, si elle est continue et compacte.

2.1.5 Spectre d'un opérateur

Définition 2.1.10. ***(Valeurs propres et vecteurs propres)****[4]*

Soit $T \in \mathscr{L}(H)$, un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ s'appelle valeur propre de l'opérateur T, si l'équation $(T - \lambda I_H)x = 0$ admet une solution non nulle dans H, cette solution x est appelée vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Théorème 2.1.6. *[1]*

Supposons que T est un opérateur linéaire compact et auto-adjoint et que $T \neq 0$. Alors $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est une valeur propre de T.

Définition 2.1.11. ***(Point régulier)****[3]*

Soit $T \in \mathscr{L}(H)$, le nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ s'appelle un point régulier de l'opérateur T si $(T - \lambda I_H)$ est inversible.

Définition 2.1.12. ***(Ensemble résolvante et la résolvante)****[3]*

On appelle ensemble résolvante de T l'ensemble des points réguliers de l'opérateur T et note par $\rho(T)$ tel que

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ T - \lambda I_{\mathcal{H}} \text{ inversible}\}.$$

L'ensemble résolvante $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.
• On définit la résolvante de l'opérateur T comme

$$R_\lambda(T) = (A - \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1}.$$

Définition 2.1.13. ***(Spectre d'un opérateur)****[3]*

Spectre de T l'ensemble

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ T - \lambda I_{\mathcal{H}} \text{ n'est pas inversible}\}.$$

2.1.6 Opérateur de Hilbert-Schmidt

Il s'agit de la classe la plus fréquente d'opérateurs compacts dans un espace de Hilbert.

Définition 2.1.14. *[3]*

Soit E est un espace de Hilbert séparable. On dit $T \in \mathscr{L}(E)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|Te_k\|^2 < \infty.$$

Le nombre

$$\|T\|_{ES} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|Te_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

s'appelle la norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur T.

Proposition 2.1.3. *[3]*

Soit $T \in \mathscr{L}(E)$ un opérateur de Hilbert-Schmidt, on a

1. La norme $\|\|_{ES}$ ne dépend pas du choix de la base hilbertienne de E.
2. $\|T^*\|_{ES} = \|T\|_{ES}$.
3. On a toujours, $\|T\| \leq \|T\|_{ES}$.

Théorème 2.1.7. *[3]*

Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.

Proposition 2.1.4. *[3]*

Si $T \in \mathscr{L}(E, E)$ est de Hilbert-Schmidt, alors son adjoint T^* est aussi un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Théorème 2.1.8. *[3, 4]*

Soit $(H, (,))$ un espace de Hilbert réel ou complexe et soit $T : H \to H$ un opérateur borné, compact et autoadjoint. Alors il existe une suite de valeurs propres réelles non nulles $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, N$, avec N égal au rang de T, tel que $|\lambda_i|$ est monotone non croissant et si $N = +\infty$,

$$\lim_{i \to +\infty} \lambda_i = 0.$$

De plus, si chaque valeur propre de T est répétée dans la suite selon sa multiplicité, alors il existe une famille orthonormée $e_i, i = 1, \ldots, N$, de vecteurs propres correspondants, c'est-à-dire,

$$Te_i = \lambda_i e_i \text{ pour } i = 1, \ldots, N.$$

De plus, les vecteurs e_i forment une base orthonormée et on peut écrire

$$Tu = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (e_i, u) e_i \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad u \in H.$$

2.2 Application sur un type d'opérateurs compacts

Dans ce section, Soit $C(\Gamma)$ l'espace de Banach réel de toutes les fonctions continues muni de la norme $\|u\|_C = \max_{x\in\Gamma} |u(x)|$ pour tout $u \in C(\Gamma)$, où Γ est un sous-ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^n$ avec $\mathrm{mes}(\Gamma) > 0$. $L^2(\Gamma)$ désigne l'espace de Banach réflexif réel équipé par la norme $\|u\| = \left(\int_\Gamma |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ pour tout $u \in L^2(\Gamma)$ et du produit scalaire $(u, v) = \int_\Gamma u(x)v(x)dx$ pour tout $u, v \in L^2(\Gamma)$.
Nous supposons que les hypothèses de base suivantes sont toujours satisfaites

- La fonction $k : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}$ est positive, continue et symétrique (i.e., $k(x, y) = k(y, x)$ pour tout $x, y \in \Gamma$) et que $k \not\equiv 0$ sur $\Gamma \times \Gamma$;
- $f : \Gamma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Définir les opérateurs $K, \mathbf{f} : C(\Gamma) \to C(\Gamma)$ respectivement par

$$Ku(x) = \int_\Gamma k(x, y)u(y)dy, \quad x \in \Gamma,\ \forall u \in C(\Gamma), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{f}u(x) = f(x, u(x)), \quad x \in \Gamma,\ \forall u \in C(\Gamma), \tag{2.2}$$

et $A = K\mathbf{f}$.

Remarque 2.1.

En vertu des hypothèses précédentes sur les fonctions k et f il est clair que :

(i) $\max_{(x,y)\in\Gamma\times\Gamma} k(x, y) = M > 0$.

(ii) $\mathbf{f} : C(\Gamma) \to C(\Gamma)$ est borné et continu.

(iii) $K : C(\Gamma) \to C(\Gamma)$ est linéaire complètement continue.

L'opérateur K défini en (2.1) peut aussi être défini sur $L^2(\Gamma)$. En fait, nous avons dans ce qui suit le lemme.

Lemme 2.2.1.

Soit K l'opérateur définie en (2.1). $K : L^2(\Gamma) \to C(\Gamma)$ est un opérateur linéaire complètement continu et alors $K : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ est aussi un opérateur linéaire complètement continu.

Démonstration.

Pour tout $u \in L^2(\Gamma)$ donné, on a

$$\begin{aligned} |Ku(x)| &= \left| \int_\Gamma k(x,y)u(y)dy \right| \\ &\leqslant \int_\Gamma |k(x,y)u(y)|\, dy \\ &\leqslant M \int_\Gamma |u(y)| dy \\ &\leqslant M(\mathrm{mes}(\Gamma))^{1/2} \|u\|, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Donc Ku est une fonction définie sur Γ.

Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, puisque k est continue sur $\Gamma \times \Gamma$, il y a existe $\delta > 0$ tel que $|k(x_1, y) - k(x_2, y)| < \varepsilon$ pour tout $x_1, x_2, y \in \Gamma$ avec $|x_1 - x_2| < \delta$, où $|\cdot|$ désigne la norme de $\mathbb{R}^n$. Et alors pour tout $x_1, x_2 \in \Gamma$ avec $|x_1 - x_2| < \delta$, on a

$$\begin{aligned} |Ku(x_1) - Ku(x_2)| &= \left| \int_\Gamma k(x_1,y)u(y)dy - \int_\Gamma k(x_2,y)u(y)dy \right| \\ &\leqslant \int_\Gamma |k(x_1,y) - k(x_2,y)| \cdot |u(y)| dy \\ &\leqslant \varepsilon(\mathrm{mes}(\Gamma))^{1/2} \|u\|. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ceci implique que $Ku \in C(\Gamma)$. De (2.3) il résulte que

$$\|Ku\|_C \leqslant M(\mathrm{mes}(\Gamma))^{1/2} \|u\|, \quad u \in L^2(\Gamma). \tag{2.5}$$

Il est facile de voir à partir de (2.5) et de la définition de K que $K : L^2(\Gamma) \to C(\Gamma)$ est linéaire continue.

Soit $F \subset L^2(\Gamma)$ un sous-ensemble borné. Alors il existe $R > 0$ tel que $\|u\| \leqslant R$ pour tout $u \in F$.

Il résulte de (2.5) et (2.4) que $K(F)$ est une famille uniformément bornée et équicontinue sur Γ. D'après le Théorème 1.2.4, $K(F)$ est un sous-ensemble relativement compact de $C(\Gamma)$.

Donc $K : L^2(\Gamma) \to C(\Gamma)$ est complètement continue. Comme $C(\Gamma)$ peut être injecté continument dans $L^2(\Gamma)$, $K : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ est aussi complètement continu.
La démonstration est terminée. ■

Lemme 2.2.2.

$(Ku, v) = (u, Kv)$ pour tout $u, v \in L^2(\Gamma)$, c'est-à-dire que K est symétrique, où K l'opérateur définie en (2.1).

Démonstration.

Pour tout $u, v \in L^2(\Gamma)$, on a

$$\int_\Gamma \int_\Gamma |k(x,y)u(y)v(x)|dydx \leqslant M \int_\Gamma \int_\Gamma |u(y)v(x)|dydx \leqslant M(\mathrm{mes}(\Gamma))\|u\| \cdot \|v\|,$$

d'après le Théorème 1.2.3 et le fait que k est symétrique, on obtient

$$\begin{aligned}(Ku, v) &= \int_\Gamma \left[\int_\Gamma k(x,y)u(y)dy\right] v(x)dx \\ &= \int_\Gamma \int_\Gamma k(x,y)u(y)v(x)dydx \\ &= \int_\Gamma u(y) \left[\int_\Gamma k(y,x)v(x)dx\right] dy \\ &= (u, Kv).\end{aligned}$$

La démonstration est terminée. ■

D'après le théorème de **Hilbert-Schmidt**, on peut supposer que $\{\lambda_k\}$ est la suite de valeurs propres non nulles de l'opérateur complètement continu $K : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ où chaque valeur propre est répétée selon sa multiplicité, $\{e_k\}$ est la suite de vecteurs propres orthonormés correspondante dans $L^2(\Gamma)$. D'après le Lemme 2.2.1, $e_k \in C(\Gamma)$ pour tout $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Supposons en outre la condition suivante :
($\mathbf{H_0}$) 0 n'est pas une valeur propre de K, toutes les valeurs propres $\{\lambda_k\}$ sont positives et $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k < +\infty$ et qu'il existe une constante positive $C > 0$ telle que $\|e_k\|_C \leqslant C$ pour tous $k \in \mathbb{N}$.
Sous la condition ($\mathbf{H_0}$), on peut poser

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \cdots > 0.$$

Puisque K est linéaire complètement continu et symétrique d'après les Lemmes 2.2.1 et

2.2.2, les formules suivantes avec K sont vérifiées :

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, e_k)\, e_k, \quad u \in L^2(\Gamma), \tag{2.6}$$

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u, e_k)|^2, \quad u \in L^2(\Gamma), \tag{2.7}$$

$$Ku = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, (u, e_k)\, e_k, \quad u \in L^2(\Gamma). \tag{2.8}$$

Remarque 2.2.

