



République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique**

N° d'ordr:

N° de série:

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'ELOUED

FACULTÉ DESSCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales

Thème

**Quelques méthodes analytiques et
numériques pour la résolution de quelques
équations intégral-différentielles**

Présenté par: SOUID Isra
MERABET Rifka

Soutenu publiquement le: 07/06/2023, devant le jury composé de:

Touati Ibrahime Mouhammed Said	MCB	Univ. d'El-Oued	Président
DOUDI Nadjat	MCB	Univ. d' El-Oued	Rapporteur
Moumen Bekkouche Mohamed	MCA	Univ. d' El-Oued	Examineur

Année universitaire 2022 – 2023.

شكر وعرفان:

نحمد الله الذي وفقنا في إتمام هذا البحث العلمي، والذي
ألهمنا الصحة والعافية والعزيمة، فالحمد لله حمداً كثيراً.

تتقدم بجزيل الشكر للدكتورة

"دودي نجاة"

على ما قدمته لنا من توجيهات ومعلومات قيّمة ساهبت في
إطراء موضوع دراستنا.

إلى أعضاء لجنة المناقشة الموقرة دون أن ننسى أساتذة الكلية
ومدرسينا الذي أشرفوا على تكويننا طيلة مشوارنا
الإبتدائي إلى الأكاديمي وأفراد عائلتنا شكراً من القلب.

الإهداء:

إلى من أفضّلها على نفسي، ولم لا، فلقد ضحّت من أجلي ولم تدخر جهدا في سبيل إسعادي على الدّوام

" أمي قُرّة العين وبهجة الفؤاد "

إلى خالد الذّكر، الذي وافته المنية صاحب السيرة الطيبة

" أبي الحبيب "

إلى من أخذت بيدي إلى طريق الفلاح وأنشأتني على مقومات الإسلام

" عمتي فاطمة "

إلى إخوتي وأساتذتي ومشايخي ومن أحبنا في الله وأحببناه فيه..

أهديكم بحث تخرجي كصدقة جارية عنكم ...

رفقة مرابط

إلى أجمل الهدايا وأعظم العطايا الرّبانية إلى ملجئي الآمن آمني وآماني ومأمني

" أمي فخري وذخري "

إلى كتفي وضلعي الثابت الذي لا يميل، بطلي الأول في الحياة

" أبي عزيز قلبي "

إلى أضلعي إخوتي كلهم دون استثناء

" أحلام، ملاك، ياسين، أيوب "

إلى رفقاء المسيرة الدراسية ...

هأن التعب بوجودكم

إلى كل من يحمل في قلبه حبا

" لي ولعائلي "

إلى كل من يحمل الخير في قلبه

أهديكم عملي مع خالص الحب...

إسراء سويد

Table des matières

Notations générales	ii
Introduction	iii
1 Rappel sur les équations intégrales et intégrro-différentielles	1
1.1 Les équations intégrales (É.I)	1
1.1.1 Classification des équations intégrales	1
1.2 Relation entre les équations intégrales et les équations différentielles	4
1.3 Les équations intégrro-différentielles (É.I-D)	5
1.3.1 Classification des équations intégrro-différentielles	5
1.4 Réduction d'une équation différentielle linéaire de haut ordre à équation d'ordre inférieur	7
1.4.1 Équation du première ordre	7
1.4.2 Équation du second ordre	7
1.4.3 Équation d'autre ordre	9
2 Résolution analytique de quelques types d'équations intégrro-différentielles	10
2.1 La méthode de décomposition d'Adomian	10
2.1.1 Exemples détaillés	12
2.2 La méthode de transformation de Laplace	13
2.2.1 Exemples détaillés	15
3 Résolution numérique de quelques types d'équations intégrro-différentielles	17
3.1 Méthode polynômiale de Touchard	17
3.1.1 Polynôme de Touchard	17
3.1.2 Les dérivées des polynômes de Touchard	18
3.1.3 Représentation matricielle des polynômes de Touchard	18
3.1.4 Principe de la méthode	19

3.1.5	Problèmes détaillés	20
3.2	Méthode de Tchebyshev-Galerkin	23
3.2.1	Polynômes de Tchebyshev	23
3.2.2	Quelques propriétés de polynômes de Tchebyshev	23
3.2.3	Principe de la méthode	25
3.2.4	Représentation matricielle des Polynômes de Tchebyshev	26
3.2.5	Problèmes détaillés	27

Notations générales

u	La fonction inconnue dans l'équation intégrale.
$K(x, t)$	Noyau de l'équation intégrale.
$f(x)$	Fonction donnée.
λ	Paramètre numérique.
É.I	Équation intégrale.
É.I-D	Équation intégral-différentielle.
$[a, b]$	Intervalle réel.
L^{-1}	Opérateur intégral double.
F^{-1}	Opérateur intégral.
$\mathcal{L}$	Transformation de Laplace.
u_n	solution approchée.
$u^{(n)}$	La dérivée $n^{\text{ième}}$ de $u(x)$.
T_n	Polynôme de Touchard ou Tchebyshev d'ordre n .

Introduction

Les équations intégral-différentielles (É.I-D) jouent un rôle très important car c'est l'un des problèmes les plus appliqués dans plusieurs domaines tels que : la mécanique, les Mathématiques, la physique, la Chimie, la biologie, ...etc. Ce type d'équations a été introduit par Vito-Volterra pour la première fois dans le début des années 1900. L'équation que nous appelons équation intégral-différentielle (É.I-D) est sous la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t)u(t)dt,$$

où Ω un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension finie, λ est un paramètre numérique, $K(x, t)$ le noyau de l'équation intégrale, $f(x)$ une fonction donnée, $u(t)$ est la fonction inconnue, $u^{(n)}$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $u(x)$.

Notre présent travail s'inscrit dans le cadre de l'analyse numérique, le but est de montrer quelques méthodes analytiques et numériques pour la résolution des (É.I-D) de Volterra, pour cela on divise ce mémoire en trois chapitres :

Le premier chapitre est un rappel sur les équations intégrales (É.I) et les équations intégral-différentielles (É.I-D) linéaires et non linéaires, où nous avons présenté les types de ces équations et mis en évidence les relations entre elles.

Le deuxième chapitre contient une présentation de deux méthodes analytiques pour trouver la solution exacte de l'équation intégral-différentielle linéaire de Volterra, présentée par une méthode de calcul direct et la méthode de décomposition Adomian. Ces méthodes sont les plus utilisées par rapport aux autres méthodes.

Le troisième chapitre consiste à étudier deux méthodes numériques pour trouver des solutions approchées aux équations intégral-différentielles linéaires de Volterra. Qui sont représentés par la méthode Tchebyshev-Galerkin et la méthode de Polynômes de Touchard. Nous avons expliqué bien les algorithmes de résolution à travers des exemples résolus en détail, avec des résultats en estimation des erreurs et comparaison entre les solutions approchées et les solutions exactes, en utilisant des codes en MATLAB.

Chapitre 1

Rappel sur les équations intégrales et intégral-différentielles

Dans ce chapitre nous présentons quelques définitions des équations intégrales et équations intégral-différentielles avec leurs classifications. Aussi nous montrons la relation entre ces deux types d'équations et comment réduire l'ordre d'une équation intégral-différentielles.

1.1 Les équations intégrales (É.I)

Définition 1.1 [13] Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, s'apparaît sous le signe intégral. La forme générale d'une équation intégrale linéaire est

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x,t)u(t)dt, \quad (1.1)$$

où $h(x)$, $f(x)$ et $K(x,t)$ sont des fonctions données, la fonction $u(x)$ qui figurée à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral est l'inconnu à déterminer, λ est un paramètre réel ou complexe différent de zéro et Ω un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension finie. La fonction $K(x,t)$ est appelée noyau de l'équation intégrale.

1.1.1 Classification des équations intégrales

- Équation intégrale de Fredholm ([13])

Une équation de la forme (1.1) dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation inté-

grale linéaire de Fredholm. La forme général de cette équation est

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt. \quad (1.2)$$

i. Si $h(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = 0, \quad (1.3)$$

et elle est dite de première espèce.

ii. Si $h(x) = 1$, l'équation s'écrit

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt, \quad (1.4)$$

et elle est dite de seconde espèce.

iii. Si $h(x)$ est continue et s'annule en certains points, mais pas en tout point de $[a, b]$, l'équation est dite de troisième espèce.

Exemple 1.1

1. Exemple d'équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce

$$\cos(x) = \int_0^1 (x - t)u(t)dt.$$

2. Exemple d'équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce

$$u(x) = x^2 + x + \int_2^3 xt u(t)dt.$$

3. Exemple d'équation intégrale linéaire de Fredholm de troisième espèce

$$xu(x) = \int_0^1 x^2 t u(t)dt.$$

- Équation intégrale de Volterra ([13])

Les équations intégrales linéaires de Volterra de première espèce, de seconde espèce et de troisième espèce sont définies de la même manière précédente sauf que la borne d'intégration supérieure est variable, c'est-à-dire : $b = x$. La forme général de cette équation est

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt. \quad (1.5)$$

i. Si $h(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt = 0, \quad (1.6)$$

et elle est dite de première espèce.

ii. Si $h(x) = 1$, l'équation s'écrit

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt, \quad (1.7)$$

et elle est dite de seconde espèce.

iii. Si $h(x)$ est continue et s'annule en certains points, mais pas en tout point de $[a, b]$, l'équation est dite de troisième espèce.

