



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur
et de la Recherche scientifique
Université Echahid Hamma Lakhdar d'El-Oued



Faculté de Technologie
Mémoire de Fin d'Étude

En vue de l'obtention du diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologie

Filière : Electrotechnique

Spécialité : Commande Electrique

Thème

**Commande par mode glissant d'ordre deux
appliquée à un pendule inversé**

Réalisé par :

- GABOUSSA Hamza
- MERAD Sofiane
- GUERMIT Imad Eddine

Encadré par :

M. BABA ARBI Idriss

Soutenu en juin 2023

Remerciements

Au terme de ce travail :

Nous tenons, en premier lieu à remercier le bon dieu pour le courage, la volonté et la patience qu'il nous a donné afin de mener ce travail à terme.

*Nos vifs remerciements à notre promoteur Monsieur **Idris Baba Aarbi**, pour l'appui scientifique et pour sa disponibilité le long de notre travail, nous lui sommes infiniment reconnaissants de la bienveillance dont il a fait preuve à notre égard, de ses encouragements incessants et de la confiance dont il nous a témoigné.*

Nous remercions vivement les membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont manifesté, en acceptant de juger notre humble travail, et de l'enrichir par leurs propositions.

Nous remercions également à nos enseignants qui ont contribué à notre formation pendant tout le cursus universitaire.

Enfin, un grand merci à nos familles et tous nos amis, plus particulièrement à nos parents, pour nous avoir soutenus et aidés tout au long de nos études.

Dédicaces

Nous avons le grand plaisir de dédier ce travail à :

- *Nos parents :*

Pour tous les encouragements qu'ils nous ont fournis malgré leur lourde responsabilité. Que dieu inchaa Allah les garde pour nous.

- *A Nos sœurs et nos frères :*

Nous vous dédions ce travail de témoignage des liens solides et intimes qui nous unissent en vous souhaitant un avenir de succès et de bonheur.

- *A notre encadreur (**BABA ARBI Idriss**)*

- *A tous les enseignants du département génie électrique*

*A tous nos amis et particulièrement les plus intimes (**Nouamane Zouzou**) en témoignage des moments inoubliables, des sentiments purs, et des liens solides qui nous unissent.*

Veuillez accepter nos meilleurs vœux de réussite et de prospérité

Résumé:

Le travail consiste à appliquer une commande par mode glissant d'ordre un et d'ordre deux sur un pendule inversé, commençant par une présentation structurale du pendule inversé et sa modélisation mathématique.

La commande par mode glissant d'ordre un est appliquée au pendule pour stabiliser la tige à la position verticale, mais avec l'apparition de phénomène de broutement dans le signal de commande.

L'application de la commande par mode glissant d'ordre deux via "Super Twisting Allgorithm" est introduite afin de résoudre le problème de broutement dans le signal de commande.

Abstract:

The study consists for the application of first and second order sliding mode control of an inverted pendulum starting by a structural presentation of the pendulum with its mathematical modeling.

First order sliding mode control is applied to the inverted pendulum in order to stabilize it at the vertical position but with the apparition of chattering in the control signal.

The application of second order sliding mode control with "Super Twisting Allgorithm" is used for solve the problem of chattering in the control signal.

خلاصة :

يتكون العمل من تطبيق عنصر تحكم في الوضع الانزلاق من الرتبة الأولى والثانية على البندول المقلوب ، بدءا من العرض الهيكلي للبندول المقلوب و نمودجه الرياضي .

يتم تطبيق التحكم في الوضع الانزلاق في الوضع من الدرجة الأولى على البندول المقلوب من أجل تثبيته في الوضع الرأسي، ولكن مع ظهور ظاهرة الثرثرة في إشارة التحكم .

تطبيق التحكم في الوضع الانزلاق من الدرجة الثانية عبر " Super Twisting " كل الخوارزمية تستخدم لحل مشكلة الثرثرة في إشارة التحكم.

Sommaire

Sommaire:

Résumé:.....	04
Introduction Générale.....	14

Chapitre I

I.1 Introduction :.....	18
I.2 Définition d'un pendule inversé :.....	18
I.3 Intérêt de l'étude de pendule inversé :	19
I.4 Principe du fonctionnement :.....	20
I.5 Modélisation du pendule inversé :.....	20
I.5.1 Énergie cinétique :.....	22
I.5.1.1 L'énergie cinétique du pendule :.....	22
I.5.1.2 Énergie cinétique du chariot :	23
I.5.2 Énergie potentielle :.....	23
I.5.3 Équation de Lagrange :	24
I.5.3.1 Équation de Lagrange pour le degré de liberté $q_1 = xt$:.....	24
I.5.3.2 Équation de Lagrange pour le degré de liberté $q_2 = \theta t$:.....	25
I.6 Calcul du modèle d'état :	25
I.6.1 Calcul de x et θ :.....	26
I.6.2 Le modèle d'état :.....	27
I.7 Conclusion :	28

Chapitre II

II.1. Introduction :.....	30
II.2. Théorie de la commande par mode de glissement :	30
II.2.1. Régime glissement idéal :.....	31
II.2.2. Régime glissant réel :	32
II.3. Principe de l'algorithme de commande par mode de glissement :	32
II.3.1. Choix des surfaces de glissement :.....	32
II.3.2. Conditions d'existence et de convergence du régime glissement :.....	33
II.3.2.1. Fonction directe de commutation :	34
II.3.2.2. Fonction de LYAPUNOV :.....	34
II.3.2.3. Détermination de la loi de commande :.....	34

II.4. Elimination du phénomène du broutement (Chattering) :	37
II.4.1. Fonction SAT:	37
II.4.2. Fonction SMOOTH:	38
II.5. Domaine d'application du réglage par mode glissement :	39
II.6. Avantages et inconvénients de la commande par mode glissant :	39
II.7 Conclusion :	40

Chapitre III

III.1. Introduction :	42
III.2. La commande de mode glissant premier ordre :	42
III.3. Condition de glissement :	45
III.4. La modèle du pendule inversé :	46
III.5. Stabilisation du pendule inversé par mode glissant :	49
III 6. résultats des simulations et interprétation :	51
III.7. Conclusion :	54

Chapitre IV

IV.1 Introduction:	56
IV.2. Le modèle de pendule inversé :	56
IV.3. Stabilisation du pendule inversé par mode glissant d'ordre deux :	59
IV.3.1 préliminaire :	59
IV.3.2 Algorithme de Twisting :	60
IV.3.3 Algorithme de super-Twisting :	60
IV.4 SOSMC Pour le Pendule Inversé :	61
IV.5 résultats des simulations et interprétation :	62
IV.6 Conclusion :	66
Conclusion Générale :	68

Liste des figures et des
tableaux

Liste des figures :

Chapitre I

Figure (I.1) : Pendule inversé en coordonnées généralisées x et θ .	19
Figure(I.2) : HONDA Roadster NC 750 en équilibre à l'arrêt.	19
Figure (I.3) : Exemple sur l'équilibre à base du pendule inversé.	20
Figure (I.4): Modèle d'un pendule inversé.	20

Chapitre II

Figure (II.1) : Convergence du système glissement.	31
Figure (II.2) : Glissement idéal.	31
Figure (II.3) : Glissement réel.	32
Figure (II.4): Fonction sign (non linéarité tout ou rien).	36
Figure (II.5): Phénomène de broutement.	37
Figure (II.6): Fonction « SAT ».	38
Figure (II.7): Fonction « SMOOTH ».	38

Chapitre III

Figure (III.1): Phénomène de Broutement "Chattering"	44
Figure (III.2): Diagramme du corps libre.	47
Figure (III.3): La position angulaire de la tige [rad] par MGO1.	51
Figure (III.4): Le signal de commande [N] par MGO1.	52
Figure (III.5): La surface de glissement.	52
Figure (III.6): Le plant de phase $\theta, \dot{\theta}$.	53

Chapitre IV

Figure (IV.1): Modèle d'un pendule inversé.	56
Tableau (IV.1): variables et paramètres du pendule inversé.	59
Figure (IV.2): Trajectoire en mode glissement deuxième ordre.	60
Figure (IV.3): Trajectoire de l'algorithme de Twisting dans le plan de phase($s, \dot{s}$).	61
Figure (IV.5): La position angulaire de la tige [rad] par MGO2 ST.	63
Figure (IV.6): Le signal de commande [N] par MGO2 ST.	63
Figure (IV.7): La surface de glissement.	64
Figure (IV.8): Le plant de phase $\theta, \dot{\theta}$.	64

Liste des tableaux :

Chapitre I

Tableau (I.1) : Paramètres de l'ensemble chariot et pendule21

Tableau (I.2): variables et paramètres du pendule inversé.....27

Chapitre IV

Tableau (IV.1): variables et paramètres du pendule inversé.....57

Notations

M : Masse du chariot

b : Coefficient de frottement des roues du chariot

m : Masse du pendule

$x(t)$: Position du chariot

J : Inertie du pendule en son centre de masse

l : Demi-longueur de pendule

$\theta(t)$: Angle de rotation du pendule

$F(t)$: Force exercé sure le chariot

g : Intensité de la pesanteur

d : Coefficient de frottement de rotation du pendule

E_c : L'énergie cinétique du système

E_p : L'énergie potentielle du système

L : Lagrangien du système

E_{cc} : L'énergie cinétique du chariot

E_{cp} : L'énergie cinétique du pendule

vc : Vitesse de centre de gravité du pendule

$\varepsilon(t)$: Désigne les degrés de liberté du pendule

D_f : Désigne l'énergie dissipée par frottement

$\dot{\theta}$: Vitesse angulaire du pendule

r_c : Position du centre de gravité du pendule

$\vec{i}, \vec{j}$: Vecteur unitaire du repère x, y

R_a : Résistance de l'induit

L_a : Inductance de l'induit

V_c : La tension d'alimentation de l'induit du moteur (V)

i_a : Intensité du courant (A)

K_m : Constante mécanique

K_b : Constant électrique du moteur

$C_r(t)$: Couple résistant

C_m : Couple moteur

f_m : Coefficient de frottement visqueux

Ω_m : Vitesse angulaire de l'arbre de l'induit

$\ell(t)$: f_{cem}

J_m :Moment d'inertie

X : Vecteur d'état

n : Degré du système

λ : Constantes positif

U : L'entrée du système (la commande)

LQR : La commande Linéaire Quadratique Régulateur

ρ_0 : La solution optimale de l'équation de Riccati

Q et R : Les matrices de pondérations

$G(s)$:La fonction de transfert du filtre

CI : Conditions initiales

Introduction Générale

Introduction Générale :

Avec le développement technologique rapide et la demande croissante en termes de précision et de robustesse, les systèmes automatisés ont connu une évolution constante, ce qui a conduit inévitablement à des structures de commande de plus en plus complexes.

Dans le contexte de la commande des systèmes non linéaires ou présentant des paramètres non constants, les lois de commande classiques peuvent être insuffisantes car elles manquent de robustesse, en particulier lorsque les exigences de précision et d'autres caractéristiques dynamiques du système sont strictes. Il est donc nécessaire de recourir à des lois de commande qui sont insensibles aux variations des paramètres, aux perturbations et aux non linéarités, afin de répondre à ces exigences.

Le pendule inversé a fait l'objet de nombreuses études de recherche tout au long de ces dernières années. Cet intérêt est dû au fait que le problème de la commande du pendule inversé est fondamentalement le même que ceux impliqués dans plusieurs autres systèmes, tels que le lancement des fusées, la propulsion des missiles et la stabilisation des satellites [01]. Le pendule inversé est un système SIMO (Single Input Multiple Output); sous-actionné, à plus d'un degré de liberté, très sensible aux retard et aux frottements.

Dans cette introduction générale, nous allons présenter les motivations et les objectifs de l'application de la commande par mode glissant au pendule inversé. Nous expliquerons également les principes fondamentaux de la commande par mode glissant et son utilisation dans le contexte du pendule inversé.

L'application de la commande par mode glissant au pendule inversé est une approche qui vise à améliorer le contrôle de ce système dynamique non linéaire et instable. La commande par mode glissant est une technique de commande non linéaire qui se caractérise par l'utilisation de surfaces de glissement et de lois de commande discontinues.

Le pendule inversé est un système dynamique complexe qui présente des défis en termes de stabilité, de précision de contrôle et de rejet des perturbations. La commande par mode glissant offre une approche prometteuse pour relever ces défis en permettant une convergence rapide vers les références souhaitées et une atténuation du broutement.

Au cours de cette étude, nous examinerons les différentes techniques de commande par mode glissant qui peuvent être appliquées au pendule inversé, telles que les algorithmes de

Twisting et de super-Twisting. Nous discuterons de leurs avantages, de leurs limites et de leur mise en œuvre pratique.

Enfin, nous présenterons les principaux résultats et contributions de cette étude, ainsi que les perspectives futures dans le domaine de la commande par mode glissant appliquée au pendule inversé.

L'application de la commande par mode glissant au pendule inversé représente une approche prometteuse pour améliorer les performances de contrôle de ce système dynamique complexe. Cette étude vise à contribuer à la compréhension et au développement de techniques de commande avancées pour le contrôle du pendule inversé.

Le thème général des travaux présentés dans ce mémoire est la commande d'un pendule inversé par mode glissant et notamment dans un but de stabilisation.

L'organisation du mémoire se décompose en quatre parties.

Chapitre I : Modélisation de pendule inversé

Le premier chapitre se consacre à la description d'un système sous-actionné, à savoir le pendule inversé, ainsi qu'à l'élaboration de son modèle mathématique en utilisant le formalisme d'Euler-Lagrange.

Chapitre II : Commande par mode glissant

Ce chapitre est dédié à la présentation des notions fondamentales de la commande par régime glissant. Il aborde les méthodes de calcul des signaux de commande, telles que la méthode de Fillipov et la méthode de commande équivalente. Ensuite, il met en évidence l'inconvénient majeur de cette approche, à savoir le phénomène de chattering, et propose quelques solutions pour le réduire.

Chapitre III : Commande par mode glissant d'ordre un d'un pendule inversé

Dans ce troisième chapitre, nous mettons en pratique la commande par mode glissant d'ordre Un en l'appliquant au pendule inversé dans le but de stabiliser le pendule à son point d'équilibre instable.

Chapitre IV : Commande par mode glissant d'ordre deux d'un pendule inversé

Une fois que nous avons développé le modèle dynamique du système pendulaire dans le premier chapitre, nous l'utilisons pour tester la commande par mode glissant d'ordre deux et illustrer son principal inconvénient, à savoir le phénomène de broutement. Par la suite, afin de remédier à ce problème, nous optons pour l'algorithme de super Twisting, l'une des techniques de commande par mode glissant d'ordre deux. Une série de tests par simulations est réalisée pour mettre en évidence l'efficacité de ces deux lois de commande.

