



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université d'El- Oued
Faculté des Sciences Exactes



MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème:

Comportement asymptotique d'un Pont Suspendu à Poutres Laminées

**Presenté par: Bouchra ALLALI
Hadil MAAMIR**

Soutenu le: 06/07/2026, Devant le jury composé de:

Mme. Belkis Bordj	MCB	Univ. d'El-Oued	Président
Mme. Aicha Nemsî	MCB	Univ. d'El-Oued	Rapporteur
M. Abdelfeteh Fareh	RP	Univ. d'El-Oued	Examineur

Année universitaire: 2025-2026

Dédicace

*Avec beaucoup de gratitude, je remercie **Allah** de m'avoir aidée et donné la force de terminer ce travail. Merci à Lui pour tout ce que j'ai aujourd'hui.*

*À ma chère **mère Khadidja**, symbole de sacrifice et de patience, pour ses prières et sa tendresse qui m'ont toujours donné la force de continuer. Que Dieu la protège et la garde dans ma vie.*

*À mon cher **père Nour Eddine**, qui m'a appris la valeur du travail et de la patience, et qui a toujours été un soutien pour moi. Que Dieu le protège.*

*À mes chères **sœurs**, pour leur soutien, présence, affection et gentillesse, ainsi qu'à leurs enfants qui ont rempli nos vies de joie et d'amour, et à mon cher **frère** qui a toujours été à mes côtés.*

*Aux **enseignants** qui ont laissé une bonne trace dans notre parcours par leurs conseils et leurs belles paroles avant même leur savoir.*

*À mes **amies** de l'université, avec qui j'ai partagé de beaux moments, entre travail, fatigue et souvenirs inoubliables.*

*À mon **amie et partenaire dans ce mémoire Hadil**, merci pour le travail et la coopération durant cette expérience.*

*Et enfin, à **moi-même**...*

À celle qui a patienté, résisté aux difficultés et continué malgré tout.

Louange à Dieu et gratitude à Lui, en premier et pour toujours. C'est par Sa grâce que les bonnes œuvres s'accomplissent. Louange à Dieu qui a éclairé mon chemin et m'a donné la force et la patience pour mener à bien ce travail.

*À celui dont Dieu a couronné le visage de majesté et de dignité, à celui qui m'a appris la persévérance malgré les épreuves de la vie, à mon soutien et ma fierté, mon cher père **Younes**.*

*À celle dont Dieu a placé le paradis sous ses pieds, source de tendresse et de prières exaucées, à celle qui veillait pour que je puisse me reposer, ma chère mère **Nadjet**.*

À ceux avec qui j'ai grandi et par qui j'ai grandi, à mon rempart solide et compagnons de route, mes frères et sœurs, chacun par son nom et sa place dans mon cœur.

*À l'âme pure qui nous a quittés et dont le souvenir continue d'embaumer les lieux, à celui que j'aurais souhaité voir assister à ce moment de réussite, mon cher grand-père feu **Mohamed**, qu'Allah lui accorde Sa vaste miséricorde et l'accueille dans Son paradis.*

*À la famille et aux proches, à chaque membre de mes deux familles **Maamir** et **Abidi**, merci pour votre soutien et votre sincère affection.*

À mes amies de toujours et collègues d'études avec lesquelles j'ai partagé la fatigue des jours et la douceur du succès, et qui ont été un véritable soutien et compagnons de mon parcours

académique.

*À celle qui a partagé avec moi les difficultés de la recherche et la douceur de l'accomplissement, compagne de route, partenaire et amie **Bouchra**, merci pour ton esprit de coopération et ta patience.*

À tous ceux qui m'ont soutenue, ne serait-ce que par un mot gentil tout au long de mon parcours d'études, je vous dédie le fruit de mes efforts.

'Bouchra'

'Hadil'

Notations générales

$L^2(0, L)$	Espace des fonctions de carré intégrables sur $(0, L)$.
H_0^1, H^2	Espaces de Sobolev.
$D(\mathcal{A})$	Domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$.
C_0 -semigroupe	Semi-groupe fortement continu.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire.
$\ \cdot \ $	Norme sur l'espace considéré.
$\operatorname{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$	Partie réelle du produit scalaire.
$\operatorname{Im} \langle \cdot, \cdot \rangle$	Partie imaginaire du produit scalaire.
$\rho(\mathcal{A})$	Ensemble résolvant de l'opérateur $\mathcal{A}$.
$\mathcal{L}(E)$	Espace des opérateurs linéaires continus sur E .
D_x	L'opérateur de dérivation par rapport à x .
D_{xx}	L'opérateur de dérivation seconde par rapport à x .
$E(t)$	Énergie totale du système à l'instant t .
I.P.P.	Intégration par parties.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Espace de Hilbert	3
1.2 Les espaces de Sobolev	3
1.2.1 Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$	3
1.2.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$	4
1.3 Quelques inégalités utiles	5
1.3.1 Inégalité de Young	5
1.3.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz	5
1.3.3 Inégalité de Poincaré	5
1.3.4 Inégalité de Gagliardo-Nirenberg	6
1.4 Théorème de Lax-Milgram	6
1.5 Série de Neumann	7
1.6 Semi-groupe fortement continu	9
1.6.1 Théorème de Lumer-Phillips	9
1.7 Stabilité exponentielle	10
2 Étude du comportement asymptotique d'un modèle préliminaire	12
2.1 Existence et unicité	14
2.2 Stabilité exponentielle	18
3 Étude du comportement asymptotique d'un système de ponts suspendus à poutres laminées	28
3.1 Existence et unicité	33
3.2 Stabilité exponentielle	46

Introduction générale

L'étude du comportement des systèmes dynamiques décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP) couplées constitue l'un des domaines les plus prolifiques des mathématiques appliquées. Ces systèmes sont essentiels pour la modélisation de structures d'ingénierie complexes, telles que les ponts suspendus. L'objectif fondamental de l'analyse mathématique de ces structures est de garantir leur stabilité et de prévenir les phénomènes de résonance mécanique. Historiquement, l'effondrement du pont de Tacoma Narrows en 1940 a démontré que les oscillations non linéaires pouvaient mener à des ruptures structurelles catastrophiques, soulignant ainsi la nécessité de modèles mathématiques rigoureux.

La modélisation des ponts suspendus a connu une évolution majeure depuis les travaux de Lazer et McKenna [10]. Ils ont introduit un modèle non linéaire capturant l'effet de "non-linéarité sautante" (jumping nonlinearity), où les câbles de suspension n'agissent que lorsqu'ils sont étirés. Ce modèle pionnier a ouvert la voie à l'étude des systèmes couplés, reliant l'équation d'une corde (représentant le câble principal) à celle d'une poutre (représentant le tablier).

Parallèlement, la recherche de modèles de tabliers plus réalistes a mené à l'utilisation de la théorie des poutres laminées (Laminated Beams). Introduit par Hansen et Spies [5], ce modèle décrit une structure composée de deux couches liées par un adhésif, permettant un glissement interfacial (s). Cette caractéristique structurelle introduit un mécanisme intrinsèque de dissipation d'énergie. En 2005, Wang [7] et ses collaborateurs ont établi que l'amortissement par glissement seul est souvent insuffisant pour assurer la stabilité exponentielle, motivant l'ajout de mécanismes de dissipation supplémentaires comme l'amortissement par frottement, étudié par Raposo [6].

La problématique centrale de ce mémoire réside dans l'analyse d'un système hybride récemment proposé par Raposo [11]. Ce modèle couple un câble de suspension avec un tablier modélisé par une poutre laminée à deux couches, sous l'action d'un amortissement par frottement distribué. La question scientifique majeure est de déterminer si ce couplage complexe, incluant les dynamiques de glissement interne, permet d'atteindre une stabilité exponentielle de l'énergie totale du système.

Pour traiter cette problématique, nous adoptons une approche basée sur l'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs. La méthodologie suivie s'articule autour de deux axes principaux : En s'appuyant sur l'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs, ce travail démontre rigoureusement l'existence et l'unicité de la solution (well-posedness) par le théorème de Lumer-Phillips (génération d'un semi-groupe de contractions), puis établit sa stabilité exponentielle via l'approche spectrale du théorème de Gearhart-Huang-Prüss. La structure du manuscrit guide le lecteur à travers les concepts fondamentaux (Chapitre 1) et l'étude d'un système d'application simple (Chapitre 2), avant de déployer l'analyse mathématique complète du pont suspendu à tablier laminé (Chapitre 3).

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions de certains espaces ainsi que les théorèmes fondamentaux que nous avons exploités tout au long de ce travail.

1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1. [1] Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ qui est complet pour la norme associée $|u| = (u, u)^{1/2}$.

Dans la suite de ce travail, H désignera systématiquement un espace de Hilbert.

1.2 Les espaces de Sobolev

1.2.1 Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Soit $I =]0, L[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non).

Définition 1.2.1. [1] Pour tout réel p tel que $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace $L^p(I)$ par

$$L^p(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \int_I |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

On note la norme de cet espace par

$$\|f\|_{L^p(I)} = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Pour le cas particulier $p = 2$, on obtient l'espace $L^2(I)$, qui est l'ensemble des fonctions dont le carré est intégrable

$$L^2(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \int_I |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

On définit également l'espace $L^\infty(I)$ par

$$L^\infty(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \exists C > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } I\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(I)} = \inf \{C > 0 ; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } I\}.$$

On vérifiera ultérieurement que $\|\cdot\|_{L^p(I)}$ et $\|\cdot\|_{L^\infty([0,L])}$ définissent bien des normes.

Définition 1.2.2. [1] Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est défini par

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) ; \exists g \in L^p(I) \text{ tel que } \int_{(I)} u(x)\varphi'(x) dx = - \int_{(I)} g(x)\varphi(x) dx, \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

On pose $H^1(I) = W^{1,2}(I)$. Pour une fonction $u \in W^{1,p}(I)$, on note $u' = g$ (la dérivée faible de u).

1.2.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$

Soit $m \geq 2$ un entier et $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.2.3 ([1]). On définit l'espace $W^{m,p}(I)$ par récurrence

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I) ; u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

On pose également $H^m(I) = W^{m,2}(I)$.

1.3 Quelques inégalités utiles

Les inégalités suivantes jouent un rôle fondamental dans les estimations d'énergie

1.3.1 Inégalité de Young

Soient $1 < p, q < \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour tous $a, b \geq 0$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

1.3.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit H un espace de Hilbert. Pour tous $u, v \in H$, on a

$$|\langle u, v \rangle| \leq \langle u, u \rangle^{1/2} \langle v, v \rangle^{1/2},$$

ou encore

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_H \|v\|_H.$$

1.3.3 Inégalité de Poincaré

On suppose que I est un ouvert borné de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $1 \leq p < \infty$, il existe une constante $C > 0$ (dépendant de I et de p) telle que

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

1.3.4 Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, j et m deux entiers tels que $0 \leq j < m$. Soient $1 \leq q, r \leq \infty$ et $a \in [j/m, 1]$.

On définit $p \in [1, \infty]$ par la relation suivante :

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + (1-a) \frac{1}{q}.$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ (ou $u \in L^q(\mathbb{R})$ tel que $D^m u \in L^r(\mathbb{R})$), on a

$$\|D^j u\|_{L^p} \leq C \|D^m u\|_{L^r}^a \|u\|_{L^q}^{1-a}.$$

1.4 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.4.1 ([1]). Soit H un espace de Hilbert. Une forme bilinéaire $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est dite

(i) **continue**, s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H.$$

(ii) **coercive**, s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2, \quad \forall v \in H.$$

Théorème 1.4.1 (Lax-Milgram [1]). Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur H . Pour toute forme linéaire continue f sur H , il existe un unique élément $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in H.$$

1.5 Série de Neumann

Théorème 1.5.1 ([2]). Considérons un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ dans un espace de Banach X . Si $\|T\| < 1$, alors l'opérateur $(I - T)$ est inversible et son inverse est donné par

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Démonstration. Puisque X est un espace de Banach, l'espace des opérateurs linéaires bornés $\mathcal{L}(X)$ (ou $B(X)$) muni de la norme d'opérateurs est également un espace de Banach.

L'hypothèse $\|T\| < 1$ implique que la série numérique géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n$ est convergente, et sa somme est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que la norme du produit d'opérateurs vérifie la propriété sous-multiplicative suivante

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|$ converge par comparaison avec une série géométrique convergente. Comme $\mathcal{L}(X)$ est un espace complet (Banach), toute série absolument convergente y est convergente. Ainsi, la série d'opérateurs $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converge vers un opérateur limite que l'on note $S \in \mathcal{L}(X)$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Pour démontrer que S est l'inverse de $(I - T)$, considérons la suite des sommes partielles $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$S_k = \sum_{n=0}^k T^n = I + T + T^2 + \cdots + T^k.$$

En multipliant S_k par l'opérateur $(I - T)$ à gauche, nous obtenons une somme télescopique

$$(I - T)S_k = (I - T)(I + T + T^2 + \cdots + T^k) = I - T^{k+1}.$$

Estimons maintenant la distance en norme entre $(I - T)S_k$ et l'opérateur identité I :

$$\|(I - T)S_k - I\| = \|-T^{k+1}\| = \|T^{k+1}\| \leq \|T\|^{k+1}.$$

Puisque $\|T\| < 1$, il s'ensuit que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|T\|^{k+1} = 0$, ce qui donne immédiatement

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (I - T)S_k = I.$$

L'opérateur $(I - T)$ étant linéaire et borné, il est continu. On peut donc intervertir la limite et l'opérateur

$$(I - T)S = (I - T) \left(\lim_{k \rightarrow \infty} S_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} (I - T)S_k = I.$$

De la même manière, en multipliant par S_k à droite, on a

$$S_k(I - T) = I - T^{k+1},$$

ce qui implique par passage à la limite que

$$S(I - T) = I.$$

Puisque $(I - T)S = S(I - T) = I$, nous concluons que l'opérateur $(I - T)$ est inversible, et son inverse unique est donné par la série de Neumann

$$(I - T)^{-1} = S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

□

1.6 Semi-groupe fortement continu

Définition 1.6.1 ([3]). On appelle semi-groupe fortement continu (ou C_0 -semi-groupe) sur un espace de Banach Y , une famille $(S(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur Y qui vérifie les propriétés suivantes

- (i) $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0,$
- (ii) $S(0) = I,$
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\|_Y = 0, \quad \forall x \in Y.$

Pour un tel semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$, le générateur infinitésimal A est l'opérateur défini par

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h},$$

son domaine $D(A)$ est l'ensemble des éléments $x \in Y$ pour lesquels cette limite existe

$$D(A) = \left\{ x \in Y ; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe dans } Y \right\}.$$

1.6.1 Théorème de Lumer-Phillips

Définition 1.6.2 ([3]). Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On dit qu'un opérateur A de domaine dense $D(A)$ est **dissipatif** si

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Théorème 1.6.1 (Lumer-Phillips [3]). Si A est un opérateur dissipatif sur $\mathcal{H}$ et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - A) = \mathcal{H}$, alors A engendre un C_0 -semi-groupe de contractions.