Remarque 1.1 *L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation de Fredholm, il suffit de prendre de noyau $k(x, t)$ vérifiant la condition $k(x, t) = 0$ pour tout $x < t$.*

Exemple 1.2

1. $x \exp(2x - 1) = \int_0^x \exp(xt)u(t)dt.$

C'est une équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

2. $x^2 - u(x) = \int_0^x x \cos(t)u(t)dt.$

C'est une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce.

3. $(x^2 - x)u(x) = \int_0^x x \cos(t)u(t)dt.$

C'est une équation intégrale linéaire de Volterra de troisième espèce.

- Équation intégrale de Volterra-Fredholm ([13])

On appelle équation linéaire de Volterra-Fredholm une équation de la forme

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)u(t)dt.$$

Exemple 1.3 L'équation

$$u(x) = 2x^2 + 5 + \int_0^x xu(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt,$$

est une équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm.

- Équation intégrale singulière ([16])

On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites de l'intégrale sont infinies, par exemple :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^{+\infty} \sin(xt)u(t)dt,$$

ou bien le noyau devient infini au voisinage d'un ou plusieurs points de l'intervalle de l'intégration, par exemple si le noyau $k(x, t)$ de l'équation intégrale linéaire de Fredholm est écrit sous la forme suivante

$$k(x, t) = \frac{H(x, t)}{|x - t|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

avec $H(x, t)$ est une fonction bornée sur $[a, b] \times [a, b]$.

Si $\alpha = 1$ dans l'exemple précédent, $k(x, t)$ est appelé noyau de Cauchy.

Remarque 1.2

1. Si $f(x) = 0$ sur $[a, b]$, l'équation (1.2) s'écrit

$$h(x)u(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad (1.8)$$

et l'équation (1.5) s'écrit

$$h(x)u(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt. \quad (1.9)$$

On dit que ce sont des équations homogènes, sinon on dit non homogènes.

2. Une équation intégrale peut être classée comme étant une équation intégrale linéaire ou bien une équation intégrale non linéaire. Par exemple l'équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, u(t))dt.$$

C'est une équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce.

L'équation

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, t, u(t))dt.$$

C'est une équation intégrale de Fredholm non linéaire de première espèce.

1.2 Relation entre les équations intégrales et les équations différentielles

Le lemme suivant montre la relation entre les équations intégrales et les équations différentielles et le moyen de conversion entre elles.

Lemme 1.1 ([13]) Pour tout fonction u

$$\int_a^x \int_a^s u(t)dt ds = \int_a^x (x - t)u(t)dt. \quad (1.10)$$

En général, on a

$$\int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} u(x_n)dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x - x_1)^{n-1} u(x)dx_1. \quad (1.11)$$

Démonstration. Soit $g : s \longrightarrow \int_a^s u(t)dt$, on a alors

$$\int_a^x \int_a^s u(t)dt ds = \int_a^x g(s)ds = \int_a^x 1.g(s)ds,$$

par intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^x 1.g(s)ds &= [sg(s)]_a^x - \int_a^x s.g'(s)ds \\ &= xg(x) - ag(a) - \int_a^x su(s)ds \\ &= x \int_a^x u(t)dt - 0 - \int_a^x tu(t)dt \\ &= \int_a^x (x-t)u(t)dt \end{aligned}$$

La relation générale peut être démontrée par récurrence. ■

1.3 Les équations intégral-différentielles (É.I-D)

Définition 1.2 ([10]) Une équation intégral-différentielle linéaire (É.I-D) est une équation composée de deux opérations intégrales et différentielles dont la fonction inconnue est u . La forme linéaire d'une équation intégral-différentielle (É.I-D) d'ordre n est

$$u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) \dots a_n u(x) + \sum_{m=0}^s \int_E k_m(x, t) u^{(m)}(t) = f(x), \quad (1.12)$$

où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des constantes, $f(x)$, $k_m(x)$, ($m = 0, 1, \dots, s$) sont des fonctions données, $u(x)$ est la fonction cherchée.

La fonction $u(x)$ est assujettie à des conditions initiales de la forme

$$u(0) = u_0, u'(0) = u'_0, \dots, u^{(n-1)}(0) = u_0^{(n-1)}.$$

1.3.1 Classification des équations intégral-différentielles

- Équation intégral-différentielle de Fredholm

L'équation intégral-différentielle linéaire de Fredholm apparaît dans la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt,$$

où $u^{(n)}$ indique la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $u(x)$. Autres dérivées moins d'ordre peuvent apparaître avec $u^{(n)}$ sur le côté gauche. Par exemple

$$u'(x) = 2 - \frac{1}{6}x + 2 \int_0^1 xu(t)dt, \quad u(0) = 0,$$

$$u''(x) + u'(x) = x - \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

Ce sont des équations intégral-différentielles linéaires de Fredholm.

- Équation intégral-différentielle de Volterra

L'équation intégral-différentielle linéaire de Volterra apparaît dans la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt.$$

Par exemple

$$u''(x) + u'(x) = 2 - 2x - 2(\sin(x) + \cos(x)) - 2 \int_0^x tu(t)dt, \quad u(0) = -1, \quad u'(0) = 1,$$

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - x \exp(x) + \int_0^x tu(t)dt, \quad u(0) = 0.$$

Ce sont des équations intégral-différentielles linéaires de Volterra.

- Équation intégral-différentielle de Volterra-Fredholm

L'équation intégral-différentielle linéaire de Volterra-Fredholm apparaît dans la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)u(t)dt,$$

λ_1 et λ_2 sont des paramètres numériques, k_1 et k_2 les noyaux de l'équation intégrale, f est la fonction donnée et u est la fonction inconnue. Par exemple

$$u'(x) = 2 - x - \int_0^x tu(t)dt + \int_0^1 (x - 2)u(t)dt, \quad u(0) = -1.$$

C'est une équation intégral-différentielle linéaire de Volterra-Fredholm.

- Équation intégral-différentielle singulière

On dit qu'une équation intégral-différentielle singulière si l'un ou les deux hypothèses suivantes consistent dans (É.I-D)

- i. L'un ou les deux limites de l'intégration sont infinies.
- ii. Le noyau devient infinie au voisinage d'un ou plusieurs points de l'intervalle de l'intégration.

Remarque 1.3

1. L'ordre d'une (É.I-D) est l'ordre de plus haute dérivée qui apparaît dans l'opérateur différentiel.
2. Une (É.I-D) est dite ordinaire si la fonction inconnue dépende d'une seule variable, alors si dépende de deux ou plusieurs variables l'(É.I-D) est dite partielle.

1.4 Réduction d'une équation différentielle linéaire de haut ordre à équation d'ordre inférieur

1.4.1 Équation du première ordre

On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), \\ u(x_0) = u_0. \end{cases} \quad (1.13)$$

En intégrant de x_0 à x , on obtient

$$\int_{x_0}^x u'(t)dt = \int_{x_0}^x f(t, u(t))dt,$$

i.e

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t))dt. \quad (1.14)$$

D'autre part, si on a (1.14), on trouve

$$u'(x) = f(x, u(x)) \quad \text{avec} \quad u(x_0) = u_0,$$

ce qui implique (1.13). Donc (1.13) et (1.14) sont équivalentes. Parfois il y a intérêt à réduire la résolution d'une équation différentielle à la résolution d'une équation intégrale et vice-versa (Pour approfondir le sujet, voir [8]).

En générale nous avons

Problème à valeur initiale $\implies$ équation de Volterra.

Système dynamique $\implies$ équation de Volterra.

Problème aux limites $\implies$ équation de Fredholm.

