

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique



UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR ELOUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
Département de mathématiques



Mémoire de fin d'étude

Domaine : Mathématiques et informatique

la faculté : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

THÈME

**Résolution d'un problème aux limites par méthodes numériques
applications à quelques cas concrets.**

Proposé par :

- BADAR EDDINE LEMMOUCHI
- MOSTAFA BEN ABDALLAH

soutenu publiquement devant le jury composé de :

Dr. BEGGAS mohammed	MCA	Président	Univ. of El-Oued
Dr. BEN ALI Brahim	MCA	Rapporteur	Univ. of El-Oued
Dr. DAHDA bachir	MCA	Examineur	Univ. of El-Oued

Année universitaire : 2020/2021

Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Table des figures	iii
Notations	iv
Introduction générale	v
I Rappels sur les espaces fonctionnel et équations différentielles	1
I.1 espaces fonctionnel	1
I.2 équations différentielles	3
I.2.1 Généralité sur les équation différentielles	3
I.2.2 Types d'équations différentielles	4
I.2.3 Équation différentielle lineaires d'ordre n	5
I.2.4 Equations différentielles ordinaire du premier ordre	5
I.2.5 Équation différentielle ordinaire du deuxième ordre	8
II Méthodes numériques	16
II.1 Introduction, le problème mathématique	16
II.2 Méthodes d'Euler et Taylor d'ordre deux	16
II.2.1 Méthode d'Euler	16
II.2.2 Méthode Taylor d'ordre deux	17
II.3 Methode de Runge-kutta	17
II.3.1 Runge-Kutta d'ordre 2	18
II.3.2 Runge-Kutta d'ordre 3	19
II.3.3 Runge-Kutta d'ordre 4	19
II.4 Méthode des différences finies	21
II.4.1 Normes matricielles	21
II.4.2 Matrice monotone	21
II.4.3 Principe de la méthode	22
III Applications	28
III.1 la rolation entre l'intensité du courant et la tension dans le condonsateur	28
III.2 la relation entre la tension dans la bobine et l'intensité	29
III.3 la solution numérique (Équation du premier ordre)	30
III.3.1 Méthod Runge-Kutta (ordre 4)	30
III.3.2 Méthod différences finies	33
III.4 la solution numérique (Équation du deuxième ordre)	38
III.4.1 Méthode Runge-Kutta (ordre 4)	38
III.4.2 Méthodes des différences finies	44

Dédicaces

Nous dédions ce modeste travail :

À nos parents, Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour, Dont ils ne cessent de nous combler. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

À nos frères,grands-parents et à tous ceux qui ont partagé avec nous tous les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail. Ils nous ont soutenus et encouragés chaleureusement tout au long de notre parcours.

*À toute notre famille et à tous les membres de la famille **LEMMOUCHI et BEN ABDALLAH** .*

Et nos proches et ceux qui nous ont donné de l'amour et de la vitalité. À tous les amis qui nous ont toujours encouragés et à qui nous souhaitons plus de succès . Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, nous disons merci .

Remerciements

*Tout d'abord, nous remercions Dieu, notre créateur de nous avoir donné la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail. Nous adressons un grand remerciement à notre rapporteur **Dr. Ben Ali Brahim** qui nous a proposé ce thème de mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.*

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de juger notre travail.

D'ailleurs, nous remercions chaleureusement tous les membres de nos familles surtout nos parents qui nous ont soutenus avec leur grand amour et leurs prières pour nous. et nos enseignants dès la primaire jusqu'à l'université.

*Nous remercions tous nos proches pour leurs efforts et nos amis qui ont partagé avec nous leur expérience et leurs commentaires. Nous remercions plus particulièrement notre **amis heded nacreddine et souhaib djballah** qui nous a soutenu dans sa traduction, et **Dr. bachir dahda**, en programme matlab.*

En fin, Nous remercions tous qui nous ont aidés de près ou de loin à l'élaboration de cette étude.

Table des figures

III.1	Installation expérimentale	29
III.2	la solution l'équation (III.9) sur l'intervalle $[0, 1]$	30
III.3	la solution numérique RungeKutta et solution exacte sur l'intervalle $[0, 1]$	33
III.4	la solution numérique (différences finies $h = 0.16$) et exacte	36
III.5	la solution exacte et différences finies et range kutta	36
III.6	la solution l'équation (III.20) sur l'intervalle $[0, 1]$	38
III.7	la solution exacte et (Runge-Kutta order4) sur l'intervalle $[0, 1[$	41
III.8	la solution exacte et (Runge-Kutta order4) sur l'intervalle $[0, 0.1[$	43
III.9	la solution exacte et (Runge-Kutta order4) sur l'intervalle $[0, 0.01]$	43
III.10	la solution numérique (différences finies) $h = 0.2$	46
III.11	la solution exacte et différences finies et range kutta sur l'intervalle $[0, 1]$	46

Notations

- ▷ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Le produit scalaire
- ▷ $L^2(\mathbb{R})$ Espace les fonctions carré intégrable sur $\mathbb{R}$, avec $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty$
- ▷ EDO Équations différentielles ordinaires
- ▷ EDP Équations aux dérivées partielles
- ▷ Ω Ouvert de $\mathbb{R}^N$
- ▷ E Espace vectoriel.
- ▷ $\mathbb{R}$ L'ensemble des nombres réels.
- ▷ $\mathbb{C}$ L'ensemble des nombres complexes.
- ▷ $\mathbb{Z}$ L'ensemble des nombres entières.
- ▷ $\mathbb{N}$ L'ensemble des nombres naturels.
- ▷ ∇u $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \text{grad } u.$
- ▷ Δu $\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{laplacien de } u.$
- ▷ $\text{supp}(f)$ Support de la fonction f
- ▷ U la tension (différence de potentiel) et son unité le volt (V).
- ▷ C Capacité du condensateur.
- ▷ L auto bobinage.
- ▷ O générateur électrique.

Introduction générale

LES équations différentielles sont en plusieurs applications en physique et en ingénierie. Pour les équations différentielles simple on peut trouver facilement des solutions, par contre il y'a d'autres équations différentielles qui n'ont pas de solution où on trouve la solution exacte. C'est précisément pour cette raison que plusieurs méthodes numériques ont été développées pour trouver des solutions des équations différentielles.

Le domaine de calcul scientifique consiste à développer, analyser et appliquer des méthodes relevant de domaines mathématiques aussi variés que l'analyse, l'algèbre linéaire, la géométrie, la théorie de l'approximation, les équations fonctionnelles, l'optimisation ou le calcul différentiel.

Les méthodes numériques trouvent des applications naturelles dans de nombreux problèmes posés par la physique, les sciences biologiques, les sciences de l'ingénieur, l'économie et la finance. Son rôle est renforcé par l'évolution permanente des ordinateurs et des algorithmes : la taille des problèmes que l'on sait résoudre aujourd'hui est telle qu'il devient possible d'envisager la simulation de phénomènes réels.

Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre les équations différentielles ordinaires. On pense par exemple aux méthodes de différences finies, des éléments finis, de volumes finis, aux méthodes spectrales, etc.

Notre travail est reparti en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré en général sur les équations différentielles : nous avons présenté quelques définitions de base de l'espace de Hilbert. Ainsi, nous avons présenté quelques méthodes de résolution d'équations différentielles.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les méthodes que nous avons appliquées, on fait un rappel sur les méthodes de Euler et Taylor, nous avons discuté les deux méthodes numériques (méthodes Runge-Kutta et différences finies), on a évalué l'erreur de troncature locale dans le quatrième ordre, de la méthode Runge-Kutta. et on a étudié l'erreur de consistance, la stabilité et la convergence de la méthode différences finies.

Dans le troisième chapitre nous avons fait une application de deux méthodes (Runge-Kutta et différences finies) sur les deux équations différentielles ordinaires du premier et deuxième ordre.

En utilisant un montage d'installation expérimentale selon des lois définies avec des valeurs électriques connues (O,R,C), on a déduit l'équation différentielle du premier ordre de la tension électrique entre les deux pôles du condensateur ($y' + y = 5$) et sur laquelle on a fait appliquer les deux méthodes Runge-Kutta et différence finie et leur comparaison avec la solution exacte, et on a ajouté une bobine à l'installation expérimentale selon des lois définies avec des valeurs connues (O,L,C), et on a déduit l'équation différentielle du deuxième ordre de la tension électrique entre les deux pôles du condensateur ($y'' + 25y = 0$), et sur laquelle on a fait appliquer les deux méthodes Runge-Kutta et différence finie et leur comparaison avec la solution exacte.

Chapitre I

Rappels sur les espaces fonctionnel et équations différentielles

Ce chapitre sera consacré aux des notions et résultats utilisés dans toute la suite du mémoire.

I.1 espaces fonctionnel

Définition I.1.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une norme $\|\cdot\|$, de E sur $\mathbb{K}$ est une application .

$$\|\cdot\| : E \Rightarrow \mathbb{R}_+$$

vérifiant

$$(i) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(ii) \quad \forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$(iii) \quad \forall x \in E (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$$

On dit alors que l'espace $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé .

Définition I.1.2. [14] (*Suite de Cauchy*)

Soit E un espace vectoriel normé de norme $\|\cdot\|$. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}; p, q > n_0 \Rightarrow \|x_p - x_q\| < \epsilon$$

Définition I.1.3. [14] (*Espace de Banach*)

On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire dans lequel toute suite de Cauchy est convergente.

Définition I.1.4. [14] (*Produit scalaire*)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle produit scalaire sur E une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

qui vérifie

- (i) $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (ii) $\forall x, y, z \in E; \lambda \in \mathbb{R}, \langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$
- (iii) $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$
- (iv) $\forall x \in E, (\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

Un produit scalaire réel définit de manière naturelle une norme sur l'espace vectoriel :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Définition I.1.5. [14] (**Espace de Hilbert**)

On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Définition I.1.6. [14] (**Base hilbertienne**)

Soit H un espace de Hilbert séparable (espace topologique contenant un sous-ensemble dense et au plus dénombrable). On appelle base hilbertienne de H tout sous-ensemble fini ou dénombrable $\{e_n\}_n$ qui vérifie

- (i) $\|e_n\| = 1$ et $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ si $n \neq m$
- (ii) E sous-espace vectoriel engendré par $\{e_n\}_n$ (par combinaisons linéaires finies) est dense dans H .

Théorème I.1.1. [14] Tout espace de Hilbert séparable admet au moins une base hilbertienne dénombrable.

Définition I.1.7. (**L'espace $C^k([a; b]; \mathbb{R})$**)

Soient $K \in \mathbb{N}^*$ et $[a; b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $(-\infty < a < b < +\infty)$. L'espace $C^k([a; b]; \mathbb{R})$ est défini par l'espace des fonctions k -fois continûment dérivables sur $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est un espace de Banach quand on le munit de la norme

$$\|f\|_{C^k([a; b]; \mathbb{R})} = \sum_{n=0}^k \|f^{(n)}(x)\|_{\infty} = \sum_{n=0}^k \sup_{x \in [a; b]} |f^{(n)}(x)|$$

En particulier, pour $k = 0$, $C^0([a; b]; \mathbb{R}) = C([a; b]; \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues sur $[a; b]$ muni de la norme

$$\|f\|_{C([a; b]; \mathbb{R})} = \sup_{x \in [a; b]} |f(x)|$$

Définition I.1.8. (**L'espace $L^p(\Omega)$**)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx et $p \in [1; +\infty[$. L'espace $L^p(\Omega)$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ } f : \text{mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

Pour tout $f \in L^p(\Omega)$ on note

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Définition I.1.9. (**L'espace $L^2(\mathbb{R})$**)

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ } f : \text{mesurables avec } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

Définition I.1.10. (**Espace des fonctions test**)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On appelle support de φ l'ensemble

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$$

- ▷ On dit que la fonction φ à support compact si il existe une partie compacte K de $\mathbb{R}^N$ telle que $\text{supp}(\varphi) \subset K$.
- ▷ On appelle l'espace des fonctions test et on note $\mathcal{D}(\Omega)$ (ou $C^\infty(\Omega)$) l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω .

Définition I.1.11. [14] (**L'espace $H^1(\Omega)$**)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, \dots, N\}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de u au sens des distributions définie par :

$$\exists v \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Proposition I.1.1. [14]

L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla u(x) \nabla v(x)) dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \right)^{1/2}$$

est un espace de Hilbert séparable.

Définition I.1.12. [14] (**L'espace $H_0^1(\Omega)$**)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. C'est-à-dire

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

On note

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \text{ dans } \Omega \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Corollaire I.1.1. [14] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné. Alors la semi-norme

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $H^1(\Omega)$.

