



République Algérienne Démocratique et Populaire



Ministère De L'enseignement Supérieur et De

La Recherche Scientifique

University of Echahid Hamma Lakhdar El-oued

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et
appliquées

Thème

Etude d'une nouvelle classe des problèmes aux limites
elliptiques dans des polygône plan

Présenté par: Tabet Hanan

Soutenue devant le jury :

Président	ben Ali Ibrahim	Pr	Univ El-Oued
Rapporteur	Medkhel Hamza	M. C. B	Univ El-Oued
Examineur	Rimi Khazzani	Pr	Univ El-Oued

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements

À ma chère mère, source d'amour et de prières, qui a toujours été le premier pilier de ma vie,

À mon cher père, modèle de force et de patience, qui m'a appris que rien n'est impossible avec de la volonté.

À mon honorable professeur Hamza Madkhel, qui a été une lumière sur mon chemin — je lui exprime toute ma gratitude et mon respect pour son accompagnement et ses conseils.

À mes chers amis, compagnons de route tout au long de ces années universitaires, merci pour les fous rires partagés, le soutien constant, et les souvenirs inoubliables. Chacun de vous a laissé une empreinte unique dans mon cœur.

Je tiens également à exprimer ma profonde reconnaissance à toute l'équipe de la faculté enseignants, encadrants, et personnels administratifs pour leur dévouement et leur accompagnement tout au long de mon parcours.

Enfin, un grand merci à l'Université Hamma Lakhdar d'El Oued, pour m'avoir offert un cadre propice à l'apprentissage, au développement et à l'épanouissement personnel. Grâce à elle, ce chapitre de ma vie restera gravé dans ma mémoire comme l'un des plus précieux.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Notions fondamentales	3
1.1 Espace normés et leur caractéristique	3
1.2 Les transformations intégrale	5
1.3 Transformée de Laplace :	6
1.3.1 Quelques propriétés fondamentale :	7
1.4 Espace L^p	10
1.5 L'espace de distribution $\mathcal{D}'$	11
1.6 Espace de Sobolev $W^{1,p}$	13
1.6.1 Définition principales	13
1.7 Application de la transformation de Mellin et ses caractéristique	14
1.7.1 Quelques propriétés :	15
1.8 Concept de noyau de Green	16
2 Etude du problème dans un secteur plans	18
2.1 Notions du polygone	18
2.2 Résultats de Grisvard	19
2.3 Définition de fonction de poids	19
2.4 Le problème dans un secteur plan	20
2.5 Définition de l'espace de travail $E_\alpha(\Omega_\varphi)$	20
2.6 Propriété de l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$	22

2.7	Existence et unicité de solution du problème elliptique dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$	24
2.7.1	Inégalité à priori	24
2.8	Etude de l'unicité de la solution	26
3	Etude du problème adjoints dans un secteur plans	28
3.1	Etude des problèmes Adjoints	28
3.2	Etude de l'espace dual et formulation du problème adjoint	31
3.2.1	Formulation du problème adjoint	31
3.2.2	Etude de l'espace dual	32
4	Existence et unicité de la solution du problème adjoint	35
4.1	Définition d'une nouvelle norme dans H^{-2}	35
4.2	Démonstration de l'équivalence de cette norme avec la norme usuelle de H^{-2} .	37
4.3	Inégalité à priori et existence de la solution du problème adjoint	39
4.3.1	Démonstration de l'inégalité:	40
4.4	Etude de l'unicité de la solution	42
4.5	Etude du problème adjoint perturbé	46
4.5.1	Cas de la condition de Dirichlet	46
4.5.2	Cas de la condition de Neumann	50
4.6	Extension de l'étude du problème et de son adjoint dans le polygone plan . .	52
	Conclusion générale	57
	Bibliographie	57

Principales notations utilisées

Notions géométriques:

Ω est un ouvert plan de frontière polygonale notée Γ .

ω la mesure de surface sur Γ , $Q =]0, T[\times \Omega$, $T > 0$ un corps polygonal.

$\sum$ la frontière de Q , γ la mesure de surface $\sum$, $t \in]0, T[$ sur (t désigne le temps).

$$\sum =]0, T[\times \Gamma.$$

Ω_φ un secteur plan infini d'ouverture φ , (φ étant un angle de Ω_φ).

O un ouvert régulier à l'intérieur du polygone, $O = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^N \Omega_{\varphi j}$.

N = le nombre de sommets du polygone.

S_j : les sommets du polygone $j = 1, 2, \dots, N$.

φ : angle du secteur plan, telle que $0 < \theta < \varphi < 2\pi$.

Γ_φ : la frontière du secteur plan.

Espaces fonctionnels:

$C_0^\infty(\Omega)$: l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et nulles à l'infini dans Ω .

$\bar{\Omega}$ l'adhérence de Ω .

$C_0^\infty(\bar{\Omega})$: l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

$L^2(\Omega)$: l'espace des classes de fonctions de carré intégrable pour la mesure dx .

Si Ω_φ un secteur plan d'ouverture φ pour la mesure $dx = \rho d\rho d\theta$.

(ρ, θ) désigne les coordonnées polaires.

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varphi)}^2 = \int_{\Omega_\varphi} |u|^2 dx.$$

$H^1(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre 1.

$H_0^1(\Omega)$: l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$H^m(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre m (défini ici pour $m \in \mathbb{N}$, par convention d'écriture on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$)

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / D^\beta u \in L^2(\Omega), |\beta| \leq m\}$$

tel que $D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_m^{\beta_m}}$, désigne la dérivé d'ordre β sens des distributions

avec $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^*, |\beta| = \sum_{i=1}^m \beta_i$.

On munit l'espace $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\beta| \leq m} (D^\beta u, D^\beta v)_{L^2(\Omega)}, \forall u, v \in H^m(\Omega)$ et la norme associé étant donné par:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\beta| \leq m} \|D^\beta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H^m(\Omega)$$

$E_\alpha(\Omega_\varphi)$: l'espace de Sobolev avec poids d'ordre 2 défini par :

$$E_\alpha(\Omega_\varphi) = \{u \in H^1(\Omega_\varphi) \setminus \rho^\alpha D^2 u \in L^2(\Omega_\varphi)\}$$

où, les fonctions u sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

Le symbole D^2 désigne les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport aux variables ρ et

η . Où $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}$.

$$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = E_\alpha(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega).$$

$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ désigne l'espace de Sobolev avec poids d'ordre m défini par :

$$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \{u \in H^1(\Omega_\varphi) \setminus \rho^\alpha D^{|\beta|} u \in L^2(\Omega_\varphi), 2 \leq |\beta| \leq m\}.$$

où, les fonctions u sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

$$E_{\alpha,m,0}(\Omega_\varphi) = E_{\alpha,m}(\Omega_\varphi) \cap H_0^{m-1}(\Omega).$$

H^{-m} : l'espace dual de l'espace $H_0^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$.

$E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ désigne l'espace dual de l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

$C^1(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues et dérivables dans Ω .

$C_0^\infty(Q_\varphi)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et nulle à l'infini dans Q_φ telle que $Q_\varphi = \sum_\varphi \times]0, T[$.

Liste des symboles :

$V(S_j)$: une voisinage du sommet S_j pour $j = 1, 2, 3, \dots, N$, (S_j désignera l'origine de la frontière Γ_j).

$\lambda(\rho)$: une fonction poids qui est une fonction indéfiniment différentiable à l'intérieur de Ω_φ .

$\frac{\partial}{\partial \eta}$: la dérivée normale par rapport η , et égalité à $\frac{\partial}{\rho \partial \theta}$.

$(\widetilde{P}_\varphi)$: le problème obtenu de (P_φ) après transformation de Mellin.

$\widetilde{u}(\sigma, \theta)$: la transformation de Mellin de $u(\rho, \theta)$ par rapport à ρ .

$\mathbb{R}$: corps des réels.

$\mathbb{R}_+^*$: espaces des réels strictement positif.

$\mathbb{R}_-^*$: espaces des réels strictement négatif.

$\mathbb{R}_+$: espaces des réels positif.

ملخص

يتناول هذا البحث دراسة فئة من المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليلجية داخل مجالات مستوية غير منتظمة ، مثل القطاعات ملخص ونواة قرين كأداتين أساسيتين لتحليل سلوك الحلول بالقرب من الزوايا الحادة . كما تم توظيف المضلعات. تم اعتماد تحويل ميلين فضاءات سوبولاف ودالة الوزن لإثبات الوجود ووحدانية الحل وقد شملت الدراسة أيضا معالجة المشكلة العكسية المرتبطة بنفس مسائل الشروط الحدية تساهم هذه النتائج في تطوير الكثير من الأسس النظرية لحل المعادلات في مجالات ذات هندسة غير منتظمة

Abstract

This research focuses on the study of a class of elliptic partial differential equations within nonregular planar domains, such as sectors and polygons. The Mellin transform and the Green's kernel are employed as fundamental tools to analyses the behavior of solutions near sharp angles. Sobolev spaces and weight functions are also used to prove the existence and uniqueness of the solution. The study further addresses the inverse problem associated with the same boundary conditions. These results contribute to the development of many theoretical foundations for solving equations in domains with non-regular geometry.

Résumé

Cette recherche porte sur l'étude d'une classe d'équations aux dérivées partielles elliptiques dans des domaines plans non réguliers, tels que les secteurs et les polygones. Elle repose sur l'utilisation de la transformation de Mellin et du noyau de Green comme outils fondamentaux pour analyser le comportement des solutions au voisinage des angles aigus. Les espaces de Sobolev et les fonctions poids ont également été employés pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution. L'étude inclut aussi le traitement du problème inverse associé aux mêmes conditions aux limites. Ces résultats contribuent au développement de nombreuses bases théoriques pour la résolution des équations dans des domaines géométrie non régulière

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles (EDP) jouent un rôle central dans la modélisation mathématique de nombreux phénomènes physiques, comme ceux rencontrés en mécanique, en électromagnétisme, en dynamique des fluides ou encore en physique mathématique. Si leur étude dans des domaines réguliers est bien développée, elle devient plus délicate lorsqu'il s'agit de domaines non réguliers, notamment ceux à frontière polygonale, en raison des singularités qui apparaissent près des sommets. Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème elliptique pondéré posé sur un domaine plan dont la frontière est polygonale. Plus précisément, nous avons considéré le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Où Ω est un ouvert plan à frontière polygonale Γ . Pour traiter ce type de problème, nous avons utilisé la transformation de Mellin, particulièrement adaptée à la géométrie anguleuse du domaine, ainsi que la formule du noyau de Green. Ces outils permettent non seulement de résoudre efficacement l'équation, mais aussi d'établir des inégalités a priori indispensables à l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions. Dans cette mémoire, nous avons commencé par poser les équations aux dérivées partielles, les conditions aux limites, les opérateurs différentiels, la formule de Green et les espaces fonctionnels. Ensuite, nous avons formulé et étudié le problème dans un domaine en secteur plan, en utilisant les coordonnées polaires pour adapter l'analyse à la géométrie du domaine. Après en avoir vérifié l'existence et l'unicité de la solution, nous avons poursuivi l'étude à l'aide des outils d'analyse fonctionnelle, les conditions permettant d'assurer une solution

unique et bien définie. Enfin, nous avons étendu notre approche aux domaines polygonaux, en tenant compte des difficultés spécifiques aux sommets et en adaptant la méthode développée aux nouvelles contraintes géométriques. L'objectif principal de ce travail est de montrer comment l'introduction de fonctions poids, associée à l'utilisation d'espace fonctionnels appropriés, permet d'analyser de manière rigoureuse le problème principal ainsi que son problème adjoint, en s'appuyant sur des outils d'analyse fonctionnelle tels que la formule de Green et le théorème alternatif de Fredholm.

Chapitre 1

Notions fondamentales

Dans ce chapitre on va donner quelques définitions principales avec espaces fonctionnels généralisée, d'autre part on seront utiles pour la résolution de quelques problèmes Poisson dans des domaines plan non réguliers.

Dans ce paragraphe, on donnera la géométrie est bien adaptée au domaine après la transformation de Mellin [31], le noyau de Green est aussi bien adaptée à la résolution d'équation différentielle explicite.

1.1 Espace normés et leur caractéristique

Un espace normé est un espace vectoriel $\mathbf{E}$ sur un corps $\mathbb{k}$ (généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni d'une norme $\| \cdot \|$, c'est-à-dire une application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes pour tout $x, y \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{k}$:

- 1).séparation: $\| x \| = 0$ si et seulement si $x = 0$
- 2).homogénéité: $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$
- 3).inégalité triangulaire : $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.
- 4).Un espace vectoriel normé est un cas particulier d'un espace métrique, ou la distance est définie par :

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Lorsque cet espace est complet par rapport à la norme il est appelé un espace de Banach

Les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont :

1. La norme p -euclidienne :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^{\frac{1}{p}} \right)^p \text{ pour } 1 \leq p < \infty$$

2. La norme infinie:

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

En analyse fonctionnelle, des espaces importants comme L^p et $C([a, b])$ sont des espaces normés.

Exemple 1.1.1 Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et N_1, N_2 les applications de E dans $\mathbb{R}$ définies respectivement, pour tout $f \in E$, par:

$$N_1(f) = |f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)| dt$$

$$N_2(f) = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$$

Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E , puis qu'elles sont équivalentes.

On va démontrer que N_1 est une norme, la preuve est exactement identique pour N_2 on commence par remarquer que N_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ de plus si $N_1(x) = 0$

alors on a $f(0) = 0$ et $\int_0^1 |f'(t)| dt = 0$.

Or $|f'|$ est une fonction continue et positive sur $[0, 1]$ la condition $\int_0^1 |f'(t)| dt = 0$ entraîne

donc que $f' = 0$ sur $[0, 1]$ donc que f est constante.