Théorème 1.6.2 (Lumer-Phillips [3]). Soit A un opérateur de domaine dense $D(A) \subset \mathcal{H}$. Si A est dissipatif et $0 \in \rho(A)$, alors A engendre un C_0 -semi-groupe de contractions sur $\mathcal{H}$.

Démonstration. Supposons que $0 \in \rho(A)$. Par définition de l'ensemble résolvant $\rho(A)$, l'opérateur $-A$ (et donc A) est inversible d'un domaine dense $D(A)$ dans $\mathcal{H}$, et son inverse $A^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur linéaire borné, c'est-à-dire $\|A^{-1}\| < \infty$.

Pour montrer que A engendre un C_0 -semi-groupe de contractions, nous allons utiliser le théorème de Lumer-Phillips en établissant qu'il existe un réel $\lambda_0 > 0$ tel que l'opérateur $(\lambda_0 I - A)$ soit surjectif, soit $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = \mathcal{H}$.

Pour tout $\lambda > 0$, nous pouvons factoriser l'opérateur $(\lambda I - A)$ sous la forme suivante

$$\lambda I - A = -A(I - \lambda A^{-1}).$$

D'après le théorème du point fixe de Banach (ou la théorie de la série de Neumann), l'opérateur du type $(I - T)$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ si $\|T\| < 1$. En posant $T = \lambda A^{-1}$, cette condition de contraction devient

$$\|\lambda A^{-1}\| = \lambda \|A^{-1}\| < 1 \implies 0 < \lambda < \frac{1}{\|A^{-1}\|} = \|A^{-1}\|^{-1}.$$

Ainsi, pour toute valeur de λ choisie dans cet intervalle, l'opérateur $(I - \lambda A^{-1})$ est inversible et son inverse est borné. Puisque l'opérateur A est également inversible, le produit de ces deux opérateurs inversibles est inversible. Par conséquent, l'opérateur $(\lambda I - A)$ est inversible, ce qui implique en particulier qu'il est surjectif

$$\text{Im}(\lambda I - A) = \mathcal{H}, \quad \forall \lambda \in]0, \|A^{-1}\|^{-1}[.$$

En choisissant une valeur particulière λ_0 dans cet intervalle, et sachant que l'opérateur A est par hypothèse dissipatif avec un domaine dense $D(A)$, toutes les conditions du théorème de Lumer-Phillips sont satisfaites. Nous concluons alors que A engendre un C_0 -semi-groupe de contractions sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. $\square$

1.7 Stabilité exponentielle

Définition 1.7.1 ([3]). On dit que le C_0 -semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est **exponentiellement stable** s'il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.7.1 (Gearhart [3]). Soit $(S(t))_{t \geq 0} = (e^{At})_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe de contractions sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors, $(S(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites

- (i) $i\mathbb{R} \equiv \{i\beta ; \beta \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A})$,
- (ii) $\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$.

Chapitre 2

Étude du comportement asymptotique d'un modèle préliminaire

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un modèle simple, dans lequel nous établissons l'existence, l'unicité ainsi que la stabilité exponentielle de la solution.

Pour commencer, on considère le système suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - a u_{xx} + \gamma \theta_x = 0, \\ c_0 \theta_t + \gamma u_{xt} - k \theta_{xx} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

associé aux conditions aux limites de Dirichlet homogènes suivantes

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \theta(0, t) = 0, \\ u(L, t) &= \theta(L, t) = 0. \end{aligned}$$

Pour transformer le système du second ordre en un système du premier ordre, on définit la variable vitesse suivante

$$u_t = v.$$

Ainsi, le vecteur d'état est donné par

$$U = (u, v, \theta)^T.$$

On écrit alors ce système du premier ordre sous la forme suivante

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = a u_{xx} - \gamma \theta_x, \\ \theta_t = -\frac{\gamma}{c_0} v_x + \frac{k}{c_0} \theta_{xx}. \end{cases}$$

On peut alors représenter ce système sous la forme matricielle $U_t = \mathcal{A}U$, où l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a\partial_{xx} & 0 & -\gamma\partial_x \\ 0 & -\frac{\gamma}{c_0}\partial_x & \frac{k}{c_0}\partial_{xx} \end{pmatrix}$$

Le domaine de $\mathcal{A}$ est

$$D(\mathcal{A}) = (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1 \times (H^2 \cap H_0^1)$$

Le système complet se réduit à un problème de Cauchy sous la forma suivante

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U, & t > 0, \\ U(x, 0) = U_0(x). \end{cases}$$

Le produit scalaire dans $L^2(0, L)$ est défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x) \bar{g}(x) dx, \quad \forall f, g \in L^2(0, L),$$

et la norme associée est donnée par $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$.

En multipliant les équations du système par les fonctions de test respectives $\bar{v}$ et $\bar{\theta}$, puis

en intégrant sur $(0, L)$, on obtient

$$\int_0^L (v_t - a u_{xx} + \gamma \theta_x) \bar{v} dx = 0, \quad (2.2)$$

$$\int_0^L (c_0 \theta_t + \gamma v_x - k \theta_{xx}) \bar{\theta} dx = 0. \quad (2.3)$$

En additionnant (2.2) et (2.3), on obtient

$$\int_0^L (v_t \bar{v} - a u_{xx} \bar{u}_t + \gamma \theta_x \bar{v} + c_0 \theta_t \bar{\theta} + \gamma v_x \bar{\theta} - k \theta_{xx} \bar{\theta}) dx = 0.$$

Par intégration par parties, On obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|v\|^2 + a \|u_x\|^2 + c_0 \|\theta\|^2) + k \|\theta_x\|^2 + \gamma \int_0^L \theta_x \bar{v} dx + \gamma \int_0^L v_x \bar{\theta} dx = 0.$$

En utilisant l'intégration par parties sur le terme $\int v_x \bar{\theta}$, on a $\int v_x \bar{\theta} = - \int v \bar{\theta}_x$.

D'où l'identité de l'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + a \|u_x\|^2 + c_0 \|\theta\|^2).$$

Sa dérivée par rapport au temps est

$$\frac{d}{dt} E(t) = -k \int_0^L |\theta_x|^2 dx - \gamma \int_0^L \theta_x \bar{v} dx + \gamma \int_0^L v \bar{\theta}_x dx.$$

2.1 Existence et unicité

Pour ce faire, on définit sur l'espace d'énergie $\mathcal{H}$ le produit scalaire suivant

$$\langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^L (a u_x \tilde{u}_x + v \tilde{v} + c_0 \theta \tilde{\theta}) dx,$$

où l'espace $\mathcal{H}$ est défini par

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L).$$

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème, on s'appuie sur le théorème classique de Lumer-Phillips

Théorème 2.1.1 (Lumer-Phillips [3]). Soit $\mathcal{A}$ un opérateur à domaine dense $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$. Si $\mathcal{A}$ est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ (ou $\lambda_0 = 0$) tel que $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ soit surjectif (c'est-à-dire $0 \in \rho(\mathcal{A})$), alors $\mathcal{A}$ engendre un C_0 -semi-groupe de contractions sur $\mathcal{H}$.

Lemme 2.1.1. L'opérateur $\mathcal{A}$ (dissipatif) sur $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que pour tout $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, on a

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0.$$

Démonstration. Soit $U = (u, v, \theta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Par définition de l'opérateur $\mathcal{A}$ et en utilisant la relation $U_t = \mathcal{A}U$, on écrit

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ a u_{xx} - \gamma \theta_x \\ -\frac{\gamma}{c_0} v_x + \frac{k}{c_0} \theta_{xx} \end{pmatrix}.$$

Pour démontrer la dissipativité de $\mathcal{A}$, on calcule le produit scalaire suivant

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^L a v_x \bar{u}_x dx + \int_0^L (a u_{xx} - \gamma \theta_x) \bar{v} dx + \int_0^L c_0 \left(-\frac{\gamma}{c_0} v_x + \frac{k}{c_0} \theta_{xx} \right) \bar{\theta} dx.$$

En développant l'expression, on obtient

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^L a v_x \bar{u}_x dx + \int_0^L a u_{xx} \bar{v} dx - \gamma \int_0^L \theta_x \bar{v} dx - \gamma \int_0^L v_x \bar{\theta} dx + k \int_0^L \theta_{xx} \bar{\theta} dx.$$

En appliquant l'intégration par parties et en tenant compte des conditions aux limites homogènes, on obtient les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_0^L a u_{xx} \bar{v} dx &= - \int_0^L a u_x \bar{v}_x dx, \\ \int_0^L v_x \bar{\theta} dx &= - \int_0^L v \bar{\theta}_x dx, \\ k \int_0^L \theta_{xx} \bar{\theta} dx &= -k \int_0^L |\theta_x|^2 dx. \end{aligned}$$

En rassemblant ces résultats, il vient

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = a \int_0^L (v_x \bar{u}_x - u_x \bar{v}_x) dx + \gamma \int_0^L (v \bar{\theta}_x - \theta_x \bar{v}) dx - k \int_0^L |\theta_x|^2 dx.$$

En appliquant les propriétés des parties réelles et imaginaires, avec $z = v_x \bar{u}_x$ et $w = v \bar{\theta}_x$, on utilise les relations $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$ et $w - \bar{w} = 2i\text{Im}(w)$. Par conséquent, on obtient

$$\text{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \text{Re} \left(\int_0^L a(2i\text{Im}(z)) dx \right) + \text{Re} \left(\int_0^L \gamma(2i\text{Im}(w)) dx \right) - k \|\theta_x\|^2.$$

En utilisant le fait que $\text{Re}(i\text{Im}(w)) = 0$ et $\text{Re}(i\text{Im}(z)) = 0$, on obtient

$$\text{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -k \|\theta_x\|^2 \leq 0.$$

Ce résultat confirme que l'opérateur $\mathcal{A}$ est dissipatif.

□

Lemme 2.1.2. L'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal, c'est-à-dire $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Démonstration. Pour démontrer que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, on résout l'équation $-\mathcal{A}U = F$ dans $\mathcal{H}$.

Pour $F = (f^1, f^2, f^3)^T \in \mathcal{H}$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} -v = f^1 & \text{dans } H_0^1(0, L), \\ -a u_{xx} + \gamma \theta_x = f^2 & \text{dans } L^2(0, L), \\ \frac{\gamma}{c_0} v_x - \frac{k}{c_0} \theta_{xx} = f^3 & \text{dans } L^2(0, L). \end{cases} \quad (2.4)$$

De la relation $v = -f^1$ avec $f^1 \in H_0^1(0, L)$, on obtient immédiatement

$$v \in H_0^1(0, L).$$

En substituant la valeur de v dans (2.4)₃, on arrive à

$$\begin{cases} -a u_{xx} + \gamma \theta_x = f^2, \\ -\frac{k}{c_0} \theta_{xx} = f^3 + \frac{\gamma}{c_0} f_x^1 = g \end{cases} \quad (2.5)$$

Comme $f^3 \in L^2(0, L)$ et $f^1 \in H_0^1(0, L)$, alors $f_x^1 \in L^2(0, L)$, d'où

$$g \in L^2(0, L).$$

La deuxième équation de (2.5) s'écrit

$$-\frac{k}{c_0}\theta_{xx} = g \quad \text{dans } L^2(0, L).$$

Par la régularité elliptique en dimension un et les conditions aux limites satisfaites par θ , on obtient

$$\theta \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L).$$

En reportant cette régularité dans la première équation de (2.5), on a

$$-a u_{xx} = f^2 - \gamma \theta_x.$$

Or $f^2 \in L^2(0, L)$ et $\theta_x \in L^2(0, L)$, donc

$$u_{xx} \in L^2(0, L).$$

Comme $u \in H_0^1(0, L)$, il vient

$$u \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L).$$

Finalement,

$$u \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \quad v \in H_0^1(0, L), \quad \theta \in H^2(0, L),$$

ce qui montre que

$$(u, v, \theta) \in D(\mathcal{A}).$$

Ainsi, $\text{Ran}(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Comme $\mathcal{A}$ est dissipatif, le théorème de Lumer–Phillips implique que $\mathcal{A}$ engendre un semi-groupe de contractions fortement continu sur $\mathcal{H}$. Enfin, le théo-

rème de Lumer-Phillips garantit l'existence et l'unicité de la solution forte du système, ce qui achève la démonstration. $\square$

2.2 Stabilité exponentielle

Théorème 2.2.1 (Gearhart-Prüss). Soit $S(t) = e^{At}$ un C_0 -semi-groupe de contractions sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Le semi-groupe $S(t)$ est exponentiellement stable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}) \quad \text{et} \quad \sup_{\beta \in \mathbb{R}} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Lemme 2.2.1. Si $0 \in \rho(\mathcal{A})$, alors il existe un voisinage de l'origine sur l'axe imaginaire contenu dans $\rho(\mathcal{A})$. C'est-à-dire

$$\left\{ i\lambda \in i\mathbb{R} \mid |\lambda| < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} \right\} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

.