Définition I.1.13. [14] (**Rellich**)

Soit Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, alors de toute suite bornée de $H_0^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ (on dit que l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte).

I.2 équations différentielles

I.2.1 Généralité sur les équation différentielles

Définition I.2.1. Nous appelons une équation différentielle chaque équation reliant la variable indépendante x et la fonction $y(x)$ et ces dérivées, nous écrivons :

$$L(x, y, \dots, y^{(n)}, f(x)) = 0 \tag{I.1}$$

Exemple I.2.1. (L'équation de Bernoulli)

Est une équation différentielle de la forme :

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{(n)}$$

Où n nombre entier, P et Q Fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Exemple I.2.2. (L'équation de Riccati)

Est une équation différentielle de la forme :

$$y' + P(x)y^2 + R(x)y + Q(x) = 0$$

Où P et Q et R Fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

I.2.2 Types d'équations différentielles

Les équations différentielles sont divisées en deux parties, ordinaires et partielles :

I.2.2.1 Équations différentielles ordinaires :

L'équation différentielle est appelée équation différentielle ordinaire si la fonction inconnue dépend d'une variable indépendante .

$$Y'(t) = f(t, Y(t)) \quad (\text{I.2})$$

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \quad (\text{I.3})$$

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} + 2 \sin(x) + \frac{d^2 y}{dx^2} = (4 - x^2)y \quad (\text{I.4})$$

les équations (I.2) , (I.3) , (I.4) sont des équations différentiels ordinaires

I.2.2.2 Équations aux dérivées partielles :

L'équation aux dérivées partielles est appelée équation différentielle partielle si la fonction inconnue dépend de deux variables indépendantes ou plus.

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy} = 0 \quad (\text{I.5})$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = f(x, y, z) \quad (\text{I.6})$$

$$(x^2 + 1) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 3y \frac{\partial U}{\partial x} + (x - y^2)U = 0 \quad (\text{I.7})$$

les équations (I.5) , (I.6) , (I.7) sont des équations différentiels partiels .

⊙ Équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = D(x, y) \quad (\text{I.8})$$

est la forme la plus générale pour une équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre.

Exemple I.2.3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ x \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} + 3u &= 0 \end{aligned}$$

⊙ Classification des Équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre, à coefficients constants

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (\text{I.9})$$

Les trois premiers termes correspondent à la partie principale . $A, \dots, G$ sont des constantes.

- soit $\Delta = B^2 - 4AC$.

Classification :

1. si $\Delta > 0$, alors l'EDP est dite hyperbolique.
2. si $\Delta = 0$, alors l'EDP est dite parabolique.
3. si $\Delta < 0$, alors l'EDP est dite elliptique.

Exemple I.2.4.

- (i) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ avec $c > 0$
 $\Delta = B^2 - 4AC = 4c^2$. Ainsi l'équation des ondes est hyperbolique.
- (ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial y} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ avec $c > 0$
 $\Delta = B^2 - 4AC = 0$. Ainsi l'équation de la diffusion est parabolique.
- (iii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
 $\Delta = B^2 - 4AC = -4$. Ainsi l'équation de Laplace est elliptique.

Remarque I.2.1. Dans cette ce Notre rappelle consacré sur, nous allons seulement étudier les équations différentielles ordinaires.

I.2.3 Équation différentielle lineaires d'ordre n

Définition I.2.2. [15] Une équation différentielle d'ordre n est dite linéaire si la fonction inconnue y et ses dérivées $y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^n$ sont de premier degree; c.-à-d. si elle est de la forme

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (\text{I.10})$$

où $a_0, \dots, a_n$ et $f(x)$ sont des fonctions données de x ou des constantes, et $a_0 \neq 0$ quel que soit x dans le domaine de définition de l'équation (I.10). La fonction $f(x)$ est appelée le second membre de l'équation (I.10). Si $f(x) = 0$ et $a_0 = 1$ l'équation s'écrit

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (\text{I.11})$$

et elle est dite homogène ou sans second membre (le premier membre de cette équation est une fonction homogène du premier degré par rapport à $y, y', \dots, y^{(n)}$)

Définition I.2.3. (*Degree d'une équation différentielle*)

C'est l'exposant élevé en haut d'une dérivée qui apparaît dans l'équation différentielle, et avant de déterminer le degré il doit être placé sur une forme standard et correcte en termes de dérivés.

Exemple I.2.5.

$$(y^{(n)})^m + y^{(n-1)} + y^{(n-2)} + \dots + y = 0 \quad (\text{I.12})$$

C'est une équation différentielle order n et Degree m

I.2.4 Equations différentielles ordinaire du premier ordre

Définition I.2.4. Une équation différentielle ordinaire du premier ordre est une équation dans laquelle la dérivée la première $y'(x)$ est exprimée en fonction d'une variable x et $y(x)$:

$$y' = f(x, y) \quad (\text{I.13})$$

I.2.4.1 Equations différentielles ordinaire linéaire du premier ordre

Définition I.2.5. [2] Une équation différentielle linéaire du premier ordre est l'équation de la forme :

$$y' = ya(x) + b(x)$$

et elle est dite homogène où $b(x) = 0$

Le théorème suivant affirme que, lorsque y est une fonction, résoudre l'équation différentielle $y' = a(x)y$

Théorème I.2.1. *soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

et $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de a

où $A(x) = \int a(x)dx$

Soit l'équation différentielle :

$$y' = a(x)y \quad (\text{I.14})$$

Les solutions sur I de (I.14) sont les fonctions y définies par :

$$y(x) = c.e^{A(x)}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Remarque I.2.2. *si $a(x) = a$ est une fonction constante, alors une primitive est par exemple $A(x) = ax + c$ et on retrouve les solutions du théorème (I.2.1) .*

★ **preuve du théorème (I.2.1).**

la solution trivial ($y = 0$) de l'équation (I.14)

Si $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = a(x) &\Leftrightarrow \int \frac{y'}{y} = \int a(x) \Leftrightarrow \ln|y| = A(x) + b \\ &\Leftrightarrow |y| = e^{A(x)+b} \Leftrightarrow y(x) = \pm e^b e^{A(x)} \\ &\Leftrightarrow y(x) = c.e^{A(x)} \quad \text{avec} \quad c = \pm e^b \end{aligned}$$

■

Exemple I.2.6. *Comment résoudre l'équation différentielle $x^2 y' = y$?*

On se place sur l'intervalle $I_+ =]0; +\infty[$ où $I_- =]-\infty; 0[$

L'équation devient $y' = \frac{1}{x^2}y$

Donc $a(x) = \frac{1}{x^2}$, dont une primitive est $A(x) = \int a(x)dx = \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{x} + b$

Ainsi les solutions cherchées sont

$$y(x) = c.e^{\frac{-1}{x}} \quad \text{ou} \quad c \in \mathbb{R}$$

Et maintenant, nous résolvons l'équation linéaire non homogène .

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (\text{I.15})$$

où $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Proposition I.2.1. *(Bernoulli)*

soit $y(x)$ Solution de l'équation différentielle (I.15) dans lequel :

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

dans lequel : $u(x) = e^{-\int a(x)}$ et $v(x) = \int \frac{b(x)}{u(x)} + c$, où $c \in \mathbb{R}$

preuve

nous avons $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ Nous tirons les deux côtés que nous trouvons

$$y' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

Nous en substituons dans l'équation (I.15) :

$$\begin{aligned} u' \cdot v + v' \cdot u + a \cdot u \cdot v &= b \\ u \cdot v' + v(u' + a \cdot u) &= b \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Nous choisissons la fonction u Ce chèque $u' + a \cdot u = 0$ donc

$$u' + a \cdot u = 0$$

$$\Rightarrow -a \cdot u = u'$$

$$\Rightarrow \frac{u'}{u} = -a(x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{u'}{u} = - \int a(x)$$

$$\Rightarrow \ln(u(x)) = - \int a(x)$$

$$\Rightarrow u(x) = e^{- \int a(x)}$$

Alors, revenons à l'équation (I.19)

$$v' \cdot u = b$$

$$\Rightarrow v' = \frac{b(x)}{u(x)}$$

$$\Rightarrow \int v' = \int \frac{b(x)}{u(x)}$$

$$\Rightarrow v(x) = \int \frac{b(x)}{u(x)} + c, \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

Exemple I.2.7. Comment résoudre l'équation différentielle $y' - \frac{2y}{x} = x^2$, $x \neq 0$?
soit $y(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{- \int \frac{2}{x} dx} \\ &= e^{-2 \ln(x)} \\ &= e^{2 \ln(x)} \\ &= e^{\ln(x^2)} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

$$v(x) = \int \frac{b(x)}{u(x)} dx + c$$

$$v(x) = \int \frac{x^2}{x^2} dx + c$$

$$v(x) = \int 1 dx + c$$

$$v(x) = x + c$$

Donc : $y(x) = x^2(x + c)$

I.2.5 Équation différentielle ordinaire du deuxième ordre

Définition I.2.6. Une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre est une équation dans laquelle la dérivée seconde $y(x)$, $y''(x)$ est exprimée en fonction d'une variable x , $y(x)$ et de la dérivée première $y'(x)$:

$$y''(x) = f(x, y, y')$$

Définition I.2.7. (Équation différentielle linéaire)

On dit qu'une équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre si elle est écrite comme suivant :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

où $a(x) \neq 0$.

I.2.5.1 Propriétés et définitions des équations différentielle linéaires du deuxième ordre

Proposition I.2.2. Soit y_1 assur selement solution à l'équation $ay'' + by' + cy = f_1(x)$ et y_2 assur selement solution à l'équation $ay'' + by' + cy = f_2(x)$
Alors $y_1 + y_2$ Solution assur à l'équation $ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)$

Théorème I.2.2. [8] si y_1 et y_2 sont deux Solutions assur à l'équation linéaire homogène du second ordre

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{I.17})$$

1. $y_1 + y_2$ est aussi solution de cette équation.
2. si c est une constante, cy_1 est aussi une solution de cette équation.

PREUVE.

Etant donné que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation proposée, on a

$$\left. \begin{aligned} y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 &= 0 \\ y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.18})$$

Substituant la somme $y_1 + y_2$ dans l'équation (I.17) et prenant en considération les identités (I.18), on aura

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)'' + a_1(y_1 + y_2)' + a_2(y_1 + y_2) &= (y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + (y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que $y_1 + y_2$ est solution de l'équation.

Définition I.2.8. (Indépendance linéaire)

soit Φ_1 et $\Phi_2, \dots, \Phi_n$ Fonctions définies sur I .

Nous disons qu'il est linéairement indépendant Si

$$c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \dots + c_n\Phi_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n$$

Définition I.2.9. y_1 et y_2 étant des fonctions de x , le déterminant

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'$$

est appelé le déterminant de Wronski ou wronskien des fonctions données.

Définition I.2.10. Si les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes sur le segment $[a; b]$, leur wronskien est identiquement nul sur ce segment. En effet, si $y_2 = \lambda y_1$ où $\lambda = \text{const}$, $y_2' = \lambda y_1'$ et

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0$$

Théorème I.2.3. Si le déterminant de Wronski $W(y_1, y_2)$ des solutions y_1 et y_2 de l'équation linéaire homogène (I.17) n'est pas nul en un point $x = x_0$ du segment $[a; b]$ où les coefficients de l'équation sont continus, il ne s'annule nulle part sur ce segment.

Remarque I.2.3. Si le wronskien est nul pour une certaine valeur $x = x_0$ il est alors nul pour toute valeur x du segment considéré. Ceci résulte directement de la formule $(W = ce^{-\int_{x_0}^x a_1 dx})$.
si $W = 0$ pour $x = x_0$, alors

$$(W)_{x=x_0} = C = 0$$

par conséquent, $W \equiv 0$ quelle que soit la valeur de la borne supérieure x dans la formule $(W = ce^{-\int_{x_0}^x a_1 dx})$.

Théorème I.2.4. Si les solutions y_1 et y_2 de l'équation (I.17) sont linéairement indépendantes sur le segment $[a; b]$, le déterminant de Wronski formé avec ces solutions ne s'annule en aucun point de ce segment.

Théorème I.2.5. Si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (I.17), alors

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2$$

où α et β sont des constantes arbitraires, est la solution générale de cette équation.

I.2.5.2 Équations différentielles du deuxième ordre à coefficients constants

• Équations différentielles homogènes du deuxième ordre

Soit l'équation linéaire homogène du deuxième ordre

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{I.19})$$

où a, b et c sont des constantes réelles et $a \neq 0$.