Puisque $f(0) = 0$ on a bien $f = 0$

En effet pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $f, g \in E$

on a :

$$\begin{aligned}
N_1(\lambda f) &= |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)| dt \\
&= |\lambda| \cdot |f(0)| + |\lambda| \int_0^1 |f'(t)| dt \\
&= |\lambda| N_1(f)
\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
N_1(f + g) &= |(f + g)(0)| + \int_0^1 |(f + g)'(t)| dt \\
&= |f(0) + g(0)| + \int_0^1 |\dot{f}(t) + g'(t)| dt \\
&\leq |f(0) + g(0)| + \int_0^1 (|\dot{f}(t)| + |g'(t)|) dt \\
&\leq |f(0)| + \int_0^1 |\dot{f}(t)| + |g(0)| + \int_0^1 |g'(t)| dt \\
&\leq N_1(f) + N_2(f)
\end{aligned}$$

Enfin, on peut remarquer que $N_1 \leq 2N_2$ et que $N_2 \leq 2N_1$ les deux normes sont bien équivalentes.

1.2 Les transformations intégrale

Définition 1.2.1 *Les transformations intégrales sont des outils mathématiques qui permettent de transformer des fonction d'un espace temporel vers un espace fréquentiel ou complexe , à l'aide d'intégrales de la forme générale:*

$$\mathfrak{F}f = \int_a^b K(x, s)f(x)dx$$

Où $K(x, s)$ est le noyau de la transformation , et $f(x)$ est la fonction à transformer .

Exemple 1.2.1 Soit le types et quelques des courants de transformations intégrales :

1).Transformée de Fourier:

$$\mathcal{F}f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\pi x\xi}dx$$

Utilisée pour l'analyse de signaux et la résolution des équations différentielles.

2).Transformée de Laplace:

$$\mathcal{L}f = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

Très utile en dynamique des systèmes et en électronique .

3)Transformée de Mellin:

$$Mf = \int_0^{\infty} x^{s-1}f(x)dx.$$

On appliqué plusieurs applications des transformations intégrales suivantes :

- 1.Résolution des équations aux dérivées partielles (EDP).
- 2.Analyse des signaux et systèmes.
- 3.Traitement d'images.
- 4.Physique quantique et théorie du contrôle.
- 5.Cryptograaphie et théorie de l'information.

1.3 Transformée de Laplace :

Définition 1.3.1 La Transformée de Laplace est une transformation intégrale qui associe à une fonction $f(t)$, définie pour $t \geq 0$, une fonction $F(s)$ définie dans le plan complexe par

$$\mathcal{L}f = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt \quad s \in \mathbb{C}$$

Elle utilisée pour simplifier la résolution d'équations différentielles en transformant des opérateurs différentiels en opérateurs algébriques.

La Transformée de Laplace existe si :

1. $f(t)$ est continue par morceaux sur chaque intervalle fini $[0, T]$.
2. S'il existe des constantes $M, \alpha > 0$ telles que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pour tout $t \geq 0$.

1.3.1 Quelques propriétés fondamentale :

1. Linéarité :

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g$$

2. Transformée de la dérivée :

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f) - f(0)$$

3. Théorème de Convolution :

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s)$$

$$1. \mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$2. \mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}(s) > a$$

$$3. \mathcal{L}(\cos(\omega t))(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Exemple 1.3.1 Soit l'équation différentielle suivante en utilisant la transformée de Laplace :

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

avec la conditions initiales :

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

On appliquons la transformée de Laplace à l'équation , on sait que :

$$\mathcal{L}(y'')(s) = s^2\mathcal{L}(y)(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}(y')(s) = s\mathcal{L}(y)(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(y)(s)$$

En appliquant $\mathcal{L}$ terme à terme :

$$\mathcal{L}(y'')(s) + \mathcal{L}(3y')(s) + \mathcal{L}(2y)(s) = 0$$

Ce qui donne:

$$(s^2\mathcal{L}(y)(s) - sy(0) - y'(0)) + 3(s\mathcal{L}(y)(s) - y(0)) + 2\mathcal{L}(y)(s) = 0$$

Substituons les conditions initiales

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$(s^2\mathcal{L}(y)(s) - s.1) + 3(s\mathcal{L}(y)(s) - 1) + 2\mathcal{L}(y)(s) = 0$$

$$(s^2 + 3s + 2)\mathcal{L}(s) - (s + 3) = 0$$

Isolons $\mathcal{L}(s)$:

$$\mathcal{L}(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

Factorisons le dénominateur:

$$s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$$

Donc

$$\mathcal{L}(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

Décomposons en éléments simples :

On cherchons A et B tels que:

$$\frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2}$$

Multipliant par $(s + 1)(s + 2)$:

$$s + 3 = A(s + 2) + B(s + 1)$$

Développons:

$$s + 3 = As + 2A + Bs + B$$

$$s + 3 = (A + B)s + (2A + B)$$

Alors :

$$A + B = 1, \quad 2A + B = 3$$

Réolvons le système :

De la première: $B = 1 - A$

En substituant dans la deuxième :

$$2A + (1 - A) = 3$$

$$A + 1 = 3$$

$$A = 2$$

$$B = -1$$

Donc

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

On appliquons la transformée de Laplace inverse, on sait que :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s + a}\right) = e^{-at}$$

Réponse finale :

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

1.4 Espace L^p

Définition 1.4.1 un espace L^p avec $1 \leq p < \infty$, est l'ensemble des fonction mesurables $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telles que la norme suivant soit finie.

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Pour $p = \infty$, on définit:

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_X |f(x)|$$

1. Espace normés et complet $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est espace normé il est complet donc c'est un espace de Banach

pour $p = 2$, L^2 est un espace de Hilbert avec la produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_X f(x)g(x)dx$

2. Inégalité de Hölder

Pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

3. Inégalité de Minkowski (sous-additivité de la norme L^p) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

4. Relation d'inclusion si $p < q$ alors $L^q \subset L^p$

Exemple 1.4.1 Soient a, b deux réels avec $a < b$ et soit $f \in L^\infty([a, b])$ démontrer que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

Remarquons d'abord que :

$$\|f\|_p \leq \left(\int_a^b \|f\|_\infty^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty$$

En particulier puisque $(b-a)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1$ pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_0$ on a

$$\|f\|_p \leq (1 + \varepsilon) \|f\|_\infty$$

D'autre part, on sait qu'il existe $E \subset [a, b]$ avec $\mu(E) > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $|f(x)| \geq \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}$ on met à la puissance p .

On intègre sur E puis on met à la puissance $\frac{1}{p}$ pour trouver :

$$\begin{aligned}\|f\|_p &\geq \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \left(\int_E \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \right) \mu(E)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Le membre de droite tend vers $\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}$ si $p \rightarrow +\infty$, en particulier

$$\exists p_1 \in \mathbb{R}, \forall p \geq p_1, \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \right) \mu(E)^{\frac{1}{p}} \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$$

Ainsi pour $p \geq \max(p_0, p_1)$ on a

$$\|f\|_\infty - \varepsilon \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty + \varepsilon$$

1.5 L'espace de distribution $\mathcal{D}'$

L'espace de distribution $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, où $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonction test, c'est-à-dire les fonction $\mathbb{C}^\infty$ à support compact dans Ω , une distribution T est une application linéaire continue qui associ à chaque fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ un nombre réel ou complexe $T(\varphi)$

formellement, une distribution T est définie par :

$$\begin{aligned}T &: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}) \\ \varphi &\mapsto T(\varphi)\end{aligned}$$

1. Généralisation des fonction classiques : toute fonction localement intégrable f définit une distribution T_f par

$$T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

2. Dérivation des distributions

on définit la dérivée d'une distribution T par :

$$\langle T', \varphi \rangle = \langle T, \varphi' \rangle$$

3. Distribution singulières : certaines distribution n'ont pas d'équivalent sous forme de fonction comme la distribution de Dirac $\delta(x)$ définie par :

$$\delta(\varphi) = \varphi(0)$$

4. Espace de Sobolev et distribution : les espaces H^s (Sobolev) peuvent être vus comme des sous-espaces de $\mathcal{D}'$

1. soit T_1 la distribution associée à la fonction $f(x) = \text{signe}(x)$. Calculer la dérivée de T_1 .

2. soit T_2 la distribution associée à la fonction $g(x) = |x|$. On calcule la dérivée de T_2

Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T_1, \varphi' \rangle = \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = 2\varphi(0)$$

Ainsi, $T'_1 = 2\delta_0$

Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle T'_2, \varphi \rangle = - \langle T_2, \varphi' \rangle = \int_{-\infty}^0 x\varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} x\varphi'(x) dx$$

On exprime alors chacune de ces intégrales à l'aide d'une intégration par parties. par exemple on a :

$$\int_0^{+\infty} x\varphi'(x) dx = [x\varphi(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = - \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$$

On a de même:

$$\int_{-\infty}^0 x\varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx$$

Soit:

$$\langle T'_2, \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$$

Ainsi, T'_2 est la distribution associée à la fonction $u = 1_{[0,+\infty[} - 1_{]-\infty,0]}$.

1.6 Espace de Sobolev $W^{1,p}$

1.6.1 Définition principales

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, avec $1 \leq p < \infty$ est l'ensemble des fonction u appartenant à $L^p(\Omega)$ dont les dérivées faibles $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ appartiennent aussi à $L^p(\Omega)$, mathématiquement on le définit comme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

1. $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach
2. cas particulier : pour $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert, souvent noté $H^1(\Omega)$
3. trace et continuité:

Si $p > n$ alors $W^{1,2}(\Omega)$ est inclus dans l'espace des fonction continues sur Ω

Exemple 1.6.1 Soient $N \geq 1$, $\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N, |x_i| < 1, i = 1, \dots, N\}$ et $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x) = 1$.

Si $x \in \Omega$ et $u(x) = 0$

1. Pour $i = \{1, \dots, N\}$ et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, On montrer que $\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$ ne dépend que

des valeurs prises par φ sur le bord de Ω .

2. On montrer que $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

1. On prend par exemple, $i = 1$ (les autres valeurs de i se traitent de manière similaire), pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{]-1,1[^N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \left(\int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, y) dx_1 \right) dy$$

et donc:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(1, y) dy - \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(-1, y) dy$$

Ceci montre bien que $\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx$ ne dépend pas des valeurs prises par φ sur le bord de Ω .

2. On raisonne par l'absurde. On suppose que $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Il existe alors (en particulier) $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tel que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x) \varphi(x) dx$$

Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $A_n =]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[\times]-1, 1[^{N-1}$.

On choisit une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi(x) = 0$ si $x \notin A_1$ et $\varphi(x) = 1$ si $x = (1, y)$ avec $y \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^{N-1}$ (une telle fonction φ existe). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit alors φ_n par $\varphi_n(1 + x_1, y) = \varphi_n(1 + nx_1, y)$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{N-1}$ (de sorte que $\varphi(x) = 0$ hors de A_n).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $\varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et le choix de φ_n donne :

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) dx = \int_{]-1, 1[^{N-1}} \varphi_n(1, y) dy - \int_{]-1, 1[^{N-1}} \varphi_n(-1, y) dy \geq 1$$

et

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} g(x) \varphi_n(x) dx \right| \leq \int_{A_n} |g(x)| dx.$$

On a donc $\int_{A_n} |g(x)| dx \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui est impossible car la mesure de Lebesgue de A_n tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

1.7 Application de la transformation de Mellin et ses caractéristique

Définition 1.7.1 si une fonction $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, alors sa transformation de Mellin notée $\tilde{f}$ est donnée par :

$$\tilde{f}(\sigma) = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot x^\sigma \frac{dx}{x}, \quad \sigma \in \mathbb{C}$$

Lorsque cette intégrale converge.

1.7.1 Quelques propriétés :

1.

$$\left(\frac{df}{dx}\right)(\sigma) = -(\sigma - 1)\tilde{f}(\sigma - 1)$$

2.

$$(x^\alpha f)(\sigma) = \tilde{f}(\sigma + 1)$$

3.

$$\left(x\frac{df}{dx}\right)(\sigma) = -\sigma\tilde{f}(\sigma)$$

4.

$$\frac{d^n f}{dx^n}(\sigma) = (-1)^n(\sigma - 1)(\sigma - 2)\dots(\sigma - n)\tilde{f}(\sigma - n)$$

Si $\tilde{f}(\sigma)$ définie dans l'intervalle $\varepsilon_1 < \operatorname{Re} \sigma < \varepsilon_2$, alors la fonction $f(x)$ peut être reconstruite à partir de l'intégrale suivante :

$$f(x) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - iv}^{\varepsilon + iv} \tilde{f}(\sigma) x^{-\sigma} d\sigma$$

Pour un certain ε tel que $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$.

Exemple 1.7.1 Application à une intégrale impropre.