Chapitre I

Modélisation de pendule inversé

I.1 Introduction :

Dans le domaine scientifique, l'automatique a souvent recours à des cas d'études particuliers, qui sont représentatifs de grandes classes d'applications, et dont le caractère spectaculaire est confirmé. De plus, avec l'expérience, la connaissance de ces cas s'est affinée et ils fournissent aujourd'hui une base idéale pour comparer de façon valable les avantages et les inconvénients d'approches différentes. Le pendule inversé est un de ces cas-types. [02]

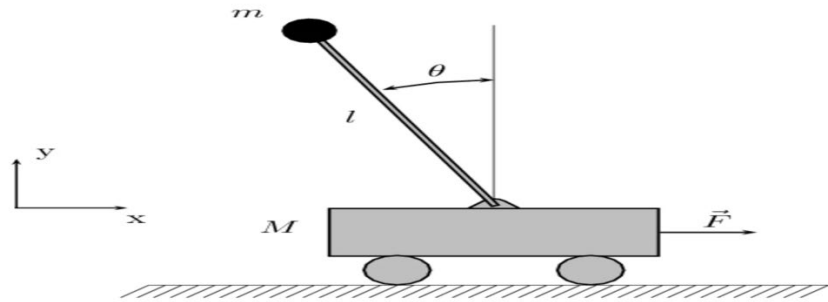
Ce présent chapitre est consacré à la présentation du système pendulaire et à sa modélisation dynamique.

I.2 Définition d'un pendule inversé :

Souvenez-vous quand vous étiez petit et que vous essayiez de tenir en équilibre une tige sur votre doigt. Vous deviez en permanence ajuster la position de votre main pour stabiliser la tige. Le pendule inversé fait la même chose, la seule différence étant que son support (le chariot) se translate dans une seule direction, alors que le doigt se déplace dans toutes les directions.

Depuis 1950, les pendules inversés sont des plates-formes d'expérimentations classiques dans les laboratoires d'automatique. Ils ont été utilisés pour illustrer des idées de commande linéaire comme la stabilisation des systèmes instables. Vue leur nature non linéaire, les pendules sont aussi utilisés pour illustrer des idées émergentes du contrôle non linéaire. Les exemples typiques sont : la stabilisation par retour de sortie, la commande par passivité et la commande robuste à structure variable...etc.

Le pendule inversé que nous considérons est composé de deux éléments (figure(I.1)) : – un chariot libre en translation le long d'un rail de guidage. – un pendule pesant solidaire du chariot et libre en rotation.

Figure (I.1) : Pendule inversé en coordonnées généralisées x et θ .

I.3 Intérêt de l'étude de pendule inversé :

L'importance de l'étude du pendule inversé est devenu plus importante que jamais vu que non seulement il est utilisé dans l'industrie robotique des usines, mais il est plus utiliser dans les objets de la vie quotidienne de l'humain, qui est un exemple d'un double pendule inversé lui-même, et cela se traduit par différents exemples comme la nouvelle moto de HONDA roadster NC 750 qui ne tombe pas même à l'arrêt. Cette moto utilise un dispositif d'un double pendule inversé parallèle appelé « RidingAssist » pour assurer la stabilité, ce dispositif s'active si la vitesse de la moto est inférieure à 4.8km/h ou elle est à l'arrêt. Le premier pendule c'est la fourche, et le deuxième pendule est la fourche de la roue arrière, des moteurs agissent sur sa fourche et ses roues afin de corriger son assiette et la maintenir en équilibre [03].



Figure(I.2) : HONDA Roadster NC 750 en équilibre à l'arrêt [04].

I.4 Principe du fonctionnement :

En théorie, le principe de fonctionnement du système est simple : le chariot doit se déplacer vers la droite pour attraper le pendule lorsqu'il bascule vers la droite, et vice versa. Cependant, le défi consiste à ajuster l'intensité et la forme de la réaction du chariot en fonction de l'angle que le pendule forme avec la verticale. La Figure correspondante nous donne un exemple du principe du pendule.

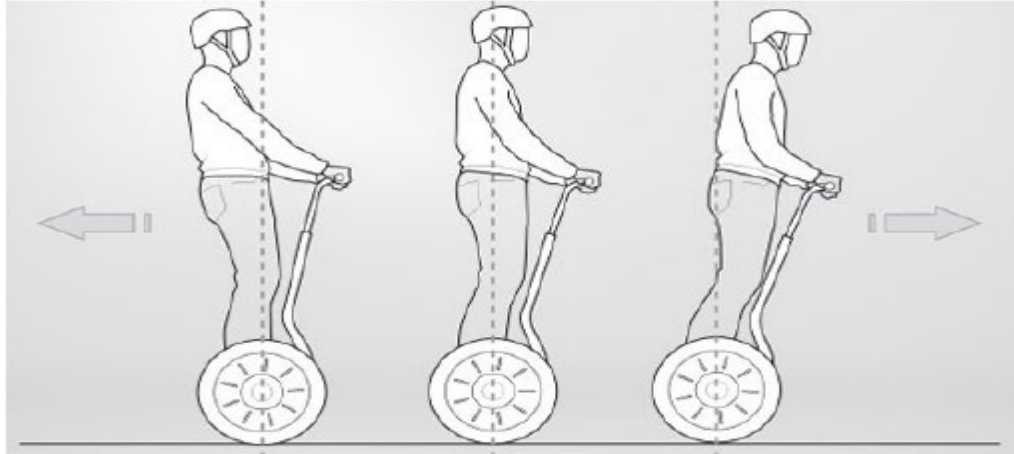


Figure (I.3) : Exemple sur l'équilibre à base du pendule inversé. [05]

I.5 Modélisation du pendule inversé :

Dans cette partie, nous allons établir les équations du mouvement du pendule inversé, en se basant sur le schéma de la figure(I.4)

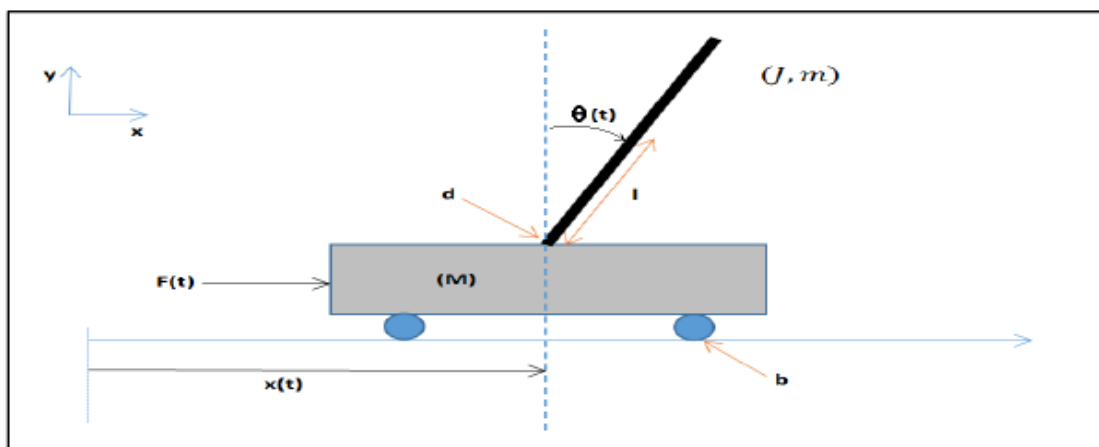


Figure (I.4): Modèle d'un pendule inversé.

Les paramètres du système pendulaire sont donnés dans le tableau suivant :

Paramètre	unités	Description
M	Kg	Masse du chariot
m	Kg	Masse du pendule
L	m	Demi-longueur du pendule
F(t)	N	Forces exercées sur le chariot
$x(t)$	m	Position du chariot
$\theta(t)$	rad	l'angle du pendule
D	$\left(\frac{Nms}{rad}\right)$	Coefficient de Frottements du pendule
B	Ns.m	Coefficient de Frottements du déplacement du chariot
G	9.81 m.s^2	Intensité de la pesanteur
J	Kg.m^2	Inertie du pendule en son centre de masse

Tableau (I.1) : Paramètres de l'ensemble chariot et pendule .

Il existe deux méthodes de détermination des équations du mouvement d'un pendule inversé : celle de la loi fondamentale de la dynamique (LFD) de newton qui est basée sur le concept de force, et celle de formalisme d'Euler-Lagrange[06],[07] qui est basée sur le principe de la conservation d'énergie mécanique .

. Dans ce travail on s'intéresse au formalisme d'Euler-Lagrange dans lequel le lagrangien (L) est défini comme une différence entre l'énergie cinétique(E_c) et l'énergie potentielle (E_p) du système :

$$L = E_c - E_p \quad (\text{I.1})$$

E_p : C'est l'énergie cinétique.

E_p : C'est l'énergie potentielle.

Afin d'obtenir ces équations, on isole l'ensemble (Chariot + pendule) pour calculer les différentes énergies liées à l'ensemble du système.

Soit E_c l'énergie cinétique et E_p l'énergie potentielle.

I.5.1 Énergie cinétique :

L'énergie cinétique se calcule par la somme des différentes énergies cinétiques liées au système.

$$E_c = E_{cp} + E_{cc} \quad (I.2)$$

L'énergie cinétique de pendule est exprimée par l'équation (1.3).

L'énergie cinétique de chariot est donnée par l'équation (1.4).

$$E_{cp} = \frac{1}{2} m v_p^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (I.3)$$

$$E_{cc} = \frac{1}{2} M v_c^2 \quad (I.4)$$

I.5.1.1 L'énergie cinétique du pendule :

La position du centre de gravité du pendule à partir de ses coordonnées est donnée par :

$$\vec{C}_p = \vec{x}_{px} + \vec{C}_{py} = C_{px}\vec{i} + C_{py}\vec{j}$$

Donc :

$$\vec{C}_p = [x + l \sin(\theta)]\vec{i} + l \cos(\theta)\vec{j} \quad (I.5)$$

Le vecteur de vitesse du centre de gravité du pendule est calculé de la manière suivante :

$$\vec{v}_p = \frac{\partial}{\partial t} \vec{C}_p = v_{px}\vec{i} + v_{py}\vec{j}$$

D'où :

$$\vec{v}_p = [\dot{x} - l\dot{\theta} \cos(\theta)]\vec{i} - [l\dot{\theta} \sin(\theta)]\vec{j} \quad (I.6)$$

Le module de vecteur de vitesse du centre de gravité du pendule est calculé comme suit :

$$v_p = \|v_p\| = \sqrt{(v_{px})^2 + (v_{py})^2} \Rightarrow v_p^2 = [\dot{x} + l\dot{\theta} \cos(\theta)]^2 + [l\dot{\theta} \sin(\theta)]^2$$

Ce qui donne :

$$v_p^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta) \quad (I.7)$$

On remplace l'équation (1.7) dans l'équation (1.3), on obtient l'expression de l'énergie cinétique du pendule:

$$\begin{aligned} E_{cp} &= \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta)] + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \\ E_{cp} &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (I.8)$$

I.5.1.2 Énergie cinétique du chariot :

La vitesse de chariot v_c est donnée par la dérivé partielle de $x(t)$ par rapport au temps.

$$E_{cc} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \quad (I.9)$$

On substituant les équations (1.9) et (1.10) dans (1.3), on aura l'expression de l'équation de l'énergie cinétique du système pendule - chariot.

$$E_c = \frac{1}{2}(m + M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (I.10)$$

I.5.2 Énergie potentielle :

L'énergie potentielle du système pendule – chariot est donnée par la somme des deux énergies potentielles de chacun des deux éléments du système.

$$E_p = E_{pp} + E_{pc} = 0 + mgl \cos(\theta)$$

Ce qui donne :

$$E_p = mgl \cos(\theta) \quad (I.11)$$

I.5.3 Équation de Lagrange :

Le Lagrangien est défini par :

$$L = E_c - E_p$$

On substituant les équations (1.10) et (1.11) dans (1.1) on aura :

$$L = \frac{1}{2}(m + M)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta}\dot{x}\cos(\theta) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgl\cos(\theta) \quad (\text{I.12})$$

Le système a deux degrés de liberté, $q_1 = x(t)$ et $q_2 = \theta(t)$

I.5.3.1 Équation de Lagrange pour le degré de liberté $q_1 = x(t)$:

$$F = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial E_f}{\partial \dot{x}} \quad (\text{I.13})$$

Où: F est la force à appliquer sur le chariot.

La dérivée partielle de Lagrangien suivant (t) , $\dot{x}(t)$ et t s'exprime par les équations de l'accolade suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \end{array} \right. = (m + M)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos(\theta) \quad (\text{I.14})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \end{array} \right. = (m + M)\ddot{x} + ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) + ml\ddot{\theta} \quad (\text{I.15})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} \end{array} \right. = 0 \quad (\text{I.16})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_f}{\partial t} \end{array} \right. = f_c\dot{x} \quad (\text{I.17})$$

On substituant les équations (1.15), (1.16) et (1.17) dans l'équation (1.13), on aura la première équation de Lagrange.

$$F_1 = (m + M)\ddot{x} - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) + f_c\dot{x} = F \quad (\text{I.18})$$

I.5.3.2 Équation de Lagrange pour le degré de liberté $q_2 = \theta(t)$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{E_p}{\dot{x}} \quad (I.19)$$

La dérivée partielle de Lagrangien suivant (t) , $\dot{\theta}(t)$ et t s'exprime de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} + mlx \cos(\theta) + I\dot{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta} \dot{x} \sin(\theta) + I\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml\dot{\theta} \dot{x} \sin(\theta) + mgl \sin(\theta) \\ \frac{\partial E_p}{\partial t} = f_p \dot{\theta} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (I.20) \\ (I.21) \\ (I.22) \\ (I.23) \end{array}$$

On substituant les équations (1.21), (1.22) et (1.23) dans l'équation (1.17), on aura la deuxième équation de Lagrange.

$$(ml^2 + I)\ddot{\theta} + ML\ddot{x} \cos(\theta) - mgl \sin(\theta) + f_p \dot{\theta} = 0 \quad (I.24)$$

Dans le but de simplifier les calculs, on néglige les forces de frottement f_c, f_p et l'inertie dans les équations (1.18) et (1.24). On obtient les deux équations suivantes :

$$(M + m)\ddot{x} + ml \cos(\theta) \ddot{\theta} - ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 = F \quad (I.25)$$

$$ml \cos(\theta) \ddot{x} + ml^2 \ddot{\theta} - mgl \sin(\theta) = 0 \quad (I.26)$$

En multipliant l'équation (1.25) par $\frac{1}{ml}$ remplaçant F par u , on obtient l'équation dynamique décrivant le mouvement du système pendulaire.

$$(m + M)\ddot{x} + ml \cos(\theta) \ddot{\theta} - ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 = u \quad (I.27)$$

$$\cos(\theta) \ddot{x} + l\ddot{\theta} - g \sin(\theta) = 0 \quad (I.28)$$

I.6 Calcul du modèle d'état :

Le modèle d'état non linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \quad (I.29)$$

On pose les variables d'état :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \ddot{\theta} \end{cases}$$

Tel que :

$x_1 = x$ (Position rectiligne du chariot).