Il résulte des Lemmes 2.2.1 et 2.2.2, et (2.8) que $K : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ est linéaire, borné, symétrique et positive.
Donc l'opérateur racine carrée de K, $K^{1/2} : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ existe et il est unique, et est aussi linéaire, borné et symétrique avec $\left\|K^{1/2}\right\| = \|K\|^{1/2}$.
De plus, on peut aussi prouver que $K^{1/2} : L^2(\Gamma) \to C(\Gamma)$ est complètement continue.

Lemme 2.2.3.

Selon le Remarque 2.2, $K^{1/2} : L^2(\Gamma) \to C(\Gamma)$ est un opérateur linéaire complètement continu. Alors $K^{1/2} : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ est aussi linéaire complètement continu.
Démonstration.
A partir de (2.8), $K^{1/2} : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ est de la forme suivante

$$K^{1/2}u = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, (u, e_k)\, e_k, \quad u \in L^2(\Gamma). \tag{2.9}$$

Pour tout $u \in L^2(\Gamma)$ et entiers positifs n, p, de (2.7) et condition (H_0), nous avoir ça

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{n+p} \sqrt{\lambda_k}\, (u, e_k)\, e_k(x)\right| &\leqslant C \sum_{k=n}^{n+p} \sqrt{\lambda_k}\, |(u, e_k)| \\
&\leqslant C \left(\sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k\right)^{1/2} \left(\sum_{k=n}^{n+p} |(u, e_k)|^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant C\|u\| \left(\sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k\right)^{1/2}, \quad x \in \Gamma.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit de la condition (H_0) que

$$\left\|\sum_{k=n}^{n+p} \sqrt{\lambda_k}\, (u, e_k)\, e_k\right\|_C \leqslant C\|u\| \left(\sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k\right)^{1/2} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.10}$$

Donc $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\,(u, e_k)\, e_k(x)$ converge uniformément par rapport à $x \in \Gamma$, et alors $K^{1/2}u \in C(\Gamma)$.
De plus, il est facile de voir à partir de (2.10) que

$$\left\|K^{1/2}u\right\|_C \leqslant C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\right)^{1/2} \|u\|, \quad u \in L^2(\Gamma). \tag{2.11}$$

Définir $T_n u = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k}\,(u, e_k)\, e_k,\ u \in L^2(\Gamma),\ \forall n \in \mathbb{N}$. Alors $T_n : L^2(\Gamma) \to C(\Gamma)$ est un opérateur linéaire complètement continu pour tout $n \in \mathbb{N}$, et il résulte de (2.9) et (2.10) que

$$\left\|T_n - K^{1/2}\right\|_C \leqslant C \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k\right)^{1/2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

D'après le Théorème 2.1.5, $K^{1/2} : L^2(\Gamma) \to C(\Gamma)$ est un opérateur linéaire complètement continu.
Et alors $K^{1/2} : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ est aussi complètement continu puisque $C(\Gamma)$ peut être injecté continument dans $L^2(\Gamma)$.
La démonstration est terminée. ■

Remarque 2.3.

Il résulte de (2.9) et (2.6) que

$$\left(K^{1/2}u, u\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, |(u, e_k)|^2, \quad u \in L^2(\Gamma).$$

Ceci et (2.7) impliquent que $K^{1/2}u \neq 0$ pour tout $u \in L^2(\Gamma)$ avec $u \neq 0$. Donc $K^{1/2}u_1 \neq K^{1/2}u_2$ pour tout $u_1, u_2 \in L^2(\Gamma)$ avec $u_1 \neq u_2$.

Remarque 2.4.

D'après le Théorème 2.1.6, puisque toutes les valeurs propres de K sont $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ et K est un opérateur linéaire compact et symétrique d'après les Lemmes 2.2.1 et 2.2.2, il résulte du Théorème 2.1.6 que $\|K\| = \lambda_1$. De la même manière, $\left\|K^{1/2}\right\| = \sqrt{\lambda_1}$.

Chapitre 3

Résultats d'existence et d'unicité de solution pour une classe d'équations intégrales non linéaires

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et la multiplicité des solutions pour l'équation intégrale non linéaire de Hammerstein suivante :

$$u(t) = \int_{\Gamma} k(t,s) f(s,u(s)) ds \quad , \quad t \in \Gamma, \tag{*}$$

dans l'espace de Hilbert réel $L^2(\Gamma)$. Sous certaines conditions sur l'opérateur linéaire K, on établit des conditions sur la non linéarité f avec lesquelles l'équation (*) admet au moins une solution, une unique solution où une infinité de solutions.
Pour traiter ce problème, nous utiliserons le principe de l'opérateur fortement monotone et la théorie du point critique.

3.1 Existence et unicité d'une solution

3.1.1 Lemme auxiliaire

Lemme 3.1.1.

Définir les opérateurs $K, \mathbf{f} : C(\Gamma) \to C(\Gamma)$ respectivement par (2.1), (2.2). Alors

(i) L'équation d'opérateur

$$u = K\mathbf{f}u, \tag{3.1}$$

a une solution dans $C(\Gamma)$ si et seulement si l'équation

$$v = K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v, \tag{3.2}$$

a une solution dans $L^2(\Gamma)$.

(ii) L'unicité de la solution pour ces deux équations ci-dessus est aussi équivalente.

(iii) Si (3.2) a une solution non nulle dans $L^2(\Gamma)$, alors (3.1) a une solution non nulle dans $C(\Gamma)$. Si (3.2) a une infinité de solutions dans $L^2(\Gamma)$, alors(3.1) a aussi une infinité de solutions dans $C(\Gamma)$.

Démonstration.

(i) $\Rightarrow$ Soit $u \in C(\Gamma)$ une solution quelconque de (3.1), c'est-à-dire, $u = K\mathbf{f}u$.
Alors :

$$\begin{aligned} K^{1/2}\mathbf{f}u &= K^{1/2}\mathbf{f}K\mathbf{f}u \\ &= K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}\left(K^{1/2}\mathbf{f}u\right), \end{aligned}$$

donc $v = K^{1/2}\mathbf{f}u \in C(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ est une solution de (3.2).
$\Leftarrow$ Soit $v \in L^2(\Gamma)$ une solution quelconque de (3.2), c'est-à-dire, $v = K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v$.
Alors :

$$\begin{aligned} K^{1/2}v &= K^{1/2}K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v \\ &= K\mathbf{f}\left(K^{1/2}v\right), \end{aligned}$$

donc $u = K^{1/2}v \in C(\Gamma)$ est une solution de (3.1).

(ii) $\Rightarrow$ Supposons que (3.1) a une unique solution u dans $C(\Gamma)$.
Soient v_1, v_2 dans $L^2(\Gamma)$ les deux solutions de (3.2), c'est-à-dire, $v_1 = K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v_1$ et $v_2 = K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v_2$.
Alors $K^{1/2}v_1 = K\mathbf{f}K^{1/2}v_1$ et $K^{1/2}v_2 = K\mathbf{f}K^{1/2}v_2$.
Et alors $K^{1/2}v_1$ et $K^{1/2}v_2$ sont les deux solutions de (3.1).
Il résulte de l'hypothèse que $K^{1/2}v_1 = K^{1/2}v_2 = u$, donc
$v_1 = K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v_1 = K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v_2 = v_2$.
$\Leftarrow$ Supposons que (3.2) a une unique solution v dans $L^2(\Gamma)$.
Soient u_1, u_2 dans $C(\Gamma)$ les deux solutions de (3.1), c'est-à-dire, $u_1 = K\mathbf{f}u_1$ et $u_2 = K\mathbf{f}u_2$.
Alors $K^{1/2}\mathbf{f}u_1 = K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}K^{1/2}\mathbf{f}u_1$ et $K^{1/2}\mathbf{f}u_2 = K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}K^{1/2}\mathbf{f}u_2$.
Et alors $K^{1/2}\mathbf{f}u_1$ et $K^{1/2}\mathbf{f}u_2$ sont les deux solutions de (3.2).
Il résulte de l'hypothèse que $K^{1/2}\mathbf{f}u_1 = K^{1/2}\mathbf{f}u_2 = v$, donc
$u_1 = K\mathbf{f}u_1 = K^{1/2}K^{1/2}\mathbf{f}u_1 = K^{1/2}K^{1/2}\mathbf{f}u_2 = K\mathbf{f}u_2 = u_2$.

(iii) Il résulte de la preuve de (i) que si $v \in L^2(\Gamma)$ est une solution de (3.2), alors $K^{1/2}v$ est une solution de (3.1) en $C(\Gamma)$. Par conséquent, la Remarque 2.3 donne la conclusion.