Démonstration. Pour commencer, on vérifie que l'opérateur $(i\lambda I - \mathcal{A})$ admet un inverse borné. Puisque $\mathcal{A}$ est inversible ($0 \in \rho(\mathcal{A})$), on peut factoriser l'expression sous la forme suivante

$$i\lambda I - \mathcal{A} = \mathcal{A} (i\lambda \mathcal{A}^{-1} - I) = -\mathcal{A} (I - i\lambda \mathcal{A}^{-1}).$$

D'après le théorème de la série de Neumann, si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ avec $\|T\| < 1$, alors l'opérateur $(I - T)$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

En posant $T = i\lambda \mathcal{A}^{-1}$, l'inversibilité de $(I - T)$ est assurée dès que

$$\|T\| = \|i\lambda \mathcal{A}^{-1}\| = |\lambda| \cdot \|\mathcal{A}^{-1}\| < 1,$$

ce qui équivaut à

$$|\lambda| < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}.$$

Ce qui signifie que

$$\lambda \in \left] -\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}, \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} \right[.$$

Par conséquent, l'opérateur $(i\lambda I - \mathcal{A})$ est inversible pour toutes les valeurs de λ satisfaisant la condition précédente. D'où

$$\left\{ i\lambda \in i\mathbb{R} \mid \lambda \in \left] -\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}, \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} \right[\right\} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Pour la deuxième partie, soit

$$\sup \left\{ \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|, \quad |\lambda| \leq \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \right\} = M < \infty.$$

Pour $|\lambda_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$, l'identité suivante est satisfaite en ajoutant et retranchant le terme $i\lambda_0 I$

$$i\lambda I - \mathcal{A} = i\lambda I - \mathcal{A} + i\lambda_0 I - i\lambda_0 I.$$

En regroupant les termes de manière appropriée, cette expression se réécrit sous la forme

$$i\lambda I - \mathcal{A} = (i\lambda I - i\lambda_0 I) + (i\lambda_0 I - \mathcal{A}).$$

D'où, en mettant l'opérateur identité I en facteur, il vient

$$i\lambda I - \mathcal{A} = (i\lambda_0 I - \mathcal{A}) + i(\lambda - \lambda_0)I.$$

En mettant $(i\lambda_0 I - \mathcal{A})$ en facteur, il vient

$$i\lambda I - \mathcal{A} = (i\lambda_0 I - \mathcal{A}) \left[I + (i\lambda - i\lambda_0)(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1} \right].$$

L'inversibilité de $(i\lambda I - \mathcal{A})$ se réduit à celle du terme

$$I + i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}.$$

D'après le lemme de Neumann, il vient

$$\|(i\lambda - i\lambda_0)(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}\| < 1.$$

D'où la condition sur les modules

$$|\lambda - \lambda_0| \cdot \|(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}\| < 1.$$

Par la borne supérieure M .

$$|\lambda - \lambda_0| \cdot \sup \|(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}\| < 1 \implies |\lambda - \lambda_0| \cdot M < 1.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire inverse, on a $|\lambda| - |\lambda_0| \leq |\lambda - \lambda_0|$. On obtient alors

$$|\lambda| - |\lambda_0| \leq \frac{1}{M}.$$

Par conséquent, on peut définir un nouveau domaine pour λ restreint par la condition

$$|\lambda| \leq |\lambda_0| + \frac{1}{M}.$$

En choisissant spécifiquement λ_0 tel que $|\lambda_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$, il vient

$$|\lambda| < \frac{1}{M} + \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}.$$

donc $[I - i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}]$ est inversible pour λ appartenant à l'intervalle suivant

$$\lambda \in]-M^{-1} - \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, M^{-1} + \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}[.$$

Ainsi

$$\{i\lambda, \lambda \in]-M^{-1} - \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, M^{-1} + \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}[\} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Par prolongement, on a

$$\sup \{ \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|, \quad |\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \} = M < \infty.$$

Par l'absurde, supposons que

$$\sup \{ \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \mid \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| > \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \} = \infty.$$

Alors, il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \leq |\omega| < \infty$ vérifiant

$$\{i\lambda \mid |\lambda| < |\omega|\} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad \text{et} \quad \sup \{ \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \mid |\lambda| < |\omega| \} = \infty.$$

Il existe donc une suite $(\lambda^n) \subset \mathbb{R}$ telle que

$$\lambda^n \rightarrow \omega \quad \text{avec} \quad |\lambda^n| < |\omega|.$$

Par conséquent, il existe une suite d'éléments $(U^n) \subset D(\mathcal{A})$ avec $\|U^n\|_{\mathcal{H}} = 1$ telle que

$$\|(i\lambda^n I - \mathcal{A})U^n\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

En utilisant la définition de l'opérateur $\mathcal{A}$, le système suivant est obtenu

$$i\lambda^n u^n - v^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H_0^1(0, 1), \quad (2.6)$$

$$i\lambda^n v^n - u_{xx}^n + \gamma \theta_x^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, 1), \quad (2.7)$$

$$i\lambda^n \theta^n - \kappa \theta_{xx}^n + \gamma v_x^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, 1). \quad (2.8)$$

En prenant la partie réelle du produit scalaire de $(i\lambda^n I - \mathcal{A})U^n$ avec U^n dans $\mathcal{H}$, il vient

$$\operatorname{Re} \langle (i\lambda^n I - \mathcal{A})U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0.$$

Ce qui donne directement

$$\operatorname{Re} \langle (i\lambda^n I - \mathcal{A})U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}} = \kappa \|\theta_x^n\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\theta^n\|_{L^2} \leq C\|\theta_x^n\|_{L^2}.$$

Puisque $\|\theta_x^n\|_{L^2} \rightarrow 0$, il s'ensuit que $\|\theta^n\|_{L^2} \rightarrow 0$.

Par ailleurs, d'après l'équation (2.8), il est rappelé que

$$i\lambda^n\theta^n - \kappa\theta_{xx}^n + \gamma v_x^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, 1).$$

En intégrant cette expression de 0 à x (pour $x \in [0, 1]$) et en utilisant la condition au bord $v^n(0) = 0$, on obtient

$$i\lambda^n \int_0^x \theta^n(y) dy - \kappa\theta_x^n(x) + \kappa\theta_x^n(0) + \gamma v^n(x) \longrightarrow 0 \quad \text{uniformément sur } [0, 1].$$

Puisque $\theta^n \longrightarrow 0$ faiblement ou fortement dans $L^2(0, 1)$ (par application de l'inégalité de Poincaré) et $\theta_x^n(0)$ est bornée, l'analyse asymptotique des termes montre que, par passage à la limite, le terme en v^n devient prépondérant. Ce qui conduit à

$$\gamma v^n(x) \longrightarrow 0 \implies v^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, 1).$$

Enfin, en utilisant l'équation (2.6) où $i\lambda^n u^n - v^n \longrightarrow 0$, il est déduit que

$$u^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, 1).$$

Pour justifier l'annulation des termes aux bords, l'inégalité d'interpolation de **Gagliardo-Nirenberg** est utilisée

$$\|D^j \theta_n\|_{L^p} \leq C \|D^m \theta_n\|_{L^r}^a \|\theta_n\|_{L^q}^{1-a}.$$

En fixant les paramètres $j = 1$, $p = \infty$, $m = 2$, $r = 2$ et $q = 2$, il vient

$$\|\theta_x^n\|_{L^\infty} \leq C \|\theta_{xx}^n\|_{L^2}^a \|\theta_n\|_{L^2}^{1-a}.$$

Le paramètre a est déterminé par la relation suivante

$$\frac{1}{p} - j = a \left(\frac{1}{r} - m \right) + (1 - a) \frac{1}{q} \implies 0 - 1 = a \left(\frac{1}{2} - 2 \right) + (1 - a) \frac{1}{2}.$$

Ce qui donne

$$-1 = -\frac{3}{2}a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a \implies -\frac{3}{2} = -2a \implies a = \frac{3}{4}.$$

L'inégalité devient alors

$$\|\theta_x^n\|_{L^\infty} \leq C \|\theta_{xx}^n\|_{L^2}^{3/4} \|\theta_n\|_{L^2}^{1/4}.$$

En effectuant le produit scalaire de (2.7) avec u_n dans $L^2(0, 1)$, il vient

$$\langle i\lambda^n v^n - u_{xx}^n + \gamma \theta_x^n, u^n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Une intégration par parties donne

$$i\lambda^n \int_0^l v^n \bar{u}^n dx - [u_x^n \bar{u}^n]_0^1 + \int_0^1 |u_x^n|^2 dx + \gamma \int_0^1 \theta_x^n \bar{u}^n dx \longrightarrow 0.$$

Les conditions aux limites $u^n(0) = u^n(1) = 0$ annulent le terme de bord. En passant à la partie réelle, on obtient $\|u_x^n\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0$. Ainsi, par l'inégalité de Poincaré, $u^n \longrightarrow 0$ dans $L^2(0, 1)$. Par conséquent, comme $(u^n, v^n, \theta^n) \longrightarrow (0, 0, 0)$, cela implique que $\|U^n\|_H \longrightarrow 0$, ce qui contredit l'hypothèse initiale $\|U^n\|_H = 1$.

Finalement, on a $U^n \longrightarrow 0$ dans H , ce qui implique

$$i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}).$$

□

Lemme 2.2.2. Le résolvant de l'opérateur $\mathcal{A}$ est uniformément borné sur l'axe imaginaire.

En d'autres termes, la condition suivante est satisfaite

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \infty.$$

Alors, il existe une suite de réels (λ^n) avec $|\lambda^n| \rightarrow \infty$ et une suite d'éléments $U^n \in D(\mathcal{A})$ telles que

$$\|U^n\|_{\mathcal{H}} = 1 \quad \text{et} \quad \|(i\lambda^n I - \mathcal{A})U^n\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0.$$

En prenant la partie réelle du produit scalaire de $(i\lambda^n I - \mathcal{A})U^n$ avec U^n dans $\mathcal{H}$, il vient

$$\operatorname{Re}\langle (i\lambda^n I - \mathcal{A})U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}} = \kappa \|\theta_x^n\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on a

$$0 \leq \|\theta^n\|_{L^2} \leq C \|\theta_x^n\|_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Pour montrer que $v^n \longrightarrow 0$

En divisant l'équation (2.8) par λ_n et puisque $\theta^n \longrightarrow 0$ dans $L^2(0, L)$, l'expression suivante est obtenue

$$-\kappa \frac{\theta_{xx}^n}{\lambda^n} + \gamma \frac{v_x^n}{\lambda^n} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L). \quad (2.9)$$

En effectuant le produit scalaire de cette dernière relation avec u_x^n dans $L^2(0, L)$, il vient

$$-\frac{\kappa}{\lambda^n} \langle \theta_{xx}^n, u_x^n \rangle_{L^2} + \frac{\gamma}{\lambda^n} \langle v_x^n, u_x^n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Par une intégration par parties, le premier terme s'écrit

$$-\frac{\kappa}{\lambda^n} \langle \theta_{xx}^n, u_x^n \rangle_{L^2} = \kappa \left\langle \theta_x^n, \frac{u_{xx}^n}{\lambda^n} \right\rangle_{L^2} \longrightarrow 0,$$

puisque $\theta_x^n \rightarrow 0$ dans $L^2(0, L)$ et que, d'après (2.7), le terme $\frac{u_{xx}^n}{\lambda^n} \sim iv^n$ est borné dans

$L^2(0, L)$.

De même, par une intégration par parties, il vient

$$\gamma \left\langle \frac{v_x^n}{\lambda^n}, u_x^n \right\rangle_{L^2} = -\gamma \left\langle v^n, \frac{u_{xx}^n}{\lambda^n} \right\rangle_{L^2} \longrightarrow -\gamma \langle v^n, i v^n \rangle_{L^2} = i\gamma \|v^n\|_{L^2}^2. \quad (2.10)$$

On en déduit ainsi que $i\gamma \|v^n\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0$, ce qui implique directement que $v^n \longrightarrow 0$ dans $L^2(0, L)$.

Maintenant, montrons que $u_x^n \longrightarrow 0$ dans $L^2(0, L)$.

En divisant l'équation (2.6) par λ^n , on obtient l'expression suivante

$$iu^n - \frac{1}{\lambda^n} v^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H_0^1(0, L), \quad (2.11)$$

ce qui implique par dérivation que $iu_x^n - \frac{1}{\lambda^n} v_x^n \longrightarrow 0$ (soit $\frac{1}{\lambda^n} v_x^n \sim iu_x^n$). En injectant cette relation dans (2.9), on en conclut que

$$-\frac{\kappa}{\lambda^n} \theta_{xx}^n + i\gamma u_x^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L). \quad (2.12)$$

Puisque l'expression (2.12) converge vers 0 et que la suite (u_x^n) est bornée dans $L^2(0, L)$, on en déduit que la suite $\left(\frac{\theta_{xx}^n}{\lambda^n}\right)$ est également bornée dans $L^2(0, L)$.

En effectuant le produit scalaire de la relation (2.12) avec u_x^n dans $L^2(0, L)$, il vient

$$-\int_0^L \frac{\kappa \theta_{xx}^n}{\lambda^n} \overline{u_x^n} dx + i\gamma \|u_x^n\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0.$$

Afin de montrer que l'intégrale $\int_0^L \frac{\kappa \theta_{xx}^n}{\lambda^n} \overline{u_x^n} dx$ converge vers 0, une intégration par parties est appliquée

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\kappa \theta_{xx}^n}{\lambda^n} \overline{u_x^n} dx &= \left[\frac{\kappa}{\lambda^n} \theta_x^n \overline{u_x^n} \right]_0^L - \int_0^L \kappa \theta_x^n \overline{\left(\frac{u_{xx}^n}{\lambda^n} \right)} dx \\ &= \frac{\kappa}{\lambda^n} \theta_x^n(L) \overline{u_x^n}(L) - \frac{\kappa}{\lambda^n} \theta_x^n(0) \overline{u_x^n}(0) - \int_0^L \kappa \theta_x^n \overline{\left(\frac{u_{xx}^n}{\lambda^n} \right)} dx. \end{aligned}$$

En introduisant les notations suivantes pour les termes de bord

$$a = \frac{\kappa}{\lambda^n} \theta_x^n(L) \overline{u_x^n}(L) \quad \text{et} \quad b = \frac{\kappa}{\lambda^n} \theta_x^n(0) \overline{u_x^n}(0),$$

l'intégration par parties précédente se réécrit sous la forme

$$\int_0^L \frac{\kappa \theta_{xx}^n}{\lambda^n} \overline{u_x^n} dx = a - b - \int_0^L \kappa \theta_x^n \overline{\left(\frac{u_{xx}^n}{\lambda^n} \right)} dx.$$

En divisant l'équation (2.7) par λ^n , il vient

$$iv^n - \frac{u_{xx}^n}{\lambda^n} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L).$$

Puisque la suite (v^n) est bornée dans $L^2(0, L)$, il est déduit que la suite $\left(\frac{u_{xx}^n}{\lambda^n} \right)$ est également bornée. Par conséquent, le produit scalaire associé dans $L^2(0, L)$ vérifie

$$\left\langle \kappa \theta_x^n, \frac{u_{xx}^n}{\lambda^n} \right\rangle_{L^2} \longrightarrow 0. \quad (2.13)$$

Pour estimer les termes de bord obtenus par l'intégration par parties, une majoration par la norme $L^\infty(0, L)$ est utilisée en décomposant le paramètre λ^n comme suit

$$\begin{aligned} \left| \left[\frac{\kappa \theta_x^n \overline{u_x^n}}{\lambda^n} \right]_0^L \right| &\leq \kappa \left| \frac{\theta_x^n(L)}{\sqrt{\lambda^n}} \right| \left| \frac{\overline{u_x^n}(L)}{\sqrt{\lambda^n}} \right| + \kappa \left| \frac{\theta_x^n(0)}{\sqrt{\lambda^n}} \right| \left| \frac{\overline{u_x^n}(0)}{\sqrt{\lambda^n}} \right| \\ &\leq 2\kappa \left\| \frac{\theta_x^n}{\sqrt{\lambda^n}} \right\|_{L^\infty} \left\| \frac{u_x^n}{\sqrt{\lambda^n}} \right\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, il vient

$$\left\| \frac{\theta_x^n}{\sqrt{\lambda^n}} \right\|_{L^\infty} \leq C \|\theta^n\|_{L^2}^{1/4} \left\| \frac{\theta_{xx}^n}{\lambda^n} \right\|_{L^2}^{3/4} \longrightarrow 0, \quad (2.14)$$

puisque $\|\theta^n\|_{L^2} \longrightarrow 0$ et que la suite $\left(\left\| \frac{\theta_{xx}^n}{\lambda^n} \right\|_{L^2} \right)$ est bornée d'après l'estimation précédente.