$x_2 = \dot{x}$ (vitesse du chariot).

$x_3 = \theta$ (Position angulaire de la tige).

$x_4 = \dot{\theta}$ (vitesse angulaire de la tige).

I.6.1 Calcul de $\ddot{x}$ et $\ddot{\theta}$:

De l'équation (1.27), on aura la valeur de $\ddot{\theta}$ en fonction de $\ddot{x}$.

$$\ddot{\theta} = -\frac{\cos(\theta)\ddot{\theta}}{l} + \frac{g \sin(\theta)}{l} \quad (\text{I.30})$$

En substituant l'équation (1.28) dans (1.26), on aura la valeur de $\ddot{x}$ en fonction des variables d'état.

$$\ddot{x} = \frac{ml \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - g \cos(\theta) \sin(\theta)}{M + m \sin(\theta)^2} + \frac{1}{M + m \sin(\theta)^2} u \quad (\text{I.31})$$

En substituant l'équation (1.29) dans (1.28), on aura la valeur de $\ddot{\theta}$ en fonction des variables d'état.

$$\ddot{\theta} = \frac{g [M + m] \sin(\theta) - ml \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}^2}{l [M + m \sin(\theta)^2]} - \frac{\cos(\theta)}{l [M + m \sin(\theta)^2]} u \quad (\text{I.32})$$

I.6.2 Le modèle d'état :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{ml \cos(x_3)x_4^2 - g \cos(x_3) \sin(x_3)}{M+m \sin(x_3)^2} \\ x_4 \\ \frac{g[M+m] \sin(x_3) - ml \sin(x_3) \cos(x_3)x_4^2}{l[M+m \sin(\theta)^2]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M+m \sin(x_3)^2}{\cos(x_3)} \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (I.33)$$

Les paramètres utilisés lors de la modélisation sont résumés dans ce tableau.

paramètres	description
L	L'équation de Lagrange
E_c	Énergie cinétique
E_{cp}	Énergie cinétique de pendule
E_{cc}	Énergie cinétique de chariot
E_p	Énergie potentielle
E_{pp}	Énergie potentielle de Pendule
E_{pc}	Énergie potentielle de Chariot
v_p	Vitesse de pendule
v_c	Vitesse de chariot
t	Le temps
$q(t)$	Degré de liberté
$\theta(t)$	Position Angulaire de Pendule
$x(t)$	Variable d'état
$F(t)$	Force Appliquer Au Chariot
G	La gravité
u	La commande de système

Tableau (I.2): variables et paramètres du pendule inversé.

I.7 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté la structure du système pendulaire ainsi que sa modélisation dynamique qui est déduite à partir du formalisme d'Euler-Lagrange.

Enfin, il serait intéressant d'étendre l'étude et l'application de cette technique à d'autres exemples pratiques plus complexes tel qu'une extension à d'autres types de pendules (double pendule inversé, pendule planaire, pendule inversé rotatif).

Cette étude porte sur la simulation sous Matlab pour le redressement d'un pendule inversé, il serait intéressant d'appliquer ces résultats sur une application en temps réel.

Chapitre II :

Commande par mode glissant

II.1. Introduction :

Le réglage par le mode de glissement est un mode de fonctionnement particulier des systèmes à mode de glissement [08]. L'étude du mode de glissement a commencé en la Yougoslavie dans les années 60, par la suite, ces travaux ont été repris ailleurs, soit pour compléter l'étude théorique, soit pour étudier quelques applications possibles. Cependant, ce n'est qu'à partir des années 80 la commande par mode de glissement est devenue intéressante et attractive. Elle a été considérée comme l'une des approches de commande des systèmes non linéaires et des systèmes ayant des modèles imprécis [09].

Dans ce chapitre, nous présentons les éléments fondamentaux du formalisme de la commande à mode de glissement. Tout d'abord, nous présenterons les différentes structures de contrôle par les modes glissement, après, nous expliquons brièvement le principe de cette commande, et le choix de la surface de glissement. Cette technique de commande robuste est une classe particulière à structure variable [10].

II.2. Théorie de la commande par mode de glissement :

La théorie des systèmes à mode de glissement (sliding mode), une technique de commande non linéaire, se distingue par l'utilisation de commandes discontinues lors du passage à travers une surface de commutation appelée surface de glissement [11]. La technique des modes glissement vise à conduire la trajectoire de l'état d'un système vers la surface de glissement et à réaliser une commutation appropriée autour de celle-ci jusqu'à atteindre le point d'équilibre. D'où le phénomène de glissement [08]. En résumé, une commande par régime glissant est divisée en deux parties:

- Détermination d'une région d'espace d'état telle qu'une fois que le système se trouve dans cette région, il ait le comportement désiré.
- Définition d'une loi de commande qui conduit le système jusqu'à cette région de l'espace d'état.

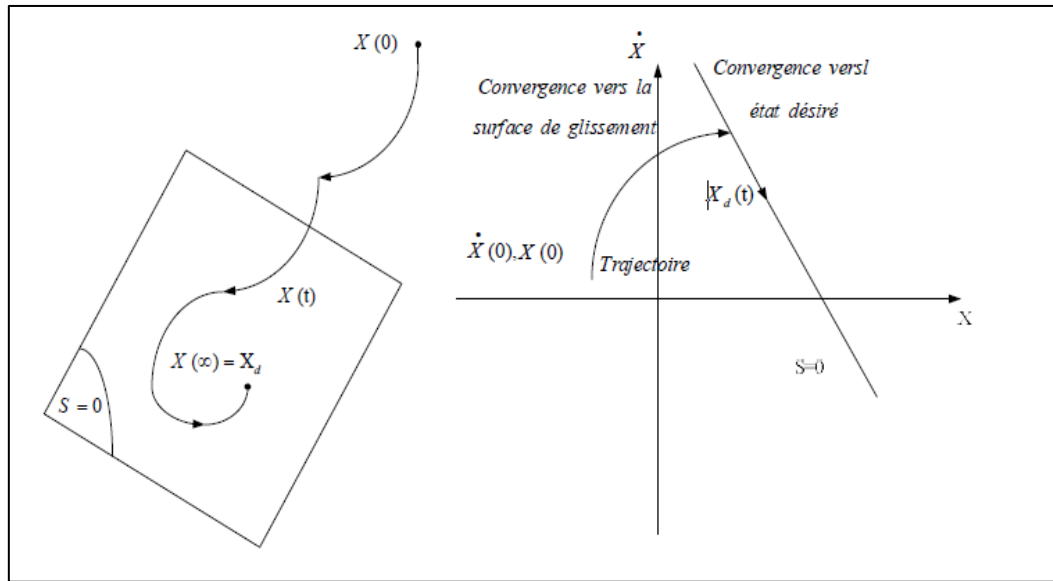


Figure (II.1) : Convergence du système glissement.

II.2.1. Régime glissement idéal :

En théorie, l'organe de commutation devrait être insensible aux bruits, et la trajectoire en régime glissant doit correspondre parfaitement à l'équation $S(x)=0$. Dans un régime glissant idéal, la représentation de l'évolution du système glisse parfaitement sur l'hyper-surface de commutation $S(x)$, avec une oscillation à fréquence infinie et une amplitude nulle [10].

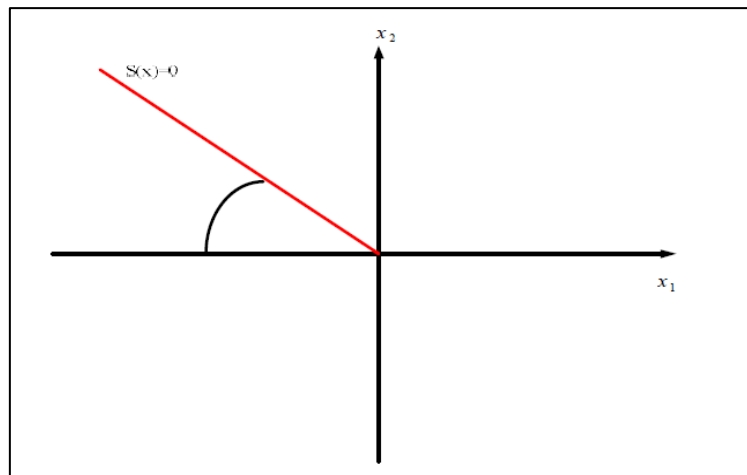


Figure (II.2) : Glissement idéal.

II.2.2. Régime glissant réel :

Dans la pratique, l'organe de commutation est généralement constitué de relais, qui présentent des imperfections telles que des retards de commutation. Dans de tels cas, la trajectoire de phase du régime glissant reste à proximité de la surface de commutation, ce qui engendre des oscillations indésirables. Ces oscillations compromettent la précision du système et, par conséquent, sa stabilité [08].

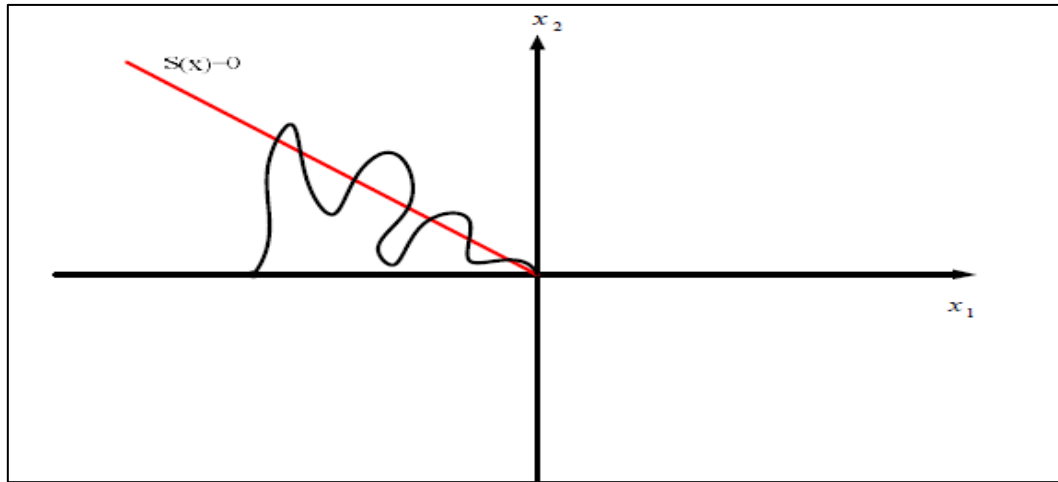


Figure (II.3) : Glissement réel.

II.3. Principe de l'algorithme de commande par mode de glissement :

L'approche de conception de la commande par mode de glissement intègre systématiquement les problèmes de stabilité et de performances optimales. Cette approche se déroule principalement en trois étapes complémentaires, telles que définies par [10]:

- Choix des surfaces de glissement.
- Définition des conditions d'existence et de convergence du régime glissement.
- Détermination de la loi de commande.

II.3.1. Choix des surfaces de glissement :

On considère le modèle d'état suivant :

$$[\dot{X}] = [A][X] + [B][U] \quad (\text{II.1})$$

Où $[X] \in R^n$ est le vecteur d'état, et $[U] \in R^m$ est le vecteur de commande, avec $n > m$. Généralement, le choix du nombre des surfaces de glissement est égal à la dimension du vecteur de commande (U) [12]. Afin d'assurer la convergence d'une variable d'état X vers sa valeur de Référence X^* plusieurs travaux proposent la forme générale suivante :

$$S(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{(r-1)} e(x) \quad (\text{II.2})$$

Où :

λ : Gain positif.

$e(x) = X - X^*$: Écart de la variable à réguler.

r : Degré relatif, c'est le plus petit entier positif représentant le nombre de fois qu'il faut dériver afin de faire apparaître la commande $\frac{dS}{du} \neq 0$ assurant la contrôlabilité.

Pour $r = 1$ donc $S(x) = e(x)$

Pour $r = 2$ donc $S(x) = \lambda_x e(x) + \dot{e}(x)$

Pour $r = 3$ donc $S(x) = \lambda_x^2 e(x) + \lambda_x \dot{e}(x) + \ddot{e}(x)$

$S(x)$ est une équation différentielle linéaire autonome dont la réponse $e(x)$ tend vers zéro pour un choix correct du gain λ et c'est l'objectif de la commande.

En d'autres termes, la difficulté réside dans la problématique de la poursuite de trajectoire, qui consiste à maintenir $S(x)$ à zéro. Cela équivaut à réaliser une linéarisation exacte de l'écart tout en respectant la condition de convergence. L'objectif de la linéarisation exacte de l'écart est de contraindre la dynamique de l'écart (référence - sortie) à correspondre à celle d'un système linéaire autonome d'ordre r .

II.3.2. Conditions d'existence et de convergence du régime glissement :

Les conditions d'existence et de convergence sont les critères qui garantissent que les différentes dynamiques du système convergent vers la surface de glissement et y restent, indépendamment des perturbations [10]. Il existe deux types de conditions qui sont les suivantes :

II.3.2.1. Fonction directe de commutation :

Elle est proposée et étudiée par EMILYANOV et UTKIN .Il s'agit de donner à la surface une dynamique convergente vers zéro. Elle est donnée par:

$$S(x)\dot{S}(x) < 0 \quad (\text{II.3})$$

II.3.2.2. Fonction de LYAPUNOV :

Il s'agit de choisir une fonction candidate de Lyapunov $V(x) > 0$ (fonction scalaire positive) pour les variables d'état du système et de choisir une loi de commande qui fera décroître cette fonction $\dot{V}(x) < 0$.

En définissant par exemple une fonction candidate de Lyapunov pour le système comme suit :

$$V(x) = \frac{1}{2}S^2(x) \quad (\text{II.4})$$

En dérivant cette dernière, on obtient :

$$\dot{V}(x) = S(x)\dot{S}(x) \quad (\text{II.5})$$

Pour que la fonction candidate de Lyapunov puisse décroître, il suffit d'assurer que :

$$S(x)\dot{S}(x) < 0 \quad (\text{II.6})$$

Cette approche est utilisée pour estimer les performances de la commande comme l'étude de la robustesse et de la stabilité des systèmes non linéaires.