On considère l'intégrale suivante:

$$I = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

Cette intégrale est typique des transformation de mellin l'idée que l'intégrale ressemble à la définition de la fonction de gamma qui est donnée par :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad \text{pour } \Re(s) > 0$$

On reconnaît directement que notre intégrale est égale à $\Gamma(s)$ donc on peut écrire $I = \Gamma(s)$

Exemple 1.7.2 *Application en théorie des nombres.*

En théorie des nombres on utilise souvent la transformation de mellin pour analyser des fonction comme la fonction zêta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{pour } \Re(s) > 1$$

Une autre façon de l'écrire est d'utiliser la transformation de mellin

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

Cette approche permet d'étudier la fonction zêta sous un angle analytique ce qui utile pour démontrer des résultats en arithmétique et en analyse complexe

1.8 Concept de noyau de Green

Dans l'analyse du mouvement d'un fluide incompressible à l'intérieur d'un conduit de longueur l le problème peut être reformulé sous la forme d'une équation aux dérivées partielles, l'objectif est alors de trouver une fonction u qui satisfait l'équation suivante:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + k^2 u(x) = p(x), \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 1$$

Avec la condition aux limites définies aux points $x = 0$ et $x = 1$

Une approche courante résoudre ce type de problème consiste à introduire un noyau de green $G(x, y)$ fonction de deux variables cela permet d'exprimer la solution u sous la forme intégrale suivante :

$$u(x) = \int_0^l G(x, y) p(y) dy$$

Exemple 1.8.1 *Soit l'équation de poisson sur un intervalle*

Considérons l'équation différentielle :

$$y''(x) = f(x) \quad \text{pour } x \in (0, 1)$$

Avec les condition aux bords :

$$y(0) = y(1) = 0$$

Le noyau de Green associé est donné par:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \xi(1-x) & 0 \leq x \leq \xi \\ x(1-\xi) & \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La solution de l'équation est alors donnée par

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

Chapitre 2

Etude du problème dans un secteur plans

Dans ce chapitre on va étudier le problème de Poisson dans un domaine plan du polygone, on a montré que l'utilisation d'une fonction de poids convenable allège les calculs surtout aux voisinages des points singuliers, et par conséquent le bon choix de l'espace du travail qui traite la solution du problème dans un secteur plan Ω_φ du polygone (φ ouvert du Ω_φ).

2.1 Notions du polygone

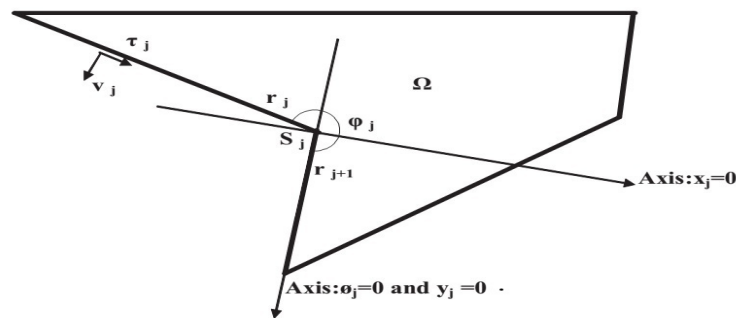


Fig 1 Notion sur la polygone

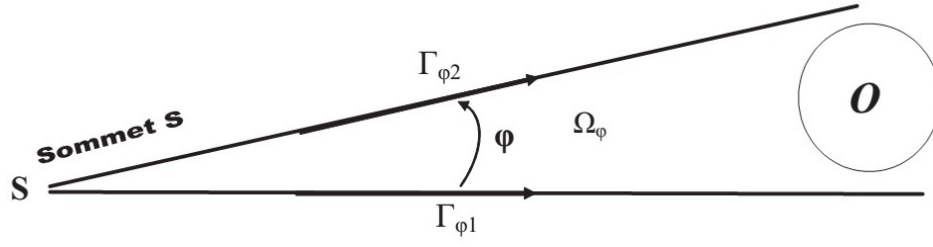


Fig 2 Partition de l'unité du polygone

2.2 Résultats de Grisvard

La solution du problème suivant:

$$(p) \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Il n'existe dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ que si le polygone Ω est convexe c'est à dire que tout les angles sont saillants, cela découle du fait que la solution de ce problème est de la forme: $u_j = u_0 + a\rho^{\frac{j\pi}{\varphi}} \sin \frac{j\pi}{\varphi} \theta$ telle que a est constante, cette solution n'est pas nécessaire dans $H^2(\Omega)$ lorsque $\pi < \varphi$. Car $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \notin L^2(\Omega)$.

2.3 Définition de fonction de poids

On introduit une fonction $\lambda(\rho)$:

$\lambda(\rho)$ est une fonction indéfiniment différentiable à l'intérieur de Ω_φ (resp $\overline{\Omega_\varphi}$) et positive dans Ω_φ et de frontière Γ_φ (ne s'annule pas dans Ω_φ) et donnée par la formule :

$$\lambda(\rho) = \begin{cases} \rho^\alpha & \text{si } 0 < \rho < \rho_1, 0 < \alpha \leq 1 \\ \delta(\rho) & \text{si } \rho_1 \leq \rho < \rho_2 \\ 1 & \text{si } \rho \geq \rho_2 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

ρ_1 suffisamment petit, ρ_2 suffisamment grand .

2.4 Le problème dans un secteur plan

Nous étudierons le problème dans un secteur plan infini d'ouverture φ qu'on note Ω_φ c'est à dire:

$$\Omega_\varphi = \{(\rho, \theta) \mid \rho > 0, 0 < \theta < \varphi < 2\pi\} \quad (2.4.1)$$

Et on désigne Γ_φ la frontière de Ω_φ . la frontière de Ω_φ désigne la réunion des deux demi droites issues de l'origine et d'équation respectives $\theta = 0$ et $\theta = \varphi$. le problème (P) sur Ω équivaut au cas le problème classique dans un ouvert plan régulier O et au cas le problème dans le secteur plan Ω_φ d'ouvert Ω . telle que O est un ouvert plan régulier de la classe $C^1(\Omega)$. les coordonnées polaires sont mieux adaptées à la géométrie du domaine Ω_φ .

Pour étudier ce type de problème suivant sur Ω_φ , on affecte l'opérateur de Laplace Δ d'une fonction poids $\lambda(\rho)$ qui est une fonction indéfiniment différentiable à l'intérieur de Ω_φ et que ne s'annule pas dans Ω_φ , et définie par :

$$(P_\varphi) \begin{cases} \lambda(\rho)\Delta u = \lambda(\rho)f & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (2.4.2)$$

2.5 Définition de l'espace de travail $E_\alpha(\Omega_\varphi)$

Pour étudier ce type de problème suivant:

$$(P_\varphi) \begin{cases} \lambda(\rho)\Delta u = \lambda(\rho)f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (2.5.1)$$

avec $h = \lambda(\rho)f \in L^2(\Omega_\varphi)$.

Supposons que le sommet de Ω_φ se situe à l'origine et soit $\lambda(\rho)$ la fonction poids définis par (2.3.1).

On va étudier ce problème au voisinage de l'origine dans un secteur plan Ω_φ , car le seul problème qui se pose quant à la régularité des solution du problème (2.5.1) se situe au voisinage de l'origine et d'après(2.3.1), on va donc étudier le problème suivant :

$$(P_\varphi) \begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (2.5.2)$$

On va commencer en utilisant comme conditions aux limites celles de Dirichlet (le cas où B est l'opérateur identité), c'est à dire qu'on va d'abord étudier le problème suivant :

$$(P_\varphi) \begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (2.5.3)$$

de même pour la condition de Neumann (le cas où $B = \frac{\partial}{\partial \eta}$) suivant:

$$(P_\varphi) \begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (2.5.4)$$

on a l'opérateur s'écrit en coordonné polaire:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

la solution de ce problème (2.5.3) est de la forme $u_j = u_0 + a\rho^{\frac{j\pi}{\varphi}} \sin \frac{j\pi\theta}{\varphi}$, a est constante, il est commandé de chercher la solution du problème (2.5.3) dans un espace fonctionnel, on constate que $\rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \in L^2(\Omega_\varphi)$, ce qui nous donne l'idée d'affecter le Laplacien d'une fonction poids qui dépend de ρ .

On choisit donc un espace fonctionnel avec poids qu'on défini par :

$$E_\alpha(\Omega_\varphi) = \{u \in H^1(\Omega_\varphi) / \rho^\alpha D^2 u \in L^2(\Omega_\varphi)\} \quad (2.5.5)$$

Où, les fonctions u sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$, et le symbole D^2 désigne les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport aux variables ρ et η où $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}$.

On cherchera la solution de notre problème, si elle existe dans ce espace. Il est plus commandé de chercher la solution du problème (2.5.4) dans l'espace fonctionnel qu'on note par $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ et qu'on défini par $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = E_\alpha(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega_\varphi)$ car on a une condition de Dirichlet homogène.

On vérifie aisément que E_α est un espace intermédiaire entre H^1 et H^2 . On munira l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ de la norme du graphe suivante:

$$\|u\|_{E_\alpha} = \|u\|_{H^1} + \sum_{|\beta|=2} \|\rho^\alpha D^\beta u\|_{L^2}$$

2.6 Propriété de l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$

on rappelle des quelques définitions on pose :

$$\begin{aligned} H_{x,y}^1(\Omega_\varphi) &= \left\{ u \in L^2(\Omega_\varphi), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \text{ sont dans } L^2(\Omega_\varphi) \right\}. \\ H_{\rho,\eta}^1(\Omega_\varphi) &= \left\{ u \in L^2(\Omega_\varphi), \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \text{ sont dans } L^2(\Omega_\varphi) \right\}. \end{aligned}$$

L'espace $H_{x,y}^1(\Omega_\varphi)$ coïncide avec l'espace $H_{\rho,\eta}^1(\Omega_\varphi)$. Donc on utilise définition l'espace de travail, l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ définie par l'expression (2.5.5).

Proposition 2.6.1 *Si α et β deux réel pris dans l'intervalle $[0, 1]$, et tels que $\alpha < \beta$. Alors $E_\alpha \subset E_\beta$.*

Proposition 2.6.2 *l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ peut s'écrire sous la forme suivante:*

$$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \{ u \in H_0^1(\Omega_\varphi) / \rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi) \}$$

Où u les fonctions sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

Proposition 2.6.3 *l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ est espace de Banach réflexifs.*

Preuve. Voir [28] ■

Proposition 2.6.4 *Si u est dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$, alors $\rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho}$ est dans $L^2(\Omega_\varphi)$.*

Preuve. On sait que si $u \in E_\alpha(\Omega_\varphi)$ alors u est à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$, et $u \in H^1(\Omega_\varphi)$ donc $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ est dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

Montrons que $\rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho}$ est dans $L^2(\Omega_\varphi)$. On a donc $\|\rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho}\|^2 = \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta$.

Si $\rho \geq 1$, et comme $0 < \alpha < 1$ alors $\|\frac{\partial u}{\partial \rho}\|^2 \geq \|\rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho}\|^2$ car $\rho^{2\alpha-2} \leq 1$.

pour $\rho \geq 1$ la proposition est vérifiée, il reste le cas $\rho < 1$.

Pour $\rho < 1$, on a :

$$\int_0^\varphi \int_0^1 \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^\varphi \int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta + \int_0^\varphi \int_\epsilon^1 \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta.$$

Comme la fonction $\rho \longrightarrow \rho^{2\alpha-2}$ est décroissante et continue sur le compact $[\epsilon, 1]$;donc elle est bornée et atteint ses bornes sur ce compact .Donc

$$\int_0^\varphi \int_0^1 \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta \leq \int_0^\varphi \int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta + \epsilon^{2\alpha-2} \int_0^\varphi \int_\epsilon^1 \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta.$$

Pour étudier l'intégrale $\int_0^\varphi \int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta$, pour ϵ suffisamment petit non nul, la fonction $\rho \longrightarrow \rho^{2\alpha-2}$ admet de développement en série entier .En utiliser la fonction suivant:

$$\rho \longrightarrow \rho^{2\alpha-2} = (1 + \rho - 1)^{2\alpha-2}.$$

On a pour $|X| = |\rho - 1| < 1$ alors $(1 + X)^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \beta(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n+1)X^n$ et on a $|\rho - 1| < 1$ car $0 < \rho < \epsilon < 1$

Posons donc $X = \rho - 1$ et $\beta = 2\alpha - 2$, et appliquant le développement en série entier, on aura donc

$$\int_0^\varphi \int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^\varphi \int_0^\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (2\alpha-2)(2\alpha-3)\dots(2\alpha-n-1)(\rho-1)^n \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta$$

D'où

$$\begin{aligned} 0 &< \left| \int_0^\varphi \int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta \right| = \left| \int_0^\varphi \int_0^\epsilon (1 + \rho - 1)^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (2\alpha-2)(2\alpha-3)\dots(2\alpha-n-1) \int_0^\varphi \int_0^\epsilon |\rho-1|^n \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta \leq S \int_0^\varphi \int_0^\epsilon \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

où S est la somme de la série entier de coefficient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (2\alpha-2)(2\alpha-3)\dots(2\alpha-n-1)$$

Alors on a :

$$0 < \left| \int_0^\varphi \int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta \right| \leq S \int_0^\varphi \int_0^\epsilon \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta,$$

et comme $\frac{\partial u}{\partial \rho} \in L^2$, on a le résultat désiré. ■

2.7 Existence et unicité de solution du problème elliptique dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$

2.7.1 Inégalité à priori

On va étudier l'existence du problème suivant:

$$(p_\varphi) = \begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (2.7.1)$$

dans l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ pour ceci on utilisera le lemme suivant:

Lemme 2.7.1 (*Lemme de Peetre*) ([16])

Soient E, F, G trois espaces de Banach réflexifs, tel que E s'injecte dans G et cette injection est compacte, et soit L un opérateur linéaire continu de E dans F . Alors les conditions suivantes sont équivalents :

- 1) L'image de L est fermée dans F , et L a un noyau de dimension finie.
- 2) Il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\|u\|_E \leq K \{ \|Lu\|_F + \|u\|_G \}. \quad (2.7.2)$$

On va appliquer ce lemme aux espaces :

$$E = E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi); F = L^2(\Omega_\varphi); G = H_0^1(\Omega_\varphi)$$

il est clair que F et G sont des espaces de Banach réflexifs car ce sont des espaces de Hilbert et E est un espace de Hilbert et on a : $H_0^2(\Omega_\varphi) \subset E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) \subset H_0^1(\Omega_\varphi) \subset L^2(\Omega_\varphi)$.

et, il est évident que l'opérateur $\rho^\alpha \Delta$ est linéaire continu de $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ dans $L^2(\Omega_\varphi)$. Donc toutes les hypothèses du lemme, sont vérifiées voir