En utilisant les estimations (2.7) et (2.12) obtenues, il en résulte que

$$\left| \left[\frac{\kappa \theta_x^n \overline{u_x^n}}{\lambda^n} \right]_0^L \right| \leq 2\kappa \left\| \frac{\theta_x^n}{\sqrt{\lambda^n}} \right\|_{L^\infty} \left\| \frac{u_x^n}{\sqrt{\lambda^n}} \right\|_{L^\infty} \longrightarrow 0.$$

Par conséquent, il est établi que

$$\left[\frac{\kappa \theta_x^n \overline{u_x^n}}{\lambda^n} \right]_0^L \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Finalement, en combinant les résultats de l'intégration par parties et les limites précédentes, il est conclu que

$$- \int_0^L \frac{\kappa \theta_{xx}^n}{\lambda^n} \overline{u_x^n} dx + i\gamma \|u_x^n\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

D'où

$$\|u_x^n\|_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Finalement, puisque toutes les composantes de la norme $\|U^n\|_{\mathcal{H}}$ tendent vers zéro ($u_x^n \rightarrow 0$, $v^n \rightarrow 0$ et $\theta^n \rightarrow 0$), il en résulte

$$\|U^n\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0.$$

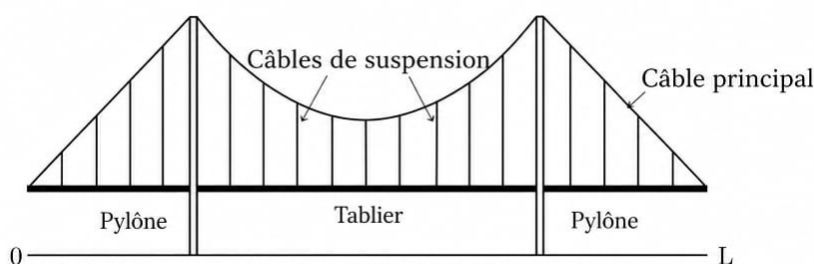
Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse initiale $\|U^n\|_{\mathcal{H}} = 1$. □

Chapitre 3

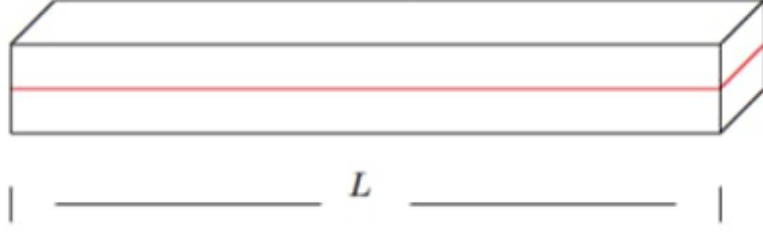
Étude du comportement asymptotique d'un système de ponts suspendus à poutres laminées

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un modèle plus complexe de pont suspendu, pour lequel nous établissons l'existence, l'unicité ainsi que la stabilité exponentielle des solutions.

Dans notre approche mathématique, le câble principal est représenté par une corde élastique $u = u(x, t)$, reliée au tablier par des câbles verticaux ayant une rigidité $\lambda > 0$.



En se basant sur la théorie de Timoshenko pour les poutres laminées et en négligeant la largeur du pont, le tablier est modélisé comme une poutre élastique de longueur L .



En désignant par $\varphi = \varphi(x, t)$ le déplacement de la section transversale au point $x \in (0, L)$, par $\psi = \psi(x, t)$ l'angle de rotation, et en introduisant les variables ξ et s associées au glissement des lamelles ainsi que les coefficients d'amortissement μ_i (où μ_4 représente l'amortissement d'adhérence), On obtient le système couplé suivant

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \mu_1 u_t = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho_1 \varphi_{tt} + k(s - \xi - \varphi_x)_x + \lambda(\varphi - u) + \mu_2 \varphi_t = 0, \quad (3.2)$$

$$\rho_2 \xi_{tt} - b \xi_{xx} - k(s - \xi - \varphi_x) + \mu_3 \xi_t = 0, \quad (3.3)$$

$$\rho_2 s_{tt} - b s_{xx} + k(s - \xi - \varphi_x) + \gamma s + \mu_4 s_t = 0. \quad (3.4)$$

Ce système est soumis aux conditions aux limites de Dirichlet homogènes, qui assurent la fixation des extrémités du pont à $x = 0$ et $x = L$

$$\begin{cases} u(0, t) = \varphi(0, t) = \xi(0, t) = s(0, t) = 0, \\ u(L, t) = \varphi(L, t) = \xi(L, t) = s(L, t) = 0, \end{cases} \quad t \geq 0.$$

Nous considérons également les conditions initiales suivantes au temps $t = 0$

$$\begin{cases} (u, \varphi, \xi, s)(x, 0) = (u_0, \varphi_0, \xi_0, s_0)(x), \\ (u_t, \varphi_t, \xi_t, s_t)(x, 0) = (u_1, \varphi_1, \xi_1, s_1)(x). \end{cases}$$

Pour transformer le système du second ordre en un système du premier ordre, on définit les variables de vitesse suivantes

$$w = u_t, \quad \phi = \varphi_t, \quad \eta = \xi_t, \quad z = s_t.$$

Ainsi, le vecteur d'état est donné par

$$U = (u, w, \varphi, \phi, \xi, \eta, s, z)^T.$$

Le système du premier ordre s'écrit alors sous la forme suivante

$$\begin{cases} u_t = w, \\ w_t = \alpha u_{xx} - \lambda u + \lambda \varphi - \mu_1 w, \\ \varphi_t = \phi, \\ \phi_t = \frac{1}{\rho_1} [-k(s - \xi - \varphi_x)_x - \lambda(\varphi - u) - \mu_2 \phi], \\ \xi_t = \eta, \\ \eta_t = \frac{1}{\rho_2} [b\xi_{xx} + k(s - \xi - \varphi_x) - \mu_3 \eta], \\ s_t = z, \\ z_t = \frac{1}{\rho_2} [bs_{xx} - k(s - \xi - \varphi_x) - \gamma s - \mu_4 z]. \end{cases}$$

On peut alors représenter ce système sous la forme matricielle $U_t = \mathcal{A}U$, où l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha \partial_{xx} - \lambda & -\mu_1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{\rho_1} & 0 & \frac{k\partial_{xx} - \lambda}{\rho_1} & -\frac{\mu_2}{\rho_1} & \frac{k\partial_x}{\rho_1} & 0 & \frac{k\partial_x}{\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k\partial_x}{\rho_2} & 0 & \frac{b\partial_{xx} - k}{\rho_2} & -\frac{\mu_3}{\rho_2} & \frac{k}{\rho_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k\partial_x}{\rho_2} & 0 & \frac{k}{\rho_2} & 0 & \frac{b\partial_{xx} - k - \gamma}{\rho_2} & -\frac{\mu_4}{\rho_2} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Son domaine de définition $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est donné explicitement par

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ U = (u, w, \varphi, \phi, \xi, \eta, s, z)^T \in \mathcal{H} \left| \begin{array}{l} u, \varphi, \xi, s \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \\ w, \phi, \eta, z \in H_0^1(0, L) \end{array} \right. \right\}.$$

Le système complet se réduit ainsi à un problème de Cauchy sous la forme suivante

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U, & t > 0, \\ U(x, 0) = U_0(x). \end{cases} \quad (3.6)$$

On désigne le produit scalaire standard dans $L^2(0, L)$ par

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_0^L f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \forall f, g \in L^2(0, L), \quad \text{et} \quad \langle f, f \rangle_{L^2} = \|f\|_{L^2}^2.$$

En multipliant chaque équation par sa vitesse conjuguée respective $\bar{u}_t, \bar{\varphi}_t, \bar{\xi}_t, \bar{s}_t$ et en intégrant sur $(0, L)$, nous obtenons

$$\int_0^L (u_{tt} - au_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \mu_1 u_t) \bar{u}_t dx = 0. \quad (3.7)$$

$$\int_0^L (\rho_1 \varphi_{tt} + k(s - \xi - \varphi_x)_x + \lambda(\varphi - u) + \mu_2 \varphi_t) \bar{\varphi}_t dx = 0. \quad (3.8)$$

$$\int_0^L (\rho_2 \xi_{tt} - b\xi_{xx} - k(s - \xi - \varphi_x) + \mu_3 \xi_t) \bar{\xi}_t dx = 0. \quad (3.9)$$

$$\int_0^L (\rho_2 s_{tt} - bs_{xx} + k(s - \xi - \varphi_x) + \gamma s + \mu_4 s_t) \bar{s}_t dx = 0. \quad (3.10)$$

Pour les termes d'accélération et le terme γ , On utilise la règle suivante

$$\int_0^L u_{tt} \bar{u}_t dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d}{dt} |u_t|^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2.$$

De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} \bar{\varphi}_t dx + \int_0^L \rho_2 \xi_{tt} \bar{\xi}_t dx + \int_0^L \rho_2 s_{tt} \bar{s}_t dx + \int_0^L \gamma s \bar{s}_t dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \rho_1 \|\varphi_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \rho_2 \|\xi_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \rho_2 \|s_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \gamma \|s\|^2. \end{aligned}$$

Pour les dérivées secondes, on applique l'intégration par parties

$$\int_0^L -\alpha u_{xx} \bar{u}_t dx = [-\alpha u_x \bar{u}_t]_0^L + \int_0^L \alpha u_x \bar{u}_{xt} dx.$$

En prenant la partie réelle, pour les termes d'accélération et le terme en γ , on utilise la

relation suivante

$$\operatorname{Re} \int_0^L u_{tt} \bar{u}_t dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d}{dt} |u_t|^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_{L^2}^2.$$

De la même manière, il vient

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^L (\rho_1 \varphi_{tt} \bar{\varphi}_t + \rho_2 \xi_{tt} \bar{\xi}_t + \rho_2 s_{tt} \bar{s}_t + \gamma s \bar{s}_t) dx \\ = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\rho_1 \|\varphi_t\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|\xi_t\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|s_t\|_{L^2}^2 + \gamma \|s\|_{L^2}^2). \end{aligned}$$

Pour les dérivées secondes, on applique l'intégration par parties. En utilisant les conditions aux limites de Dirichlet, les termes de bord s'annulent et on obtient

$$- \int_0^L \alpha u_{xx} \bar{u}_t dx = \int_0^L \alpha u_x \bar{u}_{xt} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha \|u_x\|_{L^2}^2.$$

Grâce aux conditions de Dirichlet nulles ($u_t(0) = u_t(L) = 0$), le terme de bord s'annule, ce qui donne $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha \|u_x\|^2$. De même $\int_0^L b \xi_{xx} \bar{\xi}_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} b \|\xi_x\|^2$.

$\int_0^L b s_{xx} \bar{s}_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} b \|s_x\|^2$. Pour le couplage λ , On additionne le terme de (3.7) et le terme de (3.8)

$$\int_0^L -\lambda(\varphi - u) \bar{u}_t dx + \int_0^L \lambda(\varphi - u) \bar{\varphi}_t dx = \int_0^L \lambda(\varphi - u) (\bar{\varphi}_t - \bar{u}_t) dx.$$

Ce qui donne directement $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \lambda \|\varphi - u\|^2$. Pour le couplage k , On détaille le calcul comme suit On applique d'abord une I.P.P. au terme intégral de (3.8)

$$\int_0^L -k(s - \xi - \varphi_x)_x \bar{\varphi}_t dx = [-k(s - \xi - \varphi_x) \bar{\varphi}_t]_0^L + \int_0^L k(s - \xi - \varphi_x) \bar{\varphi}_{xt} dx.$$

Le terme de bord s'annule par Dirichlet. En sommant (3.9) et (3.10), on obtient, avec $k(s - \xi - \varphi_x)$ comme facteur commun

$$\int_0^L k(s - \xi - \varphi_x) \bar{\varphi}_{xt} dx - \int_0^L k(s - \xi - \varphi_x) \bar{\xi}_t dx + \int_0^L k(s - \xi - \varphi_x) \bar{s}_t dx.$$

$$\int_0^L k(s - \xi - \varphi_x) (\bar{s}_t - \bar{\xi}_t + \bar{\varphi}_{xt}) dx.$$

Comme l'expression $(\bar{s}t - \bar{\xi}_t + \bar{\varphi}_{xt})$ est la dérivée temporelle de $(s - \xi - \varphi_x)$, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} k \|s - \xi - \varphi_x\|^2.$$

Enfin, les termes restants s'écrivent

$$\mu_1 \|u_t\|^2, \quad \mu_2 \|\varphi_t\|^2, \quad \mu_3 \|\xi_t\|^2, \quad \mu_4 \|s_t\|^2$$

L'énergie totale du système est donnée par

$$\begin{aligned} E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L & \left[|u_t|^2 + \alpha |u_x|^2 + \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\xi_t|^2 + \rho_2 |s_t|^2 \right. \\ & \left. + b |s_x|^2 + b |\xi_x|^2 + \lambda |\varphi - u|^2 + \gamma |s|^2 + k |s - \xi - \varphi_x|^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Cette énergie est définie sur l'espace d'énergie suivant

$$\mathcal{H} = [H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)]^4.$$

La dérivée temporelle de l'énergie, associée à la dissipation induite par les termes μ_i , assure que

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L [\mu_1 |u_t|^2 + \mu_2 |\varphi_t|^2 + \mu_3 |\xi_t|^2 + \mu_4 |s_t|^2] dx \leq 0.$$

3.1 Existence et unicité

Pour mieux comprendre notre système on utilise le produit scalaire suivant sur l'espace $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} = & \int_0^L w \tilde{w} dx + \alpha \int_0^L u_x \tilde{u}_x dx + \lambda \int_0^L (\varphi - u)(\tilde{\varphi} - \tilde{u}) dx; \\ & + \rho_1 \int_0^L \phi \tilde{\phi} dx + \rho_2 \int_0^L \eta \tilde{\eta} dx + \rho_2 \int_0^L z \tilde{z} dx; \\ & + k \int_0^L (s - \xi - \varphi_x)(\tilde{s} - \tilde{\xi} - \tilde{\varphi}_x) dx + b \int_0^L \xi_x \tilde{\xi}_x dx; \\ & + b \int_0^L s_x \tilde{s}_x dx + \gamma \int_0^L s \tilde{s} dx. \end{aligned}$$

L'existence et l'unicité de la solution découlent de ce résultat.

Théorème 3.1.1 (Lumer-Phillips [3]). Soit $\mathcal{A}$ un opérateur à domaine dense $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$. Si $\mathcal{A}$ est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ (ou $\lambda_0 = 0$) tel que $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ soit surjectif (c'est-à-dire $0 \in \rho(\mathcal{A})$), alors $\mathcal{A}$ engendre un C_0 -semi-groupe de contractions sur $\mathcal{H}$.