II.3.2.3. Détermination de la loi de commande :

Lorsque le régime de glissement est atteint, la dynamique du système devient indépendante de la loi de commande dont le but est de maintenir les conditions de glissement (l'attractivité de la surface). C'est pourquoi la surface est déterminée de manière indépendante de la commande. Maintenant, il reste à déterminer la commande nécessaire pour attirer la trajectoire de l'état vers la surface, puis vers son point d'équilibre, tout en garantissant les conditions d'existence du mode de glissement [09].

La structure de la commande comporte deux parties, une première concernant la linéarisation exacte U_{eq} et une deuxième stabilisante, U_n cette dernière est très importante dans la technique de commande par mode de glissement, car elle est utilisée pour éliminer les effets d'imprécision du modèle et de rejeter les perturbations extérieures [10].

$$U(t) = U_{eq} + U_d \quad (\text{II.7})$$

U_{eq} : Correspond à la commande équivalente proposée par Filipov et Utkin, elle sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement $S(t)$. La commande équivalente est déduite en considérant que le dérivé de la surface est nul $\dot{S}(t) = 0$.

Elle peut être interprétée comme étant un retour d'état particulier jouant le rôle d'un signal de commande appliqué sur le système à commande lors de la commutation rapide entre les valeurs U_{max} et U_{min} .

U_d : est déterminée pour vérifier la condition de convergence.

Afin de mettre en évidence le développement précédent, on considère le système d'état (II.1). On cherche à déterminer l'expression analogique de la commande U . La dérivée de la surface $S(x)$ est :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial}{\partial x} S(x) \frac{\partial}{\partial t} x(t) \quad (\text{II.8})$$

En remplaçant (II.1) et (II.6) dans (II.7), on trouve :

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} \{ [A][X] + [B]U_{eq} \} + \frac{\partial S}{\partial x} [B]U_d \quad (\text{II.9})$$

Durant le mode de glissement et le régime permanent, la surface est nulle et par conséquent, sa dérivée et la partie discontinue sont aussi nulles. D'où, on déduit l'expression de la commande équivalente:

$$U_{eq} = - \left\{ \frac{\partial S}{\partial x} [B] \right\}^{-1} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x} [A][X] \right\} \quad (\text{II.10})$$

Pour que la commande équivalente puisse prendre une valeur finie, il faut que :

$$\frac{\partial S}{\partial x}[B] \neq 0 \quad (\text{II.11})$$

Durant le mode de convergence et en remplaçant la commande équivalente par son expression dans (II.8), on obtient la nouvelle expression de la dérivée de la surface :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial x}[B] < 0 \quad (\text{II.12})$$

Et la condition d'attractivité $S(x)\dot{S}(x) < 0$ devient :

$$S(x) = \frac{\partial S}{\partial x}[B] < 0 \quad (\text{II.13})$$

Afin de satisfaire la condition, le signe de $n U$ doit être opposé à celui de $S(x) = \frac{\partial S}{\partial x}[B]$. La forme la plus simple que peut prendre la commande discrète est celle d'une fonction sign qui présente par la Figure (II.4).

$$U_d = K_x \text{Sign}(S(x)) \quad (\text{II.14})$$

Le signe de K_x doit être différent de celui de $\frac{\partial S}{\partial x}[B]$.

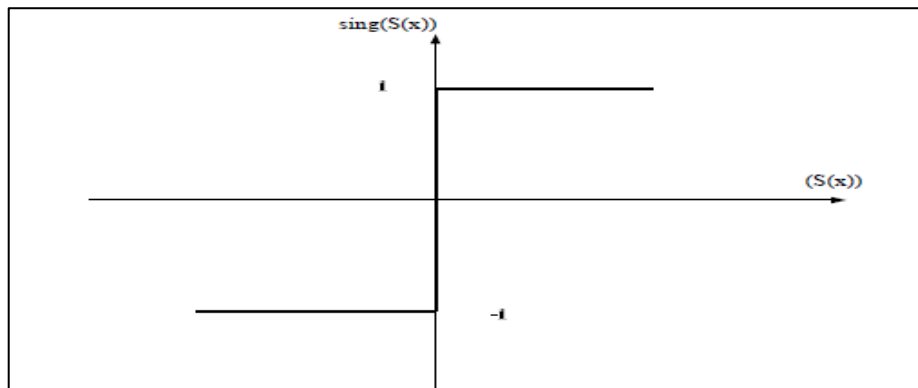


Figure (II.4): Fonction sign (non linéarité tout ou rien).

Néanmoins, cette deuxième partie de la commande génère un phénomène indésirable sur la surface de glissement, appelé broutement (chattering). Le broutement se caractérise généralement par l'ajout de composantes à haute fréquence dans le spectre de la commande [21]. La Figure (II.5) illustre le phénomène de broutement.

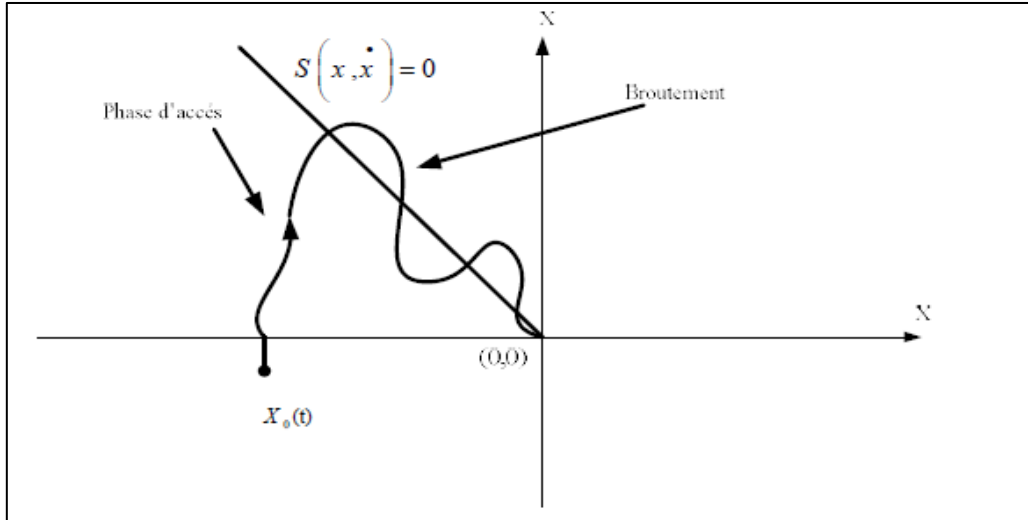


Figure (II.5): Phénomène de broutement.

II.4. Elimination du phénomène du broutement (Chattering) :

Le phénomène de Chattering est engendré par une commutation non infiniment rapide de la commande lors de l'utilisation des techniques des modes glissement. Ce phénomène est considéré comme indésirable car il introduit des composantes de haute fréquence supplémentaires dans le spectre de la commande.

En remplaçant la fonction "signe" par une fonction de saturation appropriée qui filtre les hautes fréquences, il est possible de réduire le broutement (phénomène de Chattering). Un exemple de fonction de saturation est fourni ci-dessous [11] (figure II.6).

II.4.1. Function SAT:

$$Sat = \begin{cases} -1 & \text{si } S < -\mu \\ \frac{S}{\mu} & \text{si } |S| < \mu \\ 1 & \text{si } S > \mu \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

μ : Un paramètre petit et positif

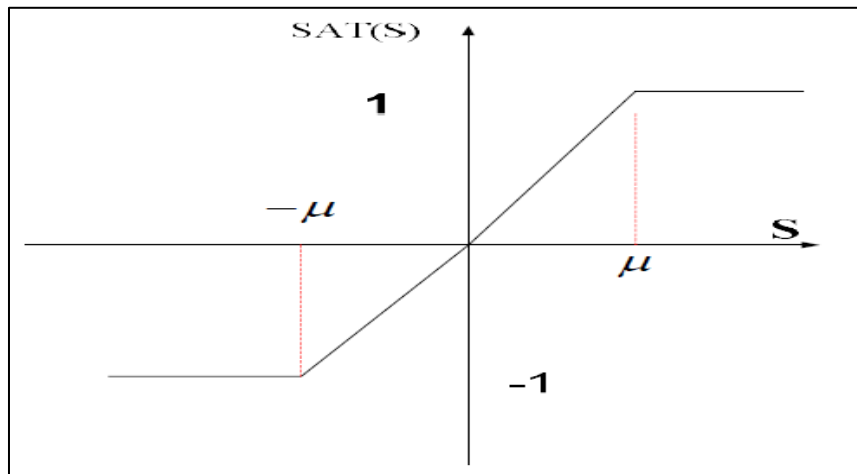


Figure (II.6): Fonction « SAT »

II.4.2. Function SMOOTH:

Une alternative consiste à remplacer la fonction "signe" par une fonction de classe C^1 . Un exemple de ce type de fonction est présenté ci-dessous (Figure II.7) :

$$smoth(s) = \frac{s}{|s| + \mu} \quad (\text{II.16})$$

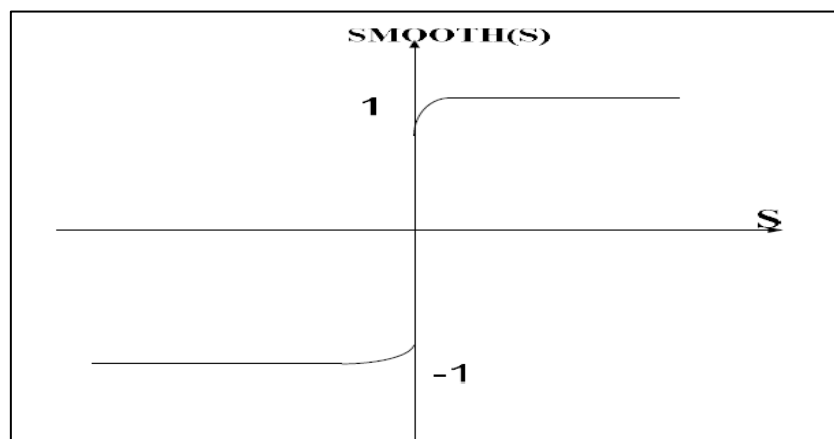


Figure (II.7): Fonction « SMOOTH ».

II.5. Domaine d'application du réglage par mode glissement :

La technique de réglage par mode de glissement a connu des avancées significatives dans de nombreux domaines de la commande, tels que la commande des systèmes hydrauliques ou pneumatiques et la robotique . Dans ces domaines, on trouve des valves qui fonctionnent en mode tout ou rien, c'est-à-dire qu'elles n'ont que deux états stables : complètement ouvertes ou complètement fermées. Ces valves peuvent commuter à des fréquences de l'ordre de quelques 10 Hz.

Les entraînements électriques pour des machines-outils ou des robots qui nécessitent soit un réglage de la vitesse de rotation, soit un réglage de position, dans ce cas le comportement dynamique à haute performance à la possibilité de limiter facilement certaines grandeurs (comme le courant et la vitesse de rotation), sont des avantages incontestables en faveur du réglage par mode glissant [10].

Il faut mentionner que dans certains domaines tels que: les processus chimiques et métallurgies, où il y'a des réglages qui font appel à des régulateurs à deux positions, le procédé par mode glissant peut apporter plusieurs avantages.

II.6. Avantages et inconvénients de la commande par mode glissant :

Il est reconnu que la robustesse vis-à-vis des perturbations et des incertitudes du modèle présente le point fort d'une commande par mode glissant. [13].

De plus, la réduction de l'ordre du système constitue un autre point fort de ce type de commande, car elle permet de simplifier la complexité du système.

Cependant, ces performances sont obtenues au prix de certains inconvénients :

- Un phénomène de chattering ou broutement provoqué par la partie discontinue de cette commande et qui peut avoir un effet néfaste sur les actionneurs.
- Le système est soumis à chaque instant à une commande élevée afin d'assurer sa convergence vers l'état désiré or que cette dernière (la commande élevée) n'est pas souhaitable.

II.7. Conclusion :

Dans ce chapitre, on a abordé une méthode de réglage moderne, c'est le réglage par mode glissant. On a présenté le principe de la CMG pour les différentes structures de la commande non linéaire u_d .

La mise en oeuvre de cette méthode de commande nécessite principalement trois étapes:

- le choix de la surface : le choix de la surface de glissement concerne non seulement le nombre de ces surfaces, mais également leur forme, en fonction de l'application et l'objectif visé.
- L'établissement des conditions de convergence : c'est la première condition de convergence qui permet aux dynamiques du système de converger vers les surfaces de glissement.
- La détermination de la commande : une fois la surface de glissement choisie, ainsi que le critère de convergence, il reste à déterminer la commande nécessaire pour ramener la variable à contrôler vers la surface et ensuite vers son point d'équilibre en maintenant la condition d'existence des modes glissants.

Le prochain chapitre fera l'objet de l'application de ce type de commande sur un pendule inversé.

Chapitre III

Commande par mode glissant d'ordre un d'un pendule inversé

III.1. Introduction :

La commande par mode glissant d'ordre un est une approche de contrôle avancée utilisée pour stabiliser et contrôler un système complexe tel qu'un pendule inversé. Dans cette méthode, un mode glissant est défini comme une surface dans l'espace des états du système, et l'objectif est d'amener la trajectoire de l'état du système à converger vers cette surface de glissement.

Le pendule inversé est un système dynamique qui se compose d'une tige suspendue à une extrémité avec une masse à l'autre extrémité. La difficulté réside dans le fait que la masse doit être maintenue en équilibre instable en utilisant des mouvements contrôlés de la tige.

La commande par mode glissant d'ordre un offre une solution efficace pour contrôler le pendule inversé en utilisant une approche non linéaire. Elle permet de générer une loi de commande qui conduit le système à suivre une trajectoire spécifique vers la surface de glissement, assurant ainsi la stabilité et le contrôle souhaités.

En utilisant cette méthode, des lois de commande appropriées peuvent être conçues pour assurer la stabilité et la performance du pendule inversé, en tenant compte des contraintes et des objectifs spécifiques. Cela nécessite une modélisation précise du système, la conception d'une surface de glissement adéquate et la mise en place d'une loi de commande appropriée pour atteindre les objectifs de contrôle.

En conclusion, la commande par mode glissant d'ordre un est une approche prometteuse pour le contrôle du pendule inversé, offrant une stabilité et une précision accrues. Son utilisation nécessite une compréhension approfondie de la théorie du contrôle et une expertise dans la conception de lois de commande non linéaires, mais elle peut conduire à des résultats satisfaisants dans la maîtrise de ce système complexe.