Pour montrer que l'image de l'opérateur $L = \rho^\alpha \Delta$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et que son noyau est de dimension finie, on établira une inégalité (2.7.2) qui devient :

$$\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \leq K \left\{ \|Lu\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)} \right\} \quad (2.7.3)$$

Pour établir l'inégalité (2.7.3), on a besoin de l'inégalité suivante:

$$\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \leq K \left\{ \|\rho^\alpha \Delta u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)} \right\} \quad (2.7.4)$$

Pour montrer que l'inégalité (2.7.4), on commence par l'utilisation de la transformation de Mellin qui est bien adaptée au domaine dans Ω_φ après la transformation de Mellin au problème suivant:

$$(\widetilde{P}_\varphi) = \begin{cases} \widetilde{\rho^\alpha \Delta u} = \widetilde{\rho^\alpha f} = \widetilde{h} & \text{dans } \Omega_\varphi \\ \widetilde{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (2.7.5)$$

avec $\widetilde{\rho^\alpha \Delta u}(\sigma, \theta) = \widetilde{\rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}}(\sigma, \theta) + \widetilde{\rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho}}(\sigma, \theta) + \widetilde{\rho^{\alpha-2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}(\sigma, \theta)$ et on obtient :

$$\widetilde{\rho^\alpha \Delta u}(\sigma, \theta) = \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2}(\sigma + \alpha - 2, \theta) + (\sigma + \alpha - 2)^2 \widetilde{u}(\sigma + \alpha - 2, \theta) = \widetilde{h} \text{ et } \widetilde{h} \in L^2(\Omega_\varphi).$$

il vient :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2}(\sigma, \theta) + (\sigma + \alpha)^2 \widetilde{u}(\sigma, \theta) = \widetilde{h}(\sigma + 2, \theta).$$

Par résolution explicite, La solution de cette équation est donnée par :

$$\widetilde{u}(\sigma, \theta) = \int_0^\varphi \widetilde{G}(\sigma, \theta, \lambda) \widetilde{h}(\sigma + 2, \theta) d\lambda.$$

$\widetilde{G}(\sigma, \theta, \lambda)$ est la transformée de Mellin de $G(\rho, \theta, \lambda)$.

$\widetilde{G}(\sigma, \theta, \lambda)$ donné par :

$$\widetilde{G}(\sigma, \theta, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sin \sigma(\varphi - \theta) \sin \sigma \lambda}{\sigma \sin \sigma \varphi} & , 0 \leq \lambda \leq \theta \\ \frac{\sin \sigma \theta \sin \sigma(\varphi - \lambda)}{\sigma \sin \sigma \varphi} & , \theta \leq \lambda \leq \varphi \end{cases}$$

Le noyau de Green étant bornée [1] , on utilise la transformation de Mellin inverse on aura directement l'inégalité suivante, il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\|\widetilde{u}\|_{\widetilde{H}_0^2} \leq M \left\| \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2}(\sigma, \theta) + (\sigma + \alpha)^2 \widetilde{u}(\sigma, \theta) \right\|_{\widetilde{L}^2}.$$

comme l'injection de H_0^2 dans $E_{\alpha,0}$ est continue, il existe une constante $N > 0$ telle que:

$$\|\tilde{u}\|_{\widetilde{E_{\alpha,0}}} \leq N \|\tilde{u}\|_{\widetilde{H_0^2}}.$$

et on en déduit que :

$$\|\tilde{u}\|_{\widetilde{E_{\alpha,0}}} \leq K \|\tilde{h}(\sigma + 2, \theta)\|_{\widetilde{L^2}} \quad \text{ou} \quad K = MN.$$

on a l'inégalité souhaitée vérifiée d'où, $\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \leq K \left\{ \|\rho^\alpha \Delta u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)} \right\}$.

On remarque qu'on obtient des résultats analogues en utilisant la condition de Neumann dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ par application du lemme de Peetre voir([24]) .

D'après le lemme de Peetre on a l'image de l'opérateur $L = \rho^\alpha \Delta$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et que son noyau de dimension finie dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

On déduit que le problème (2.7.1) admet au moins une solution dans l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

2.8 Etude de l'unicité de la solution

On va étudier le noyau du problème (P_φ) dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

Les éléments du noyau du problème (P_φ) sont solution du problème suivant :

$$(P_\varphi) \begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (2.8.1)$$

Comme le facteur ρ^α ne s'annule pas à l'intérieur de Ω_φ le problème (2.8.1) est donc équivalent au problème:

$$(P_\varphi) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases}$$

Il suffit de remarquer que comme $\Delta u = 0$ et on a $\langle \Delta u, u \rangle = 0$

d'où :

$$\langle \Delta u, u \rangle = -\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|^2 = 0$$

où, le crochet $\langle ., . \rangle$ désignent le produit scalaire dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et les normes son indice sont celles de $L^2(\Omega_\varphi)$.

Donc $\Delta u = 0$ implique $\langle \Delta u, u \rangle = -\|\frac{\partial u}{\partial x}\|^2 - \|\frac{\partial u}{\partial y}\|^2 = 0$ on déduit que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \implies u \text{ est constante.}$$

et comme $u = 0$ sur Γ_φ , donc $u = 0$ dans $H^1(\Omega_\varphi)$,et donc $u = 0$ dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ donc $u = 0$ dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

Chapitre 3

Etude du problème adjoints dans un secteur plans

3.1 Etude des problèmes Adjoints

Soit le problème adjoint suivante:

$$(P_{\varphi}^*) \begin{cases} (\rho^{\alpha} \Delta)^* u = f & \text{dans } \Omega_{\varphi} \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi} \end{cases}$$

On a la formule de Green suivant:

$$\int_{\Omega} Lu \bar{v} dx - \int_{\Omega} u \overline{L^* v} dx = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma} S_j u \overline{C_j v} d\sigma + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma} B_j u \overline{T_j v} d\omega \text{ pour tout } u, v \in C_0^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

ayant les propriétés suivants :

1)-les système $\{B_0, \dots, B_m, C_0, \dots, C_m\}$ soit un système de Dirichlet d'ordre $2m$ sur Γ

2)-les coefficients des C_j et T_j sont dans $C_0^{\infty}(\overline{\Omega})$.

3)-l'ordre C_j est $2m - 1 - \mu_j$ et celui de T_j est $2m - 1 - m_j$.

4)-le système $\{C_0, \dots, C_{m-1}, T_0, \dots, T_{m-1}\}$ est système de Dirichlet d'ordre $2m$ sur Γ .

Si u, v sont deux fonctions de $C_0^{\infty}(\overline{\Omega})$, on a la formule de Green suivante:

$$\langle \rho^{\alpha} \Delta u, v \rangle - \langle u, (\rho^{\alpha} \Delta)^* v \rangle = \int_{\Gamma_{\varphi}} S u C v d\sigma + \int_{\Gamma_{\varphi}} B u T v d\omega \quad (3.1.1)$$

telle que : S, T, B, C sont des opérateurs différentiel d'ordre 1 définie sur la bord Γ_φ (frontière de Ω_φ), l'opérateur $(\rho^\alpha \Delta)^*$ est l'opérateur l'adjoint de $\rho^\alpha \Delta$.

Où les crochet $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

Preuve. on a : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ d'où, $\rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho^{\alpha-2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

, en intégrant dans le secteur plan Ω_φ , pour $v \in C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi})$ alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varphi} \rho^\alpha \Delta u v \rho d\rho d\theta &= \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{\alpha+1} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] v d\rho d\theta = \\ &= \int_0^\varphi \int_0^\infty \left(\rho^{\alpha+1} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho^\alpha \frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho^{\alpha-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) v d\rho d\theta \\ &= \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{\alpha+1} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} v d\rho d\theta + \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^\alpha \frac{\partial u}{\partial \rho} v d\rho d\theta + \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{\alpha-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} v d\rho d\theta \end{aligned}$$

Si cette intégrale existe, on peut ainsi formuler le problème adjoint, on calcule cette intégrale en utilisant une intégration par parties:

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{\alpha+1} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} v d\rho d\theta &= \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} v \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^\varphi \frac{\partial u}{\partial \rho} (\rho^\alpha \rho v) d\theta \Big|_0^\infty - \int_0^\varphi \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^\alpha \rho v) d\rho d\theta \\ &= - \int_0^\varphi \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^\alpha \rho v) d\rho d\theta \quad (\text{car } v \in C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi})) \\ &= \int_0^\varphi u \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^\alpha \rho v) d\theta \Big|_0^\infty + \int_0^\varphi \int_0^\infty u \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\rho^\alpha \rho v) d\rho d\theta \\ &= \int_0^\varphi \int_0^\infty u \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\rho^\alpha \rho v) d\rho d\theta \quad (\text{car } v \in C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi})) \end{aligned}$$

$$\int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{\alpha+1} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} v d\rho d\theta = \int_0^\varphi \int_0^\infty u \left[\alpha(\alpha+1) \rho^{\alpha-1} v + 2(\alpha+1) \rho^\alpha \frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho^{\alpha+1} \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \right] d\rho d\theta \quad (3.1.2)$$

$$\int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^\alpha \frac{\partial u}{\partial \rho} v d\rho d\theta = \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} v \rho d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\varphi u \rho^{\alpha-1} v \rho d\theta \Big|_0^\infty - \int_0^\varphi \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^{\alpha-1} \rho v) u d\rho d\theta \\
&= - \int_0^\varphi \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^{\alpha-1} \rho v) u d\rho d\theta \quad (\text{car } v \in C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi})) \\
&\int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^\alpha \frac{\partial u}{\partial \rho} v d\rho d\theta = - \int_0^\varphi \int_0^\infty u \left[\rho^\alpha \frac{\partial v}{\partial \rho} + \alpha \rho^{\alpha-1} v \right] d\rho d\theta \tag{3.1.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{\alpha-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} v d\rho d\theta &= \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{\alpha-2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} v \rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial \theta} (\rho^{\alpha-1} v) d\rho \Big|_0^\varphi - \int_0^\varphi \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho^{\alpha-1} v) d\rho d\theta \\
&= \int_{\Gamma_\varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta} (\rho^{\alpha-1} v) d\rho - \int_{\Gamma_\varphi} u \rho^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial \theta} d\rho + \int_0^\varphi \int_0^\infty u \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\rho^{\alpha-1} v) d\rho d\theta \\
\int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{\alpha-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} v d\rho d\theta &= \int_{\Gamma_\varphi} \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \theta} v d\rho - \int_{\Gamma_\varphi} u \rho^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial \theta} d\rho + \int_0^\varphi \int_0^\infty u \rho^{\alpha-1} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} d\rho d\theta \tag{3.1.4}
\end{aligned}$$

De (3.1.2), (3.1.3) et (3.1.4) nous avons :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^\alpha \Delta u v \rho d\rho d\theta - \int_0^\varphi \int_0^\infty u \left[\rho^\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + (2\alpha + 1) \rho^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho^{\alpha-2} \left(\alpha^2 v + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) \right] \rho d\rho d\theta = \\
&\int_{\Gamma_\varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \rho^{\alpha-1} v d\rho - \int_{\Gamma_\varphi} u \rho^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial \theta} d\rho
\end{aligned}$$

d'où la relation suivante : $\langle \rho^\alpha \Delta u, v \rangle - \langle u, (\rho^\alpha \Delta)^* v \rangle = \int_{\Gamma_\varphi} S u C v d\sigma + \int_{\Gamma_\varphi} B u T v d\sigma$ telle que:

$$\langle u, (\rho^\alpha \Delta)^* v \rangle = \int_0^\varphi \int_0^\infty u \left[\rho^\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + (2\alpha + 1) \rho^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho^{\alpha-2} \left(\alpha^2 v + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) \right] \rho d\rho d\theta$$

et

$$\int_{\Gamma_\varphi} S u C v d\sigma + \int_{\Gamma_\varphi} B u T v d\sigma = \int_{\Gamma_\varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \rho^{\alpha-1} v d\rho - \int_{\Gamma_\varphi} u \rho^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial \theta} d\rho.$$

Donc l'opérateur adjoint de $\rho^\alpha \Delta$ noté $(\rho^\alpha \Delta)^*$ est donnée par :

$$(\rho^\alpha \Delta)^* = \rho^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + (2\alpha + 1) \rho^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho^{\alpha-2} (\alpha^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}).$$

c'est à dire, $(\rho^\alpha \Delta)^* = \rho^\alpha \Delta + 2\alpha \rho^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \rho} + \alpha^2 \rho^{\alpha-2}$. ■

Nous obtenons que l'espace $C_0^\infty(\Omega_\varphi)$ est dense dans $H_0^m(\Omega_\varphi)$ et $C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi})$ est dense dans $H^m(\Omega_\varphi)$ et puisque, $H^m(\Omega_\varphi) \subset E_m(\Omega_\varphi) \subset H^1(\Omega_\varphi)$.

Alors $C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi})$ est dense dans $E_{m,0}(\Omega_\varphi) = E_m(\Omega_\varphi) \cap H_0^{m-1}(\Omega_\varphi)$, et $C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi})$ est dense dans $E_m(\Omega_\varphi)$, dans ce cas $C_0^\infty(\Omega_\varphi)$ est dense dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = E_\alpha(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega_\varphi)$ et $C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi})$ est dense dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

Donc, par densité la formule de Green définie dans 3.1.1 est valable dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$. voir ([25]).

3.2 Etude de l'espace dual et formulation du problème adjoint

3.2.1 Formulation du problème adjoint

Cette partie est consacrée à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du problème adjoint du problème (P_φ) définie par (2.4).

On va utiliser la même technique que celle utilisée dans (P_φ) .