On cherche la solution de (I.19) sous la forme $y = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. On trouve

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow (ar^2 + br + c) = 0$$

Définition I.2.11. L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée l'équation caractéristique associée à (I.19)

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique associée à (I.19)

Théorème I.2.6.

(I) si $\Delta > 0$ l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et les solutions de (I.19) sont les :

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \eta e^{r_2 x} \quad \text{où } \lambda, \eta \in \mathbb{R}$$

(II) si $\Delta = 0$ l'équation caractéristique possède une racine double $r_0 = \frac{-b}{2a}$ et les solutions de (I.19) sont les :

$$y(x) = (\lambda + \eta x)e^{r_0 x} \quad \text{où } \lambda, \eta \in \mathbb{R}$$

(III) si $\Delta < 0$ l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (I.19) sont les :

$$y(x) = e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \eta \sin(\beta x)) \quad \text{où } \lambda, \eta \in \mathbb{R}$$

Exemple I.2.8. Soit l'équation

$$y'' - y' - 2y = 0$$

Trouver la solution générale et la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

◆ **Solution :**

L'équation caractéristique

$$r^2 - r - 2 = 0$$

Nous résolvons l'équation caractéristique $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-2) = 9$

trouvons ses racines $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{2} = -1$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{2} = 2$

La solution générale s'écrit

$$y(x) = \lambda e^{-x} + \eta e^{2x}$$

Trouvons la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données : déterminons à cet effet les valeurs correspondantes de λ et η

On déduit de la première condition :

$$\begin{aligned} y(0) &= \lambda e^0 + c_2 e^0 = \lambda + \eta = 0 \\ \Rightarrow \lambda + \eta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

On déduit de la deuxième condition :

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\lambda e^{-x} + 2\eta e^{2x} \\ y'(0) &= -\lambda e^0 + 2\eta e^0 = -\lambda + 2\eta = 1 \\ \Rightarrow -\lambda + 2\eta &= 1 \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

Nous collectons (I.20) et (I.21)

$$\begin{aligned} \lambda + \eta - \lambda + 2\eta &= 1 \\ \Rightarrow \eta &= \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \lambda &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

La solution particulière cherchée est

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x}$$

• **Équations différentielles non homogènes du deuxième ordre**

Soit l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (\text{I.22})$$

où a , b et c numéros réels fixes, avec $f(x) \neq 0$.

► **Méthode de solution**

Nous savons que la solution générale est la somme de la solution particulières et de la solution de l'équation homogène est $y = y_h + y_p$

où y_h la solution de l'équation homogène et y_p Il peut être trouvé d'une manière qui change les constantes, et il existe des cas particuliers pour cela qui sont liés à un formulaire f .

⊗ LE PREMIER CAS :

Si f Polynôme from degré n , ($f(x) = P_n(x)$) Alors :

$$y_p = Q_n(x)x^r$$

où Q_n Polynôme from degré n et r le nombre des racines de l'équation égal au zéro.

⊗ LA DEUXIÈME CAS :

Si f Pas en forme $e^{\alpha x} P_n(x)$ Alors :

$$y_p = e^{\alpha x} Q_n(x) x^r$$

où Q_n Polynôme from degré n et r le nombre de racines de l'équation égal à la valeur α

⊗ LA TROISIÈME CAS :

Si f Pas en forme $a.\cos(\beta x) + b.\sin(\beta x)$ Alors :

$$y_p = (A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))x^r$$

où r le nombre de racine de l'équation égal à $i\beta$

⊗ LA QUATRIÈME CAS :

Si f Pas en forme $e^{\alpha x} [p_n(x)\cos(\beta x) + p_m(x)\sin(\beta x)]$ Alors :

$$y_p = x^r e^{\alpha x} [Q_1\cos(\beta x) + Q_2\sin(\beta x)]$$

où Q_1 et Q_2 polynôme en degré $s = \max(m, n)$ et r le nombre de racines de l'équation caractéristique est-il égal à $\alpha + i\beta$

Exemple I.2.9. Résoudre l'équation différentielle suivant

$$y'' - 4y' + 3 = xe^x \quad (\text{I.23})$$

◆ **Solution :**

Il est connue que la solution générale aux équations homogènes $y'' - 4y' + 3 = 0$

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^x$$

la solution spécial prend la forme suivante

$$y_p = e^x Q_1 x = e^x (ax^2 + bx)$$

Nous différencions et remplaçons (I.23) Nous trouvons $a = b = \frac{1}{4}$ Alors La solution générale est

$$y(x) = \frac{1}{4}(x^2 + x)e^x + c_1 e^{3x} + c_2 e^x$$

I.2.5.3 Équation différentielle du deuxième ordre à coefficients variables

• Équations différentielles homogènes du deuxième ordre

soit l'équation linéaire homogène de deuxième ordre.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (\text{I.24})$$

où $a_0(x) \neq 0$, $a_1(x)$ et $a_2(x)$ sont des fonctions données de x .

Supposons que y_1 soit une solution non triviale de (I.24) définie sur I . Nous cherchons alors une seconde solution y_2 , telle que y_1 et y_2 sont linéairement indépendants sur I , (i.e $\frac{y_2}{y_1} \neq C(\text{constante})$).

autrement dit il existe une fonction u telle que $\frac{y_2}{y_1} = u(x)$. ou encore $y_2 = y_1 u(x)$.

Si nous divisons par $a_0(x)$ alors l'équation (I.24) devient

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (\text{I.25})$$

où P et Q sont des fonctions continues sur I .

Supposons que y_1 soit une solution connue de (I.25) sur I et que $y_1 \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Si nous définissons $y_2 = y_1 u$, il suit alors que $y_2' = u y_1' + u' y_1$

et $y_2'' = y_1'' u + 2 y_1' u' + y_1 u''$

et y_2 solution l'équation (I.25) donc

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = u[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + y_1 u'' + 2y_1' u' + P y_1 u' = 0 \quad (\text{I.26})$$

l'équation $[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] = 0$.

Si nous notons $w = u'$ alors :

$$\begin{aligned} y_1 w' + (2y_1' + P y_1)w &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dw}{dx} + \left(\frac{2y_1' + P y_1}{y_1}\right)w &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dw}{w} &= -2 \frac{y_1'}{y_1} dx - P dx \\ \Rightarrow \int \frac{dw}{w} &= -2 \int \frac{y_1'}{y_1} dx - \int P dx \\ \Rightarrow \ln|w y_1^2| &= - \int P dx + c \end{aligned}$$

Alors $w = c_1 e^{-\int P(s)ds} / y_1^2 \Rightarrow u = c_1 \int e^{-\int P(s)ds} / y_1^2 dx + c_2$

$$\Rightarrow y_2(x) = y_1(x) c_1 \int e^{-\int P(s)ds} / y_1^2 dx + y_1(x) c_2$$

Exemple I.2.10. Résolvez l'équation suivante :

$$x^2 y'' + x^2 y' + (x-2)y = 0 \quad (\text{I.27})$$

où $x \neq 0$

◆ **Solution :**

Nous divisons les deux côtés de l'équation par x^2

$$y'' + y' + \frac{(x-2)}{x^2} y = 0 \quad (\text{I.28})$$

Alors :

$P(x) = 1$ et $Q(x) = \frac{(x-2)}{x^2}$. nous remarquons que $y_1 = \frac{1}{x}$ Résous l'équation (I.28) .

La solution générale :

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) c_1 \int e^{-\int P(s)ds} / y_1^2 dx + y_1(x) c_2 \\ \Rightarrow y_2(x) &= y_1(x) c_1 \int x^2 e^{-\int 1 ds} dx + y_1(x) c_2 \\ \Rightarrow y_2(x) &= \frac{c_1}{x} (-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x}) + \frac{c_2}{x} \\ \Rightarrow y_2(x) &= c_1 (-x e^{-x} - 2e^{-x} - \frac{2}{x} e^{-x}) + \frac{c_2}{x} \end{aligned}$$

• Équations différentielles non homogènes du deuxième ordre

Définition I.2.12. soit l'équation linéaire non homogène de deuxième ordre.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (\text{I.29})$$

où $a_0(x) \neq 0$, $a_1(x)$ et $a_2(x)$ sont de fonction données de x .

► méthode de variation des constantes

une méthode de résolution des équations différentielles. Elle permet en particulier de déterminer les solutions d'une équation différentielle avec second membre, connaissant les solutions de l'équation homogène (c'est-à-dire sans second membre) associée.

Si la solution générale pour homogène est :

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Alors :

$$y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

où $c_1(x), c_2(x)$ Fonctions inconnues, et pour les obtenir, nous résolvons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases}$$

Remarque I.2.4. La méthode peut être appliquée à toutes les équations différentielles linéaires à coefficients fixes ou variables.

Exemple I.2.11. Trouver la solution générale de l'équation :

$$xy'' - y' = -\frac{1}{x} \quad (\text{I.30})$$

◆ **Solution :**

Nous divisons les deux côtés de l'équation (I.30) sur x Alors

$$y'' - \frac{y'}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

1) Trouvons la solution générale de l'équation homogène $y'' - \frac{y'}{x} = 0$

$$\begin{aligned} y'' = \frac{y'}{x} &\Rightarrow \frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \\ \Rightarrow \log(y') &= \log(x) + c \\ \Rightarrow y' &= c_1 x \\ \Rightarrow y_h &= c_1 x^2 + c_2 \end{aligned}$$

2) recherchons y_p

$$y_p = c_1(x) x^2 + c_2(x)$$

Nous utilisons méthode de variation des constantes Pour obtenir $c_1(x)$ et $c_2(x)$

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = -\frac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x) x^2 + c_2'(x) = 0 \\ 2c_1'(x) x + c_2'(x) \cdot 0 = -\frac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_1'(x) &= -\frac{1}{2x^3} \quad \text{et} \quad c_2'(x) = \frac{1}{2x} \Rightarrow c_1(x) = \frac{1}{4x^2} \quad \text{et} \quad c_2(x) = \frac{\log|x|}{2} \\ \Rightarrow y_p &= \frac{1}{4} + \frac{\log|x|}{2} \end{aligned}$$

la solution générale de l'équation :

$$y(x) = c_1 x^2 + \frac{\log|x|}{2} + c_2 + \frac{1}{4}$$

I.2.5.4 L'équations différentielles de Cauchy-Euler

Définition I.2.13. [3] L'équation différentielles Cauchy-Euler de second ordre c'est l'équation qui prend la forme suivante :

$$x^2 y'' + axy' + by = f(x) \quad (\text{I.31})$$

où a, b de constantes et $f(x)$ est une fonction numérique.

- ▷ Si $f(x) = 0$ l'équation est dit homogène
- ▷ Si $f(x) \neq 0$ l'équation est dit non homogène

► Méthode de solution

1) solution l'équation homogène :

Solution générale de l'équation est la forme $y = x^r$.

L'équation caractéristique de Euler $r^2 + (a-1)r + b = 0$ Nous comptons les distingués $\Delta = (a-1)^2 - 4b$

- Si $\Delta > 0$ Alors $y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$ où x^{r_1}, x^{r_2} Ils ne sont pas liés linéairement
- Si $\Delta = 0$ Alors $y = c_1 + c_2 \ln|x| x^{r_0}$ où $r_0 = \frac{1-a}{2}$
- Si $\Delta < 0$ Alors $y = x^\alpha [c_1 \cos(\beta \ln|x|) + c_2 \sin(\beta \ln|x|)]$ où $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

2) solution l'équation non homogène :

Solution particulière à une équation de Euler

$$y_p(x) = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

$$\text{où } c_1(x) = \int \frac{-y_2 f(x)}{x^2 W(y_1, y_2)} dx \text{ et } c_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{x^2 W(y_1, y_2)} dx$$

Exemple I.2.12. Condérer l'équation

$$x^2 y'' + 5xy' - 2y = 0$$

où $x \neq 0$

◆ Solution :

Solution l'équation caractéristique $r^2 + 4r - 2 = 0$

$$\Delta = 24 \text{ Alors : } r_1 = -2 - \sqrt{6} \text{ et } r_2 = -2 + \sqrt{6}.$$

$$\text{Alors Solution générale de l'équation } y(x) = c_1 x^{-2-\sqrt{6}} + c_2 x^{-2+\sqrt{6}}.$$

Exemple I.2.13. Condérer l'équation

$$x^2 y'' - 4xy' + 4y = x^4 + x^2$$

où $x \neq 0$

◆ Solution :

1- Solution l'équation caractéristique $r^2 - 5r + 4 = 0$

$\Delta = 9$ Alors : $r_1 = 1$ et $r_2 = 4$.

$$\text{Alors Solution générale de l'équation } y_h(x) = c_1 x + c_2 x^4.$$

2- Trouvez votre solution

$$y_p(x) = c_1(x)x + c_2(x)x^4$$

nous avons $y_1 = x$ et $y_2 = x^4$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^4 \\ 1 & 4x^3 \end{vmatrix} = 4x^4 - x^4 = 3x^4$$

$$c_1(x) = \int \frac{-(x^4)(x^4 + x^2)}{x^2(3x^4)} dx = -\frac{1}{3} \int (x^2 + 1) dx$$

$$\Rightarrow c_1(x) = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x$$

$$c_2(x) = \int \frac{x(x^4 + x^2)}{x^2(3x^4)} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x^3}\right) dx$$

$$\Rightarrow c_2(x) = \frac{1}{3}(\ln|x| - \frac{1}{2x^2})$$

La solution privée est donc

$$y_p = -\frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}(x^4 \ln|x| - \frac{x^2}{2})$$

Chapitre II

Méthodes numériques

les méthodes numériques tiennent une place capitale pour résoudre les problèmes mathématiques, aussi bien en sciences physiques que dans le domaine de la biologie, des technologies et des sciences économiques. Mais elle offre aussi des possibilités très riches pour les sciences mathématiques elles-mêmes : sans oublier que, dans le passé, les problèmes numériques ont constitué un moteur pour le développement des concepts de l'analyse. Ce chapitre sera consacré pour l'étude des deux méthodes (Runge-Kutta et différences finies).