La démonstration est terminée. ■

3.1.2 Deux théorèmes d'existence et unicité

Théorème 3.1.1.

Supposons que pour chaque $x \in \Gamma$, $f(x,u)$ soit une fonction décroissante par rapport à u, c'est-à-dire que $f(x,u_1) \geqslant f(x,u_2)$ pour tous les u_1 et u_2 dans $\mathbb{R}$ avec $u_1 < u_2$. Alors Éq. (3.1) admet une unique solution dans $C(\Gamma)$.

Démonstration.

Il résulte du Lemme 3.1.1 que l'équation (3.1) a une solution unique dans $C(\Gamma)$ si et seulement si (3.2) a une solution unique dans $L^2(\Gamma)$.

Par conséquent, cela équivaut également à ce que l'équation $Tv = 0$ admet une solution unique dans $L^2(\Gamma)$, où $T = I - K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}$.

D'après le Lemme 2.2.3, $K^{1/2} : L^2(\Gamma) \to C(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ est continue, donc $T : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ est aussi continue.

D'après le Théorème 2.1.4, il suffit de vérifier que T est un opérateur fortement monotone.

Et en utilisant la Remarque 2.2, nous avons que

$$\begin{aligned}
(Tu - Tv, u - v) &= \left(u - v - K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}u + K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v, u - v\right) \\
&= \|u - v\|^2 - \left(K^{1/2}\left(\mathbf{f}K^{1/2}u - \mathbf{f}K^{1/2}v\right), u - v\right) \\
&= \|u - v\|^2 - \left(\mathbf{f}K^{1/2}u - \mathbf{f}K^{1/2}v, K^{1/2}u - K^{1/2}v\right) \\
&\geqslant \|u - v\|^2, \quad u, v \in L^2(\Gamma).
\end{aligned}$$

(**car** : pour tout u et v dans $L^2(\Gamma)$, puisque $f(x,u)$ est une fonction décroissante en u pour chaque $x \in \Gamma$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{f}K^{1/2}u - \mathbf{f}K^{1/2}v, K^{1/2}u - K^{1/2}v\right) \\
&= \int_\Gamma \left[f\left(x, K^{1/2}u(x)\right) - f\left(x, K^{1/2}v(x)\right)\right]\left[K^{1/2}u(x) - K^{1/2}v(x)\right] dx \leqslant 0.)
\end{aligned}$$

Ainsi T est un opérateur fortement monotone. Et alors le Théorème 2.1.4 implique que $Tv = 0$ a une solution unique $\tilde{v}$ dans $L^2(\Gamma)$.

La démonstration est terminée. ■

Théorème 3.1.2.

S'il existe $a \in [0, 1/\lambda_1)$ tel que $[f(x,u) - f(x,v)][u - v] \leqslant a|u - v|^2$ pour tout $x \in \Gamma$, et $u, v \in \mathbb{R}$. Alors Éq. (3.1) admet une unique solution dans $C(\Gamma)$.

Démonstration.

De la même manière que la preuve du Théorème 3.1.1

$$\begin{aligned}(Tu-Tv,u-v) &= \left(u-v-K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}u+K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v,u-v\right)\\ &= \|u-v\|^2-\left(\mathbf{f}K^{1/2}u-\mathbf{f}K^{1/2}v,K^{1/2}u-K^{1/2}v\right)\\ &\geqslant \|u-v\|^2-a\lambda_1\|u-v\|^2\\ &= (1-a\lambda_1)\,\|u-v\|^2,\quad u,v\in L^2(\Gamma).\end{aligned}$$

(**car :**

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{f}K^{1/2}u-\mathbf{f}K^{1/2}v,K^{1/2}u-K^{1/2}v\right)\\ &= \int_\Gamma\left[f\left(x,K^{1/2}u(x)\right)-f\left(x,K^{1/2}v(x)\right)\right]\left[K^{1/2}u(x)-K^{1/2}v(x)\right]dx\\ &\leqslant a\int_\Gamma\left|K^{1/2}(u-v)(x)\right|^2dx=a\left\|K^{1/2}(u-v)\right\|^2\leqslant a\lambda_1\|u-v\|^2,\quad u,v\in L^2(\Gamma).)\end{aligned}$$

Et comme $(1-a\lambda_1)>0$, alors T est un opérateur fortement monotone.

La démonstration est terminée. ■

3.2 Autres résultats d'existence avec la multiplicité des solutions

3.2.1 Lemme auxiliaire

Lemme 3.2.1.

Soit $\Phi(u)=\int_\Gamma\int_0^{u(x)}f(x,v)dvdx,\ u\in C(\Gamma)$. Alors

(i) la fonctionnelle $\Phi:C(\Gamma)\to\mathbb{R}$ est Fréchet différentiable sur $C(\Gamma)$ et $(\Phi'(u))\,(w)=(\mathbf{f}u,w)=\int_\Gamma f(x,u(x))w(x)dx$ pour tout $u,w\in C(\Gamma)$;

(ii) $\Phi\circ K^{1/2}:L^2(\Gamma)\to\mathbb{R}$ est Fréchet différentiable sur $L^2(\Gamma)$ et $\left(\Phi\circ K^{1/2}\right)'(v)=K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v$ pour tout $v\in L^2(\Gamma)$.

Démonstration.

(i) Pour tout $u\in C(\Gamma)$ donné, on définit une fonctionnelle linéaire bornée $h(w)=(\mathbf{f}u,w)=\int_\Gamma f(x,u(x))w(x)dx, w\in C(\Gamma)$, alors

$$\begin{aligned}\Phi(u+w)-\Phi(u)-h(w) &= \int_\Gamma\int_{u(x)}^{u(x)+w(x)}f(x,v)dvdx-\int_\Gamma f(x,u(x))w(x)dx\\ &= \int_\Gamma[f(x,u(x)+\theta w(x))-f(x,u(x))]w(x)dx,\qquad w\in C(\Gamma),\end{aligned}$$

où $\theta \in (0,1)$. Comme f est continue sur $\Gamma \times [-\|u\|_C - 1,\ \|u\|_C + 1]$, on a

$$\lim_{\|w\|_C \to 0} \frac{1}{\|w\|_C} \int_\Gamma [f(x, u(x) + \theta w(x)) - f(x, u(x))] w(x) dx = 0.$$

Alors Φ est Fréchet dérivable sur $C(\Gamma)$ et $(\Phi'(u))(w) = h(w) = (\mathbf{f}u, w)$ pour tout $u, w \in C(\Gamma)$.

(ii) Par la règle de dérivation des opérateurs composés [6], il s'ensuit que la fonctionnelle $\Phi \circ K^{1/2}$ est Fréchet dérivable sur $L^2(\Gamma)$ et $\left(\Phi \circ K^{1/2}\right)'(v) = \Phi'\left(K^{1/2}v\right) K^{1/2}$ pour tout $v \in L^2(\Gamma)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\left(\left(\Phi \circ K^{1/2}\right)'(v)\right)(k) &= \left(\Phi'\left(K^{1/2}v\right) K^{1/2}\right)(k) \\
&= \Phi'\left(K^{1/2}v\right)\left(K^{1/2}k\right) \\
&= \left(\mathbf{f}K^{1/2}v, K^{1/2}k\right) \\
&= \left(K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v, k\right) \quad \text{pour tout } v, k \in L^2(\Gamma).
\end{aligned}$$

Donc $\left(\Phi \circ K^{1/2}\right)'(v) = K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v$ pour tout $v \in L^2(\Gamma)$.

La démonstration est terminée. ■

3.2.2 Deux autres théorèmes d'existence

Théorème 3.2.1.

Supposons que

$$\int_0^u f(x,v)dv \leqslant \frac{a}{2}u^2 + b(x)|u|^{2-\gamma} + c(x), \quad x \in \Gamma,\ u \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

où $a \in [0, 1/\lambda_1)$, $\gamma \in (0,2)$, $b \in L^{2/\gamma}(\Gamma)$, et $c \in L(\Gamma)$. Alors Éq. (3.1) admet au moins une solution dans $C(\Gamma)$.

Démonstration.

D'après le Lemme 3.1.1, il suffit de prouver que l'équation $v - K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v = 0$ admet au moins une solution dans $L^2(\Gamma)$.

Considérons la fonctionnelle $\Psi : L^2(\Gamma) \to \mathbb{R}$,

$$\Psi(v) = \frac{1}{2}(v,v) - \left(\Phi K^{1/2}\right)(v), \quad v \in L^2(\Gamma),$$

où Φ est défini dans le Lemme 3.2.1. Alors, en utilisant le Lemme 3.2.1, on a que $\Psi'(v) = v - K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v$ pour tout $v \in L^2(\Gamma)$.