III.2. La commande de mode glissant premier ordre :

Célèbre pour sa haute précision et sa robustesse contre les variations paramétriques et les en contraignant les états du système à atteindre, en temps fini, puis à évoluer sur un collecteur glissant défini par :

perturbations externes, la commande de mode glissant consiste, au moyen d'un contrôle,

$$S = \{ x \in R^n : s = 0 \} \quad (\text{III.1})$$

Par conséquent, la conception du SMC comporte deux étapes principales : la première consiste à choisir une surface stable en fonction de la dynamique désirée du système, et la deuxième est de synthétiser une loi de commande afin que la trajectoire d'état du système évolue sur la surface sélectionnée considérer comme un seul système d'entrée non linéaire [14].

$$\dot{x}^{(n)} = f(x) + g(x)u \quad (\text{III.2})$$

où $x \in R^n$ est le vecteur d'état et $u \in R$ est l'entrée de commande. La loi de commande du régulateur de mode glissant s'exprime comme suit :

$$u = u_{\text{éq}} + u_d \quad (\text{III.3})$$

avec $u_{\text{éq}}$ est la commande équivalent et u_d est la commande discontinu. Utiliser des méthodes de contrôle équivalentes, $u_{\text{éq}}$ it obtenue en posant $\dot{s} = 0$. Cela garantit que la trajectoire d'état est maintenue sur la surface de commutation $s = 0$ en mode glissant. Dans le cas du système, la première variable dérivée $s = s(x)$ est donnée par:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dx} (f(x) + g(x)u) \quad (\text{III.4})$$

Si $\frac{ds}{dx} g(x)$ est réversible, la loi de commande équivalente est exprimée par :

$$u_{\text{éq}} = - \left(\frac{ds}{dx} g(x) \right)^{-1} \frac{ds}{dx} f(x) \quad (\text{III.5})$$

Pourtant, une condition de η -attractivité définie comme suit :

$$s\dot{s} \leq -\eta|s|, \eta > 0 \quad (\text{III.6})$$

Doivent être respectées pour garantir une convergence temporelle finie à la surface de glissement. Par conséquent, la commande de mode de glissement classique qui répond à la condition ci-dessus est donné par Ritchy :

$$u = - \left(\frac{ds}{dx} g(x) \right)^{-1} \left(\frac{ds}{dx} f(x) + k \operatorname{sign}(s) \right) \quad (\text{III.7})$$

où k est une constante positive qui vérifie :

$$s\dot{s} = s(-k \operatorname{sign}(s)) = -k|s| \leq -\eta|s| \Leftrightarrow k \geq \eta \quad (\text{III.8})$$

et sign est la fonction signe définie par :

$$\operatorname{sign}(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s > 0 \\ 0 & \text{if } s = 0 \\ -1 & \text{if } s < 0 \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

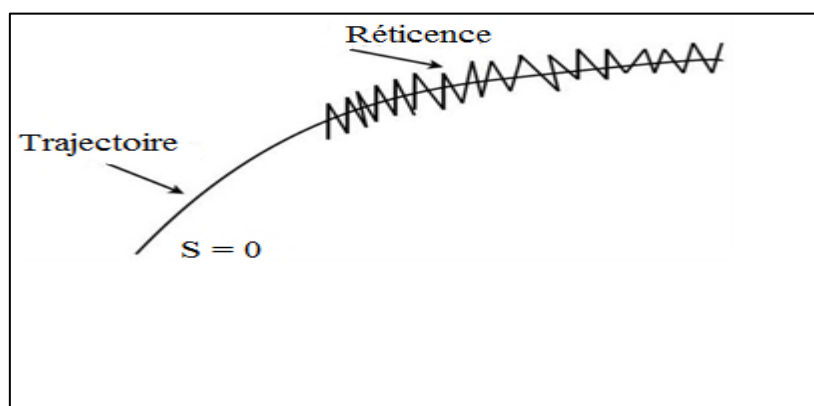


Figure (III.1): Phénomène de Broutement "chattering" .

Le passage brusque du signe de fonction à proximité de la surface glissante $s = 0$ provoque une commutation de fréquence infinie de la loi de commande. Toutefois, dans la pratique, cette commutation infinie n'est pas possible à cause d'imperfections de commutation. Cela entraîne le phénomène appelé "chattering" la Figure (III.1), qui peut dégrader les

performances du système contrôlé, exciter des dynamiques haute fréquence non prises en compte et même détériorer l'élément de commande [14].

Pour atténuer l'effet de "chattering", plusieurs approches ont été proposées dans la littérature. L'idée principale de la première approche consiste à remplacer la fonction signe par une fonction continue telle que la fonction de saturation définie par :

$$sat(s, \varphi) = \begin{cases} \frac{s}{\varphi} & \text{if } \left| \frac{s}{\varphi} \right| \leq 1 \\ sign(s) & \text{if } \left| \frac{s}{\varphi} \right| > 1 \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

La fonction continue garantira la convergence de la trajectoire de l'état du système vers une fine couche limite à proximité de la surface de glissement. Par conséquent, l'effet de "chattering" sera réduit au détriment de la précision optimale et de la robustesse du mode de glissement.

III.3. Condition de glissement :

La commande u doit être conçue pour rendre la surface $s(t) = 0$ attractive en un temps fini, pour cela elle doit donc satisfaire la condition de glissement [15] . On considère alors l'expression de la fonction de Lyapunov :

$$V = \frac{1}{2} s^2 > 0, \quad \forall t > 0 \quad (\text{III.11})$$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V} = s\dot{s}, \quad \forall s \neq 0 \quad (\text{III.12})$$

Comme le système est de degré relatif égal à 1.

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial u} \neq 0 \quad (\text{III.13})$$

On peut résoudre par rapport à u l'équation :

$$\dot{s} = -k \operatorname{sign}(s) \quad (\text{III.14})$$

k est une constante positive.

Ceci résulte du fait que $\dot{V}$ est définie négative. Alors la condition de glissement est :

$$s\dot{s} < 0, \quad \forall t > 0 \quad (\text{III.15})$$

Les valeurs de λ et k ont été déterminées par simulation numérique et en tenant compte les critères suivants :

- La rapidité de la réponse sans dépassement important.
- La réduction de l'amplitude des oscillations du régime glissant.
- L'optimisation de l'erreur statique.

III.4. La modèle du pendule inversé :

Le diagramme de corps libre du pendule inversé est montré dans Figure (III.1) . Les équations de système de ce système dynamique non linéaire peut être dérivé comme suit [16]. On suppose ici que le pendule est sans masse, et que la charnière est sans frottement. La masse du panier et la masse de la bille à l'extrémité supérieure du pendule inversé sont respectivement M et m .

Il y a une force externe dirigée par x sur le panier, $u(t)$ et une force de gravité agit sur la masse ponctuelle en tout temps.

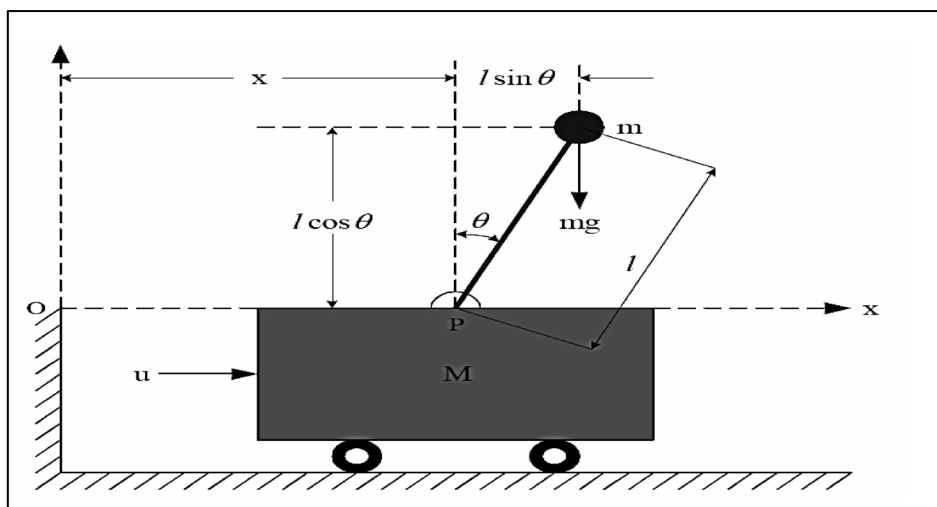


Figure (III.2): Diagramme du corps libre.

Le système de coordonnées considéré est représenté à la Figure (III.1), où $x(t)$ représente la position du panier et $\theta(t)$ est l'angle d'inclinaison référencé dans la direction verticale vers le haut.

Le couple sur la masse due à la force d'accélération est équilibré par le couple sur la masse due à la force de gravité. La balance de couple résultante peut être écrite comme suit.

$$F_x l \cos \theta - F_y l \sin \theta = mgl \sin \theta \quad (\text{III.16})$$

où les composantes de la force dans les axes x et y , F_x et F_y sont déterminées comme suit :

$$F_x = m(\ddot{x} - l \sin \theta \dot{\theta}^2 + l \cos \theta \ddot{\theta}) \quad (\text{III.17})$$

$$F_y = -m(l\dot{\theta}^2 \cos \theta + l\ddot{\theta} \sin \theta) \quad (\text{III.18})$$

En remplaçant (III.17) et (III.18) par (III.16), Nous obtenons ainsi les résultats suivants :

$$\ddot{x} \cos \theta + \ddot{\theta} = g \sin \theta \quad (\text{III.19})$$

Un équilibre de force dans la direction x donne que la masse multipliée par l'accélération du panier plus la masse multipliée par l'accélération dirigée par x de la masse du point doit égaier la force externe sur le système. Ceci peut être écrit comme suit :

$$(M + m)\ddot{x} - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + ml \cos \theta \ddot{\theta} = u \quad (\text{III.20})$$

En manipulant (III.19) et en remplaçant par (III.20), Nous obtenons ainsi les résultats suivants :

$$(M + m)(g \sin \theta - \ddot{\theta}) - ml\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta + ml\ddot{\theta} \cos^2 \theta = u \cos \theta \quad (\text{III.21})$$

qui pourrait être réécrit comme suit:

$$(ml \cos^2 \theta - (M + m))\ddot{\theta} = u \cos \theta - (M + m)g \sin \theta + ml\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta \quad (\text{III.22})$$

Enfin, en divisant par les coefficients de plomb de (III.23), Nous obtenons ainsi les résultats suivants :

$$\ddot{\theta} = \frac{-(M+m)g \sin \theta + ml\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta + u \cos \theta}{ml \cos^2 \theta - (M+m)} \quad (\text{III.23})$$

Les variables d'état du système sont la position angulaire de l'oscillation et la vitesse angulaire représentée par $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$. La variable d'entrée du système est la force appliquée u , et la sortie du système est la position angulaire comme $y = x_1$.

La perturbation du système et la fonction du terme d'incertitude du paramètre $d(x, t)$ sont également ajoutées [17]. Le modèle dynamique non linéaire complet du pendule inversé peut être écrit comme suit :

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \quad (\text{III.24})$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-(M+m)g \sin x_1 + mlx_2 \sin x_1 \cos x_1 + u \cos x_1}{ml \cos^2 x_1 - (M+m)} + d(x, t) \quad (\text{III.25})$$

III.5. Stabilisation du pendule inversé par mode glissant :

Supposons que r_1 est l'angle de pendule souhaité. Afin de concevoir un contrôleur de mode coulissant pour le système pendulaire inversé, nous suivrons la procédure suivante.

Premièrement, étant donné que $e_1 = r_1 - x_1$, la variable coulissante suivante est sélectionnée.

$$s_1 = \dot{e}_1 + c_1 e_1 \quad (\text{III.26})$$

En prenant la dérivée de (III.26) en ce qui concerne le temps que nous obtenons :

$$\dot{s}_1 = \ddot{e}_1 + c_1 \dot{e}_1 \quad (\text{III.27})$$

En remplaçant la première et la deuxième dérivée de l'erreur e_1 en ce qui concerne le temps, nous pouvons obtenir :

$$\dot{s}_1 = \ddot{r}_1 - \ddot{x}_1 + c_1 \dot{r}_1 - c_1 \dot{x}_1 \quad (\text{III.28})$$

En remplaçant (III.25) par (III.28), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 = \ddot{r}_1 - c_1 x_2 + c_1 \dot{r}_1 + \frac{(M+m)g \sin x_1}{ml \cos^2 x_1 - (M+m)} \\ - \frac{ml x_2 \cos x_1 \sin x_1 + u \cos x_1}{ml \cos^2 x_1 - (M+m)} - d(x, t) \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

Maintenant, nous pouvons écrire le signal de contrôle du mode coulissant comme suit:

$$\begin{aligned} u = (M+m)g \tan x_1 - ml x_2 \sin x_1 \\ + \frac{(-\dot{s}_1 + \ddot{r}_1 - c_1 x_2 + c_1 \dot{r}_1)(ml \cos^2 x_1 - (M+m))}{\cos x_1} \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

Ensuite, nous pouvons écrire la commande de signal proposée comme suit :

$$u = (M + m)g \tan x_1 - mlx_2 \sin x_1 + \frac{(k_1 \text{sign}(s_1) + \ddot{r}_1 - c_1 x_2 + c_1 \dot{r}_1)(ml \cos^2 x_1 - (M + m))}{\cos x_1} \quad (\text{III.31})$$

Où $\text{sign}(s_1)$ est la fonction signe de la variable glissante ; k_1 et c_1 sont des constantes positives. Maintenant, nous pouvons vérifier la stabilité du système de commande proposé en utilisant l'équation de Lyapunov.

Nous peut commencer à définir l'équation de Lyapunov comme suit :

$$V_1 = \frac{s_1^2}{2} \quad (\text{III.32})$$

Le dérivé de l'équation de Lyapunov (III.32) est montré en (III.33):

$$\dot{V}_1 = \dot{s}_1 s_1 \quad (\text{III.33})$$

À partir des équations (III.29) et (III.33), nous obtenons :

$$\dot{V}_1 = s_1(\ddot{r}_1 - c_1 x_2 + c_1 \dot{r}_1 - d(x, t) + \frac{(M + m)g \sin x_1}{ml \cos^2 x_1 - (M + m)} - \frac{mlx_2 \cos x_1 \sin x_1 + u \cos x_1}{ml \cos^2 x_1 - (M + m)}) \quad (\text{III.34})$$

En remplaçant le signal de commande du mode glissant, nous obtenons :

$$\dot{V}_1 = -s_1 k_1 \text{sign}(s_1) - s_1 d(x, t) \quad (\text{III.35})$$

Cette équation peut être réécrite comme suit :

$$\dot{V}_1 = -k_1 |s_1| - s_1 d(x, t) \quad (\text{III.36})$$

Il est remarqué à partir de (III.36) que $\dot{V}_1 < 0$. Ce qui signifie que le signal de commande de mode glissant suggéré dérive le système pour suivre la position angulaire souhaitée.