II.1 Introduction, le problème mathématique

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et f une fonction donnée

$$f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

Et soit y une fonction différentiable de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle équation différentielle du premier ordre, la relation

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)) \quad (\text{II.1})$$

On dit que y est la solution de cette équation différentielle sur $[a, b]$ si y vérifie la relation (II.1) pour tout $x \in [a, b]$. On appelle problème de Cauchy ou problème de condition initiale l'équation différentielle à laquelle on adjoint la condition initiale $y(a) = y_0$ où y_0 est un nombre donné :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

II.2 Méthodes d'Euler et Taylor d'ordre deux

II.2.1 Méthode d'Euler

[1] La méthode d'Euler, est la plus simple méthode numérique et consiste à substituer la dérivée $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ par l'expression

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad (\text{II.3})$$

où $h = \frac{b-a}{N}$ (N entier donné.) est le pas d'intégration numérique. Considérons alors une subdivision de $[a, b]$, en sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur h , $i = 0, \dots, N$ et $x_i = a + ih$, avec $x_0 = a$ et $x_N = b$.

L'expression (II.3) entraîne $y(x+h) = y(x) + hy'(x)$ d'où $y(x+h) = y(x) + hf(x, y)$ Par conséquent, partant de la condition initiale (x_0, y_0) , et prenant un pas régulier $h = x_{i+1} - x_i$, en posant y_i approximation de $y(x_i)$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (\text{II.4})$$

L'algorithme d'Euler s'écrit alors :

$$\begin{cases} y_0 = y(a) & \text{donné} \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) & i = 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

Définition II.2.1. (l'erreur d'Euler) [1]

Une méthode numérique approchant $y(x_j)$ par y_j telle que l'erreur

$$e_j = y(x_j) - y_j \text{ vérifie } |e_j| \leq kh^p$$

est dite d'ordre p , ($k \in \mathbb{R}_*^+$)

II.2.2 Méthode Taylor d'ordre deux

[1] L'idée consiste à remplacer sur $[x_i, x_{i+1}]$, $y(x)$ solution de l'équation différentielle . En effet

$$y''(x) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y)$$

et en négligeant les termes d'ordre supérieur, on obtient alors l'algorithme de Taylor d'ordre deux :

$$\begin{cases} h = \frac{b-a}{N}, x_0 = a, \quad y_0 \text{ donné}, x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right)(x_i, y_i), \quad (i = 0, \dots, N-1). \end{cases}$$

Cependant cette méthode présente un inconvénient certain qui réside dans le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f$ qui peut être difficile ; pour éviter ce problème on utilise souvent la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 donnée plus bas.

II.3 Methode de Runge-kutta

La méthode de Ruge Kutta tire les avantage des méthodes de Taylor tout en gardant une simplicité d'exécution de la méthode d'Euler. En pratique, Ruge Kutta remplace l'évaluant la fonction $f(x, y(x))$ à différents endroits afin d'obtenir presque les mêmes résultats que ceux obtenu avec la méthode de Taylor.

Soit le problème de condition initiale l'équation différentielle à laquelle on adjoint la condition initiale $y(a) = y_0$ où y_0 est un nombre donnée :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Pour résoudre le problème (II.5), nous utilisons la méthode Runge Kutta.

Principe de la méthode

[4] Dans sa forme la plus générale, une méthode Ruge Kutta peut s'écrire :

$$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n, h; f), \quad n \geq 0 \quad (\text{II.6})$$

où F est la fonction d'incrément définie par

$$\begin{aligned} F(x_n, y_n, h; f) &= \sum_{i=1}^s b_i K_i \\ K_i &= f\left(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j\right), \quad i = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

où s désigne le nombre d'étapes de la méthode. Les coefficients $\{a_{ij}\}$, $\{c_i\}$ et $\{b_i\}$ caractérisent complètement une méthode Runge Kutta. On peut les présenter dans un **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|cccc} 0 = c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & \mathbf{b}^t \end{array}$$

Les coefficients c_i et a_{ij} sont généralement supposés satisfaire aux conditions

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad i = 2 \dots s. \quad (\text{II.8})$$

II.3.1 Runge-Kutta d'ordre 2

on pose $s = 2$ dans (II.7) on obtient :

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) \quad (\text{II.9})$$

où

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{11} k_1 h) \end{aligned}$$

maintenant chercher les indéfinis b_1, b_2, c_2 et a_{11}
il faut résoudre les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 &= 1 \\ b_2 * c_2 &= 0,5 \\ b_2 * a_{11} &= 0,5 \end{aligned}$$

la plus fameuse méthode choisit leurs valeurs est :

- **le méthode de Huen**
- **le méthode de Midpoint**
- **le méthode de Raltson**

II.3.1.1 le méthode de Huen

choisissant $b_2 = 0,5$ on obtient $b_1 = 0,5$ $c_2 = a_{11} = 1$
le deuxième ordre de la méthode de Runge Kutta devient :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad (\text{II.10})$$

où $k_1 = hf(x_n, y_n)$, $k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$

II.3.1.2 le méthode de Midpoint

choisissant $b_1 = 0$ on obtient $b_2 = 1$ $c_2 = a_{11} = 0,5$
le deuxième ordre de la méthode de Runge Kutta devient :

$$y_{n+1} = y_n + hk_2 = y_n + f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (\text{II.11})$$

où $k_1 = f(x_n, y_n)$, $k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}h\right)$

II.3.1.3 le méthode de Raltson

choisissant $b_1 = \frac{1}{3}$ on obtient $b_2 = \frac{2}{3}$ $c_2 = a_{11} = \frac{3}{4}$
le deuxième ordre de la méthode de Runge Kutta devient :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3} f(k_1, 2k_2) \quad (\text{II.12})$$

où $k_1 = f(x_n, y_n)$, $k_2 = f(x_n + \frac{3h}{4}, y_n + \frac{3k_1}{4}h)$

II.3.2 Runge-Kutta d'ordre 3

[2] Les dérivations de Runge Kutta aux ordres 3 sont fastidieuses. Heureusement leurs formules sont faciles à programmer et nous nous contentons d'utiliser les résultats.

La formule Runge-Kutta à l'ordre 3 est :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \quad (\text{II.13})$$

où

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2) \end{aligned}$$

II.3.3 Runge-Kutta d'ordre 4

[4] Une méthode classique populaire est la procédure de quatrième ordre suivante :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Le tableau Butcher est :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \quad (\text{II.15})$$

Méthode de Runge Kutta On l'utilise généralement pour résoudre des équations différentielles ordinaires du premier ordre, mais dans certains cas on peut l'utiliser dans d'autres équations différentielles, ce qui nécessite une modification des opérations arithmétiques (k_1, k_2, k_3, k_4) . Soit le problème :

$$\begin{cases} y''(x) = ay(x) & x \in]0, 1[\\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

où y_0 est un nombre donnée, et $a \in \mathbb{Z}^*$.

Pour résoudre le problème (II.16), nous utilisons la méthode Runge Kutta(order4) comme suit :

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 & l_1 &= ax_n \\ k_2 &= 0.5x_n l_1 & l_2 &= ax_n(1 + 0.5k_1) \\ k_3 &= 0.5x_n l_2 & l_3 &= ax_n(1 + 0.5k_2) \\ k_4 &= x_n l_3 & l_4 &= ax_n(1 + k_3) \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{II.17})$$

II.3.3.1 L'erreur de troncature locale

Définition II.3.1. *C'est une erreur qui vient de l'arrondi d'une opération mathématique, par exemple :*

$$e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

. En fait, on ne peut pas approximer un nombre infini de termes, prenons donc seulement trois termes :

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

Donc dans ce cas l'erreur de troncature est :

$$\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Analyse des erreurs de la méthode Runge Kutta (ordre 4).

La forme de travail de la méthode Runge Kutta (order 4) s'écrit comme suit :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \mathcal{O}(h^5)$$

L'erreur de troncature locale (l'erreur produite par chaque étape successive de l'algorithme récursif) est de la forme :

$$err = C(h^5) \quad (\text{II.18})$$

où C est une constante. Ici C n'est pas lié à h mais est lié à x_0 et au quatrième cran de la solution exacte $Y(x)$ à x_0 (facteur d'erreur constant correspondant à la troncature de la série de Taylor pour $Y(x_0 + h)$ autour de x_0). Pour approximer err on suppose C est constant et t passe de x_0 à $x_0 + h$.

Soit $u(x)$ la solution approchée de $Y(x)$ à $x_0 + h$, qui a été obtenue en faisant le premier pas de Runge Kutta au quatrième ordre, alors :

$$Y(x) = u(x) + \mathcal{O}(h^5) \quad (\text{II.19})$$

Donc : **erreur de troncature locale** = $C(h^5) = Y(x) - u(x)$.

Dans le programme informatique, nous utilisons cette erreur (erreur de troncature locale) de la méthode Range Kutta qui peut être facilement surveillée, en entrant la commande $|Y(x) - u(x)|$. Alors que la boucle itérative du programme pour le calcul à chaque étape. Et si l'erreur dépasse un seuil donné, on peut modifier le domaine d'étude ou à l'étape h . Pour obtenir plus de précision.

II.4 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une des plus anciennes méthodes de simulation numérique qui est encore utilisée pour certaines applications, comme la propagation d'ondes sismiques ou électromagnétiques ou la mécanique des fluides compressibles. Pour d'autres applications, comme la mécanique du solide ou celles des fluides incompressibles, on lui préfère souvent la méthode des éléments finis.

II.4.1 Normes matricielles

Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle donnée sur l'espace $\mathcal{R}^N$. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{R}^{N \times N}$ on note $\|A\|$ la quantité définie par :

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathcal{R}^N, \|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathcal{R}^N, \|x\|=1} \|Ax\|$$

L'application $\|\cdot\|$ ainsi définie vérifie les propriétés usuelles de la norme, à savoir

1. $\|A\| \geq 0$ et $\|A\| = 0$ ssi $A = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathcal{R}, \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
3. inégalité triangulaire $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A, B$.

Elle vérifie aussi une propriété supplémentaire

$$\forall A, B \in \mathcal{R}^{N \times N} : \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Enfin par définition on a

$$\forall A \in \mathcal{R}^{N \times N}, x \in \mathcal{R}^N : \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

Rappelons quelques normes matricielles usuelles.

Définition II.4.1. [11]

Soit A une matrice de $\mathcal{R}^{N \times N}$ de coefficients $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq N$, on a les normes usuelles suivantes

(I)

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{i=1}^{i=N} |a_{ij}|$$

(II)

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^{j=N} |a_{ij}|$$

(III)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}$$

où la notation $\rho(B)$ désigne le rayon spectral de la matrice B . Dans le cas d'une matrice A qui commute avec sa matrice adjointe A^* (une telle matrice est dite normale), on a

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

II.4.2 Matrice monotone

On dit qu'un vecteur x est positif si toutes ses composantes x_i sont positives, une matrice A est dite positive si tous ses coefficients a_{ij} sont positifs. Enfin, on dit qu'une matrice A est **monotone** si elle est **invertible** et **d'inverse positif**. On a la caractérisation suivante des matrices monotones.