1.4.2 Équation du second ordre

Exemple 1.4 ([8]) Soit à résoudre le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = g(x), \\ u(0) = \alpha, \quad u'(0) = \beta. \end{cases}$$

Modifions la variable x en y , puis intégrons de 0 à z

$$\int_0^z u''(y)dy + \int_0^z a(y)u'(y)dy + \int_0^z b(y)u(y)dy = \int_0^z g(y)dy.$$

En utilisant l'intégration par partie sur le second terme à gauche on trouve

$$[u'(y)]_0^z + [a(y)u(y)]_0^z - \int_0^z a'(y)u(y)dy + \int_0^z b(y)u(y)dy = \int_0^z g(y)dy.$$

D'après les conditions initiales, on obtient

$$u'(z) - \beta + a(z)u(z) - a(0)\alpha - \int_0^z [a'(y) - b(y)]u(y)dy = \int_0^z g(y)dy.$$

Intégrant encore une fois par rapport à z entre 0 et x , on obtient

$$[u(z)]_0^x - \beta x + \int_0^x a(z)u(z)dz - a(0)\alpha x - \int_0^x \int_0^z [a'(y) - b(y)]u(y)dydz = \int_0^x \int_0^z g(y)dydz.$$

Ceci peut être simplifié en utilisant le lemme 1.1

$$u(x) - \alpha - \beta x + \int_0^x a(y)u(y)dy - a(0)\alpha x - \int_0^x (x-y)[a'(y) - b(y)]u(y)dy = \int_0^x (x-y)g(y)dy,$$

$$u(x) + \int_0^x [a(y) - (x-y)[a'(y) - b(y)]]u(y)dy = \int_0^x (x-y)g(y)dy + [\beta + a(0)\alpha]x + \alpha.$$

Posons

$$k(x, y) = a(y) - (x-y)[a'(y) - b(y)], \quad f(x) = \int_0^x (x-y)g(y)dy + [\beta + a(0)\alpha]x + \alpha.$$

Nous ramenons l'équation à la forme suivante

$$u(x) + \int_0^x k(x, y)u(y)dy = f(x),$$

et nous obtenons une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce [8].

Exemple 1.5 ([8]) Soit l'équation différentielle

$$u'' + xu' + u = 0,$$

avec les conditions initiales

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Posons

$$u'' = \varphi(x).$$

Alors

$$u' = \int_0^x \varphi(t)dt + u'(0), \quad \text{donc} \quad u = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1.$$

Portons dans l'équation différentielle donnée, il vient

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t)dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1 = 0.$$

Donc

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)\varphi(t)dt.$$

1.4.3 Équation d'autre ordre

On considère l'équation intégral-différentielle linéaire d'ordre n

$$u^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x)u^{(n-i)}(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt = g(x).$$

Avec les conditions initiales

$$u(a) = \alpha_1, u'(a) = \alpha_2, u''(a) = \alpha_3, \dots, u^{(n-1)}(a) = \alpha_n.$$

Pour convertir une (É.I-D) d'ordre n à un système de (É.I-D) de premier ordre, on pose $z_1(x) = u(x)$, $z_2(x) = u'(x)$, ..., $z_n(x) = u^{(n-1)}(x)$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1'(x) = z_2(x), \\ z_2'(x) = z_3(x), \\ z_3'(x) = z_4(x), \\ \vdots \\ z_{n-1}'(x) = z_n(x), \\ z_n'(x) = g(x) - \sum_{i=1}^n a_i(x)z_{n+1-i}(x) - \int_a^b K(x,t)z_1(t)dt, \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales : $z_1(a) = \alpha_1, z_2(a) = \alpha_2, \dots, z_n(a) = \alpha_n$ [17].

Chapitre 2

Résolution analytique de quelques types d'équations intégral-différentielles

Dans ce chapitre nous exposons une étude analytique des équations **intégral-différentielles** linéaires de deuxième espèce, qui sont données sous la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} k(x, t)u(t)dt, \quad (2.1)$$

où $u^{(n)}(x) = \frac{d^n u}{dx^n}$. Comme l'équation indiquée dans (2.1) combine l'opérateur différentiel et l'opérateur intégral, alors il est nécessaire de définir les conditions initiales $u(0), u'(0), \dots, u^{(n-1)}(0)$ pour déterminer $u(x)$ la solution particulière de l'équation **intégral-différentielle** (2.1). Toute équation intégral-différentielle est caractérisée par l'existence d'une ou plusieurs des dérivées $u'(x), u''(x), \dots$, dehors le signe intégral.

2.1 La méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition d'Adomian (MDA) s'applique aux équations différentielles linéaires et non linéaires, équations intégrales, équations **intégral-différentielles**. La méthode utilisée a été introduite par "ADOMIAN" au début de l'année 1990 dans ses livres [1] et [2], et autres documents de recherche [3] et [4]. La méthode donne la solution dans une infinité de composants. L'idée de la méthode de décomposition Adomian transforme l'équation intégral-différentielle en une équation intégrale.

Nous considérons l'équation intégral-différentielle linéaire du second ordre et du second type (deuxième espèce).

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t)u(t)dt, \\ u(0) = b_0, u'(0) = b_1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Cela peut être fait en intégrant les deux côtés de l'équation (2.2) de 0 à x deux fois, nous obtenons

$$u(x) = b_0 + b_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left(\int_a^x k(x,t)u(t)dt \right). \quad (2.3)$$

L^{-1} est un opérateur intégral double. Maintenant, nous sommes en mesure d'appliquer la méthode de décomposition en définissant la solution $u(x)$ de l'équation (2.3) par une série

$$u(x) = \sum_{n \geq 0} u_n(x). \quad (2.4)$$

Par substitution de l'équation (2.4) dans (2.3), nous obtenons

$$\sum_{n \geq 0} u_n(x) = b_0 + b_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left(\int_a^x k(x,t) \left(\sum_{n \geq 0} u_n(t) \right) dt \right), \quad (2.5)$$

ou de façon équivalent

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_i + \dots = & b_0 + b_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left(\int_a^x k(x,t)u_0(t)dt \right) \\ & + L^{-1} \left(\int_a^x k(x,t)u_1(t)dt \right) + L^{-1} \left(\int_a^x k(x,t)u_2(t)dt \right) \\ & + \dots + L^{-1} \left(\int_a^x k(x,t)u_i(t)dt \right) + \dots \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} u_0(x) &= b_0 + b_1x + L^{-1}(f(x)), \\ u_1(x) &= L^{-1} \left(\int_a^x k(x,t)u_0(t)dt \right), \\ u_2(x) &= L^{-1} \left(\int_a^x k(x,t)u_1(t)dt \right), \\ u_3(x) &= L^{-1} \left(\int_a^x k(x,t)u_2(t)dt \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour déterminer les composantes $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots$ de la solution $u(x)$, les équations susmentionnées peuvent être écrites sous la forme de récurrence suivante

$$\begin{cases} u_0(x) = b_0 + b_1x + L^{-1}(f(x)), \\ u_{n+1}(x) = L^{-1} \left(\int_a^x k(x,t)u_n(t)dt \right), \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

En utilisant (2.6), la série obtenue converge vers la solution exacte si une telle solution existe (voir [6]).

Remarque 2.1 *Un résultat de convergence pour la technique d'Adomian est montré par M. Moussat dans [11].*

2.1.1 Exemples détaillés

Exemple 2.1 Nous voulons résoudre l'équation *intégral-différentielle* linéaire de Volterra suivante

$$\begin{cases} u''(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \\ u'(0) = 1, u(0) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Appliquons l'opérateur d'intégration L^{-1} , tel que

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \left(\int_0^s (\cdot) dt \right) ds, \quad (2.8)$$

aux deux membres de l'équation (2.7), c'est-à-dire en intégrant les deux membres de l'équation (2.7) deux fois de 0 à x , et en utilisant les conditions données, on obtient

$$u(x) = x + \frac{x^3}{3!} + L^{-1} \left(\int_0^x (x-t)u(t)dt \right). \quad (2.9)$$

En suivant le schéma de décomposition (2.6), nous trouvons

$$\begin{aligned} u_0(x) &= x + \frac{x^3}{3!}, \\ u_1(x) &= L^{-1} \left(\int_0^x (x-t)u_0(t)dt \right) \\ &= L^{-1} \left(\frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \right) \quad (\text{on pose } x=t) \\ &= \int_0^x \left(\int_0^s \left(\frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \right) dt \right) ds \\ &= \int_0^x \left((x-t) \left(\frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \right) \right) dt \\ &= \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= L^{-1} \left(\int_0^x (x-t)u_1(t)dt \right) \\ &= \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Donc, la solution finale peut être écrite comme suit

$$u(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots \quad (2.12)$$

On observe que la série est convergente vers une fonction connue, cette fonction est $\sinh(x)$. Alors la solution exacte est $u(x) = \sinh(x)$.

Exemple 2.2 On considère le problème intégral-différentielle de Volterra suivant

$$\begin{cases} u'(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

intégrant les deux côtés de (2.13) une fois de 0 à x , et en utilisant la condition initiale donnée, on obtient

$$u(x) = x - F^{-1} \left(\int_0^x u(t) dt \right). \quad (2.14)$$

F^{-1} est un opérateur intégral. En utilisant la série de décomposition (2.4) et la relation de récurrence (2.6), on obtient

$$\begin{aligned} u_0(x) &= x, \\ u_1(x) &= -F^{-1} \left(\int_0^x u_0(t) dt \right) \\ &= -\frac{x^3}{3!}, \\ u_2(x) &= F^{-1} \left(\int_0^x u_1(t) dt \right) \\ &= \frac{x^5}{5!}, \\ u_3(x) &= F^{-1} \left(\int_0^x u_2(t) dt \right) \\ &= -\frac{x^7}{7!}. \end{aligned}$$

La solution finale peut être écrite comme suit

$$u(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (2.15)$$

On observe que la série est converge vers la fonction $\sin(x)$. Alors la solution exacte est $u(x) = \sin(x)$.