Lemme 3.1.1. L'opérateur $\mathcal{A}$ (dissipatif) sur $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que pour tout $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, on a

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0.$$

Démonstration. :Pour Démonstration de la dissipativité de l'opérateur $\mathcal{A}$, en utilisant la définition du produit scalaire dans $\mathcal{H}$ et en remplaçant U_t par $\mathcal{A}U$ pour le vecteur d'état $U = (u, w, \varphi, \phi, \xi, \eta, s, z)^T$, on obtient l'expression suivante

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^L w_t \bar{w} dx + \alpha \int_0^L u_{tx} \bar{u}_x dx + \lambda \int_0^L (\varphi_t - u_t)(\bar{\varphi} - \bar{u}) dx; \\ &+ \rho_1 \int_0^L \phi_t \bar{\phi} dx + \rho_2 \int_0^L \eta_t \bar{\eta} dx + \rho_2 \int_0^L z_t \bar{z} dx; \\ &+ k \int_0^L (s_t - \xi_t - \varphi_{tx})(\bar{s} - \bar{\xi} - \bar{\varphi}_x) dx + b \int_0^L \xi_{tx} \bar{\xi}_x dx; \\ &+ b \int_0^L s_{tx} \bar{s}_x dx + \gamma \int_0^L s_t \bar{s} dx. \end{aligned}$$

Après substitution des équations du système et intégration par parties, on obtient la forme suivante

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^L +\alpha \bar{u}_x w_x - \alpha u_x \bar{w}_x + \lambda(\varphi - u)(\bar{w} - \bar{\phi}) - \lambda(w - \phi)(\bar{\varphi} - \bar{u}) dx; \\ &+ \int_0^L k(\bar{s} - \bar{\xi} - \bar{\varphi}_x)(z - \eta - \phi_x) - k(s - \xi - \varphi_x)(\bar{z} - \bar{\eta} - \bar{\phi}_x) dx, \\ &+ \int_0^L \gamma z \bar{s} - \gamma s \bar{z} + b \eta_x \bar{\xi}_x - b \xi_x \bar{\eta}_x dx + b z_x \bar{s}_x - b s_x \bar{z}_x dx, \\ &+ \int_0^L -\mu_1 w \bar{w} - \mu_2 \phi \bar{\phi} - \mu_3 \eta \bar{\eta} - \mu_4 z \bar{z} dx. \end{aligned}$$

En regroupant les termes conjugués et en utilisant l'identité $a\bar{b} - \bar{a}b = 2i \operatorname{Im}(a\bar{b})$, l'expres-

sion précédente se réécrit sous forme imaginaire.

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^L 2i \operatorname{Im}(\alpha \bar{u}_x w_x) + 2i \operatorname{Im} \lambda (\varphi - u) (\bar{w} - \bar{\phi}) dx; \\
&+ \int_0^L 2i \operatorname{Im} k (\bar{s} - \bar{\xi} - \bar{\varphi}_x) (z - \eta - \phi_x) dx, \\
&+ \int_0^L 2i \operatorname{Im} \gamma z \bar{s} + 2i \operatorname{Im} b \eta_x \bar{\xi}_x + 2i \operatorname{Im} b z_x \bar{s}_x dx, \\
&+ \int_0^L -\mu_1 w \bar{w} - \mu_2 \phi \bar{\phi} - \mu_3 \eta \bar{\eta} - \mu_4 z \bar{z} dx.
\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle de l'égalité précédente, tous les termes purement imaginaires s'annulent, ce qui permet de simplifier l'expression.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^L -\mu_1 w \bar{w} - \mu_2 \phi \bar{\phi} - \mu_3 \eta \bar{\eta} - \mu_4 z \bar{z} dx. \\
&= -\mu_1 \|w\|_{L^2}^2 - \mu_2 \|\phi\|_{L^2}^2 - \mu_3 \|\eta\|_{L^2}^2 - \mu_4 \|z\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Puisque les coefficients μ_i sont strictement positifs, on conclut que $\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0$. Cela prouve que l'opérateur $\mathcal{A}$ est dissipatif. $\square$

Lemme 3.1.2. L'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal, c'est-à-dire que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Démonstration. Pour démontrer que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, résolvons l'équation $-\mathcal{A}U = F$ dans $\mathcal{H}$, où $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7, f^8)^T \in \mathcal{H}$. Ce problème se traduit par le système suivant

$$-w = f^1, \quad (3.11)$$

$$-\alpha u_{xx} + \lambda u - \lambda \varphi + \mu_1 w = f^2, \quad (3.12)$$

$$-\phi = f^3, \quad (3.13)$$

$$k(s - \xi - \varphi_x)_x + \lambda(\varphi - u) + \mu_2 \phi = \rho_1 f^4, \quad (3.14)$$

$$-\eta = f^5, \quad (3.15)$$

$$-b \xi_{xx} - k(s - \xi - \varphi_x) + \mu_3 \eta = \rho_2 f^6, \quad (3.16)$$

$$-z = f^7, \quad (3.17)$$

$$-b s_{xx} + k(s - \xi - \varphi_x) + \gamma s + \mu_4 z = \rho_2 f^8. \quad (3.18)$$

De manières évidentes, les composantes de vitesse w, ϕ, η et z sont déterminées directement

depuis (3.11), (3.13), (3.15) et (3.17) par

$$w = -f^1 \in H_0^1(0, L), \quad \phi = -f^3 \in H_0^1(0, L), \quad \eta = -f^5 \in H_0^1(0, L), \quad z = -f^7 \in H_0^1(0, L).$$

En substituant $w = -f^1$ dans (3.12), on obtient

$$-\alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) = \mu_1 f^1 + f^2 = g^1 \in L^2(0, L).$$

De même, en remplaçant $\phi = -f^3$ dans (3.14), on obtient

$$k(s - \xi - \varphi_x)_x + \lambda(\varphi - u) = \mu_2 f^3 + \rho_1 f^4 = g^2 \in L^2(0, L).$$

En remplaçant $\eta = -f^5$ dans (3.16), on obtient

$$-b\xi_{xx} - k(s - \xi - \varphi_x) = \mu_3 f^5 + \rho_2 f^6 = g^3 \in L^2(0, L).$$

Enfin, en remplaçant $z = -f^7$ dans (3.18), on obtient

$$-bs_{xx} + k(s - \xi - \varphi_x) + \gamma s = \mu_4 f^7 + \rho_2 f^8 = g^4 \in L^2(0, L).$$

Grâce à ces substitutions, le système se réduit à quatre équations elliptiques en (u, φ, ξ, s) . L'existence et l'unicité de la solution découlent du lemme de **Lax-Milgram** appliqué à la formulation variationnelle associée. Soit l'espace de test $V = [H_0^1(0, L)]^4$. En multipliant par une fonction de test et en intégrant par parties, on définit le produit scalaire par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x)g(x) dx$$

Pour l'équation en u , on obtient

$$-\alpha u_{xx} + \lambda(u - \varphi) = g^1.$$

Sous forme intégrale après intégration par parties, elle devient

$$\alpha \int_0^L u_x \tilde{u}_x dx + \lambda \int_0^L (u - \varphi) \tilde{u} dx = \int_0^L g^1 \tilde{u} dx.$$

En utilisant le produit scalaire, elle devient

$$\alpha \langle u_x, \tilde{u}_x \rangle + \lambda \langle u - \varphi, \tilde{u} \rangle = \langle g^1, \tilde{u} \rangle. \quad (3.19)$$

De la même manière, pour l'équation associée à φ , on obtient

$$-\lambda(u - \varphi) + k(s - \xi - \varphi_x)_x = g^2.$$

Sous forme intégrale après intégration par parties

$$-\lambda \int_0^L (u - \varphi) \tilde{\varphi} dx - k \int_0^L (s - \xi - \varphi_x) \tilde{\varphi}_x dx = \int_0^L g^2 \tilde{\varphi} dx.$$

En utilisant le produit scalaire, elle devient

$$-\lambda \langle u - \varphi, \tilde{\varphi} \rangle - k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{\varphi}_x \rangle = \langle g^2, \tilde{\varphi} \rangle. \quad (3.20)$$

Et pour les équations de ξ , on écrit directement

$$b \int_0^L \xi_x \tilde{\xi}_x dx - k \int_0^L (s - \xi - \varphi_x) \tilde{\xi} dx = \int_0^L g^3 \tilde{\xi} dx.$$

En produit scalaire

$$b \langle \xi_x, \tilde{\xi}_x \rangle - k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{\xi} \rangle = \langle g^3, \tilde{\xi} \rangle. \quad (3.21)$$

Pour s

$$b \int_0^L s_x \tilde{s}_x dx + k \int_0^L (s - \xi - \varphi_x) \tilde{s} dx + \gamma \int_0^L s \tilde{s} dx = \int_0^L g^4 \tilde{s} dx.$$

En produit scalaire

$$b \langle s_x, \tilde{s}_x \rangle + k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{s} \rangle + \gamma \langle s, \tilde{s} \rangle = \langle g^4, \tilde{s} \rangle. \quad (3.22)$$

Enfin, on somme les équations (3.19), (3.20), (3.21) et (3.22) pour obtenir le système

global $B(U, \tilde{U}) = L(\tilde{U})$. En regroupant les termes, cette expression s'écrit

$$\begin{aligned} & \alpha \langle u_x, \tilde{u}_x \rangle + \lambda \langle u - \varphi, \tilde{u} \rangle - \lambda \langle u - \varphi, \tilde{\varphi} \rangle - k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{\varphi}_x \rangle + b \langle \xi_x, \tilde{\xi}_x \rangle - k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{\xi} \rangle \\ & + b \langle s_x, \tilde{s}_x \rangle + k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{s} \rangle + \gamma \langle s, \tilde{s} \rangle = \langle g^1, \tilde{u} \rangle + \langle g^2, \tilde{\varphi} \rangle + \langle g^3, \tilde{\xi} \rangle + \langle g^4, \tilde{s} \rangle. \end{aligned}$$

Pour simplifier cette expression, on regroupe les termes comme suit Pour les termes contenant λ , Nous additionnons les termes contenant λ provenant des équations (3.19) et (3.20)

$$\lambda \langle u - \varphi, \tilde{u} \rangle - \lambda \langle u - \varphi, \tilde{\varphi} \rangle.$$

En utilisant la propriété de linéarité du produit scalaire (facteur commun), on obtient

$$\lambda \langle u - \varphi, \tilde{u} - \tilde{\varphi} \rangle.$$

En sommant les termes en k des équations (3.20), (3.21) et (3.22)

$$-k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{\varphi}_x \rangle - k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{\xi} \rangle + k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{s} \rangle.$$

En mettant $k \langle s - \xi - \varphi_x, \cdot \rangle$ en facteur, on obtient

$$k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{s} - \tilde{\xi} - \tilde{\varphi}_x \rangle.$$

Finalement, en injectant ces résultats dans le membre de gauche, on définit la forme on définit la forme $B(U, \tilde{U})$

$$\begin{aligned} B(U, \tilde{U}) = & \alpha \langle u_x, \tilde{u}_x \rangle + \lambda \langle u - \varphi, \tilde{u} - \tilde{\varphi} \rangle + b \langle \xi_x, \tilde{\xi}_x \rangle + b \langle s_x, \tilde{s}_x \rangle; \\ & + k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{s} - \tilde{\xi} - \tilde{\varphi}_x \rangle + \gamma \langle s, \tilde{s} \rangle. \end{aligned}$$

De la même manière, la somme des termes de droite donne la forme $L(\tilde{U})$

$$L(\tilde{U}) = \langle g^1, \tilde{u} \rangle + \langle g^2, \tilde{\varphi} \rangle + \langle g^3, \tilde{\xi} \rangle + \langle g^4, \tilde{s} \rangle.$$

Maintenant, montrons que la forme linéaire L est continue.

Soit

$$L : V \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$L(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{s}) = \langle g^1, \tilde{u} \rangle + \langle g^2, \tilde{\varphi} \rangle + \langle g^3, \tilde{\xi} \rangle + \langle g^4, \tilde{s} \rangle.$$

En appliquant la valeur absolue puis l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} |L(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{s})| &= \left| \langle g^1, \tilde{u} \rangle + \langle g^2, \tilde{\varphi} \rangle + \langle g^3, \tilde{\xi} \rangle + \langle g^4, \tilde{s} \rangle \right| \\ &\leq |\langle g^1, \tilde{u} \rangle| + |\langle g^2, \tilde{\varphi} \rangle| + |\langle g^3, \tilde{\xi} \rangle| + |\langle g^4, \tilde{s} \rangle|. \end{aligned}$$

Ensuite, on applique l'inégalité de Cauchy–Schwarz à chaque terme. En sommant les estimations obtenues, il vient

$$|L(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{s})| \leq \|g^1\|_{L^2} \|\tilde{u}\|_{L^2} + \|g^2\|_{L^2} \|\tilde{\varphi}\|_{L^2} + \|g^3\|_{L^2} \|\tilde{\xi}\|_{L^2} + \|g^4\|_{L^2} \|\tilde{s}\|_{L^2}.$$

Ou, sous forme compacte,

$$|L(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4)| \leq \sum_{i=1}^4 \|g^i\|_{L^2} \|\tilde{u}_i\|_{L^2},$$

où

$$(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4) = (\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{s}).$$

Comme les fonctions appartiennent à l'espace $H_0^1(0, L)$, l'inégalité de Poincaré assure l'existence d'une constante $C_P > 0$ telle que

$$\|\tilde{u}\|_{L^2} \leq C_P \|\tilde{u}_x\|_{L^2},$$

et de même,

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L^2} \leq C_P \|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2},$$

$$\|\tilde{\xi}\|_{L^2} \leq C_P \|\tilde{\xi}_x\|_{L^2},$$

$$\|\tilde{s}\|_{L^2} \leq C_P \|\tilde{s}_x\|_{L^2}.$$

En remplaçant ces estimations dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} |L(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{s})| &\leq C_P \|g^1\|_{L^2} \|\tilde{u}_x\|_{L^2} + C_P \|g^2\|_{L^2} \|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2} \\ &\quad + C_P \|g^3\|_{L^2} \|\tilde{\xi}_x\|_{L^2} + C_P \|g^4\|_{L^2} \|\tilde{s}_x\|_{L^2}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz pour les sommes finies,

$$\sum_{i=1}^4 a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^4 a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^4 b_i^2 \right)^{1/2},$$

et en posant

$$a_i = \|g^i\|_{L^2}, \quad b_i = \|\tilde{u}_{i,x}\|_{L^2},$$

on obtient

$$\begin{aligned} |L(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{s})| &\leq C_P \left(\sum_{i=1}^4 \|g^i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\|\tilde{u}_x\|_{L^2}^2 + \|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2}^2 + \|\tilde{\xi}_x\|_{L^2}^2 + \|\tilde{s}_x\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Comme la norme sur l'espace

$$V = [H_0^1(0, L)]^4$$

est définie par

$$\|(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{s})\|_V = \left(\|\tilde{u}_x\|_{L^2}^2 + \|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2}^2 + \|\tilde{\xi}_x\|_{L^2}^2 + \|\tilde{s}_x\|_{L^2}^2 \right)^{1/2},$$

il vient

$$|L(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{s})| \leq M \|(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{s})\|_V,$$

où

$$M = C_P \left(\sum_{i=1}^4 \|g^i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

Par conséquent, la forme linéaire L est continue sur V .