Il résulte du Lemme 2.2.3 que $K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2} : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ est complètement continue,

donc par [7], Ψ est une fonctionnelle faiblement semi-continue sur $L^2(\Gamma)$.
Pour tout $v \in L^2(\Gamma)$, il résulte de (3.3) que

$$\begin{aligned}
\Psi(v) &= \frac{1}{2}(v,v) - \int_\Gamma \int_0^{K^{1/2}v(x)} f(x,u)dudx \\
&\geqslant \frac{1}{2}(v,v) - \frac{a}{2}\int_\Gamma \left|K^{1/2}v(x)\right|^2 dx - \int_\Gamma b(x)\left|K^{1/2}v(x)\right|^{2-\gamma} dx - \int_\Gamma c(x)dx \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{a}{2}\left(K^{1/2}v, K^{1/2}v\right) - \left(\int_\Gamma |b(x)|^{2/\gamma}dx\right)^{\gamma/2}\left(\int_\Gamma \left|K^{1/2}v(x)\right|^2 dx\right)^{1-\gamma/2} - c_1 \\
&= \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{a}{2}(Kv,v) - b_1(Kv,v)^{1-\gamma/2} - c_1 \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{a\lambda_1}{2}\|v\|^2 - b_1\lambda_1^{1-\gamma/2}\|v\|^{2-\gamma} - c_1 \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - a\lambda_1\right)\|v\|^2 - b_1\lambda_1^{1-\gamma/2}\|v\|^{2-\gamma} - c_1,
\end{aligned}$$

où $b_1 = \left(\int_\Gamma |b(x)|^{2/\gamma}dx\right)^{\gamma/2}$, $c_1 = \int_\Gamma c(x)dx$. Ainsi, $\lim_{\|v\|\to\infty} \Psi(v) = +\infty$.
Donc, d'après le Théorème 1.3.2, il existe $v_0 \in L^2(\Gamma)$ tel que $\Psi'(v_0) = 0$, c'est-à-dire, $v_0 - K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v_0 = 0$.
La démonstration est terminée. ■

Théorème 3.2.2.

Supposons que :

($\mathbf{A_1}$) il existe $\mu \in (0, 1/2)$ et $R > 0$ tels que $F(x,u) := \int_0^u f(x,v)dv \leqslant \mu u f(x,u)$ pour tout $x \in \Gamma$ et $|u| \geqslant R$;

($\mathbf{A_2}$) $\limsup_{u\to 0} f(x,u)/u < 1/\lambda_1$ et $\liminf_{u\to\infty} f(x,u)/u > 1/\lambda_1$ uniformément pour $x \in \Gamma$.

Alors Éq. (3.1) admet au moins une solution non nulle dans $C(\Gamma)$.

Démonstration.

D'après (iii) du Lemme 3.1.1, il suffit de prouver que l'équation (3.2) a au moins une solution non nulle dans $L^2(\Gamma)$. On considère toujours la fonctionnelle Ψ définie dans la preuve du Théorème 3.2.1.
Nous allons vérifier que Ψ vérifie toutes les conditions du Théorème 1.3.3 (Lemme du col).
D'abord, nous allons prouver que Ψ satisfait la condition (**PS**). Comme $F(x,u) - \mu u f(x,u)$ est continue sur $\Gamma \times [-R, R]$, il existe $C_1 > 0$ tel que

$$F(x,u) \leqslant \mu u f(x,u) + C_1, \quad (x,u) \in \Gamma \times [-R, R].$$

Par hypothèse ($\mathbf{A_1}$), on obtient

$$F(x,u) \leqslant \mu u f(x,u) + C_1, \quad (x,u) \in \Gamma \times \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Soient $\{v_n\} \subset L^2(\Gamma)$ avec $|\Psi(v_n)| \leqslant \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\beta > 0$ est un nombre constant, $\Psi'(v_n) = \left(I - K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}\right) v_n \to 0$. Remarquerez que

$$(\Psi'(v_n), v_n) = \left(v_n - K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v_n, v_n\right) = \|v_n\|^2 - \int_\Gamma f\left(x, K^{1/2}v_n(x)\right) K^{1/2}v_n(x)dx.$$

Il résulte de (3.4) que

$$\begin{aligned}
\beta \geqslant \Psi(v_n) &= \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \int_\Gamma F\left(x, K^{1/2}v_n(x)\right) dx \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \mu \int_\Gamma f\left(x, K^{1/2}v_n(x)\right) K^{1/2}v_n(x)dx - C_1 \operatorname{mes}(\Gamma) \\
&= (1/2 - \mu)\|v_n\|^2 + \mu(\Psi'(v_n), v_n) - C_2 \\
&\geqslant (1/2 - \mu)\|v_n\|^2 - \mu\|\Psi'(v_n)\| \cdot \|v_n\| - C_2, \quad n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

où $C_2 = C_1 \operatorname{mes}(\Gamma) > 0$. Comme $\Psi'(v_n) \to 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\beta \geqslant (1/2 - \mu)\|v_n\|^2 - \|v_n\| - C_2, \quad n > N_0.$$

Cela implique que $\{v_n\} \subset L^2(\Gamma)$ est borné.
Puisque $K^{1/2} : L^2(\Gamma) \to C(\Gamma)$ est complètement continue, $\mathbf{f} : C(\Gamma) \to C(\Gamma)$ est continue, et $v_n - K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v_n \to 0$, on peut en déduire que $\{v_n\}$ a une sous-suite convergente. Ainsi, nous obtenons la propriété de convergence recherchée.

A partir de $\limsup_{u\to 0} f(x,u)/u < 1/\lambda_1$ uniformément pour $x \in \Gamma$, il existe $\varepsilon \in (0,1)$ et $\delta > 0$ tels que $f(x,u) \leqslant (1-\varepsilon)\lambda_1^{-1}u$ pour tout $x \in \Gamma$ et $u \in [0,\delta]$, et $f(x,u) \geqslant (1-\varepsilon)\lambda_1^{-1}u$ pour tout $x \in \Gamma$ et $u \in [-\delta, 0]$.
Donc il s'ensuit que

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,v)dv \leqslant \frac{1}{2\lambda_1}(1-\varepsilon)|u|^2, \quad x \in \Gamma,\ |u| \leqslant \delta. \tag{3.5}$$

Soient $\rho = \delta/M_1$, où $M_1 = C\left(\sum_{k=1}^\infty \lambda_k\right)^{1/2}$, $\alpha = \varepsilon\rho^2/2$.
Alors Il résulte de (2.11) que $\left\|K^{1/2}v\right\|_C \leqslant M_1\|v\| = \delta$ pour tout $v \in \partial B_\rho$, où $B_\rho = \{v \in L^2(\Gamma) : \|v\| < \rho\}$.
Donc d'après (3.5), on a

$$\begin{aligned}
\Psi(v) &= \frac{1}{2}(v,v) - \int_\Gamma F\left(x, K^{1/2}v(x)\right) dx \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2\lambda_1}(1-\varepsilon)\int_\Gamma \left|K^{1/2}v(x)\right|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2\lambda_1}(1-\varepsilon)(Kv,v)
\end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2\lambda_1}(1-\varepsilon)\lambda_1\|v\|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\|v\|^2, \quad v \in \partial B_\rho. \tag{3.6}$$

Ceci implique que $\inf_{v\in\partial B_\rho} \Psi(v) \geqslant \varepsilon\rho^2/2 = \alpha > 0$.
Il est évident d'après la définition de Ψ et $K^{1/2}0 = 0$ que $\Psi(0) = 0$.

D'autre part, à partir de $\liminf_{u\to\infty} f(x,u)/u > 1/\lambda_1$ uniformément pour $x \in \Gamma$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $\tau > 0$ tels que

$$\begin{aligned} f(x,u) &\geqslant (1+\varepsilon_1)\,\lambda_1^{-1}u, \quad x \in \Gamma,\ u \geqslant \tau, \\ f(x,u) &\leqslant (1+\varepsilon_1)\,\lambda_1^{-1}u, \quad x \in \Gamma,\ u \leqslant -\tau. \end{aligned}$$

Puisque $f(x,u) - (1+\varepsilon_1)\,\lambda_1^{-1}u$ est continue sur $\Gamma \times [-\tau,\tau]$, il existe $C_3 > 0$ tel que

$$\begin{aligned} f(x,u) &\geqslant (1+\varepsilon_1)\,\lambda_1^{-1}u - C_3, \quad x \in \Gamma,\ u \in [0,\tau], \\ f(x,u) &\leqslant (1+\varepsilon_1)\,\lambda_1^{-1}u + C_3, \quad x \in \Gamma,\ u \in [-\tau,0]. \end{aligned}$$

Ainsi, les deux paires d'inégalités impliquent que

$$\begin{aligned} f(x,u) &\geqslant (1+\varepsilon_1)\,\lambda_1^{-1}u - C_3, \quad (x,u) \in \Gamma \times [0,+\infty), \\ f(x,u) &\leqslant (1+\varepsilon_1)\,\lambda_1^{-1}u + C_3, \quad (x,u) \in \Gamma \times (-\infty,0]. \end{aligned}$$

Donc,

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,v)dv \geqslant \frac{1}{2\lambda_1}\,(1+\varepsilon_1)\,u^2 - C_3|u|, \quad (x,u) \in \Gamma \times \mathbb{R}.$$

Il résulte de la définition de $K^{1/2}$ que

$$\begin{aligned} \Psi\,(se_1) &= \frac{1}{2}\,(se_1, se_1) - \int_\Gamma F\left(x, sK^{1/2}e_1(x)\right)dx \\ &= \frac{1}{2}s^2 - \int_\Gamma F\left(x, s\sqrt{\lambda_1}e_1(x)\right)dx \\ &\leqslant \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2\lambda_1}\,(1+\varepsilon_1)\int_\Gamma \lambda_1 s^2 e_1^2(x)dx + C_3 s\int_\Gamma \sqrt{\lambda_1}\,|e_1(x)|\,dx \\ &= \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s^2\,(1+\varepsilon_1) + sC_4 \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon_1 s^2 + sC_4, \quad s > 0, \end{aligned}$$

où $C_4 = C_3 \int_\Gamma \sqrt{\lambda_1}\,|e_1(x)|\,dx > 0$. Donc $\Psi(se_1) \to -\infty$ et $\|se_1\| = s \to +\infty$ comme $s \to +\infty$. Et alors il existe un $s_0 > \rho$ suffisamment grand tel que $v_1 = s_0 e_1 \in L^2(\Gamma),\ v_1 \notin \bar{B}_\rho$, et $\Psi\,(v_1) < 0$.
Ainsi, d'après le lemme du col, Ψ a une valeur critique $\tilde{c} > 0$, c'est-à-dire qu'il existe $\tilde{v} \in L^2(\Gamma)$ tel que $\Psi\,(\tilde{v}) = \tilde{c}$ et $\Psi'\,(\tilde{v}) = \tilde{v} - K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}\tilde{v} = 0$.
Il est évident que $\tilde{v} \neq 0$ puisque $\Psi(0) = 0$.