Remarque 2.2

- 1- La méthode de décomposition d'Adomian peut être appliquée aux équations intégral-différentielles de Fredholm.
- 2- La méthode de décomposition d'Adomian peut être utilisée pour le traitement des équations intégral-différentielles linéaires de n'importe quel ordre.

2.2 La méthode de transformation de Laplace

La méthode de transformation de Laplace a été utilisé avant pour résoudre les équations intégrales de Volterra de première et deuxième espèce. Les propriétés de la transformée de Laplace des équations intégral-différentielles ne sont pas différentes de celles des équations différentielles ordinaires.

Définition 2.1 (*Transformée de Laplace*) La transformée de Laplace d'une fonction u est donnée par l'expression suivante

$$\mathcal{L}(u(x)) = \int_0^\infty u(x) \exp(-px) dx,$$

où le symbole $\mathcal{L}(u(x))$ veut dire la transformée de Laplace de $u(x)$.

On utilise aussi l'expression $U(p)$ pour décrire la transformée de Laplace

$$U(p) = \mathcal{L}(u(x)).$$

Dans le théorème de convolution de la transformée de Laplace, il a été dit que si le noyau $k(x, t)$ de l'équation intégrale

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) u(t) dt, \quad (2.16)$$

dépend de la différence $x - t$, il est alors appelée un noyau de différence. L'équation **intégral-différentielle** linéaire peut donc être exprimée comme suit

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x - t) u(t) dt. \quad (2.17)$$

Considérons deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ qui possèdent les conditions nécessaires de l'existence de transformée de Laplace pour chacune. Que les transformées de Laplace pour les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ est donnée par

$$\mathcal{L}(f_1(x)) = \int_0^\infty f_1(x) \exp(-px) dx = F_1(p), \quad \mathcal{L}(f_2(x)) = \int_0^\infty f_2(x) \exp(-px) dx = F_2(p). \quad (2.18)$$

Le produit de convolution de Laplace de ces deux fonctions est définie par

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x - t) f_2(t) dt, \quad (2.19)$$

ou

$$(f_2 * f_1)(x) = \int_0^x f_2(x - t) f_1(t) dt. \quad (2.20)$$

Rappelons que

$$(f_1 * f_2)(x) = (f_2 * f_1)(x). \quad (2.21)$$

On peut montrer facilement que la transformée de Laplace de la produit de convolution

$(f_1 * f_2)(x)$ est donnée par

$$\mathcal{L}(f_1 * f_2)(x) = \mathcal{L}\left(\int_0^x f_1(x - t) f_2(t) dt\right) = \mathcal{L}(f_1(x)) \mathcal{L}(f_2(x)) = F_1(p) F_2(p). \quad (2.22)$$

Pour résoudre les équations **intégral-différentielles** linéaires de Volterra en utilisant la méthode de transformée de Laplace, il est essentiel d'utiliser les transformations de Laplace des dérivées de $u(x)$. Nous pouvons facilement montrer que

$$\mathcal{L}(u^{(n)}(x)) = p^n \mathcal{L}(u(x)) - p^{n-1}u(0) - p^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0). \quad (2.23)$$

Cela donne tout simplement

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u'(x)) &= p\mathcal{L}(u(x)) - u(0) \\ &= pU(p) - u(0), \\ \mathcal{L}(u''(x)) &= p^2\mathcal{L}(u(x)) - pu(0) - u'(0) \\ &= p^2U(p) - pu(0) - u'(0), \\ \mathcal{L}(u'''(x)) &= p^3\mathcal{L}(u(x)) - p^2u(0) - pu'(0) - u''(0) \\ &= p^3U(p) - p^2u(0) - pu'(0) - u''(0), \\ \mathcal{L}(u^{(4)}(x)) &= p^4\mathcal{L}(u(x)) - p^3u(0) - p^2u'(0) - pu''(0) - u'''(0) \\ &= p^4U(p) - p^3u(0) - p^2u'(0) - pu''(0) - u'''(0), \end{aligned}$$

et ainsi de suite pour les dérivées d'ordre supérieur.

Donc, nous appliquons d'abord la transformée de Laplace pour les deux côtés de (2.17), en utilisant la propriété de la transformée de Laplace pour la dérivée de $u(x)$, puis résoudre l'équation résultante pour $U(p)$. Nous utilisons ensuite la transformée inverse de Laplace des deux côtés de l'équation résultante pour obtenir la solution $u(x)$ de l'équation (pour plus de détails voir [6]).

Remarque 2.3

1. L'opérateur de Laplace est par construction un opérateur linéaire. En effet, pour toutes fonctions $f(x)$ et $g(x)$, qui admettent une transformée de Laplace, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}((\lambda f + g)(x)) = \lambda \mathcal{L}(f(x)) + \mathcal{L}(g(x)).$$

2. La transformée de Laplace inverse de la fonction $f(x)$ est défini par

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \exp(px) F(p) dp.$$

2.2.1 Exemples détaillés

Exemple 2.3 Soit l'équation **intégral-différentielle** linéaire de Volterra suivante

$$\begin{cases} u''(x) = -1 - x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \\ u'(0) = u(0) = 1. \end{cases} \quad (2.24)$$

Notez que le noyau $K(x - t) = (x - t)$. En prenant la transformée de Laplace pour les deux côtés de l'équation (2.24), on obtient

$$\mathcal{L}(u''(x)) = \mathcal{L}(-1 - x) + \mathcal{L}(x * u(x)), \quad (2.25)$$

et alors

$$p^2 U(p) - pu(0) - u'(0) = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} U(p). \quad (2.26)$$

En utilisant la condition initiale donnée et en résolvant $U(p)$, nous trouvons

$$U(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{p}{p^2 + 1}. \quad (2.27)$$

En prenant la transformée de Laplace inverse des deux côtés de (2.27).

Donc, la solution exacte est donnée par

$$u(x) = \sin(x) + \cos(x). \quad (2.28)$$

Exemple 2.4 Considérons l'équation *intégral-différentielle* linéaires de Volterra suivante

$$\begin{cases} u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt, \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (2.29)$$

Notez que le noyau $K(x - t) = 1$. En prenant la transformée de Laplace de l'équation (2.29), on trouve

$$\mathcal{L}(u'(x)) = \mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(1 * u(x)), \quad (2.30)$$

et alors

$$pU(p) - u(0) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} U(p). \quad (2.31)$$

En utilisant la condition initiale donnée et en résolvant $U(p)$, nous trouvons

$$U(p) = \frac{1}{1 - p}. \quad (2.32)$$

En prenant la transformée de Laplace inverse pour les deux côtés de (2.32), la solution exacte est donnée par

$$u(x) = e^x. \quad (2.33)$$

Chapitre 3

Résolution numérique de quelques types d'équations intégral-différentielles

Dans ce chapitre, on essaye de trouver la solution numérique des équations intégral-différentielles linéaires de deuxième espèce, en utilisant la méthode polynômiale de Touchard et Tchebyshev-Galerkin, où on emploie la matrice opérationnelle d'intégration et de dérivation, les solutions approximatives sont données sous forme des polynômes.

3.1 Méthode polynômiale de Touchard

3.1.1 Polynôme de Touchard

Les polynômes de Touchard, étudiés dans (1939) par le mathématicien français Jacques André Charies Touchard, composé de séquence polynômiale de type binomial. On appelle polynôme de Touchard le polynôme défini sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \quad (3.1)$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, n est le degré des polynômes, (k) est l'indice des polynômes et x est la variable.