Lemme II.4.1. [11]

Une matrice A est monotone ssi pour tout vecteur $x \in \mathcal{R}^N$; on a

$$Ax \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \tag{II.20}$$

★ Preuve.

” $\Rightarrow$ ”

Supposons A monotone. Soit $x \in \mathcal{R}^N$ tel que $Ax \geq 0$: La matrice A^{-1} étant positive, on en déduit que

$$x = A^{-1}(Ax) \geq 0.$$

” $\Leftarrow$ ”

Réciproquement, soit A une matrice vérifiant la propriété (II.20). Montrons d'abord que A est inversible. Soit $x \in \mathcal{R}^N$ tel que

$$A(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

et

$$A(-x) \geq 0 \Rightarrow (-x) \geq 0$$

donc si

$$Ax = 0 \Rightarrow x = 0$$

ce qui montre que A est inversible. Montrons que la matrice A^{-1} est positive. Pour cela, il suffit de montrer que chacune de ses colonnes est positive. Soit C_i l'une de ses colonnes, par définition,

$$C_i = A^{-1}e_i$$

où e_i est la colonne de la base canonique de $\mathcal{R}^N$: On a donc :

$$AC_i = e_i \geq 0$$

d'après la propriété (II.20), on en déduit que :

$$C_i \geq 0$$

■

Ce qui termine la démonstration.

II.4.3 Principe de la méthode

II.4.3.1 le problème d'ordre 1 en dimension 1

On considère le problème aux limites

$$\begin{cases} -u'(x) + a(x)u(x) = f(x) & x \in]0, 1[\\ u(0) = g_0, u(1) = g_1, \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

où f et a sont deux fonctions données sur $[0, 1]$ avec $f \in L^2(]0, 1[)$, $a \in L^\infty(]0, 1[)$, $a \geq 0$. Les deux ingrédients principaux d'une approximation par différences finies sont le Schéma d'approximation des dérivées et la grille de discrétisation.

⊙ Approximation des dérivées d'une fonction régulière

L'idée fondamentale consiste à approcher les dérivées (ou les dérivées partielles en dimension plus grande) de la fonction u en un point x en écrivant

$$\frac{du}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \simeq \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

pour un h petit (mais non nul) fixé. Il suffira ensuite de disposer les points de discrétisation régulièrement de l'espace de h pour pouvoir employer cette approximation en tout point de discrétisation.

La qualité de l'approximation précédente dépend fortement de la **régularité de la fonction u** . Si la fonction u est $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$, on déduit aisément du développement de Taylor

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(\theta)$$

où $\theta \in]x, x+h[$, l'inégalité

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch$$

où $C = \sup_{y \in [0,1]} |u''(y)|$, pour tout $0 \leq x \leq 1-h$. On dit alors que l'approximation de $u'(x)$ par $\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$ est consistante d'ordre 1.

Cette approximation s'appelle aussi **différences finies à droite ou en avant**.

Définition II.4.2. [5] On dit de manière générale qu'on a une approximation consistante d'ordre p ($p > 0$) fixé, s'il existe une constante C indépendante de h telle que l'erreur soit majorée par Ch^p ; i.e

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch^p$$

Remarque II.4.1. [5] La précision de l'approximation dépend de la régularité de la fonction u .

On vérifie facilement que l'approximation de $u'(x)$ par $\frac{u(x) - u(x-h)}{h}$ est également consistante d'ordre 1, on l'appelle aussi **différences finies à gauche ou en arrière**.

Il est possible d'obtenir une meilleure approximation de la dérivée première d'une fonction en utilisant un quotient centré : si la fonction $u \in C^3$, la formule de Taylor à l'ordre 3 donne

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(\theta_1), \\ u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(\theta_2), \end{aligned}$$

où $\theta_1 \in]x, x+h[$ et $\theta_2 \in]x-h, x[$. On obtient alors

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) \right| = \left| \frac{h^2}{12} (u'''(\theta_1) + u'''(\theta_2)) \right| \leq C'h^2$$

où $C' = \frac{1}{6} \sup_{y \in]0,1[} |u^{(3)}(y)|$. L'approximation

$$u'(x) \simeq \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \quad (\text{II.22})$$

⊙ **Approximation du problème (II.21) par différences finies**

Soit $N \in \mathcal{N}$ fixé. On définit les **points de discrétisation du maillage** par

$$x = ih, i \in \{1, \dots, N\}; h = \frac{1}{N+1}$$

Les points $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$ constituent les extrémités de l'intervalle de définition de u et les points $x_1, \dots, x_N$ sont appelés **points internes du maillage**.

On cherche en chacun de ces points une valeur approchée, notée u_i de $u(x_i)$

On prend naturellement $u_0 = u(0) = g_0$ et $u_{N+1} = u(1) = g_1$ Pour les sommes internes on utilise l'approximation (II.21) de la dérivée première décrite plus haut

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + a(x_i)u_i = f(x_i) & \text{pour } i \in \{1, \dots, N\} \\ u_0 = g_0, u_{N+1} = g_1, \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

On observe qu'on obtient N **équations servant à déterminer les N inconnues** $u_1, \dots, u_N$

On dit usuellement qu'on a discrétisé le problème par une méthode de différences finies utilisant le **schéma centré à trois points de la dérivée première**.

On note que la connaissance des conditions aux limites u_0 et u_{N+1} est nécessaire à la résolution du système, puisqu'elles apparaissent dans le schéma (II.23) lorsque $i = 1$ et $i = N$.

le problème s'écrit

$$\begin{cases} u_{i-1} + 2ha(x_i)u_i - u_{i+1} = 2hf(x_i) & \text{pour } i \in \{1, \dots, N\} \\ u_0 = g_0, u_{N+1} = g_1, \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} i = 0 & u_0 = g_0 \\ i = 1 & u_0 + 2ha(x_1)u_1 - u_2 = 2hf(x_1) \\ i = 2 & u_1 + 2ha(x_2)u_2 - u_3 = 2hf(x_2) \\ \vdots & \\ i = N-1 & u_{N-2} + 2ha(x_{N-1})u_{N-1} - u_N = 2hf(x_{N-1}) \\ i = N & u_{N-1} + 2ha(x_N)u_N - u_{N+1} = f(x_N) \\ i = N+1 & u_{N+1} = g_1 \end{array} \right. \quad (\text{II.25})$$

Matriciellement, le problème s'écrit

$$A_h U_h = b_h \quad (\text{II.26})$$

où

$$A_h = \begin{pmatrix} 2ha(x_1) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2ha(x_2) & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 2ha(x_{N-1}) & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2ha(x_N) \end{pmatrix}$$

$$U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad b_h = \begin{pmatrix} 2hf(x_1) - g_0 \\ 2hf(x_2) \\ \vdots \\ 2hf(x_N) + g_1 \end{pmatrix}$$

Proposition II.4.1. [12] Supposons $a > 0$: La matrice A_h est symétrique définie positive.

II.4.3.2 le problème d'ordre 2 en dimension 1

On considère le problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} -u''(x) + a(x)u(x) = f(x) \quad x \in]0, 1[\\ u(0) = g_0, u(1) = g_1, \end{array} \right. \quad (\text{II.27})$$

où f et a sont deux fonctions données sur $[0, 1]$ avec $f \in L^2(]0, 1[)$, $a \in L^\infty(]0, 1[)$, $a \geq 0$. Les deux ingrédients principaux d'une approximation par différences finies sont le Schéma d'approximation des dérivées et la grille de discrétisation.

⊙ Approximation des dérivées d'une fonction régulière

Il est possible d'obtenir une meilleure approximation de la dérivée seconde d'une fonction en utilisant un quotient **centré** : si la fonction $u \in \mathcal{C}^4$, la formule de Taylor à l'ordre 4 donne

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\theta_1) \quad (\text{II.28})$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\theta_2) \quad (\text{II.29})$$

où $\theta_1 \in]x, x+h[$ et $\theta_2 \in]x-h, x[$.

La somme (II.28) et (II.29) donne

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2u''(x) + \mathcal{O}(h^4) \quad (\text{II.30})$$

l'approximation,

$$u''(x) \simeq \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \quad (\text{II.31})$$

est **consistante** d'ordre 2. Plus précisément,

$$\left| \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u''(x) \right| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)| \quad (\text{II.32})$$

⊙ Approximation du problème (II.27) par différences finies

Soit $N \in \mathcal{N}$ fixé. On définit les **points de discrétisation du maillage** par

$$x = ih, i \in \{1, \dots, N\}; h = \frac{1}{N+1}$$

Les points $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$ constituent les extrémités de l'intervalle de définition de u et les points $x_1, \dots, x_N$ sont appelés **points internes du maillage**.

On cherche en chacun de ces points une valeur approchée, notée u_i de $u(x_i)$

On prend naturellement $u_0 = u(0) = g_0$ et $u_1 = u(1) = g_1$ Pour les sommes internes on utilise l'approximation (II.31) de la dérivée seconde décrite plus haut

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + a(x_i)u_i = f(x_i) & \text{pour } i \in \{1, \dots, N\} \\ u_0 = g_0, u_{N+1} = g_1, \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

le schéma centré à trois points de la dérivée seconde.

$$\begin{cases} -u_{i-1} + u_i(2 + h^2 a(x_i)) - u_{i+1} = h^2 f(x_i) & \text{pour } i \in \{1, \dots, N\} \\ u_0 = g_0, u_{N+1} = g_1, \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

Matriciellement, le problème s'écrit

$$A_h U_h = b_h \quad (\text{II.35})$$

où

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 + h^2 a(x_1) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + h^2 a(x_2) & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 2 + h^2 a(x_{N-1}) & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 + h^2 a(x_N) \end{pmatrix}$$

$$U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad b_h = \begin{pmatrix} h^2 f(x_1) + g_0 \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ h^2 f(x_N) + g_1 \end{pmatrix}$$

⊙ Consistance - Stabilité - Convergence de la méthode

Définition II.4.3. [12] (*Erreur de consistance*)

On appelle *erreur de consistance* du schéma (II.33) $A_h u_h = b_h$, le vecteur $\varepsilon_h(u)$ de $\mathcal{R}^N$ défini par

$$\varepsilon_h(u) = A_h(\pi_h(u)) - b_h, \quad \text{où} \quad \pi_h(u) = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{pmatrix},$$

$\pi_h(u)$ représente la projection de la solution exacte sur le maillage. On dit que le schéma est consistant pour la norme $\|\cdot\|$ de $\mathcal{R}^N$ si $\lim_{h \rightarrow 0} \|\varepsilon_h(u)\| = 0$. Si de plus il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|\varepsilon_h(u)\| \leq Ch^p,$$

pour $p > 0$, on dit que le schéma est d'ordre p pour la norme $\|\cdot\|$. Usuellement on utilise les normes $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ où $\|\cdot\|_\infty$.

Proposition II.4.2. [12] Supposons que la solution u du problème (II.27) est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0, 1]$. Alors le schéma (II.33) est consistant d'ordre 2 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Plus précisément

$$\|\varepsilon_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|, \quad (\text{II.36})$$

★ Preuve.

D'après le développement de Taylor, on a

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h))}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\theta_i), \quad x_i - h_0 < \theta_i < x_i + h_0$$

en substituant dans l'équation (II.27), on obtient

$$-\frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h))}{h^2} + a(x_i)u(x_i) - f(x_i) = -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(\theta_i), \quad x_i - h_0 < \theta_i < x_i + h_0$$

sous forme vectorielle

$$(A_h \pi_h(u) - b_h)_i = -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(\theta_i)$$

ce qui donne

$$\varepsilon_h(u)_i = -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(\theta_i)$$

donc

$$\|\varepsilon_h(u)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |\varepsilon_h(u)_i| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|.$$

■

Remarque II.4.2. [9] Si u est de dérivée quatrième nulle, alors l'erreur de consistance $\varepsilon_h(u)$ est nulle. La matrice A_h étant inversible, on en déduit que $u_h = \pi_h(u)$, ce qui donne en définitive que : la solution exacte coïncide avec la solution discrète en tout point du maillage.

Définition II.4.4. [9] (*Stabilité*)

On dira que le schéma (II.33) est stable pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, s'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que

$$\|u_h\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq N} |u_i| \leq C$$

Définition II.4.5. [10] (*Erreur de convergence*)

On appelle erreur de convergence de la méthode, l'erreur entre la solution approchée u_h et la solution exacte aux points du maillage $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, i.e la quantité

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty$$

Afin de majorer cette erreur, il suffit d'observer que, par définition de l'erreur de consistance et puisque $A_h u_h = b_h$, on a

$$u_h - \pi_h(u) = -(A_h)^{-1} \varepsilon_h(u) \quad (\text{II.37})$$

Théorème II.4.1. [10] (*Théorème de convergence*)

On suppose $a \geq 0$. Si la solution u du problème (II.27) est de classe C^4 sur $[0, 1]$, alors le schéma (II.33) est convergent d'ordre 2 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Plus précisément,

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|.$$

Avant de démontrer le théorème (II.4.1), nous avons besoin de quelques notions sur l'analyse matricielle.