La démonstration est terminée. $\blacksquare$

Remarque 3.1.

D'après la preuve du Théorème 3.2.2, il est facile de voir que si la fonction propre $e_1(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \Gamma$, alors la condition $\liminf_{u\to\infty} f(x,u)/u > 1/\lambda_1$ uniformément pour $x \in \Gamma$ peut être affaibli à $\liminf_{u\to+\infty} f(x,u)/u > 1/\lambda_1$ uniformément pour $x \in \Gamma$.

Théorème 3.2.3.

Supposons que :

- $f(x,u)$ soit impair dans u, c'est-à-dire que $f(x,-u) = -f(x,u)$ pour tout $(x,u) \in \Gamma \times \mathbb{R}$;
- Et supposons que la condition $(\mathbf{A_1})$ du Théorème 3.2.2 soit satisfaite ;
- $\limsup_{u\to 0} f(x,u)/u < 1/\lambda_1$ et $\lim_{u\to+\infty} f(x,u)/u = +\infty$ uniformément pour $x \in \Gamma$.

Alors (3.1) a une infinité de solutions.

Démonstration.

D'après (iii) du Lemme 3.1.1, il suffit de prouver que l'équation (3.2) a une infinité de solutions dans $L^2(\Gamma)$.

On considère toujours la fonctionnelle Ψ définie dans la preuve du Théorème 3.2.1, et on vérifie que Ψ satisfait toutes les conditions du Théorème 1.3.4.

Dans la preuve du Théorème 3.2.2 nous avons prouvé que Ψ satisfait la condition (**PS**) et $\Psi(0) = 0$.

Par la définition de Ψ et la condition $f(x,-u) = -f(x,u)$ pour tout $(x,u) \in \Gamma \times \mathbb{R}$, il est évident que Ψ est pair.

Et il résulte de (3.6) que Ψ vérifie la condition (i) du Théorème 1.3.4 pour $\rho = \delta/M_1$ et $\alpha = \varepsilon\rho^2/2$.

Dans la suite, nous allons montrer que Ψ vérifie la condition (ii) du Théorème 1.3.4.

Si ce n'est pas vrai, alors il existe un sous-espace de dimension finie W de $L^2(\Gamma)$ et une suite $\{v_n\} \subset W$ telle que $\Psi(v_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\|v_n\| \to \infty$ comme $n \to \infty$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\|v_n\| > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soient $t_n = \|v_n\|$, $\tilde{v}_n = t_n^{-1} v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $v_n = t_n \tilde{v}_n$ et $\|\tilde{v}_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $t_n \to +\infty$ comme $n \to \infty$.

Puisque $\{v \in W : \|v\| = 1\}$ est un sous-ensemble compact, $\{\tilde{v}_n\}$ a une sous-suite convergente, sans perte de généralité, soient $\|\tilde{v}_n - \tilde{v}\| \to 0$ comme $n \to \infty$, où $\tilde{v} \in W$, $\|\tilde{v}\| = 1$.

Puisque $K^{1/2} : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ est complètement continue, $\left\|K^{1/2}\tilde{v}_n - K^{1/2}\tilde{v}\right\| \to 0$ comme $n \to \infty$.

Il résulte de la Remarque 2.3 que $K^{1/2}\tilde{v} \neq 0$. Soient $u_0 = K^{1/2}\tilde{v}$, $u_n = K^{1/2}\tilde{v}_n$ pour tout

$n \in \mathbb{N}$ et $a_0 = \|u_0\| > 0$. Par $\lim_{u \to +\infty} f(x,u)/u = +\infty$ uniformément pour $x \in \Gamma$, il existe $\tau > 0$ tel que

$$f(x,u) \geqslant 4a_0^{-2}u, \quad x \in \Gamma,\ u \geqslant \tau. \tag{3.7}$$

Et comme $f(x,u) - 4a_0^{-2}u$ est continue sur $\Gamma \times [0,\tau]$, il existe $C_5 > 0$ tel que

$$f(x,u) \geqslant 4a_0^{-2}u - C_5, \quad (x,u) \in \Gamma \times [0,\tau]. \tag{3.8}$$

Par conséquent, il découle de (3.7) et (3.8) que

$$f(x,u) \geqslant 4a_0^{-2}u - C_5, \quad (x,u) \in \Gamma \times [0,+\infty). \tag{3.9}$$

Comme $f(x,u)$ est impair dans u, $F(x,u) = \int_0^u f(x,v)dv$ est pair dans u.
Ainsi, il résulte de (3.9) que

$$F(x,u) = F(x,|u|) = \int_0^{|u|} f(x,v)dv \geqslant 2a_0^{-2}|u|^2 - C_5|u|, \quad (x,u) \in \Gamma \times \mathbb{R}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Psi(v_n) = \Psi(t_n\tilde{v}_n) &= \frac{1}{2}\|t_n\tilde{v}_n\|^2 - \int_\Gamma F\left(x, t_nK^{1/2}\tilde{v}_n(x)\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\|t_n\tilde{v}_n\|^2 - \int_\Gamma F\left(x, t_nu_n(x)\right)dx \\
&\leqslant \frac{1}{2}t_n^2 - \int_\Gamma \left(2a_0^{-2}\left|t_nu_n(x)\right|^2 - C_5\left|t_nu_n(x)\right|\right)dx \\
&= \frac{1}{2}t_n^2 - 2a_0^{-2}t_n^2\|u_n\|^2 + C_5t_n\int_\Gamma |u_n(x)|\,dx \\
&\leqslant \frac{1}{2}t_n^2 - 2a_0^{-2}t_n^2\|u_n\|^2 + C_6t_n\|u_n\|, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

où $C_6 = C_5(\mathrm{mes}(\Gamma))^{1/2}$. Puisque $\|u_n - u_0\| \to 0$ comme $n \to \infty, \|u_n\| \to \|u_0\| = a_0$ comme $n \to \infty$.
Donc, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_n\|^2 \geqslant a_0^2/2$ et $\|u_n\| \leqslant 2a_0$ comme $n > N_0$.
Il résulte de (3.10) que

$$\Psi(v_n) \leqslant \frac{1}{2}t_n^2 - 2a_0^{-2}\frac{a_0^2}{2}t_n^2 + 2a_0C_6t_n = -\frac{1}{2}t_n^2 + 2a_0C_6t_n, \quad n > N_0.$$

Ainsi, en remarquant que $t_n \to +\infty$ comme $n \to \infty$, on a que $\Psi(v_n) \to -\infty$ comme $n \to \infty$.
Cela contredit l'hypothèse $\Psi(v_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors d'après le Théorème 1.3.4, Ψ a une infinité de points critiques, c'est-à-dire que l'équation de l'opérateur (3.2) a une infinité de solutions dans $L^2(\Gamma)$.

La démonstration est terminée. ■

Remarque 3.2.

S'il existe $p > 0$ et $A \in (0, +\infty]$ tels que

$$\lim_{u \to \infty} \frac{f(x,u)}{|u|^p u} = A \quad \text{uniformément pour } x \in \Gamma, \tag{3.11}$$

alors la condition $(\mathbf{A_1})$ est vérifiée.
Soit $\mu \in (1/(p+2), 1/2)$. Il découle de (3.11) que

$$\begin{aligned}
\lim_{u \to \infty} \frac{\int_0^u f(x,v)dv - \mu u f(x,u)}{|u|^p u^2} &= \lim_{u \to \infty} \left(\frac{\int_0^u f(x,v)dv}{|u|^p u^2} - \frac{\mu u f(x,u)}{|u|^p u^2} \right) \\
&= \lim_{u \to \infty} \left(\frac{f(x,u)}{(p+2)|u|^p u} - \mu \frac{f(x,u)}{|u|^p u} \right) \\
&= \lim_{u \to \infty} \frac{f(x,u)}{|u|^p u} \left(\frac{1}{p+2} - \mu \right) \\
&= A \left(\frac{1}{p+2} - \mu \right) < 0.
\end{aligned}$$

donc il existe $M > 0$ tel que $F(x,u) = \int_0^u f(x,v)dv \leqslant \mu u f(x,u)$ pour tout $|u| \geqslant M$ et $x \in \Gamma$.

Exemple 3.1.

Considérons l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
u(x) = \int_0^1 k(x,y) &\left[au(y) + b(y) \arctan u(y) \ln \left(1 + u^2(y)\right) \right. \\
&\left. + c|u(y)|^p u(y) \right] dy, \quad x \in \Gamma,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

où $a \in [0, 1/\lambda_1)$, p, $c > 0$, b est continue sur Γ.
Il est évident que $f(x,u) = au + b(x) \arctan u \ln(1+u^2) + c|u|^p u$, $(x,u) \in \Gamma \times \mathbb{R}$, est impair en $u \in \mathbb{R}$.
Par calcul, on a

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(x,u)}{u} = a < \frac{1}{\lambda_1}, \quad \lim_{u \to +\infty} \frac{f(x,u)}{u} = +\infty,$$

$$\lim_{u \to \infty} \frac{f(x,u)}{|u|^p u} = c > 0 \quad \text{uniformément pour } x \in \Gamma.$$

Il résulte de la Remarque 3.2 que la condition $(\mathbf{A_1})$ est vérifiée. D'après le Théorème 3.2.3, l'équation intégrale (3.12) a une infinité de solutions.