Les premiers polynômes de Touchard sur l'intervalle $[0, 1]$ pour $n = 5$ sont

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= 1 + x, \\ T_2(x) &= 1 + 2x + x^2, \\ T_3(x) &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3, \\ T_4(x) &= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4, \\ T_5(x) &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5. \end{aligned}$$

3.1.2 Les dérivées des polynômes de Touchard

Les dérivés des polynômes de Touchard définis par

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^{k-1}. \quad (3.2)$$

3.1.3 Représentation matricielle des polynômes de Touchard

Dans de nombreuses applications, une formule matricielle des polynômes de Touchard est utile. Ceux-ci sont simples à développer si l'on ne regarde qu'une combinaison linéaire en termes de produits. Etant donné un polynôme écrit comme une combinaison linéaire des fonctions de base de Touchard.

$$T(x) = c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + \dots + c_n T_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i T_i(x), \quad (3.3)$$

où c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) sont les coefficients inconnus à déterminer. Il est facile d'écrire l'équation (3.3) comme un produit scalaire de deux vecteurs.

$$T(x) = \begin{bmatrix} T_0(x) & T_1(x) & T_2(x) & \dots & T_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

nous pouvons convertir l'équation (3.4) à la forme

$$u(t) \simeq u_n(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & \dots & b_{0,n} \\ 0 & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,n} \\ 0 & 0 & b_{2,3} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Telle que les $b_{i,j}$ sont les coefficients de la base de puissance qui sont utilisées pour déterminer les polynômes de Touchard. Nous notons que la matrice dans ce cas est triangulaire supérieure et inversible. Les dérivés de la matrice des polynômes de Touchard

$$u'_n(x) = c_0 T'_0(x) + c_1 T'_1(x) + \dots + c_n T'_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i T'_i(x),$$

alors de l'équation (3.5), on a

$$u'(x) \simeq u'_n(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & \dots & nx^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & \dots & b_{0,n} \\ 0 & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,n} \\ 0 & 0 & b_{2,3} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Maintenant, dans le cas linéaire ($n = 1$), la matrice de représentation est

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Dans le cas quadratique ($n = 2$), la matrice de représentation est

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Dans le cas cubique ($n = 3$), la matrice de représentation est

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Dans le cas ($n = 4$), la matrice de représentation est

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 & t^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

3.1.4 Principe de la méthode

Rappelons que la forme générale de l'équation **intégro-différentielle** linéaire de Volterra est donnée par

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.11)$$

en utilisant l'équation (3.3), nous avons

$$u(x) \simeq u_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i T_i(x). \quad (3.12)$$

En remplaçant l'équation (3.12) dans l'équation (3.11), on obtient

$$\sum_{i=0}^n c_i T'_i(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \sum_{i=0}^n c_i T_i(x) dt, \quad x \in [a, b] \quad (3.13)$$

et en utilisant l'équation (3.5), l'équation (3.13) devient

$$\mathbf{XBA} = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \mathbf{TBA} dt, \quad (3.14)$$

où

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & \dots & nx^{n-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad et \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{0.0} & b_{0.1} & b_{0.2} & \dots & b_{0.n} \\ 0 & b_{1.2} & b_{1.3} & \dots & b_{1.n} \\ 0 & 0 & b_{2.3} & \dots & b_{2.n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n.n} \end{bmatrix}.$$

On calcule les deux côtés de l'équation (3.14) pour déterminer les valeurs inconnues de $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$, où on choisit x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) dans $[a, b]$ avec la condition initiale $u(0) = u_0$. Donc l'équation (3.14) représente un système linéaire de n équations algébriques à n inconnues. Ce système peut être résolu en utilisant la "méthode d'élimination de Gauss" pour trouver les valeurs $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$ (Pour plus de détail voir [9] [15]).

3.1.5 Problèmes détaillés

Exemple 3.1 Considérons l'équation *intégral-différentielle* de Volterra suivante :

$$\begin{cases} u'(x) = 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \int_0^x u(t) dt, & x \in [0, 1] \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Pour résoudre l'équation (3.15) par les polynômes de Touchard, on choisit une degré n , par exemple $n = 4$. En utilisant l'équation (3.14), où

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 & t^4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} & c_1 + 2c_2(1+x) + 3c_3(1+2x+x^2) + 4c_4(1+3x+3x^2+x^3) \\ &= 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \int_0^x (c_0 + c_1(1+t))dt + \int_0^x (c_2(1+2t+t^2))dt \\ &+ \int_0^x (c_3(1+3t+3t^2+t^3))dt + \int_0^x (c_4(1+4t+6t^2+4t^3+t^4))dt. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4}c_0x + c_1\left(1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8}\right) + c_2\left(2 + 2x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12}\right) \\ & + c_3\left(3 + \frac{23}{4}x + \frac{21}{8}x^2 - \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{16}\right) \\ & + c_4\left(4 + \frac{47}{4}x + \frac{23}{2}x^2 + \frac{7}{2}x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{20}\right) \\ &= 2 - \frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients inconnus $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$, on choisit x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) dans $[0, 1]$ avec la condition initiale $u(0) = 0$, par exemple :

Pour $x_0 = 0$, on obtient l'équation

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 = 2. \quad (3.16)$$

Pour $x_1 = \frac{1}{2}$, on obtient l'équation

$$-\frac{1}{8}c_0 + \frac{27}{32}c_1 + \frac{281}{96}c_2 + \frac{1663}{256}c_3 + \frac{8429}{640}c_4 = \frac{31}{16}. \quad (3.17)$$

Pour $x_2 = \frac{1}{3}$, on obtient l'équation

$$-\frac{1}{2}c_0 + \frac{65}{72}c_1 + \frac{427}{162}c_2 + \frac{6737}{1296}c_3 + \frac{45299}{4860}c_4 = \frac{71}{36}. \quad (3.18)$$

Pour $x_3 = \frac{1}{4}$, on obtient l'équation

$$-\frac{1}{16}c_0 + \frac{119}{128}c_1 + \frac{1907}{768}c_2 + \frac{18831}{4096}c_3 + \frac{1099}{20480}c_4 = \frac{511}{256}. \quad (3.19)$$

Pour $x_4 = 1$, on obtient l'équation

$$-\frac{1}{4}c_0 + \frac{5}{8}c_1 + \frac{11}{3}c_2 + \frac{177}{16}c_3 + \frac{609}{20}c_4 = \frac{7}{4}. \quad (3.20)$$

Alors, on obtient un système de cinq équations linéaires et cinq inconnus c_0, c_1, c_2, c_3 et c_4 .

La résolution de ce système nécessite l'utilisation d'une des méthodes numériques connues telles que la méthode d'élimination de Gasse comme exemple.

Enfin, nous substituons les valeurs de c_0, c_1, c_2, c_3 et c_4 dans l'équation (3.15) pour trouver la solution approchée pour $n = 4$

$$u_4(x) = c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + c_3 T_3(x) + c_4 T_4(x). \quad (3.21)$$

Exemple 3.2 Considérons l'équations *intégro-différentielle* de Volterra suivante

$$\begin{cases} u'(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt, & x \in [0, 1] \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Pour résoudre l'équation (3.22) en utilisant les polynômes de Touchard, on choisit une degré n ,

Pour cet exemple, nous prendrons simplement $n = 2$. En utilisant l'équation (3.14), où

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad et \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient

$$c_1 + 2c_2(1 + x) = 1 - \int_0^x (c_0 + c_1(1 + t) + c_2(1 + 2t + t^2))dt.$$

Alors

$$c_1 + 2c_2(1 + x) = 1 - c_0x - c_1(x + \frac{1}{2}x^2) - c_2(x + x^2 + \frac{1}{3}x^3).$$

Pour déterminer les coefficients inconnus $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$, on choisit x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) dans $[0, 1]$ avec la condition initiale $u(0) = 0$, par exemple :

Pour $x_0 = 0$, on obtient l'équation

$$c_1 + 2c_2 = 1. \quad (3.23)$$

Pour $x_1 = \frac{1}{2}$, on obtient l'équation

$$\frac{1}{2}c_0 + \frac{13}{8}c_1 + \frac{91}{24}c_2 = 1. \quad (3.24)$$

Pour $x_2 = 1$, on obtient l'équation

$$c_0 + \frac{5}{2}c_1 + \frac{19}{3}c_2 = 1. \quad (3.25)$$

Alors, on obtient le système d'équations linéaire suivant des inconnus c_0 , c_1 et c_2

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 1, \\ \frac{1}{2}c_0 + \frac{13}{8}c_1 + \frac{91}{24}c_2 = 1, \\ c_0 + \frac{5}{2}c_1 + \frac{19}{3}c_2 = 1. \end{cases}$$

Pour obtenir les coefficients c_0 , c_1 et c_2 , nous avons utilisé une programmation simple en MATLAB. Alors que les résultats étaient les suivants

$$c_0 = -0.1667, \quad c_1 = 3 \text{ et } c_2 = -1.$$

Donc, la solution approchée de l'équations (3.22) pour $n = 2$ est

$$\begin{aligned} u_2(x) &= c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x), \\ &= c_0(1) + c_1(1+x) + c_2(1+2x+x^2), \\ &= -0.1667 + 3(1+x) - (1+2x+x^2). \end{aligned}$$

3.2 Méthode de Tchebyshev-Galerkin

3.2.1 Polynômes de Tchebyshev

Définition 3.1 ([12]) Les polynômes de Tchebyshev de première espèce donnés par la formule suivante :

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x)) \quad (n \geq 0). \quad (3.26)$$

De cette définition, on peut donner quelques valeurs de $T_n(x)$:

$$T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n, \quad T_{2n}(0) = (-1)^n, \quad T_{2n+1}(0) = 0.$$

3.2.2 Quelques propriétés de polynômes de Tchebyshev

1. $T_n(x)$ satisfait la relation de récurrence d'ordre deux suivante

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \forall n \geq 1 \\ T_0(x) = 1 \text{ et } T_1(x) = x. \end{cases} \quad (3.27)$$