Forme bilinéaire $B(u, \tilde{u}) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} B(u, \tilde{u}) &= \alpha \langle u_x, \tilde{u}_x \rangle + \lambda \langle u - \varphi, \tilde{u} - \tilde{\varphi} \rangle + b \langle \xi_x, \tilde{\xi}_x \rangle + b \langle s_x, \tilde{s}_x \rangle \\ &\quad + k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{s} - \tilde{\xi} - \tilde{\varphi}_x \rangle + \gamma \langle s, \tilde{s} \rangle. \end{aligned}$$

Continuité $|B(u, \tilde{u})| \leq M' \|u\|_V \|\tilde{u}\|_V$. D'abord, en appliquant la valeur absolue et l'inégalité triangulaire aux différents termes du produit scalaire, il vient

$$\begin{aligned} |B(u, \tilde{u})| &\leq \alpha |\langle u_x, \tilde{u}_x \rangle| + \lambda |\langle u - \varphi, \tilde{u} - \tilde{\varphi} \rangle| + b \left| \langle \xi_x, \tilde{\xi}_x \rangle \right| \\ &\quad + b |\langle s_x, \tilde{s}_x \rangle| + k \left| \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{s} - \tilde{\xi} - \tilde{\varphi}_x \rangle \right| + \gamma |\langle s, \tilde{s} \rangle|. \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise l'inégalité de Cauchy–Schwarz pour chaque terme

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Pour le premier terme,

$$\alpha |\langle u_x, \tilde{u}_x \rangle| \leq \alpha \|u_x\|_{L^2} \|\tilde{u}_x\|_{L^2}.$$

Pour le deuxième terme,

$$\lambda |\langle u - \varphi, \tilde{u} - \tilde{\varphi} \rangle| \leq \lambda \|u - \varphi\|_{L^2} \|\tilde{u} - \tilde{\varphi}\|_{L^2}.$$

Pour les troisième et quatrième termes,

$$b |\langle \xi_x, \tilde{\xi}_x \rangle| + b |\langle s_x, \tilde{s}_x \rangle| \leq b \|\xi_x\|_{L^2} \|\tilde{\xi}_x\|_{L^2} + b \|s_x\|_{L^2} \|\tilde{s}_x\|_{L^2}.$$

Pour le cinquième terme,

$$k |\langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{s} - \tilde{\xi} - \tilde{\varphi}_x \rangle| \leq k \|s - \xi - \varphi_x\|_{L^2} \|\tilde{s} - \tilde{\xi} - \tilde{\varphi}_x\|_{L^2}.$$

Pour le sixième terme,

$$\gamma|\langle s, \tilde{s} \rangle| \leq \gamma \|s\|_{L^2} \|\tilde{s}\|_{L^2}.$$

Enfin, en utilisant l'inégalité triangulaire ainsi que l'inégalité de Poincaré, on obtient pour le terme lié à λ ,

$$\lambda \|u - \varphi\|_{L^2} \|\tilde{u} - \tilde{\varphi}\|_{L^2} \leq \lambda (\|u\|_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2}) (\|\tilde{u}\|_{L^2} + \|\tilde{\varphi}\|_{L^2}).$$

Puisque $u, \varphi \in H_0^1(0, L)$, alors, d'après l'inégalité de Poincaré,

$$\|u\|_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2} \leq C_p \|u_x\|_{L^2} + C_p \|\varphi_x\|_{L^2} \leq C_p (\|u_x\|_{L^2} + \|\varphi_x\|_{L^2}).$$

Pour le terme lié à K , on utilise l'inégalité triangulaire

$$\|s - \xi - \varphi_x\|_{L^2} \leq \|s\|_{L^2} + \|\xi\|_{L^2} + \|\varphi_x\|_{L^2}.$$

En appliquant ensuite l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|s - \xi - \varphi_x\|_{L^2} \leq C_{\max} (\|s_x\|_{L^2} + \|\xi_x\|_{L^2} + \|\varphi_x\|_{L^2}),$$

où

$$C_{\max} = \max(1, C_p).$$

En posant

$$\|U\|_V = \sqrt{\|u_x\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\xi_x\|_{L^2}^2 + \|s_x\|_{L^2}^2},$$

on déduit que

$$k \|s - \xi - \varphi_x\|_{L^2} \|\tilde{s} - \tilde{\xi} - \tilde{\varphi}_x\|_{L^2} \leq 3k C_{\max}^2 \|u\|_V \|\tilde{u}\|_V.$$

Pour le terme lié à γ ,

$$\gamma|\langle s, \tilde{s} \rangle| \leq \gamma \|s\|_{L^2} \|\tilde{s}\|_{L^2} \leq \gamma C_p^2 \|s_x\|_{L^2} \|\tilde{s}_x\|_{L^2} \leq \gamma C_p^2 \|U\|_V \|\tilde{U}\|_V.$$

En rassemblant toutes les estimations, on obtient

$$|B(U, \tilde{U})| \leq (2\lambda C_p^2 + 3kC_{\max}^2 + \alpha + 2b + \gamma C_p^2) \|U\|_V \|\tilde{U}\|_V.$$

Ainsi,

$$M' = 2\lambda C_p^2 + 3kC_{\max}^2 + \alpha + 2b + \gamma C_p^2.$$

Donc,

$$|B(U, \tilde{U})| \leq M' \|U\|_V \|\tilde{U}\|_V.$$

Par conséquent, la forme bilinéaire B est continue.

Enfin, pour terminer la démonstration, montrons que la forme B est coercive sur V . En prenant $\tilde{U} = U = (u, \varphi, \xi, s)$ dans l'expression de $B(U, \tilde{U})$, on obtient

$$B(U, U) = \alpha \|u_x\|_{L^2}^2 + \lambda \|u - \varphi\|_{L^2}^2 + k \|s - \xi - \varphi_x\|_{L^2}^2 + b \|\xi_x\|_{L^2}^2 + b \|s_x\|_{L^2}^2 + \gamma \|s\|_{L^2}^2.$$

Puisque tous les paramètres physiques α, λ, k, b et γ sont strictement positifs, tous les termes de cette somme sont positifs.

Rappelons que la norme sur l'espace V est définie par

$$\|U\|_V^2 = \|u_x\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\xi_x\|_{L^2}^2 + \|s_x\|_{L^2}^2.$$

Pour minorer $B(U, U)$ par $\|U\|_V^2$, il est nécessaire de faire apparaître explicitement le terme $\|\varphi_x\|_{L^2}^2$, qui ne figure pas directement dans l'expression. En utilisant l'inégalité algébrique élémentaire $\|a\|_{L^2}^2 \leq 2\|a - b\|_{L^2}^2 + 2\|b\|_{L^2}^2$, on peut écrire

$$\|\varphi_x\|_{L^2}^2 = \|\varphi_x - (s - \xi) + (s - \xi)\|_{L^2}^2 \leq 2\|s - \xi - \varphi_x\|_{L^2}^2 + 2\|s - \xi\|_{L^2}^2.$$

D'après l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Poincaré, le second terme se majore comme suit

$$\|s - \xi\|_{L^2}^2 \leq 2\|s\|_{L^2}^2 + 2\|\xi\|_{L^2}^2 \leq 2C_p^2\|s_x\|_{L^2}^2 + 2C_p^2\|\xi_x\|_{L^2}^2.$$

En combinant ces deux inégalités, on obtient une minoration du terme lié à la rigidité k

$$k\|s - \xi - \varphi_x\|_{L^2}^2 \geq \frac{k}{2}\|\varphi_x\|_{L^2}^2 - 2kC_p^2\|s_x\|_{L^2}^2 - 2kC_p^2\|\xi_x\|_{L^2}^2.$$

En injectant cette estimation et en négligeant les termes positifs $\lambda\|u - \varphi\|_{L^2}^2$ et $\gamma\|s\|_{L^2}^2$, il vient

$$\begin{aligned} B(U, U) &\geq \alpha\|u_x\|_{L^2}^2 + b\|\xi_x\|_{L^2}^2 + b\|s_x\|_{L^2}^2 + \left(\frac{k}{2}\|\varphi_x\|_{L^2}^2 - 2kC_p^2\|s_x\|_{L^2}^2 - 2kC_p^2\|\xi_x\|_{L^2}^2 \right) \\ &\geq \alpha\|u_x\|_{L^2}^2 + \frac{k}{2}\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + (b - 2kC_p^2)\|\xi_x\|_{L^2}^2 + (b - 2kC_p^2)\|s_x\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse physique que le coefficient b est suffisamment grand tel que $b > 2kC_p^2$, tous les coefficients devant les normes de V sont strictement positifs. On pose alors

$$\beta = \min \left(\alpha, \frac{k}{2}, b - 2kC_p^2 \right) > 0. \quad (3.23)$$

Par conséquent, on en déduit directement l'inégalité suivante

$$B(U, U) \geq \beta (\|u_x\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\xi_x\|_{L^2}^2 + \|s_x\|_{L^2}^2) = \beta \|U\|_V^2.$$

Ainsi, la forme bilinéaire B est coercive sur V , ce qui achève la démonstration.

D'après le théorème de **Lax–Milgram**, il existe une unique solution telle que

$$\begin{aligned} \alpha\langle u_x, \tilde{u}_x \rangle + \lambda\langle u - \varphi, \tilde{u} \rangle - \lambda\langle u - \varphi, \tilde{\varphi} \rangle - k\langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{\varphi}_x \rangle + b\langle \xi_x, \tilde{\xi}_x \rangle - k\langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{\xi} \rangle \\ + b\langle s_x, \tilde{s}_x \rangle + k\langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{s} \rangle + \gamma\langle s, \tilde{s} \rangle = \langle g^1, \tilde{u} \rangle + \langle g^2, \tilde{\varphi} \rangle + \langle g^3, \tilde{\xi} \rangle + \langle g^4, \tilde{s} \rangle. \end{aligned}$$

En substituant $(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{s}) = (\tilde{u}, 0, 0, 0)$, $(0, \tilde{\varphi}, 0, 0)$, $(0, 0, \tilde{\xi}, 0)$ et $(0, 0, 0, \tilde{s})$ respectivement, on obtient

$$\alpha \langle u_x, \tilde{u}_x \rangle + \lambda \langle u - \varphi, \tilde{u} \rangle = \langle g^1, \tilde{u} \rangle, \quad \forall \tilde{u} \in H_0^1(0, L). \quad (3.24)$$

$$-\lambda \langle u - \varphi, \tilde{\varphi} \rangle - k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{\varphi}_x \rangle = \langle g^2, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \forall \tilde{\varphi} \in H_0^1(0, L). \quad (3.25)$$

$$b \langle \xi_x, \tilde{\xi}_x \rangle - k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{\xi} \rangle = \langle g^3, \tilde{\xi} \rangle, \quad \forall \tilde{\xi} \in H_0^1(0, L). \quad (3.26)$$

$$b \langle s_x, \tilde{s}_x \rangle + k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{s} \rangle + \gamma \langle s, \tilde{s} \rangle = \langle g^4, \tilde{s} \rangle, \quad \forall \tilde{s} \in H_0^1(0, L). \quad (3.27)$$

En intégrant par parties, il vient

$$\alpha \langle u_{xx}, \tilde{u} \rangle = \lambda \langle u - \varphi, \tilde{u} \rangle - \langle g^1, \tilde{u} \rangle, \quad \forall \tilde{u} \in H_0^1(0, L). \quad (3.28)$$

$$-\lambda \langle u - \varphi, \tilde{\varphi} \rangle + k \langle s_x - \xi_x - \varphi_{xx}, \tilde{\varphi} \rangle = \langle g^2, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \forall \tilde{\varphi} \in H_0^1(0, L). \quad (3.29)$$

$$b \langle \xi_{xx}, \tilde{\xi} \rangle = -k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{\xi} \rangle - \langle g^3, \tilde{\xi} \rangle, \quad \forall \tilde{\xi} \in H_0^1(0, L). \quad (3.30)$$

$$b \langle s_{xx}, \tilde{s} \rangle = k \langle s - \xi - \varphi_x, \tilde{s} \rangle + \gamma \langle s, \tilde{s} \rangle - \langle g^4, \tilde{s} \rangle, \quad \forall \tilde{s} \in H_0^1(0, L). \quad (3.31)$$

D'après (3.28), nous pouvons isoler le terme de dérivation d'ordre supérieur

$$\alpha u_{xx} = -\lambda(\varphi - u) - g^1.$$

Puisque $(\varphi - u) \in H_0^1(0, L) \subset L^2(0, L)$ et $g^1 \in L^2(0, L)$, il s'ensuit que $u_{xx} \in L^2(0, L)$, d'où $u \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$.

De la même manière, en isolant successivement les dérivées secondes dans (3.30) et (3.31), on obtient

$$b\xi_{xx} = -k(s - \xi - \varphi_x) - g^3 \in L^2(0, L) \implies \xi \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L),$$

$$bs_{xx} = k(s - \xi - \varphi_x) + \gamma s - g^4 \in L^2(0, L) \implies s \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L).$$

Enfin, l'équation (3.29) peut se réécrire sous la forme

$$k\varphi_{xx} = k(s_x - \xi_x) + \lambda(\varphi - u) - g^2.$$

Comme $s_x, \xi_x \in L^2(0, L)$, $(\varphi - u) \in L^2(0, L)$ et $g^2 \in L^2(0, L)$, on en déduit que $\varphi_{xx} \in L^2(0, L)$, ce qui donne $\varphi \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$. On a donc $U = (u, \varphi, \xi, s, v, \psi, \eta, r)^T \in \mathcal{D}(A)$ solution de $AU = F$ pour tout $F \in \mathcal{H}$, d'où $0 \in \rho(A)$.

Par conséquent, d'après la théorie des opérateurs linéaires, l'opérateur A est surjectif (c'est-à-dire $\mathcal{R}(I - A) = \mathcal{H}$), ce qui confirme la maximalité de l'opérateur dissipatif A . Le théorème de Lumer-Phillips assure alors que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions $(T(t))_{t \geq 0}$ sur $\mathcal{H}$. Enfin, le théorème de Lumer-Phillips garantit l'existence et l'unicité de la solution forte du système, ce qui achève la démonstration.