On considère le problème suivant :

$$(P_\varphi^*) \quad \begin{cases} Qu = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (3.2.1)$$

On dit que (P_φ^*) le problème adjoint du (P_φ) , et l'opérateur $Q = (\lambda(\rho)\Delta)^*$ adjoint de $\lambda(\rho)\Delta$ pour $\lambda = 0$ et de $Q = (\lambda(\rho)(\Delta + \lambda))^*$ adjoint de $\lambda(\rho)(\Delta + \lambda)$ pour $\lambda \neq 0$, telle que $\lambda(\rho)$ une fonction de poids.

Au voisinage de l'origine, le problème (P_φ^*) s'écrit :

$$(P_\varphi^*) \quad \begin{cases} Pu = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (3.2.2)$$

où $P = (\rho^\alpha \Delta)^*$ adjoint de $\rho^\alpha \Delta$ pour $\lambda = 0$ et de $P = (\rho^\alpha (\Delta + \lambda))^*$ adjoint de $\rho^\alpha (\Delta + \lambda)$ pour $\lambda \neq 0$.

3.2.2 Etude de l'espace dual

On se propose dans cette section de trouver dans le cas du problème de Dirichlet l'espace dual de $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ définie par :

$$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \{ u \in H_0^1(\Omega_\varphi) \mid \rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi) \} .$$

Alors l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ s'identifie à l'espace de $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ définie par :

$$G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \{ u \in H_0^1(\Omega_\varphi), \text{ telle que } \rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi) \} .$$

Proposition 3.2.1

Le dual de l'espace $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ qu'on note par $G_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ s'écrit de la manière suivante:

$$G_{-\alpha}(\Omega_\varphi) = \{ u \in H^{-1}(\Omega_\varphi) \mid \rho^{-\alpha} u \in H^{-2}(\Omega_\varphi) \} .$$

on a vu que
$$\rho^\alpha \Delta : E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) \longrightarrow L^2(\Omega_\varphi)$$

d'où son adjoint
$$(\rho^\alpha \Delta)^* : L^2(\Omega_\varphi) \longrightarrow (E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi))^* = E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$$

Preuve. On a d'après la définition de l'espace $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$, et comme le dual de $H_0^1(\Omega_\varphi)$

est l'espace $H^{-1}(\Omega_\varphi)$, et celui de l'espace $H_0^2(\Omega_\varphi)$ est l'espace $H^{-2}(\Omega_\varphi)$,

$$\text{on peut s'écire: } \langle u, v \rangle = \int_{\Omega_\varphi} uv dx dy = \int_{\Omega_\varphi} uv \rho d\rho d\theta = \int_{\Omega_\varphi} \rho^\alpha u \rho^{-\alpha} v \rho d\rho d\theta.$$

On voit clairement la mise en dualité des espaces $H_0^1(\Omega_\varphi), H^{-1}(\Omega_\varphi)$ et $H_0^2(\Omega_\varphi), H^{-2}(\Omega_\varphi)$ respectivement, comme $u \in H_0^1(\Omega_\varphi)$ on a $v \in H^{-1}(\Omega_\varphi)$ et comme on a aussi $\rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi)$ donc $\rho^{-\alpha} v \in H^{-2}(\Omega_\varphi)$. ■

Proposition 3.2.2

Muni de la norme du graphe suivante :

$$\|u\|_{E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} = \|u\|_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} + \|\rho^{-\alpha} u\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}$$

L'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est un espace de Hilbert .

Preuve. Il est clair, d'après la définition même de $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, que l'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est un espace de Banach, il reste à définir dessus un produit scalaire et ceci est simple, il suffit de poser:

$$\langle u, v \rangle_{E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} = \langle u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} + \langle \rho^{-\alpha} u, \rho^{-\alpha} v \rangle_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}$$

ceci définit un produit scalaire dans $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$. ■

1- l'injection de l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$ dans l'espace $H^{-1}(\Omega_\varphi)$ est compact, et plus généralement, l'injection de l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$ dans l'espace $H^{-m}(\Omega_\varphi)$ est compact, pour $m \in \mathbb{N}$ [4].

2- Tout espace de Hilbert est réflexif, les espaces de Sobolev $H^s(\Omega_\varphi)$ avec s réel sont des espaces de Hilbert, ils sont donc réflexifs ([2]).

3- l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ était un sous espace fermé de $H_0^1(\Omega_\varphi)$, c'est à dire que l'espace intermédiaire entre $H_0^1(\Omega_\varphi)$ et $H_0^2(\Omega_\varphi)$, cette propriété s'étend aux espaces duals, on a donc $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est un espace intermédiaire entre $H_0^{-1}(\Omega_\varphi)$ et $H_0^{-2}(\Omega_\varphi)$, c'est à dire :

$$H^{-1}(\Omega_\varphi) \subset E_{-\alpha}(\Omega_\varphi) \subset H^{-2}(\Omega_\varphi) \quad (3.2.3)$$

Proposition 3.2.3

Le dual de l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ qu'on note $[E_\alpha(\Omega_\varphi)]'$ s'identifie à l'espace $E_{-\alpha, \overline{\Omega_\varphi}}(\mathbb{R}^2)$ à support dans $\overline{\Omega_\varphi}$, telle que $E_{-\alpha, \overline{\Omega_\varphi}}(\mathbb{R}^2) = \{g \mid g \in E_{-\alpha}(\mathbb{R}^2) \text{ et } g \text{ à support dans } \overline{\Omega_\varphi}\}$.

On prolongera les fonctions par 0 hors de Ω_φ , et posons $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi) = E_{-\alpha, \overline{\Omega_\varphi}}(\mathbb{R}^2)$.

Preuve. voir détail([24]). ■

Remarque 3.2.1

1-L'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ est réflexif donc $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, car le dual d'un espace réflexif est réflexif [13].

2- On a vu que l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ vérifie les immersions suivantes:

$H_0^2(\Omega_\varphi) \subset E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) \subset H_0^1(\Omega_\varphi)$ et que cette propriété s'étend aux espaces duals on a donc:

$$H^{-1}(\Omega_\varphi) \subset F_{-\alpha}(\Omega_\varphi) \subset H^{-2}(\Omega_\varphi) \quad (3.2.4)$$

l'espace $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est donc un sous espace de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$. Donc on muni l'espace $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ de la norme suivante:

$$\|u\|_{F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} = \|u\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} + \|\rho^{-\alpha}u\|_{H^{-2}(\mathbb{R}^2)}.$$

qui en fait un espace de Banach, et en définissant le produit scalaire suivant:

$$\langle u, v \rangle_{F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} = \langle u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} + \langle \rho^{-\alpha}u, \rho^{-\alpha}v \rangle_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}$$

l'espace $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est un espace de Hilbert.

Chapitre 4

Existence et unicité de la solution du problème adjoint

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème adjoint dans l'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$. En utilisant une nouvelle norme de H^{-2} , nous mettons en évidence une inégalité à priori, et par la technique des noyaux, on étudiera l'unicité de la solution, et par suite on fera l'extension de l'étude du problème et son adjoint au polygone tout entier.

4.1 Définition d'une nouvelle norme dans H^{-2}

On va étudier l'existence de la solution du problème adjoint non perturbé avec la condition de Dirichlet et celle de Neumann suivant :

$$(P_\varphi^*) \quad \begin{cases} Pu = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (4.1.1)$$

où, P est l'opérateur adjoint de $\rho^\alpha \Delta$ c'est à dire $P = (\rho^\alpha \Delta)^*$ et $h \in E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ pour la condition de Dirichlet ou la condition de Neumann.

On sait que l'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est un sous espace de H^{-2} d'après la proposition (2.2.2) on a donc: $\|\rho^{-\alpha} Pu\|_{H^{-2}} \leq \|Pu\|_{E_{-\alpha}}$ l'utilisation de l'espace $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ est plus facile que

d'utiliser l'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, on établit l'inégalité en utilisant $H^{-2}(\Omega_\varphi)$, c'est pourquoi qu'on définit une nouvelle norme dans H^{-2} .

Les coordonnées polaires sont mieux adaptées à la géométrie du domaine Ω_φ on va définir une norme de H^{-2} en utilisant la transformation de Mellin et les fonctions développables en série de Fourier.

On rappelle que l'ensemble des fonctions développement en série de Fourier est dense dans $L^2(\Omega_\varphi)$, et comme l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$ est dense dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ ([16]), alors l'ensemble des fonctions développement en série de Fourier est dense dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ ([24]), donc on va construire à partir de la transformation de Mellin et la fonction en série de Fourier, la norme de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ qu'on définit par :

si la fonction v développement en série de Fourier et donc :

$$v(\rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\rho) \exp\left(\frac{in\pi}{\varphi} \theta\right).$$

On définit une nouvelle norme de v , dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ par la formule

$$\|v\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\varphi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\tilde{c}_n(\sigma + 2) \exp\left(\frac{in\pi}{\varphi} \theta\right)}{1 + |\sigma + 2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2} \right|^2 d\theta d\xi \quad (4.1.2)$$

avec $\sigma = 1 + i\xi$.

1-Dans la définition (5.2), le facteur $\sigma + 2$ découle de la dérivée seconde de la transformée de Mellin de la fonction v .

Et la relation suivant :

$$\|u\|_{H^m} = \|(1 + \xi^2 + \zeta^2)^m \hat{u}\|_{L^2} \quad (4.1.3)$$

où

$$\hat{u}(\xi, \zeta) = \int_{\mathbb{R}^2} u(x, y) e^{-i\xi\zeta xy} dx dy \quad (4.1.4)$$

On voit d'ailleurs ceci dans la relation (4.1.3), en remplaçant $m = 2$.

2- le théorème de Plancherel, qui affirme que la transformation de Fourier envoie l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$ sur lui même, de plus c'est une isométrie c'est à dire $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, [28]. Et en utilisant l'analogie entre la transformation de Mellin et celle de Fourier, on aura:

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\varphi |\widetilde{u}(1 + i\nu, \theta)|^2 d\nu d\theta = \int_0^\varphi \|\widetilde{u}(\cdot, \theta)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\theta, \sigma = 1 + i\nu \quad (4.1.5)$$

où $\widetilde{u}$ est la transformée de Mellin de la fonction u .

La relation 4.1.5 est en quelque sorte l'équivalent du théorème de Plancherel pour la transformation de Mellin .

4.2 Démonstration de l'équivalence de cette norme avec la norme usuelle de H^{-2}

Soient v et w deux fonctions développables en série de Fourier :

si $v(\rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\rho) \exp(\frac{in\pi}{\varphi} \theta)$ et telle que : $v = (1 + \xi^2 + \kappa^2)^{-1} \widehat{u}$ ($\widehat{u}$ désigne la transformation de Fourier de u) et $w = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[1 + |\sigma + 2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi} \right]^2 \right]^{-1} \widetilde{c}_n(\sigma + 2) \exp(\frac{in\pi}{\varphi} \theta)$ on a d'après une proposition 4.2.2.1, v et w sont dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et u est dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$, et donc d'après le théorème de Plancherel [32], et la proposition 4.2.2.1, on a :

$$\|v\|_{L^2}^2 = \|\widehat{v}\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H^{-2}}^2.$$

La transformation de Mellin de v s'écrit : $\widetilde{v}(\sigma, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widetilde{c}_n(\sigma) \exp(\frac{in\pi}{\varphi} \theta)$.

Calculons maintenant la norme dans L^2 de la transformée de Mellin de la fonction v , on aura en utilisant la formule 4.1.5, la relation suivante:

$$\|v\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\varphi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \tilde{c}_n(\sigma) \exp\left(\frac{in\pi}{\varphi} \theta\right) \right|^2 d\theta d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\varphi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{c}_n(\sigma)|^2 d\theta d\nu, \sigma = 1 + i\nu$$

On a la série de Fourier de la fonction v converge uniformément vers v , on applique alors le théorème de Fubini, d'où on obtient la formule suivante:

$$\|v\|_{L^2}^2 = \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{c}_n(\sigma)|^2 d\theta d\nu, \sigma = 1 + i\nu \quad (4.2.1)$$

On a :

$$w = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[1 + |\sigma + 2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi} \right]^2 \right]^{-1} \tilde{c}_n(\sigma + 2) \exp\left(\frac{in\pi}{\varphi} \theta\right) \quad (4.2.2)$$

d'où $\|w\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H^{-2}}^2$. La fonction w peut s'écrire de la manière suivante:

$$w = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\left[P_2(\sigma) - \left(\frac{n\pi}{\varphi} \right)^2 \right]}{1 + |\sigma + 2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi} \right]^2} \tilde{c}_n(\sigma).$$

Avec $P_2(\sigma)$ est un polynôme du second degré de la variable σ .

L'expression: $A(\sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\left[P_2(\sigma) - \left(\frac{n\pi}{\varphi} \right)^2 \right]}{1 + |\sigma + 2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi} \right]^2} \tilde{c}_n(\sigma)$ est bornée par rapport aux variables σ et θ , posons alors $K_1 = \sup |A(\sigma)|$, on aura alors:

$$\|\tilde{w}\|_{\widetilde{L^2}}^2 \leq K_1^2 \|\tilde{v}\|_{\widetilde{L^2}}^2 \quad (4.2.3)$$

où $\widetilde{L^2}$ désigne l'espace transformé par la transformation de Mellin de l'espace L^2 . Et comme $\|\tilde{w}\|_{\widetilde{L^2}}^2 = \|u\|_{H^{-2}}^2$, on a donc finalement:

$$\|u\|_{H^{-2}}^2 \leq K_1^2 \|v\|_{L^2}^2 \quad (4.2.4)$$

4.3 Inégalité à priori et existence de la solution du problème adjoint

Pour étudier l'existence de la solution du problème adjoint non perturbé (cas $F(u) = 0$) le problème suivant:

$$(P_\varphi^*) \quad \begin{cases} Pu = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (4.3.1)$$

où, P est l'opérateur adjoint de $\rho^\alpha \Delta$ c'est à dire $P = (\rho^\alpha \Delta)^*$ et $h \in E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$.