2. Les polynômes de Tchebyshev vérifiés l'équation différentielle

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0. \quad (3.28)$$

3. Le produit de polynômes de Tchebyshev est donné sous la forme suivante

$$T_m(x)T_n(x) = \cos(m\theta)\cos(n\theta) = \frac{1}{2}(\cos(m+n)\theta + \cos|m-n|\theta), \quad (3.29)$$

on obtient

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}(T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x)). \quad (3.30)$$

4. Propriété d'orthogonalité de $T_n(x)$

Nous pouvons déterminer les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Tchebyshev de première espèce d'après l'orthogonalité des fonctions de cosinus, on peut trouver

$$\int_0^\pi \cos(m\theta)\cos(n\theta)d\theta = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \frac{\pi}{2} & (m = n \neq 0), \\ \pi & (m = n = 0). \end{cases} \quad (3.31)$$

Puis substituant

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad \cos(\theta) = x.$$

Par transformation de variable θ à x dans la relation (3.31), on obtient

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \frac{\pi}{2} & (m = n \neq 0), \\ \pi & (m = n = 0). \end{cases}$$

Nous observons que les polynômes de Tchebyshev forment un ensemble orthogonal sur l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$ avec la fonction de poids $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

De la propriété 1, on peut calculer itérativement le cinq premiers polynômes

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x. \end{aligned}$$

La figure suivante montre les graphes de ce cinq premiers polynômes

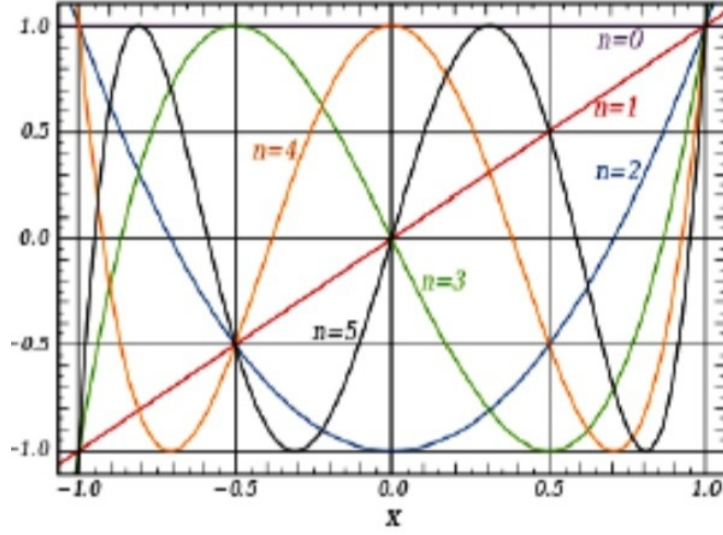


FIGURE 3.1 – Graphes de cinq premiers polynômes de Tchebyshev.

3.2.3 Principe de la méthode

Soit l'équation intégral-différentielle de Volterra de seconde espèce

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt, & a \leq x \leq b, \\ u(a) = \alpha. \end{cases} \quad (3.32)$$

Où $u(x)$ est la fonction inconnue, $k(x, t)$ est une fonction continue et carrée intégrable, $f(x)$ est une fonction connue, et λ est un paramètre réel.

La méthode étudiée utilise les polynômes de Tchebyshev, comme une base polynomiale pour approximer la solution sur un intervalle fini et fermé.

Supposons que

$$u(x) \approx u_n = \sum_{i=0}^n a_i T_i \left(\frac{2x - (b-a)}{b-a} \right), \quad (3.33)$$

où $T_i \left(\frac{2x - (b-a)}{b-a} \right)$ est le polynôme de Tchebychev sur l'intervalle $[a, b]$. Nous avons

$$u'(x) \approx u'_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{2}{b-a} a_i T'_i \left(\frac{2x - (b-a)}{b-a} \right). \quad (3.34)$$

La substitution de (3.33) et (3.34) dans (3.32), donne les suivants résultats

$$\sum_{i=0}^n \frac{2}{b-a} a_i T'_i \left(\frac{2x - (b-a)}{b-a} \right) = f(x) + \lambda \sum_{i=0}^n a_i \int_a^x k(x, t) T_i \left(\frac{2t - (b-a)}{b-a} \right) dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (3.35)$$

Pour déterminer les coefficients a_i , nous utilisons l'idée de Galerkin en multipliant les deux

côtés de (3.35) par $T_j \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right)$ puis en intégrant par rapport à x de -1 à 1 . On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{2}{b-a} a_i \int_{-1}^1 T'_i \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) T_j \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) dx &= \int_{-1}^1 f(x) T_j \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) dx \\ &+ \int_{-1}^1 \left(\lambda \sum_{i=0}^n a_i \int_a^x k(x,t) T_i \left(\frac{2t-(b-a)}{b-a} \right) dt \right) T_j \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) dx, \text{ pour } j = 0, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.36)$$

i.e

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{2}{b-a} a_i \int_{-1}^1 T'_i \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) T_j \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) dx &= \int_{-1}^1 f(x) T_j \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) dx \\ &+ \lambda \sum_{i=0}^n a_i \int_{-1}^1 \left(\int_a^x k(x,t) T_i \left(\frac{2t-(b-a)}{b-a} \right) dt \right) T_j \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) dx. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Finalement, on obtient le système linéaire suivant

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i \left[\frac{2}{b-a} \int_{-1}^1 T'_i \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) T_j \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) dx - \right. \\ \left. \lambda \int_{-1}^1 \left\{ \left(\int_a^x k(x,t) T_i \left(\frac{2t-(b-a)}{b-a} \right) dt \right) T_j \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) \right\} dx \right] \\ = \int_{-1}^1 f(x) T_j \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) dx. \end{aligned} \quad (3.38)$$

(Voir [7]).

3.2.4 Représentation matricielle des Polynômes de Tchebyshev

Le système (3.38) peut être écrit sous la forme matricielle suivante

$$A_{i,j} X = B_j,$$

où

$$X = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)^t,$$

$$B_j = \left[\int_{-1}^1 f(x) T_j \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) dx \right],$$

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \left[\frac{2}{b-a} \int_{-1}^1 T'_i \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) T_j \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) dx - \right. \\ &\quad \left. \lambda \int_{-1}^1 \left\{ \left(\int_a^x k(x,t) T_i \left(\frac{2t-(b-a)}{b-a} \right) dt \right) T_j \left(\frac{2x-(b-a)}{b-a} \right) \right\} dx \right]. \end{aligned}$$

3.2.5 Problèmes détaillés

Exemple 3.3 *Considérons les équations **intégral-différentielles** de Volterra suivante*

$$\begin{cases} u'(x) = 1 - 2x \sin(x) + \int_0^x u(t)dt, & x \in [0, 1], \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (3.39)$$

La solution exacte est $u(x) = x \cos(x)$.

Dans ce qui suit, on va expliquer les étapes de l'algorithme sans faire les calculs numériques. Pour résoudre l'équation (3.39), nous avons utilisé une approximation d'ordre 4 pour $u(x)$ et $u'(x)$ comme suite

$$\begin{aligned} u_4(x) &= \sum_{i=0}^4 a_i T_i(2x-1) = a_0 + a_1(2x-1) + a_2(8x^2-8x+1) \\ &\quad + a_3(32x^3-48x^2+18x-1) + a_4(128x^4-256x^3+160x^2-32x+1), \end{aligned} \quad (3.40)$$

où, la dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} u'_4(x) &= 2 \sum_{i=0}^4 a_i T'_i(2x-1) = 2a_1 + a_2(16x-8) \\ &\quad + a_3(96x^2-96x+18) + a_4(512x^3-768x^2+320x-32). \end{aligned} \quad (3.41)$$

La substitution de (3.40) et (3.41) dans (3.39), donne

$$\begin{aligned} &2a_1 + a_2(16x-8) + a_3(96x^2-96x+18) + a_4(512x^3-768x^2+320x-32) \\ &= 1 - 2x \sin(x) + \int_0^x [a_0 + a_1(2t-1) + a_2(8t^2-8t+1) \\ &\quad + a_3(32t^3-48t^2+18t-1) + a_4(128t^4-256t^3+160t^2-32t+1)] dt. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Après calcul de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} 2a_1 - 8a_2 + 18a_3 - 32a_4 - 1 &= x(a_0 - a_1 - 15a_2 + 95a_3 - 319a_4) \\ &\quad + x^2(a_1 - 4a_2 - 87a_3 + 752a_4) \\ &\quad + x^3\left(\frac{8}{3}a_2 - 16a_3 - \frac{1376}{3}a_4\right) \\ &\quad + x^4(8a_3 - 64a_4) + x^5\left(\frac{128}{5}a_4\right) \\ &\quad - 2x \sin(x). \end{aligned} \quad (3.43)$$