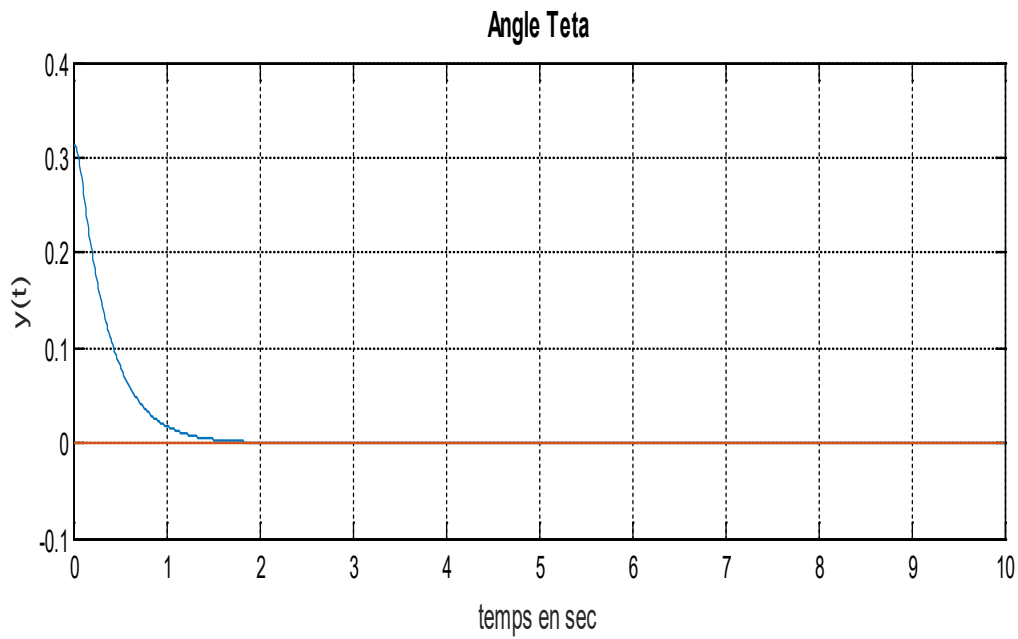


Figure (III.3): La position angulaire de la tige [rad] par MGO1.

III.6. résultats des simulations et interprétation :

Dans notre simulation on considère :

$$M = 1kg ; m = 0.1 ; l = 0.5m ; k = 20 ; \lambda = 2$$

Le signal de référence (position verticale de la tige) :

$$y_d = 0 \text{ rad}$$

Les conditions initiales :

$$x_0 = \left(\frac{\pi}{10}, 0 \right)$$

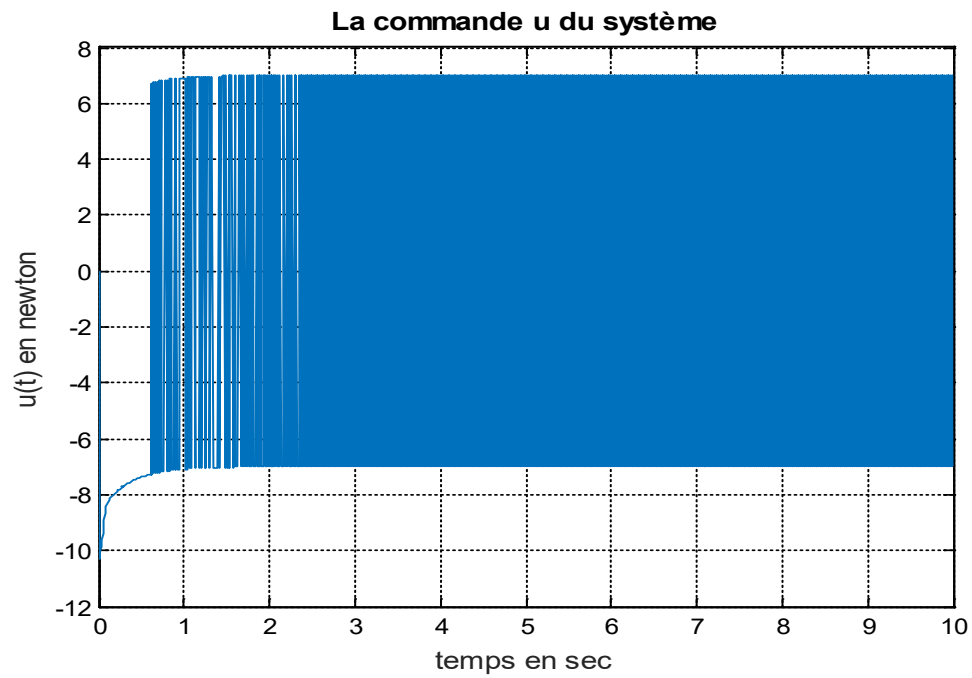


Figure (III.4): Le signal de commande [N] par MGO1

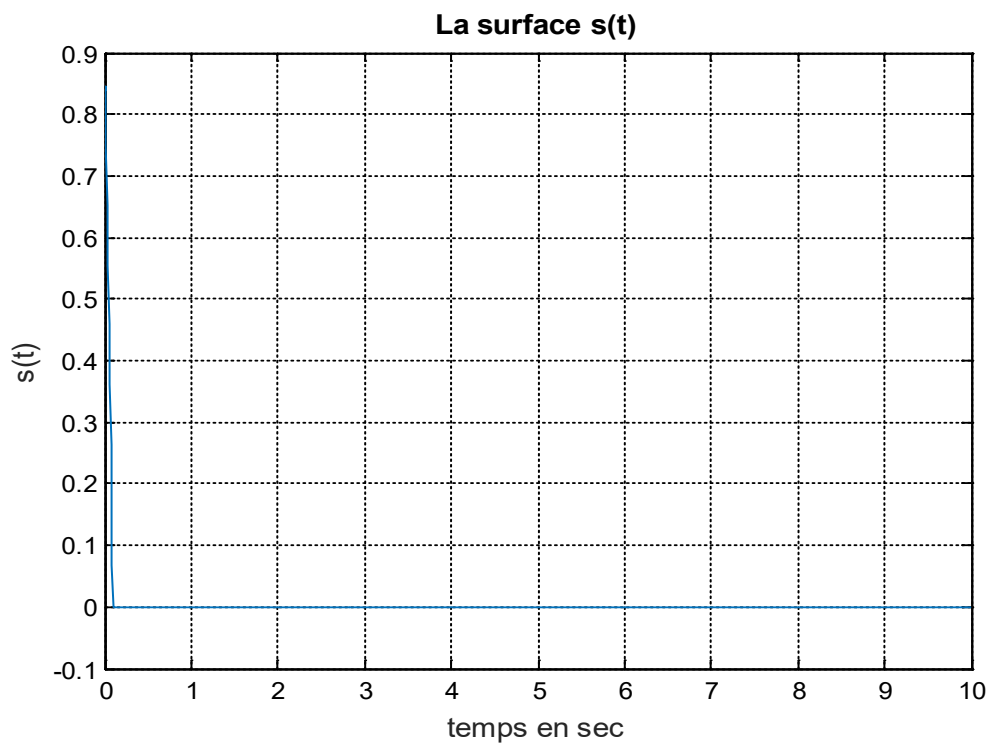
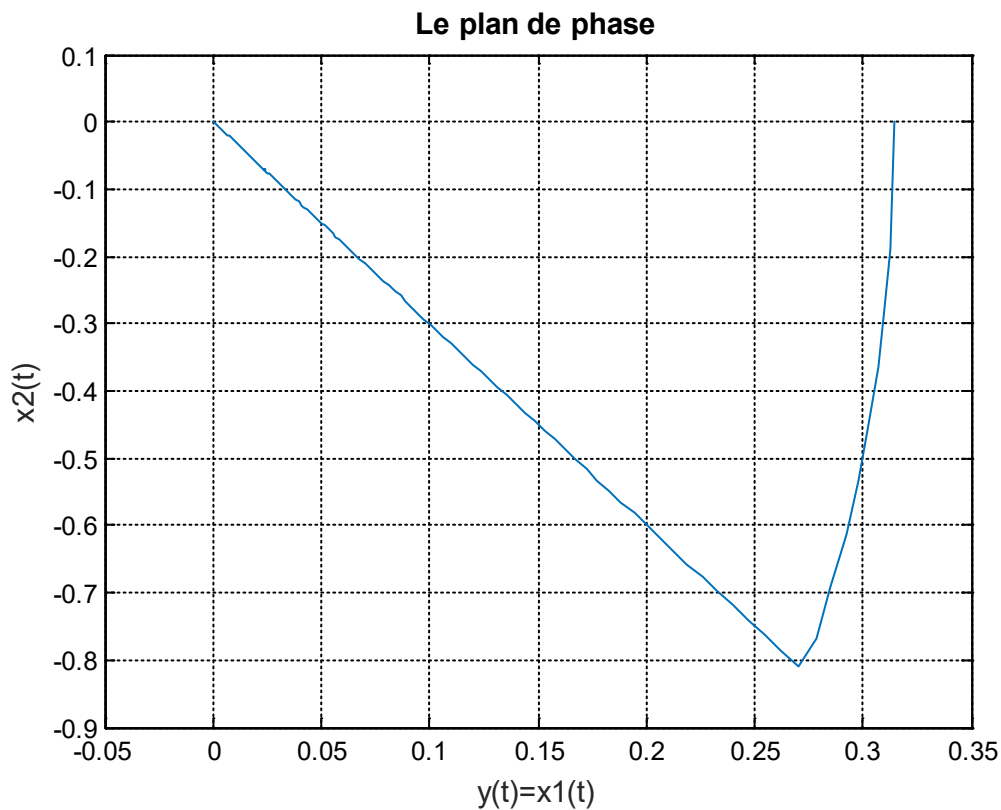


Figure (III.5): La surface de glissement.

Figure (III.6): Le plant de phase $(\theta, \dot{\theta})$.

• Interprétation des résultats de simulation :

En observant la figure (III.3), on peut constater que notre commande de glissement parvient à stabiliser notre chariot. En effet, elle a réussi à ramener le chariot de sa position initiale (0,1m) à sa position souhaitée.

La figure (III.6) met en évidence des perturbations autour du point d'équilibre. De plus, la figure (III.4) montre des commutations à haute fréquence dans la commande, causées par la présence d'un terme discontinu. Ce phénomène est connu sous le nom de broutement, tel qu'illustré dans la figure (III.6).

Nous pouvons également résumer cela dans les points suivants :

- ❖ La stabilisation du système s'effectue dans un délai d'une seconde.
- ❖ Le signal de commande $u(t)$ n'est pas réalisable.
- ❖ L'angle θ se stabilise à zéro (la position verticale désirée)
- ❖ L'apparition du broutement (*chattering*) dans le signal de commande dans un intervalle $[-K, K]$.
- ❖ La surface de glissement tombe vers zéro dans un temps fini.

III.7. Conclusion :

En conclusion, la commande par mode glissant d'ordre un se révèle être une approche puissante et efficace pour le contrôle du pendule inversé. Elle permet d'atteindre la stabilité et le contrôle souhaités en amenant la trajectoire de l'état du système à converger vers une surface de glissement prédéfinie.

L'utilisation de cette méthode offre plusieurs avantages, notamment une meilleure précision de contrôle, une résistance accrue aux perturbations et aux incertitudes du système, ainsi qu'une réduction de l'effet de chattering. En concevant une loi de commande appropriée basée sur le concept de mode glissant d'ordre un, il est possible d'obtenir des performances optimales du pendule inversé.

Cependant, il convient de souligner que la mise en œuvre de la commande par mode glissant d'ordre un nécessite une compréhension approfondie de la théorie du contrôle et une expertise dans la conception de lois de commande non linéaires. Une modélisation précise du système et une analyse approfondie des contraintes et des objectifs sont également nécessaires pour garantir des résultats satisfaisants.

Malgré ces défis, la commande par mode glissant d'ordre un reste une approche prometteuse et largement utilisée dans le contrôle du pendule inversé et d'autres systèmes dynamiques complexes. Son utilisation peut conduire à des performances améliorées, une meilleure stabilité et une maîtrise plus précise du système.

En résumé, la commande par mode glissant d'ordre un offre une solution efficace pour le contrôle du pendule inversé, et son utilisation peut contribuer à l'avancement de la recherche en matière de contrôle des systèmes dynamiques.

Chapitre IV

Commande par mode glissant d'ordre deux d'un pendule inversé

IV.1 Introduction:

Dans les années soixante-dix, la commande par mode glissant a émergé grâce à l'introduction de la théorie des modes glissants par Utkin. Le principe de cette technique consiste à forcer le système à atteindre et à maintenir une surface appelée surface de glissement. Le comportement dynamique résultant est appelé régime glissant. Cette approche présente plusieurs avantages, tels que la réduction de l'ordre du système d'un côté, et d'autre part, l'insensibilité aux variations paramétriques et aux perturbations externes. Vu l'importance apportée à ce type de commande, plusieurs travaux ont été présentés dans la littérature pour la commande des systèmes non linéaires.

Des essais expérimentaux ont démontré que le principal inconvénient de la commande par mode glissant est le phénomène de chattering. Celui-ci entraîne une instabilité du système et peut causer des dommages aux actionneurs, voire leur destruction.

Dans ce chapitre, nous abordons une solution visant à résoudre le problème de chattering tout en préservant ses avantages. Cette solution est appelée commande par mode glissant du second ordre, également connue sous le nom d'algorithme de super twisting. Nous appliquons cette approche à un pendule inversé, qui est un système non linéaire, incertain et instable.

IV.2. Le modèle de pendule inversé :

Présentation schématique du système pendulaire inversé est représenté dans la figure (IV.1). En fait, ce système a deux degrés de liberté dont les coordonnées généralisées sont x pour l'horizontale mouvement du panier et θ pour la rotation du pendule [18].

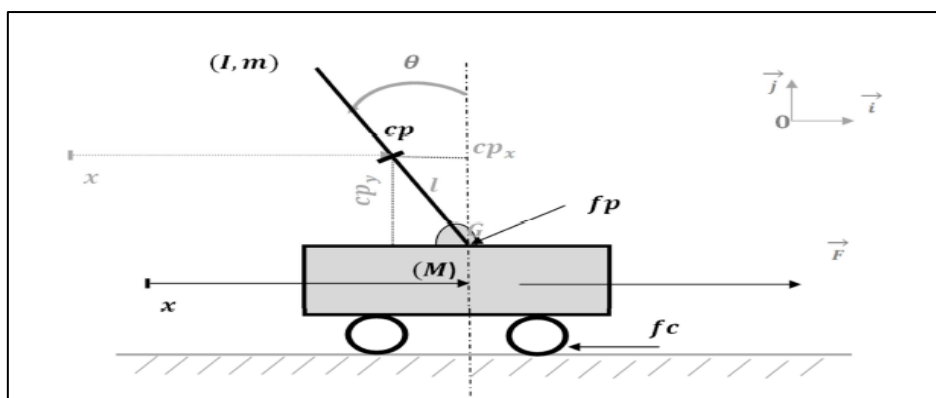


Figure (IV.1): Modèle d'un pendule inversé.