On étudie l'existence de la solution dans l'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ en utilisant le lemme de Peetre, donc pour montrer que l'image de P est fermée dans $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ on établira une inégalité à priori de type: il existe une constante $K > 0$ telle que:

$$\|u\|_E \leq K \{ \|Pu\|_F + \|u\|_G \} \quad (4.3.2)$$

On va appliquer le lemme de Peetre aux espaces:

$$E = L^2(\Omega_\varphi) \text{ et } F = E_{-\alpha}(\Omega_\varphi) \text{ et } G = H^{-1}(\Omega_\varphi);$$

Donc toutes les hypothèses du lemme de Peetre sont vérifiées.

D'après la proposition (4.2.2.2) l'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ muni la norme du graphe suivante :

$$\|Pu\|_{E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} = \|Pu\|_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} + \|\rho^{-\alpha} Pu\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} \quad (4.3.3)$$

Donc pour montrer que l'inégalité (4.3.2), il suffit compte tenu de l'inégalité (4.3.3), d'établir l'inégalité suivante: Il existe une constante $K_1 > 0$ telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq K_1 \left\{ \|\rho^{-\alpha} Pu\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} \right\} \quad (4.3.4)$$

4.3.1 Démonstration de l'inégalité:

Pour établir l'inégalité (4.3.2), on va utiliser la norme de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ définie par la relation (4.1.2) et on aura :

$$\text{si } u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\rho) \exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right) \text{ alors } \|\rho^{-\alpha} Pu\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}^2 = \|\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta)^* u\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}^2$$

$$\|\rho^{-\alpha} Pu\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\varphi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\left[(\sigma - \alpha)^2 - \left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2\right]}{1 + |\sigma + 2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2} \right|^2 |\tilde{c}_n(\sigma)|^2 d\nu d\theta$$

$$\text{avec } \sigma = 1 + i\nu$$

$$\text{Posons: } B(\sigma, n) = \left| \frac{\left[(\sigma - \alpha)^2 - \left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2\right]}{1 + |\sigma + 2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2} \right|.$$

On vérifie que le terme $B(\sigma, n)$ est borné par rapport à σ et n , sauf pour le cas particulier $\nu = 0$ où ce terme s'annule, ce cas sera étudié à part, on a donc:

$$\|\rho^{-\alpha} Pu\|_{H^{-2}}^2 =$$

$$\int_0^\varphi \int_{|\nu| > 1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\left[(\sigma - \alpha)^2 - \left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2\right]}{1 + |\sigma + 2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2} \right|^2 |\tilde{c}_n(\sigma)|^2 d\nu d\theta + \int_0^\varphi \int_{|\nu| < 1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\left[(\sigma - \alpha)^2 - \left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2\right]}{1 + |\sigma + 2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2} \right|^2 |\tilde{c}_n(\sigma)|^2 d\nu d\theta$$

Pour le cas $|\nu| > 1$:

on a $B(\sigma, n)$ est borné, donc il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$\int_0^\varphi \int_{|\nu|>1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\left[(\sigma - \alpha)^2 - \left(\frac{n\pi}{\varphi} \right)^2 \right]}{1 + |\sigma + 2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi} \right]^2} \right|^2 |\tilde{c}_n(\sigma)|^2 d\nu d\theta \geq C_1 \int_0^\varphi \int_{|\nu|>1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{c}_n(\sigma)|^2 d\nu d\theta$$

D'où :

$$\|\rho^{-\alpha} Pu\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}^2 \geq C_1 \int_0^\varphi \int_{|\nu|>1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{c}_n(\sigma)|^2 d\nu d\theta.$$

on applique la transformation de Mellin à l'opérateur $\rho^{-\alpha} P$ on aura :

$\widetilde{\rho^{-\alpha} Pu}(\sigma + 2, \theta) = \tilde{h}(\sigma + 2, \theta)$ et nous avons obtenu l'inégalité suivante :

$$\left\| \tilde{h}(\sigma + 2, \theta) \right\|_{\mathbf{E}_A}^2 \geq C_1 \|\tilde{u}(\sigma, \theta)\|_{\widetilde{\mathbf{L}}_A^2}^2 \quad (4.3.5)$$

Où, $\mathbf{E}_A$ est l'espace transformée de Mellin de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$, où la variable σ est dans l'ensemble $A = \{\sigma \in \mathbb{C} \text{ avec } \operatorname{Re} \sigma = 1 \text{ et } |\operatorname{Im} \sigma| > 1\}$, et $\widetilde{\mathbf{L}}_A^2$ est l'espace transformée de Mellin de $L^2(\Omega_\varphi)$ avec la variable σ est dans A .

Pour le cas $|\nu| \leq 1$:

on va raisonner directement sur $\widetilde{\rho^{-\alpha} Pu}(\sigma + 2, \theta) = \tilde{h}(\sigma + 2, \theta)$ on obtient donc :

$$\tilde{h}(\sigma + 2, \theta) = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2}(\sigma, \theta) + (\sigma - \alpha)^2 \tilde{u}(\sigma, \theta) \quad (4.3.6)$$

où, $\sigma = 1 + i\nu$ avec $-1 \leq \nu \leq 1$.

il s'agit donc d'une équation différentielle ordinaire du second ordre par rapport à la variable θ , et dépendant d'un paramètre complexe $\sigma = 1 + i\nu$, avec $-1 \leq \nu \leq 1$, on a donc: $(\nu, \theta) \in [-1, 1] \times [0, \varphi]$.

en posant $\omega = \sigma - \alpha$ et on obtient $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2}(\sigma, \theta) + \omega^2 \tilde{u}(\sigma, \theta) = \tilde{h}$.

On utilise la théorie élémentaire des équations différentielles. Par résolution explicite, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que :

$$\|\tilde{u}\|_{\widetilde{\mathbf{L}}_B^2}^2 \leq C_2 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2}(\sigma, \theta) + \omega^2 \tilde{u}(\sigma, \theta) \right\|_{\mathbf{E}_B}^2$$

on a le résultat désiré par résolution explicite de l'équation (4.3.6),
d'où on a $\exists C_2 > 0$ qui vérifie :

$$\left\| \tilde{h}(\sigma + 2, \theta) \right\|_{\mathbf{E}_B}^2 \geq C_2 \|\tilde{u}(\sigma, \theta)\|_{\widetilde{\mathbf{L}}_B^2}^2 \quad (4.3.7)$$

Où, E_B est l'espace transformée de Mellin de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$, où la variable σ est dans la bande $B = \{\sigma \in \mathbb{C} \text{ avec } \operatorname{Re} \sigma = 1 \text{ et } \operatorname{Im} \sigma \in [-1, 1]\}$, et $\widetilde{\mathbf{L}}_B^2$ est l'espace transformée de Mellin de $L^2(\Omega_\varphi)$ avec la variable σ est dans la bande B .

En ajoutant (4.3.5) et (4.3.7), on obtient l'inégalité désirée. Par l'utilisation de la transformation de Mellin inverse, on a donc l'inégalité souhaitée vérifiée, donc $\exists K > 0$ telle que:

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq K \left\{ \|Pu\|_{\mathbf{E}_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} \right\}$$

Par application du lemme de Peetre, l'image de l'opérateur P est fermée dans $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ et son noyau est de dimension finie dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

on en déduit que le problème(4.3.1) avec la condition de Dirichlet homogène admet au moins une solution dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$.

4.4 Etude de l'unicité de la solution

On va étudier l'unicité de la solution du problème (4.1.1), et pour ceci étudie le noyau du problème perturbé puis non perturbé respectivement.

Dans ce paragraphe, on se propose de calculer le noyau du problème (4.3.1) avec la condition de Dirichlet homogène dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$.

Les éléments du noyau du problème (4.3.1), sont la solution du problème suivant:

$$(P_\varphi^*) \quad \begin{cases} Pu = (\rho^\alpha \Delta)^* u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (4.4.1)$$

On va traiter le cas général, on démontrera la proposition suivante:

Le noyau du problème (4.3.1) dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$ avec m entier positif, dépend de m et de φ (ouverture de Ω_φ).

Preuve. Cherchons noyau problème (5.11) dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$ avec m entier positif, il s'agit donc de résoudre dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$, le problème (5.22). Pour simplifier les calculs, faisons le changement de variable suivant:

$$u = \rho^{-\alpha} w \in H^{-m}(\Omega_\varphi)$$

$$\text{On a : } Pu = (\rho^\alpha \Delta + 2\alpha \rho^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \rho} + \alpha^2 \rho^{\alpha-2}) (\rho^{-\alpha} w)$$

$$Pu = \left[\rho^\alpha \frac{\partial^2 (\rho^{-\alpha} w)}{\partial \rho^2} + \rho^{\alpha-1} \frac{\partial (\rho^{-\alpha} w)}{\partial \rho} + \rho^{\alpha-2} \frac{\partial^2 (\rho^{-\alpha} w)}{\partial \theta^2} \right] + 2\alpha \rho^{\alpha-1} \frac{\partial (\rho^{-\alpha} w)}{\partial \rho} + \alpha^2 \rho^{\alpha-2} \rho^{-\alpha} w$$

$$= 2\alpha \rho^{\alpha-1} \left[-\alpha \rho^{-\alpha-1} w + \rho^{-\alpha} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right] + \alpha^2 \rho^{-2} w + \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + (1-2\alpha) \rho^{-1} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \rho^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \rho^{-2} w$$

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \rho^{-1} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \rho^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \Delta w.$$

Donc $Pu = \Delta w$, avec $\rho^{-\alpha} w \in H^{-m}(\Omega_\varphi)$, $m \in \mathbb{N}$, le problème (4.4.1) se réduit à :

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (4.4.2)$$

On a $w \in C^\infty(\Omega_\varphi)$ soit $0 < \rho < \rho_0$,

Pour résoudre le problème (4.4.2) on utilisera la méthode de séparations de variables.

On pose $w(\rho, \theta) = z(\rho)v(\theta)$ donc l'équation $\Delta w = 0$ dans (4.4.2) s'écrit:

$$\frac{\rho^2 z'' + \rho z'}{z} = -\frac{v''}{v}$$

la valeur commune des deux membres est une constante et on prend la constante égale à $(\frac{n\pi}{\varphi})^2$ et on en déduit que :

$$\begin{cases} v'' + (\frac{n\pi}{\varphi})^2 v = 0 & (1) \\ \rho^2 z'' + \rho z' - (\frac{n\pi}{\varphi})^2 z = 0 & (2) \end{cases}$$

la solution de l'équation différentielle (1) $v(\theta) = C_1 \cos \frac{n\pi}{\varphi} \theta + C_2 \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta$ telle que C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

l'équation différentielle (2) est dite "équation d'Euler".

On cherche directement pour la résoudre, ses solutions sont sous la forme $z = \rho^k$, donc (2) vérifie l'équation déterminante $\left[k(k-1) + k - (\frac{n\pi}{\varphi})^2 \right] \rho^k = 0$ (3) voir [12].

L'équation (3) admet comme racines $k_1 = \frac{n\pi}{\varphi}$ ou $k_2 = -\frac{n\pi}{\varphi}$, donc la solution générale de l'équation d'Euler est $z(\rho) = \lambda' \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}} + \mu' \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}}$, telle que λ', μ' sont constantes arbitraires.

$$\text{Alors la solution est } w(\rho, \theta) = (\lambda' \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}} + \mu' \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}})(C_1 \cos \frac{n\pi}{\varphi} \theta + C_2 \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta) \quad (4)$$

lorsque $w(\rho, 0) = 0$ on a donc $C_1 = 0$.

l'équation (4) donnée par :

$$w(\rho, \theta) = C_2(\lambda' \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}} + \mu' \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}}) \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta \quad (4.4.3)$$

Posons: $\lambda = C_2 \lambda'$, et $\mu = C_2 \mu'$, l'équation (5) doivent :

$$w(\rho, \theta) = (\lambda \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}} + \mu \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}}) \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta$$

et par superposition on a donc :

$$w(\rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[\lambda_n \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}} + \mu_n \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}} \right] \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta$$

Donc la solution générale du problème (4.4.2) est de la forme :

$$w(\rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[\lambda_n \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}} + \mu_n \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}} \right] \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta \quad (4.4.4)$$

puisque $u = \rho^{-\alpha} w$, la solution générale u du problème (4.4.1) s'écrit :

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[\lambda_n \rho^{-\alpha + \frac{n\pi}{\varphi}} + \mu_n \rho^{-\alpha - \frac{n\pi}{\varphi}} \right] \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta$$

où, $u = \rho^{-\alpha} w$, $0 < \alpha < 1$.

Si, on fait tendre ρ vers 0 en tenant compte du fait que $u = \rho^{-\alpha} w$ dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$, $m \in \mathbb{N}$,

la solution générale u du problème (4.4.1) s'écrit :

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \rho^{-\alpha + \frac{n\pi}{\varphi}} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \rho^{-\alpha - \frac{n\pi}{\varphi}} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta$$

la solution régulière est $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \rho^{-\alpha + \frac{n\pi}{\varphi}} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta$ et la solution singulière est $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \rho^{-\alpha - \frac{n\pi}{\varphi}} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta$.

on constate que les coefficients μ_n s'annulent à partir d'un certain rang $n_0 = n_0(m)$ qui dépend de m et de φ (car la solution générale (4.4.1) dépend de φ). ■

4.5 Etude du problème adjoint perturbé

4.5.1 Cas de la condition de Dirichlet

On va calculer le noyau du problème perturbé avec la condition de Dirichlet homogène dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$ donc les éléments du noyau du problème (4.3.6), sont solution du problème suivant:

$$(P_\varphi^*) \quad \begin{cases} Pu = (\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda)^* u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (4.5.1)$$

On va traiter le cas général, on démontrera la proposition suivante.

le noyau du problème (4.3.6) dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$ avec m entier positif, dépend de m et φ (ouverture de Ω_φ).