Théorème 3.2.4.

Supposons que la condition $(\mathbf{A_1})$ soit vérifiée, et

$(\mathbf{A_3})$ $\limsup_{u\to 0} f(x,u)/u < 1/\lambda_{n+1}$ uniformément pour $x \in \Gamma$;

$(\mathbf{A_4})$ $F(x,u) \geqslant u^2/\left(2\lambda_n\right)$ pour tout $(x,u) \in \Gamma \times \mathbb{R}$.

Alors (3.1) admet au moins une solution non nulle dans $C(\Gamma)$.

Démonstration.

D'après (iii) du Lemme 3.1.1, il suffit de prouver que l'équation (3.2) a au moins une solution non nulle dans $L^2(\Gamma)$.

On considère toujours la fonctionnelle Ψ définie dans la preuve du Théorème 3.2.1.

Nous allons vérifier que Ψ vérifie toutes les conditions du Théorème 1.3.5 (Théorème Linking).

Dans la preuve du Théorème 3.2.2 nous avons prouvé que Ψ satisfait la condition $(\mathbf{PS})$, donc Ψ satisfait la condition $(\mathbf{PS})_c$.

Par hypothèse $(\mathbf{A_3})$, il existe $\varepsilon \in (0,1)$ et $\delta > 0$ tels que $f(x,u) \leqslant (1-\varepsilon)\lambda_{n+1}^{-1}u$ pour tout $x \in \Gamma$ et $u \in [0,\delta]$, et $f(x,u) \geqslant (1-\varepsilon)\lambda_{n+1}^{-1}u$ pour tout $x \in \Gamma$ et $u \in [-\delta,0]$. Il s'ensuit donc que

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,v)dv \leqslant \frac{1}{2\lambda_{n+1}}(1-\varepsilon)|u|^2, \quad x \in \Gamma, |u| \leqslant \delta. \tag{3.13}$$

Soient $\rho = \delta/M_1$, $\alpha = \varepsilon\rho^2/2$. Alors il résulte de (2.11) que $\left\|K^{1/2}v\right\|_C \leqslant M_1\|v\| = \delta$ pour tout $v \in \partial B_\rho$, où $B_\rho = \{v \in L^2(\Gamma) : \|v\| < \rho\}$.

Soient $V = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $X = V^\perp$. Donc d'après (3.13), on a sur X que

$$\begin{aligned}
\Psi(v) &= \frac{1}{2}(v,v) - \int_\Gamma \int_0^{K^{1/2}v(x)} f(x,u)dudx \\
&= \frac{1}{2}(v,v) - \int_\Gamma F\left(x, K^{1/2}v(x)\right)dx \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2\lambda_{n+1}}(1-\varepsilon)\int_\Gamma \left|K^{1/2}v(x)\right|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2\lambda_{n+1}}(1-\varepsilon)(Kv,v)
\end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2\lambda_{n+1}}(1-\varepsilon)\lambda_{n+1}\|v\|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\|v\|^2, \quad v \in \partial B_\rho. \tag{3.14}$$

Cela implique que $\inf_{v\in X\cap\partial B_\rho}\Psi(v) \geqslant \varepsilon\rho^2/2 = \alpha > 0$.

Par condition $(\mathbf{A_3})$, on a sur V que

$$\Psi(v) = \frac{1}{2}(v,v) - \int_\Gamma F\left(x, K^{1/2}v(x)\right)dx \leqslant \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2\lambda_n}(Kv,v)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2\lambda_n}\lambda_n\|v\|^2 = 0. \quad (3.15)$$

Définissez $z = \rho e_{n+1}$. Il résulte de l'hypothèse ($\mathbf{A_4}$) que $F(x,R) \geqslant R^2\,(2\lambda_n)^{-1}$ et $F(x,-R) \geqslant R^2\,(2\lambda_n)^{-1}$ pour tous $x \in \Gamma$. Et alors il existe $C_1 > 0$ tel que $F(x,R)R^{-1/\mu} \geqslant C_1$ et $F(x,-R)R^{-1/\mu} \geqslant C_1$ pour tout $x \in \Gamma$. Par hypothèse($\mathbf{A_1}$), pour tout $x \in \Gamma$ et $u \geqslant R$, on a que

$$\left(\frac{F(x,u)}{u^{1/\mu}}\right)'_u = \frac{u^{1/\mu}f(x,u) - 1/\mu \cdot u^{1/\mu-1}F(x,u)}{u^{2/\mu}} = \frac{\mu u f(x,u) - F(x,u)}{\mu u^{1/\mu+1}} \geqslant 0.$$

Alors

$$\frac{F(x,u)}{u^{1/\mu}} \geqslant \frac{F(x,R)}{R^{1/\mu}} \geqslant C_1, \quad x \in \Gamma,\ u \geqslant R.$$

Cela implique que $F(x,u) \geqslant C_1|u|^{1/\mu}$ pour tout $x \in \Gamma$ et $u \geqslant R$. De même, on peut prouver que $F(x,u) \geqslant C_1|u|^{1/\mu}$ pour tout $x \in \Gamma$ et $u \leqslant -R$. Comme $F(x,u) - C_1|u|^{1/\mu}$ est continue sur $\Gamma\times[-R,R]$, il existe $C_2 > 0$ tel que $F(x,u) - C_1|u|^{1/\mu} \geqslant -C_2$ sur $\Gamma\times[-R,R]$. Ainsi nous avons

$$F(x,u) \geqslant C_1|u|^{1/\mu} - C_2, \quad (x,u) \in \Gamma \times \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

À partir de (3.16), nous avons

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Gamma F\left(x, K^{1/2}u(x)\right) dx$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|u\|^2 - C_1\left\|K^{1/2}u\right\|_{1/\mu}^{1/\mu} + C_3, \quad u \in L^2(\Gamma). \quad (3.17)$$

où $\|u\|_{1/\mu}$ désigne la norme $\left(\int_\Gamma |u(x)|^{1/\mu}dx\right)^\mu$ dans l'espace $L^{1/\mu}(\Gamma), C_3 = C_2$ mes(Γ). Puisque, sur l'espace de dimension finie $V \oplus \mathbb{R}z$, toutes les normes sont équivalentes, il existe $C_4 > 0$ tel que $C_4\|u\| \leqslant \|u\|_{1/\mu}, u \in V \oplus \mathbb{R}z$. Et puis, d'après la Remarque 2.3, on a

$$\left\|K^{1/2}u\right\|_{1/\mu} \geqslant C_4\left\|K^{1/2}u\right\| \geqslant C_4C_5\|u\|, \quad u \in V \oplus \mathbb{R}z,$$

où $C_5 = \inf_{\|u\|=1, u\in V\oplus\mathbb{R}z}\left\|K^{1/2}u\right\| > 0$. Ainsi, il résulte de (3.17) que

$$\Psi(u) \leqslant \frac{1}{2}\|u\|^2 - C_1\,(C_4C_5)^{1/\mu}\,\|u\|^{1/\mu} + C_3, \quad u \in V \oplus \mathbb{R}z.$$

Par conséquent nous avons $\Psi(u) \to -\infty$ comme $u \in V \oplus \mathbb{R}z$ et $\|u\| \to \infty$.
Donc, remarquant (3.15), il existe $r > \rho$ tel que

$$b = \inf_{u\in X\cap\partial B_\rho} \Psi(u) \geqslant \alpha > 0 = \max_{u\in M_0} \Psi(u),$$

où

$$M_0 = \{u = y + \lambda z : y \in V,\ \|u\| = r \text{ et } \lambda \geqslant 0 \text{ ou } \|u\| \leqslant r \text{ et } \lambda = 0\}.$$

Ainsi, d'après le théorème Linking, Ψ a une valeur critique $\tilde{c} > 0$, c'est-à-dire qu'il existe $\tilde{v} \in L^2(\Gamma)$ tel que $\Psi(\tilde{v}) = \tilde{c}$ et $\Psi'(\tilde{v}) = \tilde{v} - K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}\tilde{v} = 0$.
Il est évident que $\tilde{v} \neq 0$ puisque $\Psi(0) = 0$.
La démonstration est terminée. ■

Exemple 3.2.

Soient $f(x,u) = |u|^{p-2}u + \lambda u$ pour tout $(x,u) \in \Gamma \times \mathbb{R}$, où $p \in (2, +\infty)$, $\lambda \in (1/\lambda_n, 1/\lambda_{n+1})$. Alors l'équation intégrale (*) admet au moins une solution non nulle dans $C(\Gamma)$.

Chapitre 4

Applications à quelques problèmes aux limites

Dans ce chapitre, nous représentons des applications sur les résultats obtenues dans le 3 ème chapitre à un problème aux limites de secondordre et quatrième ordre.

4.1 Application à un problème aux limites associé à une équation différentielle ordinaire de second ordre

4.1.1 Position du problème

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude du problème aux limites du second ordre suivant (voir [17]) :

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0, 1], \\ u(0) = u'(1) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

4.1.2 Reformulation du problème

D'abord, nous remarquons que le problème (4.1) peut être reformulé de manière équivalente comme

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) ds, \quad t \in [0, 1], \tag{4.2}$$

où $G : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ est la fonction de Green du problème $-u''(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ avec les conditions au bord $u(0) = -u'(1) = 0$, c'est-à-dire,

$$G(t,s) = \min\{t,s\} = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Démonstration.