Les paramètres du système pendulaire sont donnés dans le tableau suivant :

Paramètre	unités	Description
l	m	Demi-longueur du pendule
m	Kg	Masse du pendule
M	Kg	Masse du chariot
J	$Kg.m^2$	Inertie de pendule par rapport à son centre de gravité
f_p	N	Frottement de pendule
f_c	N	Frottement de déplacement de chariot
$x(t)$	m	Position longitudinale de chariot
$\theta(t)$	rad	Position angulaire de pendule
$F(t)$	N	Force appliquée au chariot

Tableau (IV.1): variables et paramètres du pendule inversé.

Les équations de mouvement de ce système est obtenu en appliquant l'équation Euler-Lagrange donnée par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = F \quad (\text{IV.1})$$

où L est le Lagrangien qui correspond à la différence entre l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p . Ensuite, il est écrit comme :

$$L = E_c - E_p \quad (\text{IV.2})$$

Où :

$$E_c = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \quad (\text{IV.3})$$

Et

$$E_p = mgl\cos\theta \quad (\text{IV.4})$$

Ainsi, le modèle mathématique du pendule inversé est donné par :

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + u = 0 \quad (\text{IV.5})$$

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - mgl \sin \theta = 0 \quad (\text{IV.6})$$

Substitution (IV.5) en (IV.6) rendements :

$$\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta, \dot{\theta})u \quad (\text{IV.7})$$

Où:

$$f(\theta, \dot{\theta}) = \frac{(M+m)g \sin \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta}{\frac{4}{3}(M+m)l - ml \cos^2 \theta} \quad (\text{IV.8})$$

Et

$$g(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\cos \theta}{\frac{4}{3}(M+m)l - ml \cos^2 \theta} \quad (\text{IV.9})$$

Nous mettons $y = x_1 = \theta$ donc $x_2 = \dot{\theta}$, Donc les deux équations :

$$f(x_1, x_2) = \frac{(M+m)g \sin x_1 - mlx_2^2 \sin x_1 \cos x_1}{\frac{4}{3}(M+m)l - ml \cos^2 x_1} \quad (\text{IV.10})$$

$$g(x_1, x_2) = \frac{\cos x_1}{\frac{4}{3}(M+m)l - ml \cos^2 x_1} \quad (\text{IV.11})$$

$g = 9.81 \text{ m/s}^2$: la gravité universelle.

M : la masse du chariot.

m : la masse de la poutre.

l : la demi longueur de la poutre.

y : la sortie de système.

Par conséquent, la dynamique du pendule est décrite par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

IV.3. Stabilisation du pendule inversé par mode glissant d'ordre deux :

IV.3.1 préliminaire :

Le contrôle du mode glissant du deuxième ordre consiste à contraindre la trajectoire d'état du système à se déplacer, avec plus de précision et en temps fini [18], sur une variété glissante définie par :

$$S^2 = \{x \in X, s = \dot{s} = 0\} \quad (\text{IV.13})$$

En fait, il peut être étudié sur la base de graphiques méthodes réalisées dans le plan de phase $(s, \dot{s})$. la figure (IV.2) montre la trajectoire d'un algorithme de mode de glissement de deuxième ordre dans le plan de phase.

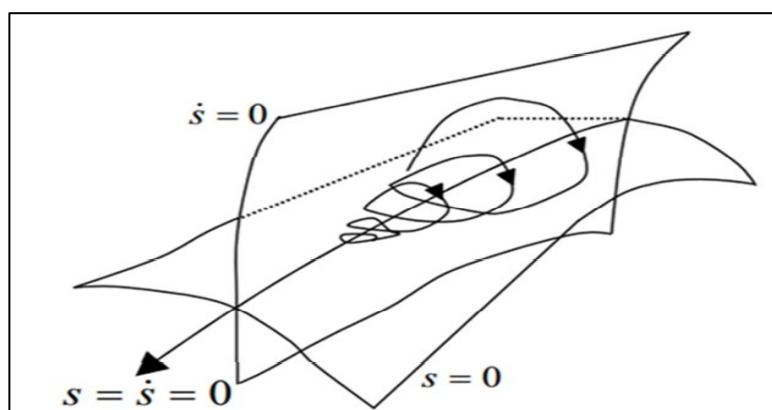


Figure (IV.2): Trajectoire en mode glissant deuxième ordre.

Le principal problème de SOSMC est de stabiliser la deuxième dérivée de la surface de glissement :

$$\ddot{s} = \varphi(t, x) + \gamma(t, x) \quad (\text{IV.14})$$

Pour un degré relatif $r = 1$, v n'est autre que la commande d'entrée du système. ($u = v$), alors qu'il est son dérivé temps ($v = \dot{u}$) lorsque $r = 2$ [19][20]. Afin de réaliser une étude rigoureuse du SOSMC, la fonctions $\varphi(t, x)$ et $\gamma(x, t)$, ainsi que la surface glissante $s(t, x)$, sont limités comme suit :

$$|\varphi(t, x)| < \phi, 0 < \Gamma_m \leq \gamma(t, x) \leq \Gamma_M, |s(t, x)| < s_0 \quad (\text{IV.15})$$

La constantes Γ_m , Γ_M , ϕ et s_0 sont les seuls connus.

IV.3.2 Algorithme de Twisting :

Présenté pour la première fois en anglais en [20], cet algorithme assure la convergence de la trajectoire à l'origine du plan de phase en temps fini comme indiqué sur la Figure (IV.3) Ceci est dû à la fait que la commande bascule entre deux valeurs.

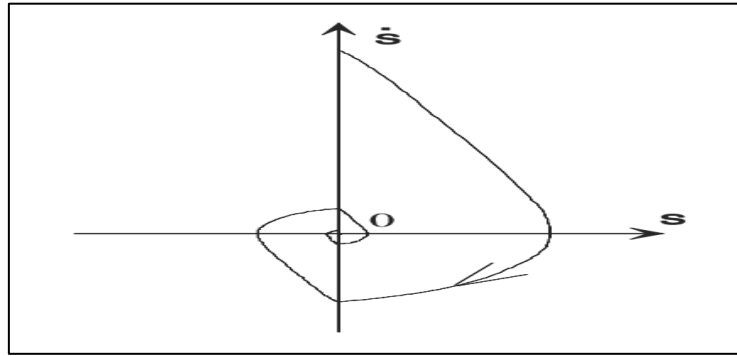


Figure (IV.3): Trajectoire de l'algorithme de Twisting dans le plan de phase($s, \dot{s}$).

Pour $r = 1$, l'algorithme de Twisting est défini par équation suivante :

$$\dot{u} = \begin{cases} -u & \text{si } |u| > A \\ -k_M \text{sign}(s) & \text{si } s\dot{s} > 0 ; |u| \leq A \\ -k_m \text{sign}(s) & \text{si } s\dot{s} \leq 0 ; |u| \leq A \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

Les conditions suffisantes pour une convergence temporelle finie sont :

$$k_M > k_m > 0, k_m > \frac{4\Gamma_M}{s_0}, k_m > \frac{\phi}{\Gamma_m}, \Gamma_m k_M - \phi > \Gamma_M k_m + \phi \quad (\text{IV.17})$$

Cependant, lorsque $r = 2$, l'algorithme de Twisting est donné par [9] :

$$u_d = \begin{cases} -k_M \text{sign}(s) & \text{si } s\dot{s} > 0 \\ -k_m \text{sign}(s) & \text{si } s\dot{s} \leq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

IV.3.3 Algorithme de super –Twisting:

Introduit par Levant en 1993, dans [20], l'algorithme de super-Twisting est seulement capable de se stabiliser dans les systèmes de temps fini dont le degré relatif $r = 1$. Contrairement à l'algorithme de Twisting, cet algorithme nécessite seulement la mesure de la surface de glissement s . La Figure (IV.4) illustre la trajectoire de l'algorithme de super-Twisting dans le plan de phase $(s, \dot{s})$.

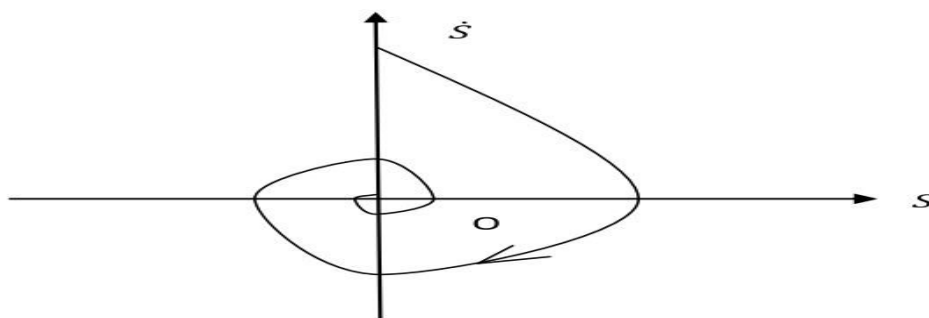


Figure (IV.4): Trajectoire de l'algorithme de super-Twisting dans le plan de phase $(s, \dot{s})$.

L'algorithme Super-Twisting est donné par :

$$u = -\alpha |s|^\rho \cdot \text{sign}(s) + u_1 \quad (\text{IV.19})$$

Où:

$$\dot{u}_1 = -w \text{sign}(s) \quad (\text{IV.20})$$

Les paramètres α , ρ et w doivent vérifier ce qui suit conditions suffisantes :

$$w > \frac{\phi}{\Gamma_m}, \alpha^2 \geq \frac{4C_0}{\Gamma_m^2} \frac{\Gamma_m(w+\phi)}{\Gamma_m(w-\phi)}, 0 \leq \rho \leq 0.5 \quad (\text{IV.21})$$

IV.4 SOSMC Pour le Pendule Inversé :

Au cours de cette étude, le degré relatif r est choisi égal à un. Ainsi, la surface de glissement s est donnée par :

$$s = \lambda e + \dot{e} \quad (\text{IV.22})$$

Où $e = x_1 - x_{1d}$ est l'erreur de suivi dont x_{1d} est la référence, et λ est une constante positive qui est sélectionnée comme suit :

$$\lambda = 3 \quad (IV.23)$$

En utilisant (IV.10), la première et la deuxième dérivée de s sont respectivement donné par :

$$\dot{s} = \lambda(x_2 - \dot{x}_{1d}) + (f - \ddot{x}_{1d}) + gu = h + gu \quad (IV.24)$$

$$\ddot{s} = \lambda(f + gu - \ddot{x}_{1d}) + (\dot{f} + \dot{g}u - \ddot{x}_{1d}) + \dot{g}u \quad (IV.25)$$

Ensuite (IV.13) donne :

$$|\lambda(f + gu - \ddot{x}_{1d}) + (\dot{f} + \dot{g}u - \ddot{x}_{1d})| < \phi, \quad (IV.26)$$

$$0 < \Gamma_m \leq g \leq \Gamma_M$$

Pour l'algorithme de Twisting (IV.16), les paramètres k_m et k_M sont mesurés sur la base de (IV.24) et (IV.15). Ils sont choisis comme suit :

$$k_m = 20 \text{ et } k_M = 80 \quad (IV.27)$$

Concernant l'algorithme de super-Twisting (IV.17), les paramètres w, α et ρ mesurés à partir de (IV.24) et (IV.19) sont choisis comme suit :

$$w = 10, \alpha = 2 \text{ et } \rho = 0.5 \quad (IV.28)$$

IV.5. résultats des simulations et interprétation :

Dans notre simulation on considère :

$$M = 1kg ; m = 0.1kg ; l = 0.5m ; k = 7 ; \lambda = 3 ; A = 10 ; \tau_m = 2.10^{-4}s$$

Le signal de référence sinusoïdal :

$$y_d = \frac{\pi}{30} \sin t$$

Les conditions initiales :

$$x_0 = \left(\frac{\pi}{10}, 0 \right)$$

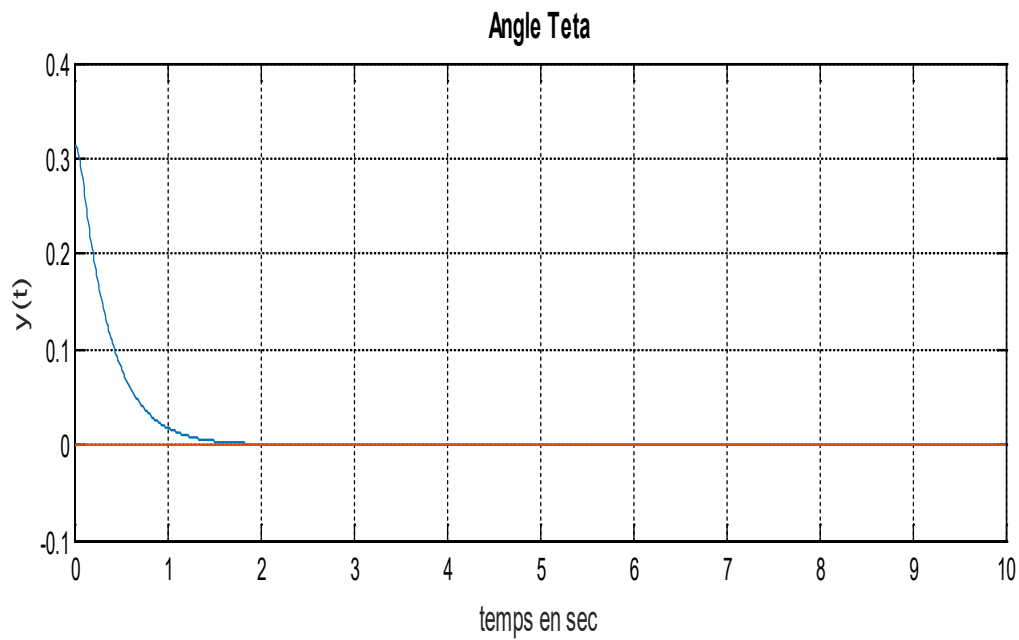


Figure (IV.5): La position angulaire de la tige [rad] par MGO2 ST.