Théorème 3.1.2. Pour tout $U_0 \in \mathcal{H}$, il existe une unique solution faible U du problème (3.6) satisfaisant

$$U \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[; \mathcal{H}).$$

De plus, si $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, alors U est une solution forte du système vérifiant la régularité suivante

$$U \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[; \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1([0, +\infty[; \mathcal{H}).$$

□

3.2 Stabilité exponentielle

Théorème 3.2.1 (Gearhart-Huang-Prüss). Soit $S(t) = e^{At}$ un C_0 -semigroupe de contractions sur un espace de Hilbert H . Alors, $S(t)$ est exponentiellement stable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vraies

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}), \text{ l'ensemble résolvant de } \mathcal{A}.$$

$$\overline{\lim_{|\beta| \rightarrow \infty}} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Lemme 3.2.1. Soit A l'opérateur défini en (3.5), alors, Si $0 \in \rho(A)$, alors il existe un voisinage de l'origine sur l'axe imaginaire contenu dans $\rho(A)$. C'est-à-dire

$$\left\{ i\beta, |\beta| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \right\} \subset \rho(A).$$

Démonstration. Pour commencer, on vérifie que l'opérateur $(i\beta I - \mathcal{A})$ admet un inverse borné. Puisque $\mathcal{A}$ est inversible par hypothèse, on peut factoriser cette expression sous la forme suivante

$$i\beta I - \mathcal{A} = (i\beta \mathcal{A}^{-1} - I) \mathcal{A}.$$

D'après le théorème de la série de Neumann, si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ avec $\|T\| < 1$, alors l'opérateur $(I - T)$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

En posant $T = i\beta \mathcal{A}^{-1}$, l'inversibilité de l'opérateur $(I - T)$ est ainsi assurée dès que

$$\|T\| = \|i\beta \mathcal{A}^{-1}\| = |\beta| \|\mathcal{A}^{-1}\| < 1,$$

ce qui équivaut à la condition suivante

$$|\beta| < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}.$$

Par conséquent, cela signifie que λ doit appartenir à l'intervalle ouvert

$$\beta \in]-\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}[.$$

Par conséquent, l'opérateur $(i\beta I - \mathcal{A})$ est inversible pour toutes les valeurs de β satisfaisant cette condition. D'où

$$\{i\beta \in i\mathbb{R} \mid \beta \in]-\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}[\} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Pour la deuxième partie, soit

$$M = \sup \{ \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| \mid |\beta| \leq \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \} < \infty.$$

Pour $|\beta_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$, l'identité suivante est satisfaite en ajoutant et retranchant le terme $i\beta_0 I$

$$i\beta I - \mathcal{A} = i\beta I - \mathcal{A} + i\beta_0 I - i\beta_0 I.$$

En regroupant les termes de manière appropriée, il vient

$$i\beta I - \mathcal{A} = (i\beta_0 I - \mathcal{A}) + i(\beta - \beta_0)I.$$

En mettant l'opérateur $(i\beta_0 I - \mathcal{A})$ en facteur, on obtient l'expression suivante

$$i\beta I - \mathcal{A} = (i\beta_0 I - \mathcal{A}) [I + i(\beta - \beta_0)(i\beta_0 I - \mathcal{A})^{-1}].$$

L'inversibilité de l'opérateur $(i\beta I - \mathcal{A})$ se réduit ainsi à celle du terme

$$I + i(\beta - \beta_0)(i\beta_0 I - \mathcal{A})^{-1}.$$

D'après le lemme de Neumann, cette inversibilité est assurée dès que la condition suivante sur la norme est satisfaite

$$\|i(\beta - \beta_0)(i\beta_0 I - \mathcal{A})^{-1}\| < 1.$$

En utilisant les propriétés de la norme d'un opérateur linéaire borné, cela conduit à la condition sur les modules

$$|\beta - \beta_0| \| (i\beta_0 I - \mathcal{A})^{-1} \| < 1.$$

En utilisant la définition de la borne supérieure M , la condition suffisante précédente devient

$$|\beta - \beta_0| M < 1 \implies |\beta - \beta_0| < \frac{1}{M}.$$

D'autre part, d'après l'inégalité triangulaire inverse, on sait que $|\beta| - |\beta_0| \leq |\beta - \beta_0|$. On en déduit alors

$$|\beta| - |\beta_0| < \frac{1}{M}.$$

On définit ainsi le nouveau domaine pour β par

$$|\beta| < |\beta_0| + \frac{1}{M}.$$

En choisissant spécifiquement β_0 sur la frontière du domaine précédent, c'est-à-dire $|\beta_0| = \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$, il vient Par prolongement, on a

$$\sup \left\{ \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| \mid |\beta| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \right\} = M < \infty.$$

Par l'absurde, supposons que

$$\sup \left\{ \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| \mid \beta \in \mathbb{R}, |\beta| > \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \right\} = \infty.$$

Alors, il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \leq |\omega| < \infty$ vérifiant

$$\{i\beta \mid |\beta| < |\omega|\} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad \text{et} \quad \sup \left\{ \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| \mid |\beta| < |\omega| \right\} = \infty.$$

Il existe donc une suite $(\beta^n) \subset \mathbb{R}$ telle que

$$\beta^n \longrightarrow \omega \quad \text{avec} \quad |\beta^n| < |\omega|.$$

Par conséquent, il existe une suite d'éléments $(U^n) \subset D(\mathcal{A})$ avec $\|U^n\|_{\mathcal{H}} = 1$ telle que

$$\|(i\beta^n I - \mathcal{A})U^n\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Par conséquent, l'opérateur $[I + i(\beta - \beta_0)(i\beta_0 I - \mathcal{A})^{-1}]$ est inversible pour tout β appartenant à l'intervalle ouvert suivant

$$\beta \in \left] - \left(\frac{1}{M} + \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \right), \frac{1}{M} + \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \right[.$$

Ainsi, on en déduit l'inclusion suivante dans l'ensemble de résolvante $\rho(\mathcal{A})$

$$\left\{ i\beta \in i\mathbb{R} \mid |\beta| < \frac{1}{M} + \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \right\} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

En utilisant la définition de l'opérateur L , on obtient ce système

$$i\beta^n u^n - w^n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(0, L). \quad (3.32)$$

$$i\beta^n w^n - \alpha u_{xx}^n - \lambda(\varphi^n - u^n) + \mu_1 w^n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.33)$$

$$i\beta^n \varphi^n - \phi^n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(0, L). \quad (3.34)$$

$$i\beta^n \phi^n + \frac{1}{\rho_1} [k(s^n - \xi^n - \varphi_x^n)_x + \lambda(\varphi^n - u^n) + \mu_2 \phi^n] \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.35)$$

$$i\beta^n \xi^n - \eta^n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(0, L). \quad (3.36)$$

$$i\beta^n \eta^n + \frac{1}{\rho_2} [-b\xi_{xx}^n - k(s^n - \xi^n - \varphi_x^n) + \mu_3 \eta^n] \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.37)$$

$$i\beta^n s^n - z^n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(0, L). \quad (3.38)$$

$$i\beta^n z^n + \frac{1}{\rho_2} [-bs_{xx}^n + k(s^n - \xi^n - \varphi_x^n) + \gamma s^n + \mu_4 z^n] \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.39)$$

$$\operatorname{Re}\langle (i\lambda^n I - \mathcal{A})U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0$$

Puisque la suite (U^n) est bornée et $(i\beta^n I - \mathcal{A})U^n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{H}$, on en déduit que

$$\operatorname{Re}\langle (i\beta^n I - \mathcal{A})U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}} = -\mu_1 \|w^n\|^2 - \mu_2 \|\phi^n\|^2 - \mu_3 \|\eta^n\|^2 - \mu_4 \|z^n\|^2 \rightarrow 0.$$

Comme il s'agit d'une somme de termes négatifs qui tend vers zéro, chaque terme doit tendre vers zéro individuellement. On obtient alors

$$w^n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.40)$$

$$\phi^n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.41)$$

$$\eta^n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.42)$$

$$z^n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.43)$$

En utilisant (3.32) et (3.40), on a

$$i\beta^n u^n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L).$$

Avec l'utilisation de $\beta^n \rightarrow \omega$, on trouve

$$u^n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.44)$$

Il reste à montrer que $u^n \rightarrow 0$ dans $H_0^1(0, L)$. En remplaçant (3.41) dans (3.34), on obtient

$$\varphi^n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.45)$$

En remplaçant (3.42) dans (3.36), on obtient

$$\xi^n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.46)$$

En remplaçant (3.43) dans (3.38), on obtient

$$s^n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.47)$$

En effectuant le produit scalaire dans $L^2(0, L)$ entre l'équation (3.33) et u^n , il vient

$$\langle i\beta^n w^n - \alpha u_{xx}^n - \lambda(\varphi^n - u^n) + \mu_1 w^n, u^n \rangle \longrightarrow 0.$$

Par linéarité du produit scalaire, cette expression se développe comme suit

$$i\beta^n \langle w^n, u^n \rangle - \alpha \langle u_{xx}^n, u^n \rangle - \lambda \langle \varphi^n - u^n, u^n \rangle + \mu_1 \langle w^n, u^n \rangle \longrightarrow 0.$$

En tenant compte des estimations asymptotiques (3.40), (3.44) et (3.45), on en déduit

que

$$-\alpha \langle u_{xx}^n, u^n \rangle \longrightarrow 0.$$

Finalement, par une intégration par parties et en utilisant les conditions aux limites

$$\alpha \|u_x^n\|_{L^2(0,L)}^2 \longrightarrow 0.$$

Ensuite,

$$u_x^n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L).$$

Puisque $u^n \longrightarrow 0$ dans $L^2(0, L)$ et $u_x^n \longrightarrow 0$ dans $L^2(0, L)$, alors

$$u^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(0, L). \quad (3.48)$$

On prend le produit scalaire entre (3.35) et φ^n dans $L^2(0, L)$

$$\left\langle i\beta^n \phi^n + \frac{1}{\rho_1} [\kappa(s^n - \xi^n - \varphi_x^n)_x + \lambda(\varphi^n - u^n) + \mu_2 \phi^n], \varphi^n \right\rangle \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L)$$

$$\begin{aligned} \langle i\beta^n \phi^n, \varphi^n \rangle + \left\langle \frac{1}{\rho_1} \kappa(s^n - \xi^n - \varphi_x^n)_x, \varphi^n \right\rangle + \left\langle \frac{\lambda}{\rho_1} (\varphi^n - u^n), \varphi^n \right\rangle \\ + \left\langle \frac{1}{\rho_1} \mu_2 \phi^n, \varphi^n \right\rangle \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L) \end{aligned}$$

D'après (3.41), (3.44) et (3.45) on a

$$\left\langle \frac{1}{\rho_1} \kappa(s^n - \xi^n - \varphi_x^n)_x, \varphi^n \right\rangle \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L)$$

Par intégration par parties, on obtient

$$-\left\langle \frac{1}{\rho_1} \kappa s^n, \varphi_x^n \right\rangle + \frac{1}{\rho_1} \langle \xi^n, \varphi_x^n \rangle + \frac{1}{\rho_1} \langle \varphi_x^n, \varphi_x^n \rangle \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L)$$

D'après (3.46) et (3.47) on a

$$\frac{1}{\rho_1} \langle \varphi_x^n, \varphi_x^n \rangle \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, L)$$

Ensuite

$$\varphi_x^n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, L) \quad (3.49)$$

Puisque $\varphi^n \rightarrow 0$ dans $L^2(0, L)$ et $\varphi_x^n \rightarrow 0$ dans $L^2(0, L)$, alors

$$\varphi^n \rightarrow 0 \text{ dans } H_0^1(0, L). \quad (3.50)$$

On prend le produit scalaire entre (3.37) et ξ^n dans $L^2(0, L)$,

$$\left\langle i\beta^n \eta^n + \frac{1}{\rho_2} [-b\xi_{xx}^n - k(s^n - \xi^n - \varphi_x^n) + \mu_3 \eta^n], \xi^n \right\rangle \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, L).$$

On obtient

$$\langle i\beta^n \eta^n, \xi^n \rangle - \left\langle \frac{b}{\rho_2} \xi_{xx}^n, \xi^n \right\rangle - \left\langle \frac{k}{\rho_2} (s^n - \xi^n - \varphi_x^n), \xi^n \right\rangle + \left\langle \frac{\mu_3}{\rho_2} \eta^n, \xi^n \right\rangle \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, L).$$

D'après (3.46), (3.47) et (3.49), on a

$$- \left\langle \frac{b}{\rho_2} \xi_{xx}^n, \xi^n \right\rangle \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, L).$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\frac{b}{\rho_2} \langle \xi_x^n, \xi_x^n \rangle \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, L).$$

Ensuite,

$$\xi_x^n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, L).$$

Puisque $\xi^n \rightarrow 0$ dans $L^2(0, L)$ et $\xi_x^n \rightarrow 0$ dans $L^2(0, L)$, alors

$$\xi^n \rightarrow 0 \text{ dans } H_0^1(0, L). \quad (3.51)$$

On prend le produit scalaire entre (3.39) et s^n dans $L^2(0, L)$,

$$\left\langle i\beta^n z^n + \frac{1}{\rho_2} [-bs_{xx}^n + k(s^n - \xi^n - \varphi_x^n) + \gamma s^n + \mu_4 z^n], s^n \right\rangle \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L).$$

On obtient

$$\langle i\beta^n z^n, s^n \rangle - \frac{b}{\rho_2} \langle s_{xx}^n, s^n \rangle + \frac{k}{\rho_2} \langle s^n - \xi^n - \varphi_x^n, s^n \rangle + \frac{\gamma}{\rho_2} \langle s^n, s^n \rangle + \frac{\mu_4}{\rho_2} \langle z^n, s^n \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L).$$

D'après (3.43), (3.47) et (3.49), on a

$$-\frac{b}{\rho_2} \langle s_{xx}^n, s^n \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L).$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\frac{b}{\rho_2} \langle s_x^n, s_x^n \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L).$$

Ensuite,

$$s_x^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L).$$

Puisque $s^n \longrightarrow 0$ dans $L^2(0, L)$ et $s_x^n \longrightarrow 0$ dans $L^2(0, L)$, alors

$$s^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H_0^1(0, L). \quad (3.52)$$

En regroupant tous ces résultats (3.48), (3.50), (3.51) et (3.52)), Cela signifie que $\|U^n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$, ce qui contredit directement notre hypothèse de départ $\|U^n\|_{\mathcal{H}} = 1$. $\square$

Lemme 3.2.2. l'opérateur A défini dans (3.5) satisfait

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})\|_{\mathcal{H}} < \infty. \quad (3.53)$$

Démonstration. Si (3.53) n'est pas vraie, c'est-à-dire

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})\|_{\mathcal{H}} = \infty.$$

il existe une suite $\beta^n \rightarrow \infty$, sans perte de généralité $\beta^n > 0$, une suite de vecteurs

complexes $F^n \in \mathcal{H}$ et une suite correspondante $U^n = (u^n, w^n, \varphi^n, \phi^n, \xi^n, \eta^n, s^n, z^n)^T \in D(\mathcal{A})$, avec $\|U^n\|_{\mathcal{H}} = 1$,

$$U^n = (i\beta I - \mathcal{A})^{-1}F^n, \quad (3.54)$$

telle que,

$$\frac{\|(i\beta^n I - \mathcal{A})^{-1}F^n\|_{\mathcal{H}}}{\|F^n\|_{\mathcal{H}}} > n, \quad \forall n > n_0,$$

ou, de manière équivalente

$$\|F^n\|_{\mathcal{H}} < \frac{\|(i\beta^n I - \mathcal{A})^{-1}F^n\|_{\mathcal{H}}}{n} = \frac{\|U^n\|_{\mathcal{H}}}{n} = \frac{1}{n}, \quad \forall n > n_0,$$

d'où il s'ensuit que $F^n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{H}$ et d'après (3.54),

$$\|(i\beta^n I - \mathcal{A})U^n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.55)$$