Par intégration deux fois de 0 à t, on obtient de l'équation $-u''(t) = y(t)$, on a :

$$\begin{aligned} u'(t) &= a - \textstyle\int_0^t y(s)ds \\ u(t) &= at + b - \textstyle\int_0^t (t-s)y(s)ds, \end{aligned}$$

où a, b sont des constantes réelles à déterminer.
D'après la condition au bord $u(0) = u'(1) = 0$, on trouve $b = 0$ et $a = \int_0^1 y(s)ds$ en substituant a et b dans l'expression de $u(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned} u(t) &= \textstyle\int_0^1 ty(s)ds - \int_0^t (t-s)y(s)ds \\ u(t) &= \textstyle\int_0^1 G(t,s)y(s)ds, \end{aligned}$$

où :

$$G(t,s) = \min\{t,s\} = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

La démonstration est terminée. ■

Il est facile de voir qu'une solution du problème (4.1) dans $C^2[0,1]$ est une solution de l'équation intégrale suivante dans $C[0,1]$:

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, u(s)) ds, \quad t \in [0,1]. \tag{4.3}$$

on remarque que :

- $\max_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} G(t,s) = 1$;
- $G(t,s) = G(s,t)$ pour tous $t, s \in [0,1]$;
- $G : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ est continu.

Soit $k(t,s) = G(t,s)$ pour tout $t, s \in [0,1]$ dans (2.1). Par des simples calculs, on trouve que toutes les valeurs propres de K sont $\left\{\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\right\}_{k=1}^{\infty}$, qui sont associées au famille de fonctions propres orthonormées $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\sqrt{2}\sin((2k-1)\pi t/2)\}_{k=1}^{\infty}$ et $\lambda_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi la condition (H_0) pour K est satisfaite.
Enfin, en appliquant directement les résultats de la chapitre 3 au problème (4.1), nous obtenons les corollaires suivants.

Corollaire 4.1.1.

(i) D'après Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2, si f satisfait une des conditions suivants :

- $f(t,u)$ est une fonction décroissante par rapport à u, pour chaque $t \in [0,1]$, où
- S'il existe $a \in [0, \pi^4/4)$ tel que $[f(t,u) - f(t,v)][u-v] \leqslant a|u-v|^2$ pour tout $t \in [0,1]$, et $u, v \in \mathbb{R}$.

Alors du problème (4.1) admet une unique solution dans $C^2[0,1]$.

(ii) D'après Théorèmes 3.2.1 et 3.2.2, si f satisfait l'une des conditions suivants :

- $$\int_0^u f(t,v)dv \leqslant \frac{a}{2}u^2 + b(t)|u|^{2-\gamma} + c(t), \quad t \in [0,1],\ u \in \mathbb{R},$$
  où $a \in [0, \pi^4/4)\,, \gamma \in (0,2), b \in L^{2/\gamma}[0,1]$, et $c \in L[0,1]$.
- où

  (B_1) il existe $\mu \in (0, 1/2)$ et $R > 0$ tels que $F(t,u) := \int_0^u f(t,v)dv \leqslant \mu u f(t,u)$ pour tout $t \in [0,1]$ et $|u| \geqslant R$;

  (B_2) $\limsup_{u \to 0} f(t,u)/u < \pi^4/4$ et $\liminf_{u \to +\infty} f(t,u)/u > \pi^4/4$ uniformément pour $t \in [0,1]$.

Alors du problème (4.1) admet au moins une solution non nulle dans $C^2[0,1]$.

(iii) D'après Théorèmes 3.2.3, si f satisfait la condition suivante :

- Supposons que $f(t,u)$ soit impair dans u, c'est-à-dire que $f(t,-u) = -f(t,u)$ pour tout $t \in [0,1]$ et $u \in \mathbb{R}$. Et supposons que la condition $(\mathbf{A_1})$ du Théorème 3.2.2 soit satisfaite et que

$$\limsup_{u \to 0} \frac{f(t,u)}{u} < \pi^4/4 \quad \text{et} \quad \lim_{u \to +\infty} \frac{f(t,u)}{u} = +\infty \quad \text{uniformément pour } t \in [0,1].$$

Alors (4.1) a une infinité de solutions.

4.2 Application à un problème aux limites associé à une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre

4.2.1 Position du problème

Dans cette section, on s'intéresse de l'étude d'un problème aux limites du quatrième ordre suivant (voir [16]) :

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + \beta u(t) - \alpha u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0, \;\; u''(0) = u''(1) = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et satisfont $\beta < 2\pi^2$, $\beta^2 + 4\alpha \geqslant 0$, $\alpha/\pi^4 + \beta/\pi^2 < 1$.
Soient λ_1, λ_2 les racines du polynôme $P(\lambda) = \lambda^2 + \beta\lambda - \alpha$, c'est à dire,

$$\lambda_1, \lambda_2 = \left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}\right)/2.$$

Ensuite on peut écrire

$$\begin{aligned} u^{(4)}(t) + \beta u''(t) - \alpha u(t) &= \left(-\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_1\right)\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_2\right) u(t) \\ &= \left(-\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_2\right)\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_1\right) u(t), \quad t \in [0,1], \; \forall u \in C^4[0,1]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Et par l'hypothèse de base sur α et β, il est facile de voir que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 > -\pi^2$.

4.2.2 Reformulation du problème

$$\begin{cases} -u''(t) + \lambda_i u(t) = 0, \quad t \in [0,1] \quad, i = 1,2 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Soient $\omega_i = \sqrt{|\lambda_i|}$, G_i la fonction de Green du problème aux limites linéaires (4.6).

- Si $\lambda_i > 0$, alors G_i est explicitement donné par

$$G_i(t,s) = \frac{1}{\omega_i \sinh \omega_i} \begin{cases} \sinh \omega_i t \cdot \sinh \omega_i (1-s), & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ \sinh \omega_i s \cdot \sinh \omega_i (1-t), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

- Si $\lambda_i = 0$, alors G_i est exprimé par

$$G_i(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s(1-t), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

- Si $\lambda_i \in (-\pi^2, 0)$, alors G_i peut être exprimé par

$$G_i(t,s) = \frac{1}{\omega_i \sin \omega_i} \begin{cases} \sin \omega_i t \cdot \sin \omega_i (1-s), & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ \sin \omega_i s \cdot \sin \omega_i (1-t), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Il résulte de (4.5) que

$$\int_0^1 G_1(t,\tau)G_2(\tau,s)d\tau = \int_0^1 G_2(t,\tau)G_1(\tau,s)d\tau, \quad t,s \in [0,1]. \tag{4.7}$$

Soit $G(t,s) = \int_0^1 G_1(t,\tau)G_2(\tau,s)d\tau,\ t,s \in [0,1]$.
Ainsi, il est facile de voir qu'une solution (4.4) dans $C^4[0,1]$ est une solution de l'équation intégrale suivante dans $C[0,1]$:

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds, \quad t \in [0,1]. \tag{4.8}$$

D'après l'expression de G_i, il est clair que :

- $G_i(t,s) > 0$ pour tout $t,s \in (0,1)$;
- $G_i(t,s) = G_i(s,t)$ pour tout $t,s \in [0,1],\ i = 1,2$.

Par conséquent

- $G : [0,1] \times [0,1] \to [0,+\infty)$ est continue ;
- $\max_{t,s\in[0,1]} G(t,s) = C > 0$;
- $G(t,s) = G(s,t)$ pour tout $t,s \in [0,1]$(**car** : il résulte de la propriété de symétrie de G_1, G_2 et (4.7)).

Soit $k(t,s) = G(t,s)$ pour tout $t,s \in [0,1],\ \Gamma = [0,1]$ dans (2.1).
Par des simples calculs, on trouve que toutes les valeurs propres de K sont $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{1/(k^4\pi^4 - \beta k^2\pi^2 - \alpha)\}_{k\in\mathbb{N}}$, qui ont les fonctions propres orthonormées correspondantes $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\sqrt{2}\sin k\pi t\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\lambda_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi la condition (H_0) pour K est satisfaite.
Enfin, en appliquant directement les résultats du chapitre 3 au problème (4.4), nous obtenons les corollaires suivants.

Corollaire 4.2.1.

(i) D'après Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2, si f satisfait l'une des conditions suivants :

- $f(t,u)$ est une fonction décroissante en u, pour chaque $t \in [0,1]$, où
- s'il existe $a \in [0, \pi^4 - \beta\pi^2 - \alpha)$ tel que $[f(t,u) - f(t,v)][u-v] \leqslant a|u-v|^2$ pour tout $t \in [0,1]$, et $u, v \in \mathbb{R}$.

Alors du problème (4.4) admet une unique solution dans $C^4[0,1]$.

(ii) D'après Théorèmes 3.2.1 et 3.2.2 et 3.2.4, si f satisfait l'une des conditions suivants :

- $$\int_0^u f(t,v)dv \leqslant \frac{a}{2}u^2 + b(t)|u|^{2-\gamma} + c(t), \qquad t \in [0,1],\ u \in \mathbb{R},$$
  où $a \in [0, \pi^4 - \beta\pi^2 - \alpha)\,,\ \gamma \in (0,2),\ b \in L^{2/\gamma}[0,1]$, et $c \in L[0,1]$.
- où si on suppose
  (B_1) il existe $\mu \in (0, 1/2)$ et $R > 0$ tels que $F(t,u) := \int_0^u f(t,v)dv \leqslant \mu u f(t,u)$ pour tout $t \in [0,1]$ et $|u| \geqslant R$;
  (B_2) $\limsup_{u\to 0} f(t,u)/u < \pi^4 - \beta\pi^2 - \alpha$ et $\liminf_{u\to+\infty} f(t,u)/u > \pi^4 - \beta\pi^2 - \alpha$ uniformément pour $t \in [0,1]$.
- où encore la condition (B_1) avec les deux conditions
  (B_3) $\limsup_{u\to 0} f(t,u)/u < (n+1)^4\pi^4 - \beta(n+1)^2\pi^2 - \alpha$ uniformément pour $t \in [0,1]$;
  (B_4) $F(t,u) \geqslant 2^{-1}\left(n^4\pi^4 - \beta n^2\pi^2 - \alpha\right)u^2$ pour tout $(t,u) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.