Proposition II.4.3. [10] (*Monotonie*)

On suppose $a \geq 0$. La matrice A_h du système linéaire (II.35) est monotone.

Proposition II.4.4. [10] (*Stabilité*)

Supposons que $a \geq 0$. On a l'estimation suivante

$$\|(A_h)^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8} \quad (\text{II.38})$$

Proposition II.4.5. *Le schéma (II.33) est stable pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

★ **Preuve.** : Posons

$$A_h^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}, \text{ et } b_h = (b_j)_{1 \leq j \leq N}$$

Alors

$$|u_i| = \left| \sum_{j=1}^N b_{ij} \cdot b_j \right| \leq \frac{1}{8} \sup_{1 \leq j \leq N} |b_j| = C$$

donc

$$\|u_h\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq N} |u_i| \leq C$$

■

★ **Preuve. du théorème (II.4.1)**

D'après l'égalité (II.37) on a l'estimation d'erreur suivante

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty \leq \|(A_h^{-1})\|_\infty \|\varepsilon_h(u)\|_\infty$$

Appliquons l'estimation (II.36) de l'erreur de consistance proposition (II.27) et l'estimation (II.38) dite inégalité de stabilité proposition (II.32), on en déduit

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|.$$

Remarque II.4.3. *La convergence finale de la méthode est donc assurée grâce aux deux propriétés fondamentales qui sont : **consistance et stabilité**.*

Chapitre III

Applications

Dans ce chapitre on utilise deux méthode (range kutta et différences finies), pour résoudre les equations differentielles ordinaire de premier et deuxième ordre.

le but principale de ce chapitre est la résolution de l'équation défferentielle concernat la tension élecqtrique entre les deux poles du condonsateur (De 0 à 1 seconde).

Définition III.1. [17] (*Valeurs physiques*)

1. le condonsateur est un élément électrique qui a le pouvoir d'accumule l'energie électrique, et en difinie la capacité de condonsateur par C et d'unite le farade (F).
2. R et la résistance du conducteur et son unité l'hom (W).
3. U_c la tension électrique entre les deux extrémités du condensateur.
4. U_R la tension entre les deux pole du conducteur d'hom $U_R = Ri$.
5. la bobune a deux pole constituée par un file decuivre isolant et on roule en forme de cercle dans le circuit.
6. L auto bobinage est une valeur phisique positif et ce concerne par la forme giométrique et son unité l'Henry (H).
7. r la résistance interne.
8. O générateur électrique.

III.1 la rolation entre l'intensité du courant et la tension dans le condonsateur

[19] en a une relation entre l'intensité du corant et la quantité électrique (la charge électrique q)

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad (\text{III.1})$$

on a une relation entre la charge et la tension :

$$q = CU_c \quad (\text{III.2})$$

a partir de (III.1) et (III.2) on on deduit que :

$$i(t) = C \frac{dU_c}{dt} \quad (\text{III.3})$$

III.2 la relation entre la tension dans la bobine et l'intensité

[20] la loi générale de la tension entre les deux pole de la bobine ce définit par :

$$U_L = L \frac{di}{dt} + ri \quad (\text{III.4})$$

dans ce cas si ($r = 0$) on peut dire que la bobine (**pur**).

Remarque III.2.1. dans cette charpitre en prend une bobine (**pur**)

le cercuit indiqué dans (III.1) ce compose de :

- ⇒ générateur de courant fix ca force motrice $O = 5$
- ⇒ condonsateur de capacite $C = 1$
- ⇒ la bobine (sa propre) $L = 0.04$
- ⇒ la resistance $R = 1$ et $R' = 0$
- ⇒ la resistance interne de la bobine $r = 0$, et K l'interupteur et fil conducteur

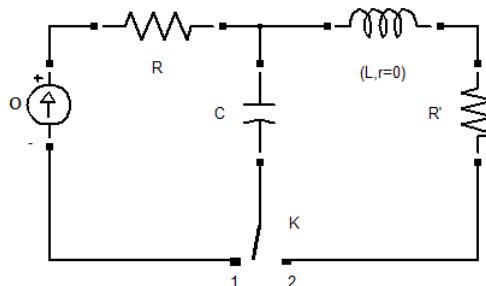


FIG. III.1 : Installation expérimentale

- pour utidier l'effet du couraut sur le type de vebtrations élecqtrique en suite en sa sur par le Installation expérimentale (III.1)

L' expérience 1 : [18]

on met l'interrupteur sur la position (1) pour le condensateur est charger, et en ecrire l'equation différentielle pour U_c la loi de la somme des tension dans le cercuit on deduit

$$U_R + U_c = O \quad (\text{III.5})$$

d'ou

$$Ri + U_c = O$$

$$\Rightarrow RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = O \quad (\text{III.6})$$

C'est une équation différentielle du premier ordre et sa solution :

$$U_c(t) = A(1 - \exp(-t/B)) \quad (\text{III.7})$$

Nous dérivons

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{A}{B} \exp(-t/B) \quad (\text{III.8})$$

On remplace (III.7) et (III.8) par (III.6)

$$RC \frac{A}{B} \exp(-t/B) + A - A \exp(-t/B) = O$$

donc

$$\begin{cases} A \exp(-t/B) \left(\frac{RC}{B} - 1 \right) = 0 \Rightarrow B = RC \\ A = O \end{cases}$$

Alors $U_c(t) = O(1 - \exp(-t/RC))$ où $O = 5$ $R = 1$ $C = 1$

Ainsi l'équation différentielle devient

$$\frac{dU_c}{dt} + U_c(t) = 5 \quad (\text{III.9})$$

Et la solution

$$U_c(t) = 5(1 - e^{-t}) \quad (\text{III.10})$$

Et le graphique

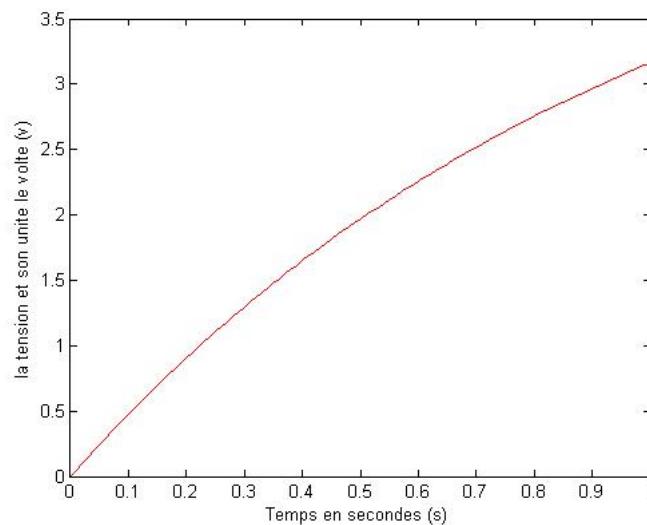


FIG. III.2 : la solution l'équation (III.9) sur l'intervalle $[0, 1]$

III.3 la solution numérique (Équation du premier ordre)

III.3.1 Méthod Runge-Kutta (ordre 4)

le problème (III.9) équivalent :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + y(t) = 5 & t \in]0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

Nous résolvons ce le problème (III.11) en appliquons la relation (II.14) avec $h = 0.1$ $w_i = y_i$. alors $t_{i+1} = t_i + 0.1$. de $t = 0$ pour $t = 1$ avec taille de pas $h = 0.1$ Nous trouvons :

$$t_0 = 0 \quad t_1 = 0.1 \quad t_2 = 0.2 \quad t_3 = 0.3 \quad t_4 = 0.4 \quad t_5 = 0.5 \quad t_6 = 0.6 \quad t_7 = 0.7 \quad t_8 = 0.8 \quad t_9 = 0.9 \quad t_{10} = 1$$

une étape 0
une étape 1

$$t_0 = 0 \quad w_0 = 0$$

$$t_1 = 0.1$$

$$k_1 = hf(t_0, w_0) = hf(t_0, w_0) = 0.5000$$

$$k_2 = hf(t_0 + \frac{h}{2}, w_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0.475$$

$$k_3 = hf(t_0 + \frac{h}{2}, w_0 + \frac{1}{2}k_2) = 0.476$$

$$k_4 = hf(t_0 + h, w_0 + k_3) = 0.4524$$

$$w_1 = w_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.4758125$$

une étape 2

$$t_2 = 0.2$$

$$k_1 = hf(t_1, w_1) = 0.4524$$

$$k_2 = hf(t_1 + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_1) = 0.4298$$

$$k_3 = hf(t_1 + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_2) = 0.4309$$

$$k_4 = hf(t_1 + h, w_1 + k_3) = 0.4093$$

$$w_2 = w_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.9063455$$

une étape 3

$$t_3 = 0.3$$

$$k_1 = hf(t_2, w_2) = 0.4094$$

$$k_2 = hf(t_2 + \frac{h}{2}, w_2 + \frac{1}{2}k_1) = 0.3889$$

$$k_3 = hf(t_2 + \frac{h}{2}, w_2 + \frac{1}{2}k_2) = 0.899$$

$$k_4 = hf(t_2 + h, w_2 + k_3) = 0.3704$$

$$w_3 = w_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.2959079$$

une étape 4

$$t_4 = 0.4$$

$$k_1 = hf(t_3, w_3) = 0.3704$$

$$k_2 = hf(t_3 + \frac{h}{2}, w_3 + \frac{1}{2}k_1) = 0.3519$$

$$k_3 = hf(t_3 + \frac{h}{2}, w_3 + \frac{1}{2}k_2) = 0.3528$$

$$k_4 = hf(t_3 + h, w_3 + k_3) = 0.3351$$

$$w_4 = w_3 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.6483986$$

une étape 5

$$t_5 = 0.5$$

$$k_1 = hf(t_4, w_4) = 0.3352$$

$$k_2 = hf(t_4 + \frac{h}{2}, w_4 + \frac{1}{2}k_1) = 0.3184$$

$$k_3 = hf(t_4 + \frac{h}{2}, w_4 + \frac{1}{2}k_2) = 0.3192$$

$$k_4 = hf(t_4 + h, w_4 + k_3) = 0.3032$$

$$w_5 = w_4 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.9673453$$

une étape 6

$$t_6 = 0.6$$

$$k_1 = hf(t_5, w_5) = 0.3033$$

$$k_2 = hf(t_5 + \frac{h}{2}, w_5 + \frac{1}{2}k_1) = 0.2881$$

$$k_3 = hf(t_5 + \frac{h}{2}, w_5 + \frac{1}{2}k_2) = 0.2889$$

$$k_4 = hf(t_5 + h, w_5 + k_3) = 0.2744$$

$$w_6 = w_5 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.2559403$$

une étape 7

$$t_7 = 0.7$$

$$k_1 = hf(t_6, w_6) = 0.2744$$

$$k_2 = hf(t_6 + \frac{h}{2}, w_6 + \frac{1}{2}k_1) = 0.2607$$

$$k_3 = hf(t_6 + \frac{h}{2}, w_6 + \frac{1}{2}k_2) = 0.2614$$

$$k_4 = hf(t_6 + h, w_6 + k_3) = 0.2483$$

$$w_7 = w_6 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.5170719$$

une étape 8

$$t_8 = 0.8$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_7, w_7) = 0.2438 \\ k_2 &= hf(t_7 + \frac{h}{2}, w_7 + \frac{1}{2}k_1) = 0.359 \\ k_3 &= hf(t_7 + \frac{h}{2}, w_7 + \frac{1}{2}k_2) = 0.2365 \\ k_4 &= hf(t_7 + h, w_7 + k_3) = 0.2246 \\ w_8 &= w_7 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.7533536 \end{aligned}$$

une étape 9

$$t_9 = 0.9$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_8, w_8) = 0.2247 \\ k_2 &= hf(t_8 + \frac{h}{2}, w_8 + \frac{1}{2}k_1) = 0.2134 \\ k_3 &= hf(t_8 + \frac{h}{2}, w_8 + \frac{1}{2}k_2) = 0.2140 \\ k_4 &= hf(t_8 + h, w_8 + k_3) = 0.0233 \\ w_9 &= w_8 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.9677500 \end{aligned}$$

une étape 10

$$t_{10} = 1$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_9, w_9) = 0.2003 \\ k_2 &= hf(t_9 + \frac{h}{2}, w_9 + \frac{1}{2}k_1) = 0.1931 \\ k_3 &= hf(t_9 + \frac{h}{2}, w_9 + \frac{1}{2}k_2) = 0.1936 \\ k_4 &= hf(t_9 + h, w_9 + k_3) = 0.1839 \\ w_{10} &= w_9 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 3.160611 \end{aligned}$$