Preuve. cherchons le noyau du problème (4.3.6) dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$ avec m entier positif, il s'agit donc de résoudre dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$, le problème (4.5.2).

Pour simplifier les calculs, en faisons (comme pour le cas du problème non perturbé) le changement de variable suivant:

$$u = \rho^{-\alpha} w \in H^{-m}(\Omega_\varphi).$$

On va de même que le travail précédent on obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta w + \lambda w = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (4.5.2)$$

On a $w \in C^\infty(\Omega_\varphi)$ et soit $0 < \rho < \rho_0$, pour résoudre le problème (4.5.2) on utilise la méthode de séparations des variables.

On pose $w(\rho, \theta) = z(\rho)v(\theta)$ et on a donc l'équation $\Delta w + \lambda w = 0$ dans le problème (4.5.2)

s'écrit:

$$\frac{\rho^2 z'' + \rho z'}{z} + \rho^2 \lambda = -\frac{v''}{v}$$

la valeur commune des deux membres est une constante, soit $\omega^2 = (\frac{n\pi}{\varphi})^2$ et on a

$$\begin{cases} v'' + (\frac{n\pi}{\varphi})^2 v = 0 & (7) \\ \rho^2 z'' + \rho z' + (\rho^2 \lambda - (\frac{n\pi}{\varphi})^2) z = 0 & (8) \end{cases}$$

la solution de l'équation différentielle (7) est donnée par : $v(\theta) = C_1 \cos \frac{n\pi}{\varphi} \theta + C_2 \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta$.

telle que C_1, C_2 sont des constantes arbitraires .

l'équation différentielle (8) est dite "équation différentielle de Bessel".

Cas $\lambda = \mu^2 \in \mathbb{R}_+^*$

l'équation différentielle de Bessel donné par : $\rho^2 z'' + \rho z' + (\rho^2 \mu^2 - (\frac{n\pi}{\varphi})^2) z = 0$ (9).

Pour chercher la solution de cette équation, on va traiter deux cas :

Si $\frac{n\pi}{\varphi} \notin \mathbb{N}$ c'est à dire $\frac{n\pi}{\varphi}$ n'est pas entier, alors la solution générale de l'équation de Bessel (9) est : $z(\rho) = \lambda J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + \mu J_{-\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$ telle que λ, μ sont des constantes arbitraires et

$$J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) = \left(\frac{\rho\mu}{2}\right)^{\frac{n\pi}{\varphi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\rho\mu}{2}\right)^{2k} \frac{1}{\Gamma(\frac{n\pi}{\varphi} + k + 1)}$$

$$J_{-\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) = \left(\frac{\rho\mu}{2}\right)^{-\frac{n\pi}{\varphi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n!} \left(\frac{\rho\mu}{2}\right)^{2k} \frac{1}{\Gamma(\frac{-n\pi}{\varphi} + k + 1)}$$

$J_{\frac{-n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$ est aussi solution de l'équation de Bessel (9).

$J_{\frac{-n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$ est linéairement indépendant de $J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$ voir([3]) ,en particulier, on verifie que $J_{\frac{1}{2}}(\rho\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho\mu}} \sin \rho\mu$, $J_{\frac{-1}{2}}(\rho\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho\mu}} \cos \rho\mu$.

Donc la solution générale du problème (4.5.3) avec la condition de Dirichlet homogène est donnée par: $w(\rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[\lambda_n J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + \mu_n J_{\frac{-n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) \right] \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta$.

D'où, la solution générale de (4.5.2) est : $u(\rho, \theta) = G_{n,k}^1 + G_{n,k}^2$ telle que :

$$G_{n,k}^1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[\lambda_n \left(\frac{\mu}{2} \right)^{\frac{n\pi}{\varphi}} \rho^{\frac{n\pi}{\varphi} - \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \rho^{2k - \alpha} \left(\frac{\mu}{2} \right)^{2k} \frac{1}{\Gamma(\frac{n\pi}{\varphi} + k + 1)} \right] \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta$$

$$G_{n,k}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[\mu_n \left(\frac{\mu}{2} \right)^{\frac{n\pi}{\varphi}} \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi} - \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \rho^{2k - \alpha} \left(\frac{\mu}{2} \right)^{2k} \frac{1}{\Gamma(\frac{-n\pi}{\varphi} + k + 1)} \right] \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta$$

en tenant compte du fait que $u = \rho^{-\alpha} w$ dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$, $m \in \mathbb{N}$.

On constate que les coefficients μ_n s'annulent à partir d'un certain rang $n_0 = n_0(m)$ qui dépend de m et de φ .

Si $\frac{n\pi}{\varphi} \in \mathbb{N}$ c'est à dire tout entier, $\Gamma(\frac{n\pi}{\varphi} + n + 1) = (\frac{n\pi}{\varphi} + n)!$ on a donc :

$$J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) = \left(\frac{\rho\mu}{2} \right)^{\frac{n\pi}{\varphi}} \left[\frac{1}{\frac{n\pi}{\varphi}!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n! (\frac{n\pi}{\varphi} + n)!} \left(\frac{\rho\mu}{2} \right)^{2n} + \dots \right]$$

Donc, la solution générale donnée par: $z(\rho) = \lambda J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + \mu Y_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$, telle que

$$Y_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) = \frac{J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) \cos \pi \frac{n\pi}{\varphi} - J_{-\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)}{\sin \pi \frac{n\pi}{\varphi}} \text{ est une solution de l'équation de Bessel voir([3])}$$

Donc de même que le travail précédent, on constate que les coefficients μ_n s'annulent à partir d'un certain rang $n_0 = n_0(m)$ qui dépend de m et de φ .

Cas $\lambda = -\mu^2 \in \mathbb{R}_-^*$

l'équation différentielle donné par : $\rho^2 z'' + \rho z' - (\rho^2 \mu^2 + (\frac{n\pi}{\varphi})^2)z = 0$ (10) est dite "équation de Bessel modifiée".

la solution de l'équation de Bessel modifiée (10) voir ([14]) que donnée dans deux cas:

Si $\frac{n\pi}{\varphi} \notin \mathbb{N}$ c'est à dire $\frac{n\pi}{\varphi}$ n'est pas entier, alors la solution générale de (10) est donnée par:

$$z(\rho\mu) = AI_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + BI_{-\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$$

telle que $I_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) = J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(i\rho\mu)$ est une solution de l'équation différentielle

$$\rho^2 z'' + \rho z' - (\rho^2 \mu^2 + (\frac{n\pi}{\varphi})^2)z = 0$$

et A, B sont des constantes arbitraires.

Donc, on a de même que le travail précédent on aura :

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[A_n \rho^{-\alpha} I_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + B_n \rho^{-\alpha} I_{-\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) \right] \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta.$$

On constate que les coefficients B_n s'annulent à partir d'un certain rang $n_0 = n_0(m)$ qui dépend de m et de φ .

Si $\frac{n\pi}{\varphi} \in \mathbb{N}$, c'est à dire tout entier est aussi la solution de l'équation de Bessel modifiée

$$z(\rho) = AI_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + BK_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$$

telle que $K_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) = \frac{\pi}{2 \sin \pi \frac{n\pi}{\varphi}} \left\{ I_{-\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) - I_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) \right\}$, et donc la solution générale est

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[A_n \rho^{-\alpha} I_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + B_n \rho^{-\alpha} K_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) \right] \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta$$

On constate que les coefficients B_n s'annulent à partir d'un certain rang $n_0 = n_0(m)$ qui dépend de m et de φ . ■

4.5.2 Cas de la condition de Neumann

Les éléments du noyau de problème (4.3.7) sont solution du problème suivant:

$$(P_{\varphi}^*) \quad \begin{cases} Pu = 0 & \text{dans } \Omega_{\varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi} \end{cases} \quad (4.5.3)$$

De même que le travail de problème de Dirichlet perturbé (4.3.4), on a :

$$\begin{cases} \Delta w + \lambda w = 0 & \text{dans } \Omega_{\varphi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi} \setminus \{0\} \end{cases} \quad (4.5.4)$$

Dans le cas de même travail précédent lorsque $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$.

Pour illustrer tout ceci simple on prend quelques exemples.

1- Pour $m = 2$ c'est à dire le cas de $H^{-2}(\Omega_{\varphi})$. donc Multiplions la fonction $\rho^{-\alpha - \frac{n\pi}{\varphi}} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta$ par une fonction $f(\rho, \theta) \in H_0^2(\Omega_{\varphi})$ et intégrons deux fois par parties par rapport à la variable ρ , on sait que $\rho^{-\alpha} w \in H^{-2}(\Omega_{\varphi})$, donc $\rho^{-\alpha - \frac{n\pi}{\varphi}} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta \in H^{-2}(\Omega_{\varphi})$.

On obtient alors :

$$\int_0^{\varphi} \int_0^{\rho_0} \rho^{-\alpha - \frac{n\pi}{\varphi}} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta =$$

$$D_1 \int_0^\varphi \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta f(\rho_0, \theta) d\theta + D_2 \int_0^\varphi \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta \frac{\partial f(\rho, \theta)}{\partial \rho} d\theta + D_3 \int_0^\varphi \int_0^{\rho_0} \rho^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta \frac{\partial^2 f(\rho, \theta)}{\partial \rho^2} \rho d\rho d\theta$$

Ce pour que l'intégral $\int_0^\varphi \int_0^{\rho_0} \rho^{-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$ existe, il faut que $\rho^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \theta$ appartient de $L^2(\Omega_\varphi)$, car $\frac{\partial^2 f(\rho, \theta)}{\partial \rho^2} \in L^2(\Omega_\varphi)$, et ceci est réalisé si la condition suivante:

Si $n < \frac{2\varphi}{\pi}$, on a donc les trois cas suivant:

a) si $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ on a $n < 1$, donc il n'y a pas de solution singulière du problème (4.4.1) dans

$H^{-2}(\Omega_\varphi)$.

b) si $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ on a $n < 2$, donc il y a une seule solution singulière du problème (4.4.1) dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$.

c) si $\pi \leq \varphi < 2\pi$ on a $n < 4$, donc il y a trois solution singulière du problème (4.4.1) dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$.

2- Pour $m = 1$, c'est à dire le cas de $H^{-1}(\Omega_\varphi)$.

Par le même procédé que pour le cas où $m = 2$, la condition $n < \frac{2\varphi}{\pi}$ s'écrit $n < \frac{\varphi}{\pi}$.

On distingue ici deux cas :

a) si $\varphi < \pi$ on a $n < 1$, donc il n'y a pas de solution singulière du problème (4.4.1) dans $H^{-1}(\Omega_\varphi)$.

b) si $\pi \leq \varphi < 2\pi$, donc il n'y a une seule solution singulière du problème (4.4.1) dans $H^{-1}(\Omega_\varphi)$.

3- $m = 0$, c'est à dire le cas de $L^2(\Omega_\varphi)$.

Par le même procédé que pour le cas où $m = 2$ et $m = 1$ la condition $n < \frac{2\varphi}{\pi}$.

s'écrit $\frac{n\pi}{\varphi} < -1$. ce impossible, donc pour que u soit solution du problème (4.4.1), il faut que les coefficients μ_n soit nuls.

Cas général:

Etude du noyau dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$, avec m entier positif c'est à dire $m \geq 2$ la condition $\mathbf{n} < \frac{2\varphi}{\pi}$ généralisée s'écrit: $n < \frac{\varphi}{\pi}(m+1-\alpha)$, d'où il existe un rang $\mathbf{n}_{\varphi,m,\alpha} = E\left[\frac{\varphi}{\pi}(m+1-\alpha)\right] + 1$ et telle qu'à partir de ce rang, les coefficients μ_n sont identiquement nuls .

4.6 Extension de l'étude du problème et de son adjoint dans le polygone plan

On se propose d'étendre l'étude de problème (2.5.1) au polygone tout entier ce problème s'écrit :

$$(P) \quad \begin{cases} \lambda(\rho)\Delta u = \lambda(\rho)f = h & \text{dans } \Omega \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.6.1)$$

B est opérateur d'ordre 0 ou 1, qui représente la condition de Dirichlet ou celle de Neumann.

On étudie ce problème dans un secteur cette étude sont de modèle et elle valable sur tout secteur Ω_{φ_j} d'ouverture φ_j qui est un des angles de Ω , pour étudier cette étude à Ω , on utilise une partition de l'unité de celui ci :

Soit Ω_{φ_j} un secteur plan infini d'ouverture φ_j , $j = 1, 2, \dots, N$ telle que N est le nombre des sommets de Ω .

Soit (w_j) $j = 1, 2, \dots, N$, une partition de l'unité de la classe $C^\infty(\Omega)$ du polygone qui isole chacun des sommets S_j pour $j = 1, 2, \dots, N$.

S_j étant le sommet de l'angle d'ouverture φ_j , $j = 1, 2, \dots, N$.

Soit w_j une fonction de troncature qui est définie de telle sorte qu'au voisinage du sommet S_j , $j = 1, 2, \dots, N$ elle vaut 1, et est nulle ailleurs, c'est à dire:

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{dans } V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \end{cases}$$

Soit : $X + \sum_{j=1}^N w_j = 1_\Omega$, X est une fonction troncature sur Ω et comme $\sum_{j=1}^N w_j = 1$, alors la fonction troncature X est définie par:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{sur } V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \\ 1 & \text{sur } \Omega \setminus V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \end{cases}$$

alors on a $u = Xu + \sum_{j=1}^N u_j$ car $\sum_{j=0}^N w_j = 1$ et $u = \sum_{j=0}^N w_j u = \sum_{j=0}^N u_j$ telle que $u_j = w_j u$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, N$.