En multipliant les deux côtés de (3.43) par $T_0(2x-1) = 1$, puis en intégrant par rapport à x de -1 à 1 , on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (2a_1 - 8a_2 + 18a_3 - 32a_4 - 1) dx &= \int_{-1}^1 (x(a_0 - a_1 - 15a_2 + 95a_3 - 319a_4)) dx \\
 &+ \int_{-1}^1 (x^2(a_1 - 4a_2 - 87a_3 + 752a_4)) dx \\
 &+ \int_{-1}^1 \left(x^3 \left(\frac{8}{3}a_2 - 16a_3 - \frac{1376}{3}a_4 \right) \right) dx \\
 &+ \int_{-1}^1 \left(x^4(8a_3 - 64a_4) + x^5 \left(\frac{128}{5}a_4 \right) \right) dx \\
 &- \int_{-1}^1 2x \sin(x) dx.
 \end{aligned}$$

Après calcul des intégrales, On obtient l'équation linéaire suivante

$$\frac{10}{3}a_1 - \frac{40}{3}a_2 + \frac{454}{5}a_3 - \frac{8096}{15}a_4 = 2 - 4\sin(1) + 4\cos(1). \quad (3.44)$$

En deuxième étape, multiplions les deux côtés de (3.43) par $T_1(2x - 1) = 2x - 1$, puis en intégrant par rapport à x de -1 à 1 , on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 ((2a_1 - 8a_2 + 18a_3 - 32a_4 - 1)(2x - 1)) dx &= \int_{-1}^1 ((a_0 - a_1 - 15a_2 + 95a_3 - 319a_4)(2x^2 - x)) dx \\
 &+ \int_{-1}^1 ((a_1 - 4a_2 - 87a_3 + 752a_4)(2x^3 - x^2)) dx \\
 &+ \int_{-1}^1 \left(\left(\frac{8}{3}a_2 - 16a_3 - \frac{1376}{3}a_4 \right) (2x^4 - x^3) \right) dx \\
 &+ \int_{-1}^1 ((8a_3 - 64a_4)(2x^5 - x^4)) \\
 &+ \int_{-1}^1 \left(\frac{128}{5}a_4(2x^6 - x^5) \right) dx \\
 &- \int_{-1}^1 (\sin(x)(4x^2 - x)) dx. \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

Dans la troisième étape, nous multiplions l'équation (3.43) par $T_2(2x - 1) = 8x^2 - 8x + 1$, puis en intégrant par rapport à x de -1 à 1 , on obtient

$$\begin{aligned}
 &\int_{-1}^1 (2a_1 - 8a_2 + 18a_3 - 32a_4 - 1)(8x^2 - 8x + 1) dx \\
 &= \int_{-1}^1 ((a_0 - a_1 - 15a_2 + 95a_3 - 319a_4)(8x^3 - 8x^2 + x)) dx \\
 &+ \int_{-1}^1 ((a_1 - 4a_2 - 87a_3 + 752a_4)(8x^4 - 8x^3 + x^2)) dx \\
 &+ \int_{-1}^1 \left(\left(\frac{8}{3}a_2 - 16a_3 - \frac{1376}{3}a_4 \right) (8x^5 - 8x^4 + x^3) \right) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{-1}^1 ((8a_3 - 64a_4)(8x^6 - 8x^5 + x^4)) \\
 & + \int_{-1}^1 \left(\frac{128}{5}a_4(8x^7 - 8x^6 + x^5) \right) dx \\
 & - \int_{-1}^1 (\sin(x)(16x^3 - 16x^2 + 2x))dx.
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

En multipliant les deux côtés de (3.43) par $T_3(2x - 1) = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1$, puis en intégrant par rapport à x de -1 à 1 , on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 ((2a_1 - 8a_2 + 18a_3 - 32a_4 - 1)(32x^3 - 48x^2 + 18x - 1)) dx \\
 & = \int_{-1}^1 ((a_0 - a_1 - 15a_2 + 95a_3 - 319a_4)(32x^4 - 48x^3 + 18x^2 - x)) dx \\
 & + \int_{-1}^1 ((a_1 - 4a_2 - 87a_3 + 752a_4)(32x^5 - 48x^4 + 18x^3 - x^2)) dx \\
 & + \int_{-1}^1 \left(\left(\frac{8}{3}a_2 - 16a_3 - \frac{1376}{3}a_4 \right) (32x^6 - 48x^5 + 18x^4 - x^3) \right) dx \\
 & + \int_{-1}^1 ((8a_3 - 64a_4)(32x^7 - 48x^6 + 18x^5 - x^4)) \\
 & + \int_{-1}^1 \left(\frac{128}{5}a_4(32x^8 - 48x^7 + 18x^6 - x^5) \right) dx \\
 & - \int_{-1}^1 \sin(x)(64x^4 - 96x^3 + 36x^2 - 2x)dx.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Finalement, nous multiplions les deux côtés de (3.43) par $T_4(2x - 1) = 128x^4 - 256x^3 + 160x^2 - 32x + 1$, puis en intégrant par rapport à x de -1 à 1 , on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 ((2a_1 - 8a_2 + 18a_3 - 32a_4 - 1)(128x^4 - 256x^3 + 160x^2 - 32x + 1)) dx \\
 & = \int_{-1}^1 ((a_0 - a_1 - 15a_2 + 95a_3 - 319a_4)(128x^5 - 256x^4 + 160x^3 - 32x^2 + x)) dx \\
 & + \int_{-1}^1 ((a_1 - 4a_2 - 87a_3 + 752a_4)(128x^6 - 256x^5 + 160x^4 - 32x^3 + x^2)) dx \\
 & + \int_{-1}^1 \left(\left(\frac{8}{3}a_2 - 16a_3 - \frac{1376}{3}a_4 \right) (128x^7 - 256x^6 + 160x^5 - 32x^4 + x^3) \right) dx \\
 & + \int_{-1}^1 ((8a_3 - 64a_4)(128x^8 - 256x^7 + 160x^6 - 32x^5 + x^4)) dx \\
 & + \int_{-1}^1 \left(\frac{128}{5}a_4(128x^9 - 256x^8 + 160x^7 - 32x^6 + x^5) \right) dx \\
 & - \int_{-1}^1 \sin(x)(256x^5 - 512x^4 + 320x^3 - 64x^2 + 2x)dx.
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Par un calcul simple des intégrales, les équations (3.45), (3.46), (3.47) et (3.48) avec l'équation (3.44) forment un système linéaire de cinq équations et cinq inconnues.

En utilisant une méthode de résolution des systèmes linéaires (par exemple méthode d'élimination de Gauss), on obtient les valeurs de a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4 .

Donc, la solution approchée de l'équations (3.39) est donnée par

$$u_4(x) = a_0 T_0(2x - 1) + a_1 T_1(2x - 1) + a_2 T_2(2x - 1) + a_3 T(2x - 1) + a_4 T(2x - 1).$$

Les résultats présentés dans le tableau suivant concernant la solution approchée et les valeurs des erreurs, pour $n = 4, 8, 12$, sont obtenus par Bazar et Salhi dans [7].

	$n = 4$		$n = 8$		$n = 12$	
x	Solution approchée	Erreur absolue	Solution approchée	Erreur absolue	Solution approchée	Erreur absolue
0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.0991	4.308e-4	0.0995	2.308e-9	0.0995	1.383e-15
0.2	0.1954	5.890e-4	0.1960	3.450e-9	0.1960	1.987e-15
0.3	0.2859	6.954e-4	0.2866	4.423e-9	0.2866	2.570e-15
0.4	0.3676	8.387e-4	0.3684	5.136e-9	0.3684	3.046e-15
0.5	0.4378	1.032e-3	0.4388	6.131e-9	0.4388	3.586e-15
0.6	0.4940	1.214e-3	0.4952	7.178e-9	0.4952	4.160e-15
0.7	0.5340	1.381e-3	0.5354	8.072e-9	0.5354	4.747e-15
0.8	0.5558	1.537e-3	0.5574	9.368e-9	0.5574	5.509e-15
0.9	0.5577	1.776e-3	0.5594	1.094e-8	0.5594	6.371e-15
1	0.5380	2.300e-3	0.5403	1382e-8	0.5403	8.087e-15

Tableau 3.1 : Erreur absolue pour l'exemple 3.3.

Exemple 3.4 *Considérons les équations **intégro-différentielles** de Volterra suivante :*

$$\begin{cases} u'(x) = -1 + \frac{x^2}{2} - xe^x + \int_0^x tu(t)dt, x \in [0, 1] \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

La solution exacte est $u(x) = 1 - e^x$.

Pour cet exemple, nous avons essayé de créer un code en MATLAB. Les résultats de ce programme sont jugés relativement acceptables et sujets à amélioration dans le futur. Les figures suivantes représentent une comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour trois valeurs choisis de n .