Comparons maintenant ce que nous avons obtenu avec la solution exacte.

t_i	Solution exacte y_i	Solution numérique w_i	Erreur $ w_i - y_i $
0.0	0	0	0
0.1	0.4750	0.4758125	4e-7
0.2	0.9063	0.9063455	7e-7
0.3	1.2959	1.2959079	1e-6
0.4	1.6484	1.6483986	1.2e-6
0.5	1.9673	1.9673453	1.3e-6
0.6	2.2559	2.2559403	1.4e-6
0.7	2.5171	2.5170719	1.5e-6
0.8	2.7534	2.7533536	1.6e-6
0.9	2.9672	2.9671500	1.6e-6
1	3.1606	3.160611	1.6e-6

III.3.1.1 code Matlab

```

1 % methode runge kutta (order4)
2 %dy/dx=y+5 y(0)=0
3 clc
4 f=@(t,y)(-y+5);
5 a=input('enter a= ');
6 b=input('enter b= ');
7 n=input('enter n= '); % n=b-a/h
8 alpha=input('enter alpha = ');
9 h=(b-a)/n;
10 t=a;
11 w=alpha;
12 fprintf('t , w\n');
13 fprintf('%5.3f %11.7f\n',t,w);
14
15 for i=1 :n
16     k1=h*f(t,w);
17     k2=h*f(t+h/2.0,w+k1/2.0);
18     k3=h*f(t+h/2.0,w+k2/2.0);

```

```

19     k4=h*f(t+h,w+k3);
20
21     Y=5*(1-exp(-t));
22     e=abs(Y-w)
23
24     w=w+(k1+2.0*(k2+k3)+k4)/6.0 ;
25
26     t=a+i*h;
27     fprintf('%5.3f  %11.7f \n',t,w);
28
29     x=[a :h :b] ;
30     q=5*(1-exp(-x));
31     hold on
32     plot(t,w,'b*');
33     plot(x,q,'r');
34     legend('rague kutta(oder4)', 'Solution exacte y(t)', 'location','northwest')
35     xlabel('Temps en secondes (s) ')
36     ylabel('la tension et son unite le volte (v) ')
37     hold off
38
39 end

```

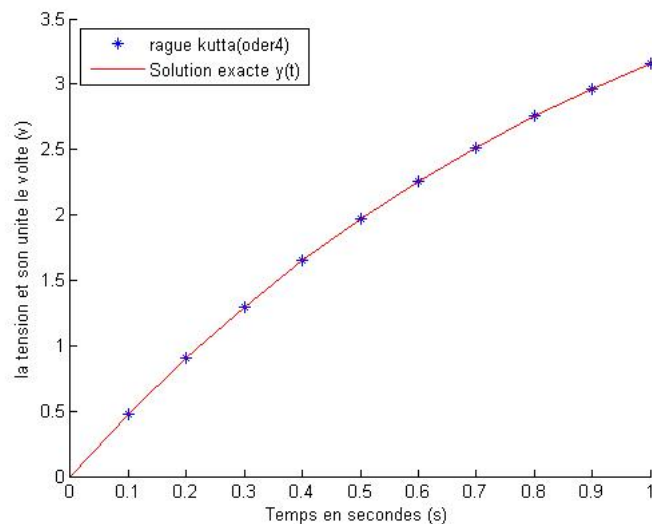


FIG. III.3 : la solution numérique RungeKutta et solution exacte sur l'intervalle $[0, 1]$

Nous remarquons à travers l'énoncé que la solution numérique est convergente vers la solution exacte .

III.3.2 Méthod différences finies

le problème (III.9) équivalent :

$$\begin{cases} u'(t) + u(t) = 5 & t \in]0, 1[\\ u(0) = 0 & u(1) = 3.2 \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

Soit $N \in \mathcal{N}$ fixé. On définit de le pas discrétisation du maillage par

$$t = ih, i \in \{1, \dots, N\}; h = \frac{1}{N+1}$$

Les points $t_0 = 0$ et $t_{N+1} = 1$ constituent les extrémités de l'intervalle de définition de u et les points $t_1, \dots, t_N$ sont appelés points internes du maillage.

On cherche en chacun de ces points une valeur approchée, notée u_i de $u(t_i)$

On prend naturellement $u_0 = u(0) = 0$ et $u_{N+1} = u(1) = 3.2$. et l'approximation

$$u'(t) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

Alors le problème (III.12) :

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + u_i = 5 & \text{pour } i \in \{1, \dots, N\} \\ u_0 = 0, u_{N+1} = 3.2, \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

le schéma centré de la dérivée première .

On note que la connaissance des conditions aux limites u_0 et u_{N+1} est nécessaire à la résolution du système, puisqu'elles apparaissent dans le schéma (III.13) lorsque $i = 1$ et $i = N$.

le problème s'écrit

$$\begin{cases} -u_{i-1} + 2hu_i + u_{i+1} = 10h & \text{pour } i \in \{1, \dots, N\} \\ u_0 = 0, u_{N+1} = 3.2, \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ i = 1 & +2hu_1 + u_2 = 10h \\ i = 2 & -u_1 + 2hu_2 + u_3 = 10h \\ \vdots \\ i = N-1 & -u_{N-2} + 2hu_{N-1} + u_N = 10h \\ i = N & -u_{N-1} + 2hu_N + u_{N+1} = 10h - 3.2 \\ u_{N+1} = 3.2 \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

Matriciellement, le problème s'écrit

$$A_h U_h = b_h \quad (\text{III.16})$$

où

$$A_h = \begin{pmatrix} 2h & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2h & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 2h & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2h \end{pmatrix}$$

$$U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} \quad b_h = \begin{pmatrix} 10h \\ 10h \\ \vdots \\ 10h - 3.2 \end{pmatrix}$$

III.3.2.1 code Matlab

```

1 %y'+y=5;
2 %Boundary Conditions :y(0)=0, y(1)=3.2;
3 x=0 :0.1 :1 ;
4 n=length(x);
5 h=0.16;
6 y=zeros(1,n);
7 y(1,1)=0; y(1,n)=3.2;
8 A=zeros(n-2);
9 B=zeros(1,n-2);
10 for i=1 :n-2
11     A(i,i)=2*h;
12 end
13 for i=2 :n-2
14     A(i,i-1)=-1;

```

```

15     A(i-1,i)=1;
16 end
17 A
18 B(1,1)=x(1,2).^2-(-y(1,1));
19 B(1,n-2)=x(1,n-1).^2-(y(1,n));
20 for i=2 :n-3
21     B(1,i)=10*h;
22 end
23 B;
24 BB=B'
25 X=A\BB;
26 XX=X';
27 y(1,2 :n-1)=XX(1,1 :n-2);
28 y
29 Y=5*(1-exp(-x));
30 hold on
31 plot(x,y,'b');
32 plot(x,Y,'r') ;
33 legend('différences finies', 'Solution exacte y(t)', 'location','northwest')
34 xlabel('Temps en secondes (s) ')
35 ylabel('la tension et son unite le volte (v) ')
36 hold off

```

$$A = \begin{pmatrix} 0.3200 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0.3200 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0.3200 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0.3200 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0.3200 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.3200 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.3200 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.3200 \end{pmatrix}$$

$$U_h = \begin{pmatrix} -0.7609 \\ 0.2535 \\ 0.7580 \\ 1.6109 \\ 1.8425 \\ 2.6214 \\ 2.6036 \\ 3.3882 \\ 3.1194 \end{pmatrix} \quad b_h = \begin{pmatrix} 0.010 \\ 1.600 \\ 1.600 \\ 1.600 \\ 1.600 \\ 1.600 \\ 1.600 \\ 1.600 \\ -2.390 \end{pmatrix}$$

Comparons maintenant ce que nous avons obtenu avec la solution exacte

t_i	Solution exacte Y_i	Solution numérique y_i	Erreur $ y_i - Y_i $
0.1	0.4758	-0.7609	1.236
0.2	0.9063	0.22535	0.680
0.3	1.2959	0.7580	0.537
0.4	1.6483	1.6109	0.0374
0.5	1.9673	1.8425	0.124
0.6	2.25594	2.6214	0.365
0.7	2.51703	2.6036	0.086
0.8	2.7533	3.3882	0.634
0.9	2.9671	3.1194	0.152

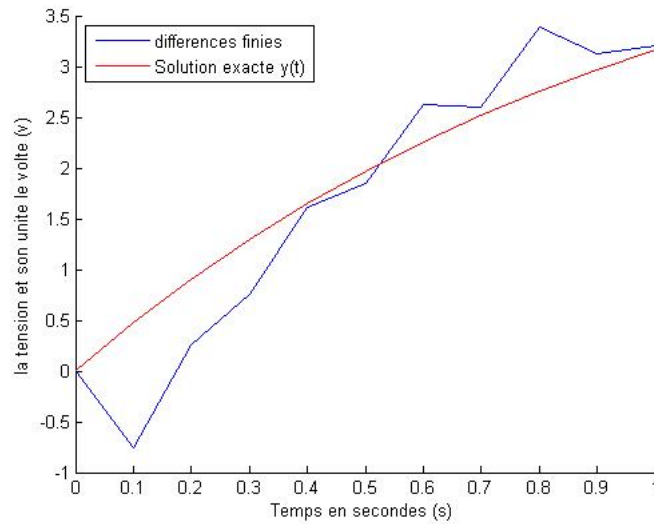


FIG. III.4 : la solution numérique (différences finies $h = 0.16$) et exacte

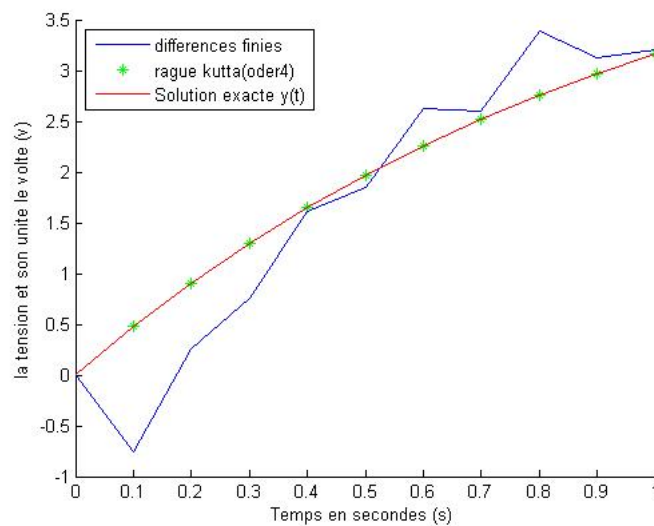


FIG. III.5 : la solution exacte et différences finies et range kutta

III.3.2.2 Erreur de consistance

$$\begin{aligned} u(t_{i+1}) &= u_{i+1} = u_i + hu'(t_i) + \frac{h^2}{2}u''(t_i) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(\theta_1), \\ u(t_{i-1}) &= u_{i-1} = u_i - hu'(t_i) + \frac{h^2}{2}u''(t_i) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(\theta_2), \end{aligned}$$

où $\theta_1 \in]t_i, t_{i+1}[$ et $\theta_2 \in]t_{i-1}, t_i[$.

$$u'(t_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \frac{h^2}{12} \left(u^{(3)}(\theta_1) - u^{(3)}(\theta_2) \right)$$

Alors L' erreur de consistance est donnée par :

$$\begin{aligned}\pi_h(u) &= u'(t_i) + u(t_i) - \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + u(t_i) \right) \\ &= \frac{h^2}{12} \left(u^{(3)}(\theta_1) - u^{(3)}(\theta_2) \right) \\ &\leq \frac{h^2}{12} \left(2 \sup_{\theta \in]0,1[} |u^{(3)}(\theta)| \right) \\ &\leq \frac{h^2}{6} \left(\sup_{\theta \in]0,1[} |u^{(3)}(\theta)| \right)\end{aligned}$$

le schéma est consistance d' order 1 avec $|\pi_h(u)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

conclusion

résolvant l'équation $y'(t) + y(t) = 5$ (Avec des termes élémentaires) , en deux méthodes (range kutta) et (difference fine). Notez que la méthode (range kutta) est la plus proche de la solution correcte de l'équation $y'(t) + y(t) = 5$ que la méthode (différences fines).