Les fonctions u_j sont à support compact, en chaque sommet S_j .

On a dans le cas du problème direct, respectivement défini dans Ω par :

$$(P) \begin{cases} \lambda(\rho)\Delta(Xu + \sum_{j=1}^N u_j) = \lambda(\rho)f & \text{dans } \Omega \\ B(Xu + \sum_{j=1}^N u_j) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.6.2)$$

respectivement,

$$(P) \begin{cases} \lambda(\rho)\Delta(Xu) + \lambda(\rho)\Delta(\sum_{j=1}^N u_j) = \lambda(\rho)f & \text{dans } \Omega \\ B(Xu) + B(\sum_{j=1}^N u_j) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.6.3)$$

Posons : $\Psi = Xu$ on a le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \lambda(\rho)\Delta\Psi + \lambda(\rho)\Delta(\sum_{j=1}^N u_j) = \lambda(\rho)f & \text{dans } \Omega \\ B\Psi + B(\sum_{j=1}^N u_j) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.6.4)$$

Aux voisinages des sommets S_j , le problème (4.6.4) s'écrit :

$$(P_\varphi) \begin{cases} \rho^\alpha \Delta(\sum_{j=1}^N u_j) = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \cup_{j=1}^N (\Omega_{\varphi_j} \cap V(S_j)) \\ B(\sum_{j=1}^N u_j) = 0 & \text{sur } \cup_{j=1}^N \Gamma_{\varphi_j} \end{cases} \quad (4.6.5)$$

En isolant chaque sommet S_j du polygone on obtient le problème défini au voisinage de chaque sommet S_j , $j = 1, 2, \dots, N$ comme suit:

$$(P_\varphi) \begin{cases} \rho^\alpha \Delta u_j = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_{\varphi_j} \\ Bu_j = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi_j} \end{cases} \quad (4.6.6)$$

Les fonctions u_j sont à support compact dans Ω_{φ_j} .

Ψ est une fonction définie dans un ouvert régulier O (qui est en fait le polygone privés des voisinages de ses sommets) telle que:

$$O_1 = \Omega \setminus \cup_{j=1}^N \Omega_{\varphi_j} \cap \{\rho \setminus \rho_1 \leq \rho \leq \rho_1\} \text{ et } O_2 = \Omega \setminus \cup_{j=1}^N \Omega_{\varphi_j} \cap \{\rho \setminus \rho \geq \rho_2\}.$$

Ici la fonction Ψ est définie par :
$$\Psi = \begin{cases} \Psi_1 & \text{sur } O_1 \\ \Psi_2 & \text{sur } O_2 \end{cases}$$

on a donc :

$$\begin{cases} \delta(\rho) \Delta \Psi_1 = \delta(\rho) f & \text{dans } O_1 \\ B \Psi_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_{O_1} \end{cases} \quad (4.6.7)$$

et

$$\begin{cases} \Delta \Psi_2 = f & \text{dans } O_2 \\ B \Psi_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_{O_2} \end{cases} \quad (4.6.8)$$

posons :

$$\Omega_{\varphi}^1 = \{(\rho, \theta) \setminus 0 < \rho < \rho_1, 0 < \theta < \varphi < 2\pi\}.$$

$$\Omega_{\varphi}^2 = \{(\rho, \theta) \setminus \rho_1 \leq \rho < \rho_2, 0 < \theta < \varphi < 2\pi\}$$

$$\Omega_{\varphi}^3 = \{(\rho, \theta) \setminus \rho > \rho_2, 0 < \theta < \varphi < 2\pi\}$$

telle que ρ_1 assez petit avec ρ_2 assez grand .

$$\text{Or,} \quad \Omega = \Omega_{\varphi}^1 \cup \Omega_{\varphi}^2 \cup \Omega_{\varphi}^3 .$$

les problèmes (4.6.7) et (4.6.8) sont définis dans un domaine régulier, de plus c'est un problème auto- adjoint, son étude est totalement classique et ses résultats son connus donc les inégalités à priori relatives à les problèmes sont vérifiées.

Il existe une constante K_0 strictement positive telle que les inégalités suivantes :

$$\forall \Psi \in H^2 \cap H_0^1, \quad \|\Psi\|_{H^2} \leq K_0 \left\{ \|\lambda(\rho)\Delta\Psi\|_{L^2} + \|\Psi\|_{H_0^1} \right\}. \quad (4.6.9)$$

sont vérifiées.

Au voisinage de chaque sommet de S_j de Ω , $j = 1, 2, \dots, N$, on a étudié au voisinage de chaque sommet de S_j .

pour $j = 1, \dots, N$,

$$\|u\|_{E_{\alpha}(\Omega_{\varphi_j})} \leq K_{\varphi_j} \left\{ \|\rho^{\alpha}\Delta u_j\|_{L^2(\Omega_{\varphi_j})} + \|u_j\|_{H^1(\Omega_{\varphi_j})} \right\}. \quad (4.6.10)$$

Donc, de (4.6.9) et (4.6.10) on déduit que pour $j = 0, 1, \dots, N$. on a :

$$\|u\|_{A(\Omega_{\varphi_j})} \leq K_{\varphi_j} \left\{ \|\lambda(\rho)\Delta u_j\|_{L^2(\Omega_{\varphi_j})} + \|u_j\|_{B(\Omega_{\varphi_j})} \right\} \quad (4.6.11)$$

où :

$$A = \begin{cases} E_{\alpha,0} & \text{pour la condition de Dirichlet} \\ E_{\alpha} & \text{pour la condition de Neumann} \end{cases}$$

$$\text{et } B = \begin{cases} H_0^1 & \text{pour la condition de Dirichlet} \\ H^1 & \text{pour la condition de Neumann} \end{cases}$$

telle que A pour E_{α} au voisinage de chaque sommet, et pour H^2 par ailleurs de les sommets (l'ouvert de régulière).

En ajoutant toutes ces inégalités, (la sommation se fait sur j , ($j = 0, 1, 2, \dots, N$)) et l'inégalité relative à l'ouvert O , et en prenant la maximum de toutes les constantes, on obtient une inégalité valable sur tout le polygone Ω c'est à dire on obtient l'inégalité suivante:

$$\|Z\|_{E_{\alpha}(\Omega)} \leq D_{\max} \left\{ \|\lambda(\rho)\Delta Z\|_{L^2(\Omega)} + \|Z\|_{H^1(\Omega)} \right\}. \quad (4.6.12)$$

avec:

$$\lambda(\rho) = \begin{cases} \rho^{\alpha} & \text{si } 0 < \rho < \rho_1, 0 < \alpha \leq 1 \\ \delta(\rho) & \text{si } \rho_1 \leq \rho < \rho_2 \\ 1 & \text{si } \rho \geq \rho_2 \end{cases}$$

et

$$Z = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega \setminus O \\ \Psi & \text{dans } O \end{cases}$$

telle que $D_{\max}$ est le maximum de toutes les constantes.

La même démarche sera suivie pour le problème adjoint.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème elliptique posé dans un domaine plan à frontière polygonale, ainsi que son problème adjoint associé. Pour monter les difficultés liées à la géométrie non régulière du domaine, notamment près des sommets, nous avons introduit des fonctions poids et des espaces fonctionnels adaptés. Dans la première partie, nous avons présenté les outils théoriques nécessaires, en particulier les espaces de Sobolev avec poids, la transformation de Mellin et la formule de Green. Ces éléments nous ont permis de formuler rigoureusement le problème dans un cadre compatible avec la géométrie du domaine. Ensuite, nous avons étudié le problème elliptique dans un secteur plan infini représentant un angle du polygone, ce qui a simplifié les calculs. En utilisant une fonction poids appropriée et le lemme de Peetre, nous avons établi une inégalité à priori et démontré l'existence et l'unicité de la solution dans l'espace fonctionnel convenable choisi. La deuxième partie a été consacrée à l'étude du problème adjoint. Après avoir déterminé la forme explicite de l'opérateur adjoint à l'aide de la formule de Green, nous avons analysé des théoriques l'espace dual correspondant. Cela nous a permis de prouver, sous une nouvelle norme définie dans H^{-2} , l'existence et l'unicité de la solution du problème adjoint, tout les propriétés de compacité. En conclusion, ce travail a mis en évidence des méthodes d'analyse fonctionnelle pour traiter des équations aux dérivées partielles sur des domaines à géométrie non régulière. Il ouvre également des perspectives intéressantes pour l'étude de problèmes plus complexes, notamment ceux avec des conditions aux limites variées ou des opérateurs d'ordre supérieur.

Bibliographie

- [1] **S.Agmon**, Lectures on elliptic boundary value problems , Van Nostrand Mathematical studies , n .2 , Princeton , 1965.
- [2] **H.Brezis**, Analyse Fonctionnelle, Dunod 1999.
- [3] **J.Bass** , Cours De Mathématiques , **tome 2** ,Masson ,1978.
- [4] **M.Dauge**, Problème de Dirichlet Pour le Laplacien , seminaire des EDP , Nantes ,1982.
- [5] **P.Grisvard**, Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polygone ou un polyèdre , Boll .Un .Mat .Italie (4) .5 1972 p. 132-164.
- [6] **P.Grisvard**, Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polyèdre ,Annali S.N.S .Pisa ,séries 4,**2** (3) ,359-388 ,1975.
- [7] **P.Grisvard**, Singularites des solutions du problèmes des stokes dans un polygone, Seminaire d'analyse fonctionnelle , IREM, Nice ,1979.
- [8] **P.Grisvard**, Elliptic problems in nonsmooth domains, Monographs and studies in Mathematics,24,Pitman ,London ,1985
- [9] **P.Grisvard**, Singularites in Boundary value Problems ,Masson ,1992.
- [10] **P.Grisvard**,Espaces intermédiaires entre espaces de sobolev avec poids , Annali S.N.S .Pisa ,séries 3,**tome17** N°3 ,p.255-296 ,1963.

- [11] **Hanna, M. and Smith,T**, Some remarks on the Dirichlet problem in piecewise smooths domains, Comm.Pure and Applied Math, **20** , p.575-593.
- [12] **V.A.Koundratiev**, Boundary problems for elliptic equations with conical or angular points ,Trudy Moskov Mat .Obsc 16 ,1967.
- [13] **V.A.Koundratiev**,Boundary problems for elliptic equations withs conical or angular points ,Trudy Moskov Mat .Obsc 16 ,1967.
- [14] **A.C. King, J. Billingham and S.R. Otto**, Differential Equations ,Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial , Combridge University Press ,2003.
- [15] **J.L.Lions**,Analyse mathématique et calcul numérique ,Volume 8 , Paris 1984.
- [16] **Lions,J.L.et Magenes**, Problèmes aux limites non homogènes et Applications,Tome1, Dunod , Paris 1968.
- [17] **M.Merigot**, Etude du probleme de $\Delta u = f$ dans un polygône plan ,Inégalités à priori, Boll .Un .Mat .Italie (4) .10, pp. 577-597,1974.
- [18] **M.Merigot**, Solutions en normes L^p , des problèmes aux limites dans des polygônes-plan, Thèse de Doctorat d'état , IREM,Université de Nice 1974.
- [19] **M.Merigot**,Régularité des solutions du problème de stockes dans un secteur plan, Boll .Un .Mat .Italie (4) .6, 1972.
- [20] **P.A.Raviart et J.M.Thomas**, Introduction à lanalyse numérique des équations aux dérivées partielles , Masson ,1992 .
- [21] **H.Reinhard**, Equations aux derivées partielles, Dunod , Paris , 1991.
- [22] **G. Roos**, Analyse et géométrie. Méthodes hilbertiennes, Dunod (2002). Insiste, comme indiqué, sur les méthodes hilbertiennes.
- [23] **Walter Rudin**, Real and complex Analysis, International Student Edition, McGRAW-HILL ,1970.

- [24] **MS.Said**, Etude du problème adjoint du Problème de Laplace avec poids dans un polygône Plan , Thèse De Magister , Université de Constantine, 1993.
- [25] **MS.Said**, Study of the biharmonic problems disturbs by weights in a polygons , Far East , Journ of Mathematics and sciences , FJMS, 16 (1) (2005) p.121-136.
- [26] **MS.Said**, Study of the adjoint problem controled by the system of lamé affected by weith in a polygon, Far East Journal of math and Sci , FJMS, Vol 17-1,avril 2005,pp.121-135
- [27] **MS.Said,B.Merouani**,Rôle des poids dans l'étude de quelques problèmes aux limites gouvernés par le système de Lamé dans un polygône , Roum.Sci.Techn-Méc. Appl.Bucaest 2002 (à paraître).
- [28] **MS.Said,B.Merouani**,Etude des problèmes adjoint du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace perturbé dans un polygône plan, Rev -Roum.Sci, Techn.Mec.Appl,**Tome 47** , N°16 p.57-78, Buccarest (2002).
- [29] **MURRAY R.SPEIGEL**, FOURIER ANALYSIS , with applications to boundary value problems, Schaum's outline series , Mc Graw-Hill , 1974.
- [30] **R.Temam**, On the theory and numerical analysis of the Navier stockes equations, lecture note #9 ,University of Maryland,1973.
- [31] **TITCHMARSH .E.C.**, Introduction to the Theory of Fourier Integrals.Oxford univ. Press, 1937.
- [32] **Marie-Thérèse**, Distributions Espaces de Sobolev Applications, Lacroix-Sonnier, ellipses, édition marketing S.A , Paris ,1998.
- [33] **V. Trénoguine**, Analyse fonctionnelle, Éditions Mir (1985). La deuxième partie est orientée vers l'analyse numérique.
- [34] **Yosida ,K**, Functional Analysis .Springer-Verlag, Berlin, 1966.