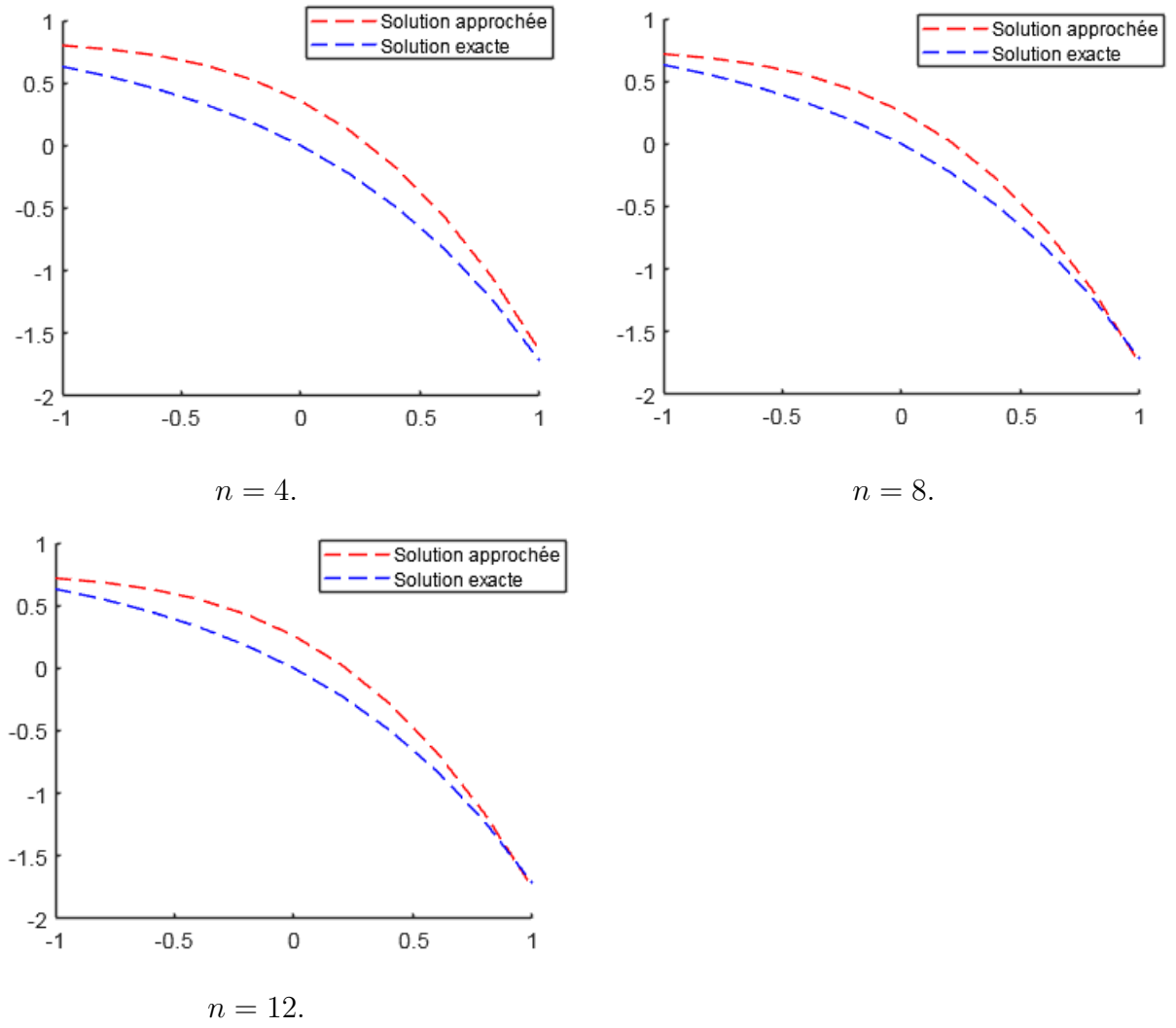


FIGURE 3.2 – Solutions exactes et approchées pour différentes valeurs de n .

Le tableau suivant montre les résultats obtenus à partir de notre code numérique. Où l'on a calculé la solution approchée et l'erreur commise aux points sélectionnés du domaine $[-1, 1]$, pour trois valeurs choisis de n .

	$n = 4$		$n = 8$		$n = 12$	
x	Solution approchée	Erreur absolut	Solution approchée	Erreur absolut	Solution approchée	Erreur absolut
-1	0.8008	0.1687	0.7181	0.0860	0.7183	0.0862
-0.8	0.7689	0.2182	0.6848	0.1341	0.6849	0.1343
-0.6	0.7199	0.2687	0.6320	0.1808	0.6322	0.1810
-0.4	0.6423	0.3127	0.5506	0.2210	0.5508	0.2211
-0.2	0.5249	0.3437	0.4302	0.2490	0.4304	0.2491
0	0.3565	0.3565	0.2594	0.2594	0.2596	0.2596
0.2	0.1258	0.3472	0.0262	0.2476	0.0264	0.2478
0.4	-0.1782	0.3137	-0.2814	0.2104	-0.2812	0.2106
0.6	-0.5662	0.2559	-0.6746	0.1476	-0.6744	0.1477
0.8	-1.0493	0.1763	-1.1628	0.0627	-1.1626	0.0629
1	-1.6380	0.0803	-1.7535	0.0352	-1.7533	0.0350

Tableau 3.2 : Erreur absolue pour l'exemple 3.4.

Bibliographie

- [1] Adomian G., Solving Frontier Problem : The Decomposition Method, Kluwer : Dordrecht, **(1994)**.
- [2] Adomian G., Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press : San Diego, CA, **(1986)**.
- [3] Adomian G., A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equation, Math. Comput. Modelling, 13(7), pp. 17-43, **(1992)**.
- [4] Adomian G., Rach, R. Noise terms in decomposition series solution, Computers Math. Appl., 24(11), pp. 61-64, **(1992)**.
- [5] Benyoussef S., Numerical treatment of integro-differential equations by spectral collocation methods. Thèse de Doctorat de l'université de Mohamed Boudiaf - M'sila.
- [6] Benali H., Introduction aux équations intégrales linéaires méthodes et applications, cours pour 1^{ème} Master maths, **(2019)**.
- [7] Biazar J. et Salehi F., Chebyshev Galerkin method for integro-differential equations of the second kind, Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization Vol. 6, No. 1, pp 31-42, **(2016)**.
- [8] Chebbah H., Sur les méthodes de Nystrom et applications aux équations intégrales et intégral-différentielles. Thèse de Doctorat de l'université de Batna 2, Mostefa Ben Boulaid, **(2019)**.
- [9] Chrysaphinou O., Discrete Mathematics, 143-152 Elsevier North-Holland, **(1985)**.
- [10] Guesba M., Équations intégrales, cours pour 2^{ème} Master maths, université El-oued, **(2023)**.
- [11] Moussat M., Résolution des équations intégral-différentielles, Thèse Pour l'obtention du diplôme de doctorat en sciences, Université de Mohamed Boudiaf M'Sila, Algerie, **(2018)**.
- [12] Mason J.C et Handscomb D.C., Chebychev Polynomials, CRS Press, **(2003)**.

- [13] Rahmoune A., Équations intégrales linéaires et non linéaires : Analyse et techniques de résolution, **(2018)**.
- [14] Rahmoune A., Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales. Thèse de Doctorat de l'université de de Batna, **(2011)**.
- [15] Roman S., The umbral Calculus, 208 Dover Publications USA, **(2005)**.
- [16] Rahaman M., Integral equations and their applications, Dalhousie university, Canada, 2007.
- [17] Varley E. et Walker J., A method for solving singular integro-differential équation. IMA, journal of applied mathematics 11-45, **(1989)**.

المخلص:

درسنا في هذا العمل المعادلات التكاملية والمعادلات التكاملية-التفاضلية، حيث ذكرنا أنواعها المختلفة وأبرزنا العلاقات بينها. الغرض من هذه الدراسة هو تطبيق بعض الطرق التحليلية لحل هذه الأنواع من المعادلات، إذا كان من الممكن حلها وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فإننا نلجأ إلى الطرق التقريبية باستخدام طرق عديدة مختلفة.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التكاملية، المعادلات التكاملية-التفاضلية، معادلات فولتيرا و فريدهولم، طريقة Adomian، كثير حدود توشارد، كثير حدود شيبشيف.

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié les équations intégrales et les équations intégral-différentielles, où nous avons mentionné leurs différents types et mis en évidence les relations entre elles. Le but de cette étude est l'application de quelques méthodes analytiques pour résoudre ces types d'équations, si elles peuvent être résolues et si ce n'est pas possible, nous recourons à des méthodes approximatives en utilisant diverses méthodes numériques de résolution.

Mots clés: Equations intégrales, Equations intégral-différentielles, Equations de Volterra et Fredholm, Méthode d'Adomian, polynôme de Touchard, polynôme de Tchebyshev.

Abstract

In this work, we have studied integral equations and integro-differential equations, where we have mentioned their different types and highlighted the relationships between them. The purpose of this study is the application of some analytical methods to solve these types of equations, if they can be solved and if this is not possible, we resort to approximate methods using various numerical methods of resolution.

key words: Integral equations, Integro-differential equations, Volterra and Fredholm equations, Adomian method, Touchard polynomial, Tchebyshev polynomial.