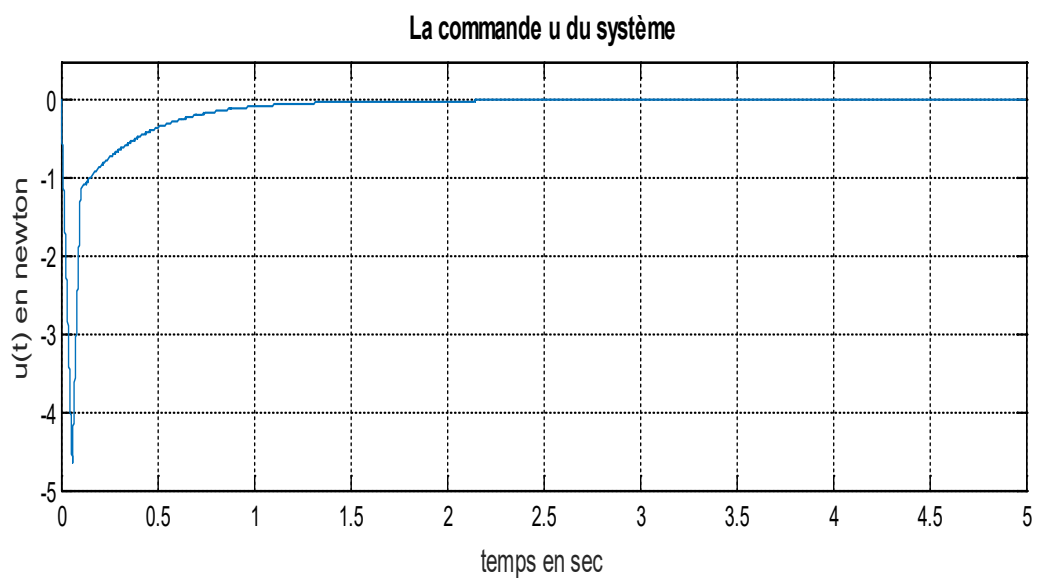


Figure (IV.6): Le signal de commande [N] par MGO2 ST.

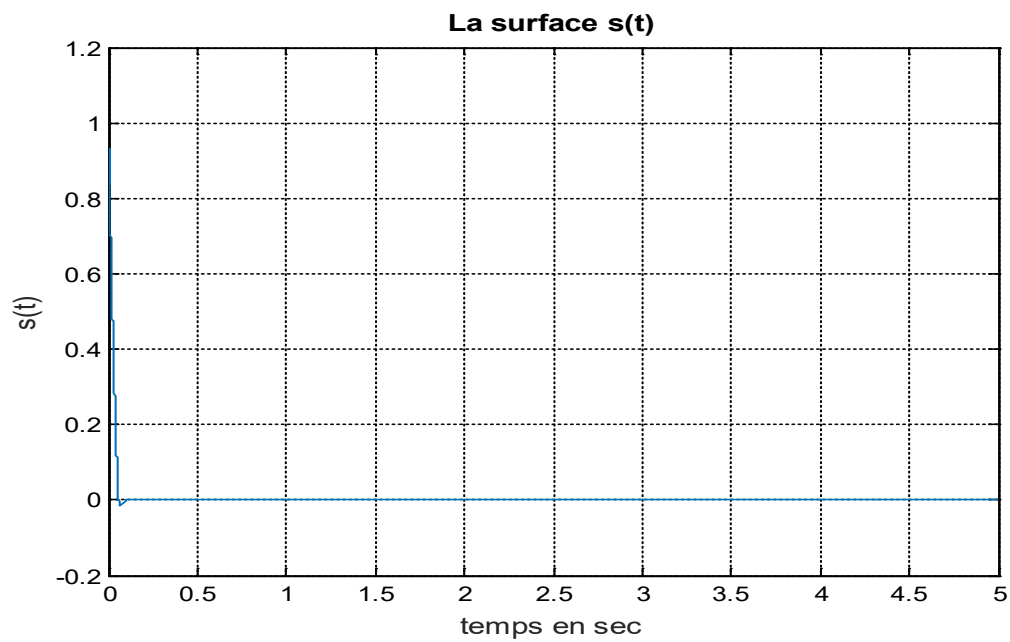
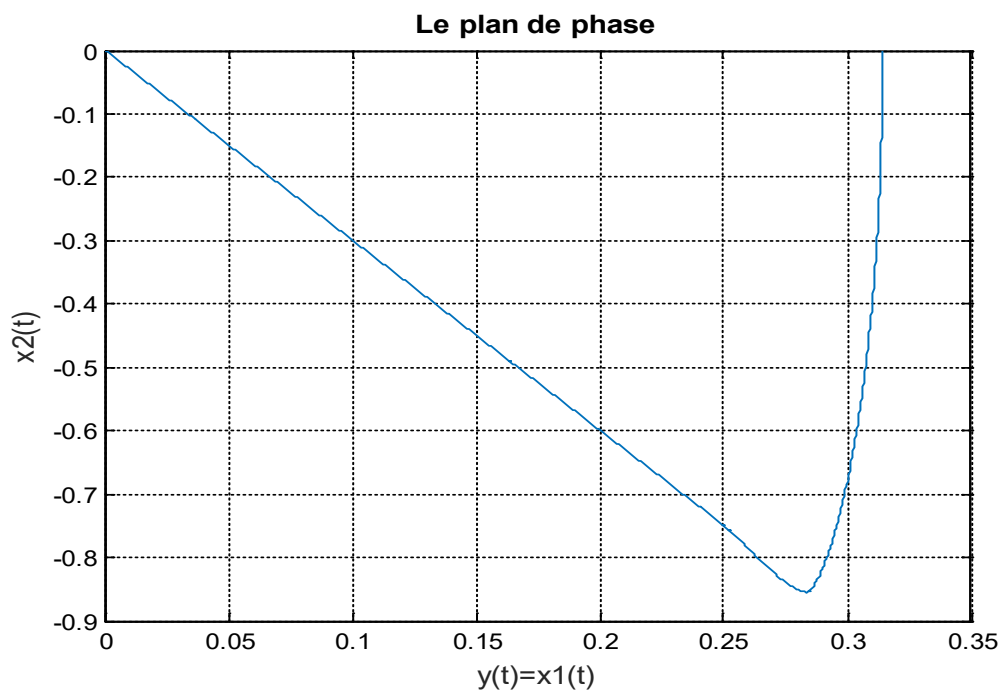


Figure (IV.7): La surface de glissement.

Figure (IV.8): Le plant de phase $(\theta, \dot{\theta})$.

- **Interprétation des résultats de simulation :**

Le broutement (*chattering*) a été clairement éliminé du signal de commande grâce à l'utilisation de certaines techniques. Voici comment cela a été expliqué :

- ❖ L'angle θ se stabilise à zéro (la position verticale désirée)
- ❖ Le broutement (*chattering*) a été clairement éliminé du signal de commande.
- ❖ La surface de glissement tombe vers zéro dans un temps fini.
- ❖ Les algorithmes de Twisting et de super- Twisting, en tant qu'algorithmes de mode glissant d'ordre deux, ont été utilisés. Ces algorithmes sont connus pour leur capacité à atténuer le broutement.
- ❖ Les algorithmes de Twisting et de super- Twisting ont été conçus de manière à générer une commande continue et lisse, plutôt qu'une commutation rapide et

- ❖ abrupte. Cela permet de filtrer les composantes de haute fréquence responsables du broutement.
- ❖ Des techniques de filtrage appropriées ont été appliquées au signal de commande pour éliminer les fluctuations indésirables et les variations rapides qui caractérisent le broutement. Ces techniques permettent d'obtenir un signal de commande plus régulier et sans broutement.

En combinant ces approches, le broutement a été efficacement éliminé du signal de commande, ce qui améliore la performance globale du système de contrôle. Cela permet d'obtenir une commande plus précise, plus stable et moins sujette aux variations indésirables.

IV.6. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté la stratégie de commande par mode glissant d'ordre un appliquée sur un pendule inversé. Le but est de montrer l'inconvénient de cette loi, qui est le phénomène de réticence (chattering).

Dans l'objectif de suivre les trajectoires de référence en temps fini, avec une grande précision, une bonne robustesse et une diminution de la réticence, nous avons introduit une autre stratégie de commande par mode glissant d'ordre deux qui est l'algorithme de super-Twisting. Cette loi supprime le chattering en rendant la commande continue (lisse) et le système plus stable [21].

Conclusion Générale

Conclusion Générale :

L'étude présentée dans ce mémoire a pour objectif d'examiner l'application de la commande par mode glissant dans le contexte du pendule inversé, et a été démontrée comme une approche efficace pour améliorer les performances de la commande. Les résultats obtenus ont démontré que cette méthode permet de relever les défis liés à la nature non linéaire et instable du système du pendule inversé.

Dans le premier chapitre, nous avons introduit le pendule inversé, en décrivant sa nature, l'intérêt de son utilisation, quelques travaux de recherche réalisés sur sa commande, ainsi que sa modélisation dynamique déduite à partir du formalisme d'Euler-Lagrange.

Concernant le deuxième chapitre, nous avons examiné la définition du mode de glissement, ses caractéristiques et les études réalisées à son sujet. Nous avons constaté que le mode de glissement est une approche puissante pour le contrôle des systèmes non linéaires, offrant des performances améliorées en termes de précision, de robustesse et de résistance aux perturbations. Il demeure une voie de recherche intéressante pour le développement de nouvelles stratégies de contrôle dans divers domaines d'application.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié l'application de la commande par mode glissant d'ordre un au pendule inversé, démontrant son efficacité dans le contrôle de ce système dynamique complexe. Cette approche permet de réduire le broutement, d'assurer une convergence rapide des états du système et d'améliorer la précision du contrôle. La commande par mode glissant d'ordre un offre des avantages significatifs, tels qu'une plus grande robustesse face aux perturbations et aux incertitudes, ainsi qu'une réponse rapide et stable du pendule inversé. De plus, sa simplicité de mise en œuvre en fait une solution pratique et réalisable.

Dans le quatrième chapitre, nous avons étudié l'application de la commande par mode glissant d'ordre deux au pendule inversé, démontrant ainsi son efficacité pour améliorer les performances de contrôle. Cette méthode a permis de relever les défis associés à la non-linéarité et à l'instabilité du système du pendule inversé. Les algorithmes de Twisting et de super-Twisting ont été identifiés comme des choix appropriés pour mettre en œuvre cette commande, offrant une simplification de l'implémentation tout en maintenant de bonnes performances de contrôle.

En résumé, la commande par mode glissant appliquée au pendule inversé représente une approche prometteuse qui permet d'obtenir un contrôle précis, robuste et stable. Elle offre des avantages significatifs en termes de performances améliorées et constitue une base solide pour de futures recherches et développements dans le domaine du contrôle des systèmes dynamiques complexes.

Bibliographie

[01] : M.BIRKOUCHE et S.HAMADOUCHE, « Commande par mode glissant d'ordre deux d'un pendule inversé », Mémoire de MASTER ACADEMIQUE, UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU, 2016.

[02] : H.LEHOUCHE , H.HADDAR « Commande d'un pendule inversé par mode glissant », Mémoire De Magistère En Electrotechnique, Université Abderrahmane Mira – Bejaia juin 2017.

[03] : MENDIL. B, HADDAR. H faculté de génie électrique de Université Abderrahmane Mira – Bejaia « Commande avancé d'un pendule inversé. -Application sur un banc d'essai », mémoire de Master juin 2018.

[04] : <https://media.techeblog.com/images/honda-riding-assist.jpg>

[05] : <https://www.google.dz/search=robot+mip+one>

[06] : Bugeja M. « Non linear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum system ».EuroconLjublijana, Slovenia.2003.

[07] : Lam J. «Control of an inverted pendulum». Dept of Electrical &computer Engineering, University of California. U.S.A. 2004.

[08] : Achour « Réglage par mode glissant d'une machine asynchrone ». IEEE Trans. Indust. Applic. Vol.40, N°.1,pp45-55, 2005.

[09] : Z.Yamina, « Commande par mode glissant des courants statoriques de la machine asynchrone » Mémoire Présenté pour l'obtention du diplôme de magister Université de Sétif, 2010.

[10] : B.Ibrahim et H.Youcef, « Commande par mode de glissement d'un moteur asynchrone alimenté par un onduleur à trois niveaux »,Mémoire de MASTER ACADEMIQUE, UNIVERSITE K.MERBAH OUARGLA, 2017.

[11] : A.Dechoucha « Commande par Mode de Glissement par Imposition des Pôles d'une Machine à Induction Linéarisée par orientation du Flux » IEEE Trans. Indust. Applic. Vol.40, N°.1,pp45-55,2005.

[12] : S.Haddad & M.Charif, « Etude comparative de la commande vectorielle et celle par mode de glissement d'un moteur asynchrone », Mémoire d'ingéniorat de l'université de M'sila, Département d'Electrotechnique, 2006.

-
- [13] : **T.Billal et M. Mahdi**, « Commande d'un pendule inversé par mode glissant », Mémoire de MASTER , Université Abderrahmane Mira – Bejaia, 2017.
- [14] : **O.Jedda, J.Ghabi et A. Douik**, « Sliding Mode Control of an Inverted Pendulum », N. Derbel et al. (eds.), *Applications of Sliding Mode Control*, Studies in Systems, Decision and Control 79, DOI 10.1007/978-981-10-2374-3_6, Springer Science+Business Media Singapore 2017.
- [15] : **B.Idriss, B.Med Said et H.Med Naguib**, « Elimination du Broutement dans la Commande par Mode Glissant d'un Pendule Inversé », Université Ferhat Abbes, Sétif ,
- [16] : **L. B. Prasad, B. Tyagi, and H. O. Gupta**, « Modelling and simulation for optimal control of nonlinear inverted pendulum dynamical system using pid controller and lqr, » in 2012 Sixth Asia Modelling Symposium, 2012, pp. 138–143, <https://doi.org/10.1109/AMS.2012.21>.
- [17] : **M.S.Mahmoud, R.A.A.Saleh, A.Ma'arif**, « Stabilizing of Inverted Pendulum System Using Robust Sliding Mode Control », International Journal of Robotics and Control Systems Vol. 2, No. 2, 2022, pp. 230-239, <http://pubs2.ascee.org/index.php/ijrcs>
- [18] : **O.JEDDA, J.GHABI et A.DOUIK**, « Second Order Sliding Mode Control for Inverted Pendulum », 12th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices 2015.
- [19] : **A. Levant**, « Higher order sliding modes, differentiation and output feedback control », International Journal of Control, 76 (9- 10)(924-941), 2003.
- [20] : **A. Levant**, « Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control, » Int. J. Control, vol. 58, no. 6, pp. 1247-1263, 1993.
- [21] : **M.BIRKOUICHE et S.HAMADOUCHE**, « Commande par mode glissant d'ordre deux d'un pendule inverse », Mémoire de MASTER ACADEMIQUE UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU, 2016.