Alors du problème (4.4) admet au moins une solution non nulle dans $C^4[0,1]$.

(iii) D'après Théorèmes 3.2.3, si f satisfait la condition suivante :

- Supposons que $f(t,u)$ soit impair dans u, c'est-à-dire que $f(t,-u) = -f(t,u)$ pour tout $t \in [0,1]$ et $u \in \mathbb{R}$. Et supposons que la condition ($\mathbf{A_1}$) du Théorème 3.2.2 soit satisfaite et que
  $$\limsup_{u\to 0} \frac{f(t,u)}{u} < \pi^4 - \beta\pi^2 - \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{u\to+\infty} \frac{f(t,u)}{u} = +\infty \quad \text{uniformément pour } t \in [0,1].$$

Alors (4.4) a une infinité de solutions.

Remarque 4.1.

Soient $f(t,u) = |u|^{p-2}u + \lambda u$ pour tout $(t,u) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, où $p \in (2, +\infty)$,
$\lambda \in (n^4\pi^4 - \beta n^2\pi^2 - \alpha, (n+1)^4\pi^4 - \beta(n+1)^2\pi^2 - \alpha)$.
Alors du problème (4.4) admet au moins une solution non nulle dans $C^4[0,1]$. ■

Conclusion générale

Dans ce mémoire on a démontré quelques résultats d'existence et multiplicité des solutions pour l'équation intégrale non linéaire de type Hammerstein :

$$u(t) = \int_{\Gamma} k(t,s) f(s, u(s)) ds \quad , \quad t \in \Gamma, \tag{I}$$

où Γ est un sous-ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^n$ avec $\text{mes}(\Gamma) > 0$.
En suivant les étapes suivantes :

- Définir l'opérateur $K, \mathbf{f} : C(\Gamma) \to C(\Gamma)$ respectivement par

$$Ku(x) = \int_{\Gamma} k(x,y) u(y) dy, \quad x \in \Gamma, \ \forall u \in C(\Gamma),$$

$$\mathbf{f}u(x) = f(x, u(x)), \quad x \in \Gamma, \ \forall u \in C(\Gamma),$$

- Convertir l'équation intégrale (I) en une équation d'opérateur comme $K\mathbf{f}u = u$ puis l'équation $v = K^{1/2}\mathbf{f}K^{1/2}v$ dans l'espace de Hilbert réel $L^2(\Gamma)$.
- Le principe de l'opérateur monotone et la théorie du point critique sont utilisées pour obtenir l'existence et la multiplicité des solutions.
  En argument, l'opérateur racine quadratique et ses propriétés jouent un rôle important.

Ces résultats sont importants car d'une part, il généralise plusieurs travaux déjà faits, et d'une autre montre que la théorie des opérateurs et surtout l'opérateur racine carré représente un outil très efficace dans l'étude des problèmes aux limites non linéaires associés à des équations différentielles.
Nous proposons aussi et ce sera notre futur travail, de suivre la même méthode décrite ci-dessus pour étudier des autres genres d'équations intégrales soit en affaiblissant les conditions exigées où appliquer le résultat obtenu dans l'étude des autres problèmes.

Bibliographie

[1] A.E.Taylor, D.C.Lay : Introduction to Functional Analysis, second ed, Wiley, 1980.

[2] A.Hammerstein, Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. Acta Math. 54, 117-176 (1930).

[3] B.P.Rynne, M.A.Youngson : Linear functional analysis, Springer Science, Business Media, 2008.

[4] D.Li : Cours d'Analyse Fonctionnelle, Ellipses Édition Marketing S.A, 2013.

[5] D.Guo : Nonlinear Functional Analysis, second ed, Shandong Sci. Tec. Press, 2001.

[6] E.Zeidler : Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, I, Fixed-Point Theorems, Springer-Verlag, NewYork, 1986.

[7] E.Zeidler : Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, III, Variational Methods and Optimization, SpringerVerlag, New York, 1985.

[8] G.Thierry, R.Herbin : Mesure, intégration, probabilités, Ellipses Edition Marketing, 2013.

[9] H.Brezis : Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Edition Masson, Paris, 1983.

[10] H.Brezis : Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2011.

[11] J.Pierre, Aubin : Analyse fonctionnelle appliquée, Presses Universitaires de France, 1987.

[12] J.B, Conway : course in functional analysis, Spring-Verlag, New York, 1985.

[13] K.Deimling : Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[14] K.Otared : Introduction à la théorie des points critiques, et applications aux problèmes elliptiques, Vol.13. Paris. Springer-Verlag, 1993.

[15] L.Schwartz : Analyse topologie générale et analyse fonctionnelle, Paris, Hermann, 1970.

[16] Li.F, Li.Y, Liang.Z, Existence of solutions to nonlinear Hammerstein integral equations and applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications 323.1 (2006) : 209-227.

[17] Li.F, Liang.Z, Zhang.Q, Existence of solutions to a class of nonlinear second order two-point boundary value problems. Journal of mathematical analysis and applications 312.1 (2005) : 357-373.

[18] M.Struwe : Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, second ed, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[19] M.Willem : Minimax Theorems, Birkhäuser, 1996.

[20] N.EH.Hassan : Topologie générale et espaces normés, Dunod, 2011.

[21] P.H.Rabinowitz : Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, No. 65. American Mathematical Soc, 1986.

[22] P.H.Rabinowitz, Some critical point theorems and applications to semilinear elliptic partial differential equations., Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, Class Scienza 4 (1978) 215–223.

[23] P.H.Rabinowitz, Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations,in,Nonlinear Analysis., A Collection of Papers in Honor of Erich Röthe, Academic Press, New York, (1978), pp. 161–177.

[24] S.Benzoni-Gavage : Calcul différentiel et équations différentielles, Dunod, Paris, 2010.

[25] Y.Caumel : Cours d'analyse fonctionnelle et complexe, éditions cépaduès, 2009.

Résumé

Notre but dans ce mémoire, est d'étudier l'existence et la multiplicité des solutions pour l'équation intégrale non linéaire de Hammerstein suivante :

$$u(t) = \int_\Gamma k(t,s) f(s,u(s))ds \quad , \quad t \in \Gamma,$$

où Γ est un sous-ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^n$, dans l'espace de Hilbert réel $L^2(\Gamma)$. Sous certaines conditions sur l'opérateur linéaire K, et des autres sur la non linéarité f, on démontre que l'équation intégrale ainsi définie admet au moins une solution, une unique solution où une infinité de solutions. Pour ceci les outils mathématiques utilisés sont le principe de l'opérateur monotone et la théorie du point critique, en particulier en utilisant le théorème linking. De plus, l'opérateur racine carré de l'opérateur de K et ses propriétés jouent un rôle important.
mots clés : Principe de l'opérateur fortement monotone, Condition de Palais-Smale, Lemme de Mountain Pass, Théorème Linking, Problèmes aux limites de quatrième ordre.

Abstract

In this paper, we studied the exsistence and multiplicity of solutions for the following Hammerstein nonlinear integral operator equation:

$$u(t) = \int_\Gamma k(t,s) f(s,u(s))ds \quad , \quad t \in \Gamma,$$

where Γ is a bounded closed subset of $\mathbb{R}^n$, in the real Hilbert space $L^2(\Gamma)$. Under certain conditions on the linear operator K, we establish some others conditions on the nonlinearity f which are able to guarantee that the equation mentioned admits at least one solution, a unique solution or infinitely many solutions.
For this we used the monotone operator principle and the critical point theory, in particular using the linking theorem, Also the quadratic root operator $K^{1/2}$ and its properties play an important role.
keywords : Strongly monotone operator principle, Palais-Smale condition, Mountain pass lemma, Linking theorem, Fourth-order boundary value problem.

ملخص

هدفنا في هذه المذكرة هو دراسة وجود و وحدانية أوتعدد الحلول للمعادلة التكاملية غير الخطية لهامرستان التالية :

$$u(t) = \int_\Gamma k(t,s) f(s,u(s))ds \quad , \quad t \in \Gamma,$$

حيث Γ هي مجموعة جزئية مغلقة و محدودة من $\mathbb{R}^n$، في فضاء هلبرت الحقيقي $L^2(\Gamma)$. تحت شروط معينة على المؤثر الخطي K، نضع بعض الشروط على المؤثر غير الخطي f والتي تضمن أن المعادلة المذكورة تقبل حلا واحدا على الأقل أوحل وحيدا أو ما لا نهاية من الحلول.
الأدوات الرياضية المستخدمة في الدراسة هي : مبدأ المؤثر الرتيب ونظرية النقطة الحرجة، لا سيما باستخدام نظرية ليكينغ، بالإضافة إلى ذلك، يلعب مؤثر الجذر التربيعي $K^{1/2}$ وخصائصه دورا مهما في ذلك.
الكلمات المفتاحية: مبدأ المؤثر الرتيب بقوة، شرط باليس سمال، توطئة ماونتن باس، نظرية ليكينغ، مسائل حدية من الرتبة الرابعة.