En prenant le produit scalaire de l'équation $(i\beta I - \mathcal{A})U^n = F^n$ avec le vecteur U^n dans l'espace $\mathcal{H}$, on obtient

$$\langle (i\beta I - \mathcal{A})U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Par la propriété de linéarité du produit scalaire, on écrit

$$\langle i\beta^n I U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}} - \langle \mathcal{A}U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}}$$

Comme $\|U^n\|_{\mathcal{H}} = 1$, le premier terme se simplifie et l'équation devient

$$i\beta^n \|U^n\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle \mathcal{A}U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}}$$

En prenant la partie réelle de l'équation et en utilisant la définition de la dissipation donnée par (3.5), nous obtenons

$$\mu_1 \|w^n\|^2 + \mu_2 \|\phi^n\|^2 + \mu_3 \|\eta^n\|^2 + \mu_4 \|z^n\|^2 = \operatorname{Re} \langle F^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Comme U^n est borné ($\|U^n\|_{\mathcal{H}} = 1$) et $F^n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{H}$, on a

$$\operatorname{Re}\langle F^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Par positivité des termes ($\mu_i > 0$), on en déduit

$$w^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L). \quad (3.56)$$

$$\phi^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L). \quad (3.57)$$

$$\eta^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L). \quad (3.58)$$

$$z^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L). \quad (3.59)$$

D'après(3.55), on obtient les relations suivantes

$$i\beta^n u^n - w^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } H_0^1(0, L). \quad (3.60)$$

$$i\beta^n w^n - \alpha u_{xx}^n - \lambda(\varphi^n - u^n) + \mu_1 w^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L). \quad (3.61)$$

$$i\beta^n \varphi^n - \phi^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } H_0^1(0, L). \quad (3.62)$$

$$i\beta^n \phi^n + \frac{1}{\rho_1} [k(s^n - \xi^n - \varphi_x^n)_x + \lambda(\varphi^n - u^n) + \mu_2 \phi^n] \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L). \quad (3.63)$$

$$i\beta^n \xi^n - \eta^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } H_0^1(0, L). \quad (3.64)$$

$$i\beta^n \eta^n + \frac{1}{\rho_2} [-b\xi_{xx}^n - k(s^n - \xi^n - \varphi_x^n) + \mu_3 \eta^n] \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L). \quad (3.65)$$

$$i\beta^n s^n - z^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } H_0^1(0, L). \quad (3.66)$$

$$i\beta^n z^n + \frac{1}{\rho_2} [-bs_{xx}^n + k(s^n - \xi^n - \varphi_x^n) + \gamma s^n + \mu_4 z^n] \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L). \quad (3.67)$$

En injectant les relations (3.56) (3.57) (3.58) et (3.60) respectivement dans les équations (3.60) (3.62) (3.64) et (3.66) on obtient

$$\beta^n u^n \rightarrow 0, \quad \beta^n \varphi^n \rightarrow 0, \quad \beta^n \xi^n \rightarrow 0, \quad \beta^n s^n \rightarrow 0.$$

Comme $|\beta^n| \rightarrow \infty$, alors on a $u^n = \frac{1}{\beta^n} \times \beta^n u^n \rightarrow 0$

puisque $\frac{1}{\beta^n} \rightarrow 0$ et $\beta^n u^n \rightarrow 0$

Donc

$$u^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L). \quad (3.68)$$

De la même manière pour φ^n, ξ^n, s^n , d'où

$$\varphi^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L).$$

$$\xi^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L).$$

$$s^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, L).$$

En utilisant le produit scalaire de l'équation (3.61) avec u^n

$$\langle i\beta^n w^n - \alpha u_{xx}^n, u^n \rangle \rightarrow 0.$$

$$= \int_0^L i\beta^n w^n u^n dx + \int_0^L -\alpha u_{xx}^n u^n dx \rightarrow 0.$$

Par intégration par parties, on trouve

$$= \langle w^n, i\beta^n u^n \rangle + \alpha \int_0^L |u_x^n|^2 dx \rightarrow 0.$$

D'après l'équation (3.60), on a $u^n \sim \frac{w^n}{i\beta^n}$

$$= \langle w^n, w^n \rangle + \alpha \|u_x^n\|_{L^2}^2 \rightarrow 0.$$

$$= \|w^n\|_{L^2}^2 + \alpha \|u_x^n\|_{L^2}^2 \rightarrow 0.$$

Donc $\|w^n\|_{L^2} \rightarrow 0$ et

$$\|u_x^n\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

En utilisant le produit scalaire de l'équation (3.63) avec φ^n

$$\langle i\beta^n \phi^n + \frac{k}{\rho_1} [s^n - \xi^n - \varphi_x^n]_x, \varphi^n \rangle \rightarrow 0.$$

$$\langle i\beta^n \phi^n, \varphi^n \rangle + \frac{k}{\rho_1} \langle [s^n - \xi^n - \varphi_x^n]_x, \varphi^n \rangle \rightarrow 0.$$

$$= \int_0^L i\beta^n \phi^n \bar{\varphi}^n dx + \frac{k}{\rho_1} \int_0^L [s^n - \xi^n - \varphi_x^n]_x \varphi^n dx \rightarrow 0.$$

D'après l'équation (3.62), on a $\varphi^n \sim \frac{\phi^n}{i\beta^n}$

$$\Rightarrow \|\phi^n\|_{L^2}^2 - \frac{k}{\rho_1} \int_0^L [s^n - \xi^n - \varphi_x^n] \varphi_x^n dx \rightarrow 0.$$

$$= \|\phi^n\|_{L^2}^2 - \frac{k}{\rho_1} \int_0^L s^n \bar{\varphi}_x^n dx + \frac{k}{\rho_1} \int_0^L \xi^n \varphi_x^n dx + \frac{k}{\rho_1} \|\varphi_x^n\|_{L^2}^2 \rightarrow 0.$$

Puisque $s^n, \xi^n \rightarrow 0$ et φ_x^n est bornée, tous les produits scalaires tendent vers zéro, il reste

$$\Rightarrow \|\varphi_x^n\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

En utilisant le produit scalaire de l'équation (3.65) avec ξ^n

$$\langle i\beta^n \eta^n + \frac{1}{\rho_2} [-b\xi_{xx}^n - k(s^n - \xi^n - \varphi_x^n) + \mu_3 \eta^n], \xi^n \rangle \rightarrow 0.$$

$$= \int_0^L i\beta^n \eta^n \bar{\xi}^n dx + \int_0^L \frac{1}{\rho_2} [-b\xi_{xx}^n - k(s^n - \xi^n - \varphi_x^n) + \mu_3 \eta^n] \xi^n dx \rightarrow 0.$$

D'après l'équation (3.64), on a $\xi^n \sim \frac{\eta^n}{i\beta^n}$

Par conséquent, en utilisant l'intégration par parties, on trouve

$$= \|\eta^n\|_{L^2}^2 + \frac{b}{\rho_2} \int_0^L |\xi_x^n|^2 dx - \frac{k}{\rho_2} \int_0^L [s^n - \xi^n - \varphi_x^n] \xi^n dx + \frac{\mu_3}{\rho_2} \int_0^L \eta^n \xi^n dx \rightarrow 0.$$

$$= \|\eta^n\|_{L^2}^2 + \frac{b}{\rho_2} \|\xi_x^n\|_{L^2}^2 - \frac{k}{\rho_2} \int_0^L s^n \xi^n dx + \frac{k}{\rho_2} \int_0^L \xi^n \xi^n dx + \frac{k}{\rho_2} \int_0^L \varphi_x^n \xi^n dx + \frac{\mu_3}{\rho_2} \int_0^L \eta^n \xi^n dx \rightarrow 0.$$

Puisque $s^n, \xi^n, \varphi_x^n \rightarrow 0$ dans $L^2(0, L)$ et η^n est bornée, tous les produits scalaires tendent vers zéro, il reste

$$\|\xi_x^n\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

En utilisant le produit scalaire de l'équation (3.67) avec s^n

$$\langle i\beta^n z^n + \frac{1}{\rho_2} [-bs_{xx}^n + k(s^n - \xi^n - \varphi_x^n) + \gamma s^n + \mu_4 z^n], s^n \rangle \rightarrow 0.$$

$$= \int_0^L i\beta^n z^n s^n dx + \int_0^L \frac{1}{\rho_2} [-bs_{xx}^n + k(s^n - \xi^n - \varphi_x^n) + \gamma s^n + \mu_4 z^n] s^n dx \rightarrow 0$$

D'après l'équation (3.66), on a $s^n \sim \frac{z^n}{i\beta^n}$

Par intégration par parties, on trouve

$$= \|z^n\|_{L^2}^2 + \frac{b}{\rho_2} \int_0^L |s_x^n|^2 dx + \frac{k}{\rho_2} \int_0^L [s^n - \xi^n - \varphi_x^n] s^n dx + \frac{\gamma}{\rho_2} \int_0^L s^n s^n dx + \frac{\mu_4}{\rho_2} \int_0^L z^n s^n dx \rightarrow 0.$$

$$= \|z^n\|_{L^2}^2 + \frac{b}{\rho_2} \|s_x^n\|_{L^2}^2 + \frac{k}{\rho_2} \int_0^L s^n s^n dx - \frac{k}{\rho_2} \int_0^L \xi^n s^n dx - \frac{k}{\rho_2} \int_0^L \varphi_x^n s^n dx + \frac{\gamma}{\rho_2} \|s^n\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_4}{\rho_2} \int_0^L z^n s^n dx \rightarrow 0.$$

Puisque $s^n, \varphi_x^n, \xi^n \rightarrow 0$ dans $L^2(0, L)$ et z^n est bornée, tous les produits scalaires tendent vers zéro, il reste

$$\|s_x^n\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

D'où on obtient la convergence suivante

$$u^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(0, L). \quad (3.69)$$

$$w^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.70)$$

$$\varphi^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(0, L). \quad (3.71)$$

$$\phi^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.72)$$

$$\xi^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(0, L). \quad (3.73)$$

$$\eta^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.74)$$

$$s^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(0, L). \quad (3.75)$$

$$z^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (3.76)$$

Par conséquent, d'après les équations (3.69) et (3.70), (3.71), (3.72), (3.73), (3.74), (3.75)

et (3.76), on trouve que

$$\|U^n\|_H \rightarrow 0$$

ce qui contredit $\|U^n\|_H = 1$.

□

Bibliographie

- [1] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Application*, Masson, Paris, 1983.
- [2] B. P. Rynne, M. A. Youngson, *Linear Functional Analysis*, Springer-Verlag London Limited, 2008.
- [3] Z. Liu, S. Zheng, *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, Chapman & Hall, 1999.
- [4] S. W. Hansen, Control and estimation of distributed parameter systems : Nonlinear Phenomena, *International Series of Numerical Analysis*, 118 (1994), 143–170.
- [5] S. W. Hansen, R. Spies, Structural damping in a laminated beams due to interfacial slip, *Journal of Sound and Vibration*, 204 (1997), 183–202.
- [6] C. A. Raposo, Exponential stability for a structure with interfacial slip and frictional damping, *Applied Mathematics Letters*, 53 (2016), 85–91.
- [7] J. M. Wang, G. Q. Xu, S. P. Yung, Exponential stabilization of laminated beams with structural damping and boundary feedback controls, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44 (2005), 1575–1597.
- [8] I. Bochicchio, M. Campo, J. R. Fernández, M. G. Naso, Analysis of a thermoelastic Timoshenko beam model, *Acta Mechanica*, 231 (2020), 4111–4127.
- [9] C. A. Raposo, Suspension bridge model with laminated beam, *Mathematica Moravica*, 2023.
- [10] A. C. Lazer, P. J. McKenna, Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges : data, a mathematical model and unproved conjectures, *SIAM Review*, 32 (1990), 537–578.
- [11] C. Raposo, Suspension bridge model with laminated beam, *Mathematica Moravica*, 27 (2023), 115–124.

- [12] I. I. Vrabie, C_0 -Semigroups and applications, Elsevier Science B. V, 2003. 46

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions l'existence, l'unicité et la stabilité de deux systèmes mathématiques, en passant d'un modèle préliminaire simple à un modèle plus complexe de ponts suspendus.

Le **premier système** constitue un cadre introductif permettant de tester la méthodologie adoptée et d'établir les propriétés d'existence, d'unicité et de stabilité des solutions.

Le **second système** concerne la modélisation mathématique des ponts suspendus équipés de poutres laminées, en s'appuyant sur les travaux de Raposo (2023), afin d'analyser les interactions structurelles et garantir l'équilibre du système.

Dans les deux cas, le théorème de Lumer-Phillips est utilisé dans le cadre de la théorie des semi-groupes pour établir l'existence et l'unicité des solutions dans des espaces de Sobolev appropriés. La stabilité exponentielle est obtenue grâce au théorème de Gearhart-Prüss via une analyse spectrale des opérateurs dissipatifs.

Mots clés : ponts suspendus, poutres laminées, stabilité exponentielle, théorie des semi-groupes, Lumer-Phillips, Gearhart-Prüss.

Abstract

In this dissertation, we study the existence, uniqueness, and stability of two mathematical systems, progressing from a simple preliminary model to a more complex suspension bridge framework.

The **first system** serves as an introductory model used to test the proposed methodology and establish key analytical properties.

The **second system** focuses on the mathematical modeling of suspension bridges equipped with laminated beams, based on the work of Raposo (2023), analyzing structural interactions to ensure equilibrium.

In both cases, the Lumer-Phillips theorem within semigroup theory is applied to establish existence and uniqueness in appropriate Sobolev spaces. The Gearhart-Prüss theorem is then used to prove exponential stability via spectral analysis of dissipative operators.

Key words: suspension bridges, laminated beams, exponential stability, semigroup theory, Lumer-Phillips theorem, Gearhart-Prüss theorem.

ملخص

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة مسائل الوجود والوحدانية والاستقرار لنظامين رياضيين، حيث انتقلنا من نموذج تمهيدي بسيط إلى نموذج أكثر تعقيداً يتعلق بالجسور المعلقة. يمثل **النظام الأول** نموذجاً أولياً يهدف إلى اختبار المنهجية المعتمدة وإثبات خصائص الوجود والوحدانية والاستقرار.

أما **النظام الثاني** فيتعلق بالنمذجة الرياضية للجسور المعلقة المزودة بعوارض صفائحية، اعتماداً على نتائج رابوسو 2023، مع تحليل التفاعل بين العناصر الإنشائية لضمان التوازن. في كلا النظامين، نستخدم نظرية لومر-فيليبس ضمن إطار نظرية أشباه الزمر لإثبات الوجود والوحدانية في فضاءات سوبوليف مناسبة، كما نستخدم نظرية جيرهارت-بريس لإثبات الاستقرار الأسّي بالاعتماد على التحليل الطيفي للمؤثرات التبديدية.

الكلمات المفتاحية: الجسور المعلقة، العوارض الصفائحية، الاستقرار الأسّي، أشباه الزمر، لومر-فيليبس، جيرهارت-بريس.