C'est pourquoi nous disons que la méthode (range kutta) est plus précise que la méthode (différences fines) pour résoudre les équations différentielles ordinaires du premier ordre.

Nous allons maintenant voir les deux méthodes précédentes pour résoudre une équation différentielle ordinaire du second ordre .

L' expérience 2 : [18]

Nous plaçons le couteau (k) en position 2, ce processus s'appelle Décharge le condensateur. Nous écrivons l'équation différentielle de la tension électrique entre les deux extrémités du condensateur.

Selon la loi de combinaison des tensions, on trouve :

$$U_c(t) + U_L(t) + U_{R'} = 0$$

$$\text{où } U_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2} = LC \frac{d^2U_c}{dt^2} \quad \text{et} \quad R' = 0$$

Aloes

$$\frac{d^2U_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}U_c(t) = 0 \quad (\text{III.17})$$

C'est une équation différentielle du second ordre et sa solution

$$U_c(t) = A \cos(Bt) \quad (\text{III.18})$$

Nous dérivons

$$\frac{d^2U_c}{dt^2} = -AB^2 \cos(Bt) \quad (\text{III.19})$$

On remplace (III.18) et (III.19) par (III.17)

$$-AB^2 \cos(Bt) + \frac{A}{LC} \cos(Bt) = 0$$

$$A \cos(Bt) \left(-B^2 + \frac{1}{LC} \right) = 0$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Si $t = 0$ Le condensateur est chargé ,Donc

$$\begin{aligned}U_c(0) &= A \cos(B \times 0) = 5 \\ \Rightarrow A &= 5\end{aligned}$$

Alors $U_c(t) = 5 \cos(\frac{t}{\sqrt{LC}})$ où $L = 0.04$ $C = 1$

Ainsi l'équation différentielle devient

$$\frac{d^2 U_c}{dt^2} + 25 U_c(t) = 0 \quad (\text{III.20})$$

Et la solution

$$U_c(t) = 5 \cos(5t) \quad (\text{III.21})$$

Et le graphique

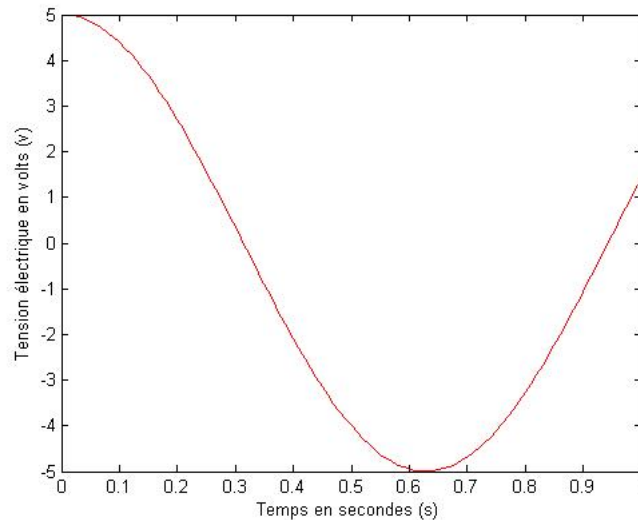


FIG. III.6 : la solution l'équation (III.20) sur l'intervalle $[0, 1]$

III.4 la solution numérique (Équation du deuxième ordre)

III.4.1 Méthode Runge-Kutta (ordre 4)

le problème (III.20) équivalent :

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + 25y(t) = 0 & t \in]0, 1[\\ y(0) = 5 \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

Nous résolvons ce problème (III.22) en appliquons la relation (II.17) avec $h = 0.1$. aloes $t_{i+1} = t_i + 0.1$. de $t = 0$ pour $t = 0.9$ avec taille de pas $h = 0.1$ Nous trouvons :

$t_0 = 0$ $t_1 = 0.1$ $t_2 = 0.2$ $t_3 = 0.3$ $t_4 = 0.4$ $t_5 = 0.5$ $t_6 = 0.6$ $t_7 = 0.7$ $t_8 = 0.8$ $t_9 = 0.9$

une étape 0 $t_0 = 0$ $y_0 = 5$

une étape 1 $t_1 = 0.1$

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 & l_1 &= -25t_1 = -2.5 \\ k_2 &= 0.5t_1 l_1 = -0.125 & l_2 &= -25t_1(1 + 0.5k_1) = -2.5 \\ k_3 &= 0.5t_1 l_2 = -0.125 & l_3 &= -25t_1(1 + 0.5k_2) = -2.34 \\ k_4 &= t_1 l_3 = -0.2343 & l_4 &= -25t_1(1 + k_3) = -2.18 \end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 4.8776$$

une étape 2

$$t_2 = 0.2$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 & l_1 &= -25t_2 = -5 \\ k_2 &= 0.5t_2l_1 = -0.500 & l_2 &= -25t_2(1 + 0.5k_1) = -5 \\ k_3 &= 0.5t_2l_2 = -0.500 & l_3 &= -25t_2(1 + 0.5k_2) = -3.7 \\ k_4 &= t_2l_3 = -0.750 & l_4 &= -25t_2(1 + k_3) = -2.5 \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 4.419271$$

une étape 3

$$t_3 = 0.3$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 & l_1 &= -25t_3 = -7.5 \\ k_2 &= 0.5t_3l_1 = -1.1250 & l_2 &= -25t_3(1 + 0.5k_1) = -7.5 \\ k_3 &= 0.5t_3l_2 = -1.1250 & l_3 &= -25t_3(1 + 0.5k_2) = -3.2 \\ k_4 &= t_3l_3 = -0.9843 & l_4 &= -25t_3(1 + k_3) = 0.93 \end{aligned}$$

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 3.5052$$

une étape 4

$$t_4 = 0.4$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 & l_1 &= -25t_4 = -10 \\ k_2 &= 0.5t_4l_1 = -2 & l_2 &= -25t_4(1 + 0.5k_1) = -10 \\ k_3 &= 0.5t_4l_2 = -2 & l_3 &= -25t_4(1 + 0.5k_2) = 0 \\ k_4 &= t_4l_3 = 0 & l_4 &= -25t_4(1 + k_3) = 10 \end{aligned}$$

$$y_4 = y_3 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.171875$$

une étape 5

$$t_5 = 0.5$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 & l_1 &= -25t_5 = -12.5 \\ k_2 &= 0.5t_5l_1 = -3.125 & l_2 &= -25t_5(1 + 0.5k_1) = -12.5 \\ k_3 &= 0.5t_5l_2 = -3.125 & l_3 &= -25t_5(1 + 0.5k_2) = 7.03 \\ k_4 &= t_5l_3 = 3.515 & l_4 &= -25t_5(1 + k_3) = 26.5 \end{aligned}$$

$$y_5 = y_4 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.674479$$

une étape 6

$$t_6 = 0.6$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 & l_1 &= -25t_6 = -15 \\ k_2 &= 0.5t_6l_1 = -4.50 & l_2 &= -25t_6(1 + 0.5k_1) = -15 \\ k_3 &= 0.5t_6l_2 = -4.50 & l_3 &= -25t_6(1 + 0.5k_2) = 18.7 \\ k_4 &= t_6l_3 = -11.250 & l_4 &= -25t_6(1 + k_3) = 52.5 \end{aligned}$$

$$y_6 = y_5 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = -0.450521$$

une étape 7

$$t_7 = 0.7$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 & l_1 &= -25t_7 = -15.5 \\ k_2 &= 0.5t_7l_1 = -6.125 & l_2 &= -25t_7(1 + 0.5k_1) = -17.5 \\ k_3 &= 0.5t_7l_2 = -6.125 & l_3 &= -25t_7(1 + 0.5k_2) = 36.09 \\ k_4 &= t_7l_3 = 25.265 & l_4 &= -25t_7(1 + k_3) = 89.6 \end{aligned}$$

$$y_7 = y_6 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = -0.322917$$

une étape 8

$$t_8 = 0.8$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 & l_1 &= -25t_8 = -20 \\ k_2 &= 0.5t_8l_1 = -8 & l_2 &= -25t_8(1 + 0.5k_1) = -20 \\ k_3 &= 0.5t_8l_2 = -8 & l_3 &= -25t_8(1 + 0.5k_2) = 60 \\ k_4 &= t_8l_3 = 48 & l_4 &= -25t_8(1 + k_3) = 140 \end{aligned}$$

$$y_8 = y_7 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.343750$$

une étape 9

$$t_9 = 0.9$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 & l_1 &= -25t_9 = -22.5 \\ k_2 &= 0.5t_9l_1 = -10.125 & l_2 &= -25t_9(1 + 0.5k_1) = -22.5 \\ k_3 &= 0.5t_9l_2 = -10.125 & l_3 &= -25t_9(1 + 0.5k_2) = 91.40 \\ k_4 &= t_9l_3 = 82.26 & l_4 &= -25t_9(1 + k_3) = 2.05e2 \end{aligned}$$

$$y_9 = y_8 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 9.304688$$

Comparons maintenant ce que nous avons obtenu avec la solution exacte

t_i	Solution exacte Y_i	Solution numérique y_i	Erreur $ y_i - Y_i $
0	5	5	0
0.1	4.3879	4.8776	0.4896
0.2	0.5403	4.419271	1.7177
0.3	0.070737	3.5052	3.1505
0.4	-0.416146	2.171875	4.2526
0.5	-0.801143	0.674479	4.68019
0.6	-0.98999	-0.450521	4.4994
0.7	-0.93645	-0.322917	4.3593
0.8	-0.653	2.343750	5.61196
0.9	-0.21079	9.304688	10.35866

III.4.1.1 code Matlab

```

1  clc
2  format long
3  % on donne x pour trouver y(x) approximee tel que x>0 et x<1
4  n=input('enter n= ');
5  y=5;
6  for i=1 :n
7      x=input('enter x= ');
8
9      h=x;
10     k1=0 ;
11     l1=-25*h;
12     k2=h*l1*0.5 ;
13     l2=-25*h*(1+0.5*k1);
14     k3=h*l2*0.5;
15     l3=-25*h*(1+0.5*k2);
16     k4=h*l3 ;
17     l4=-25*h*(1+k3);
18     %y c'est la valeur approximee
19     y=(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)+y;
20     z=5*cos(5*x);
21     fprintf('%f %f\n',h,y);
22     % er c'est l'erreur d'approximation
23
24     er=abs(y-5*cos(5*x))
25
26
27 end

```

```

1  clc
2  t=[0 :0.01 :0.9] ;
3  y=5*cos(5*t) ;
4  X=[0 ;0.1 ;0.2 ;0.3 ;0.4 ;0.5 ;0.6 ;0.7 ;0.8 ;0.9] ;

```

```

5 Y
  =[5;4.877604;4.419271;3.505208;2.171875;0.674479;-0.450521;-0.322917;2.343750;9.304688]
6 hold on
7 plot(X,Y,'b*');
8 plot(t,y,'r') ;
9 xlabel('Temps en secondes (s) ')
10 ylabel('Tension electrique en volts (v) ')
11 legend('range-kutta(oder4)', 'Solution exacte y(t)')
12 hold off
13 %grid on

```

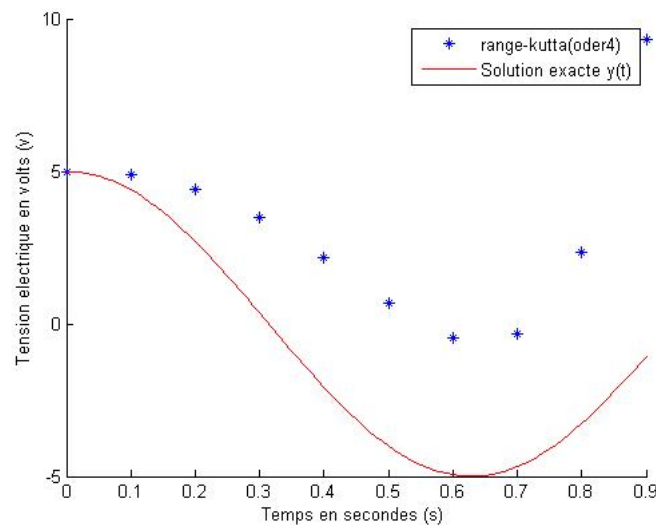


FIG. III.7 : la solution exacte et (Runge-Kutta order4) sur l'intervalle $[0, 1[$

La solution de l'équation (III.22) par la méthode (rugne kutta) sur l'intervalle $[0, 1[$ ne converge pas suffisamment vers la solution correcte .

Nous allons maintenant le résoudre sur l'intervalle $[0, 0.1]$.

Nous résolvons ce problème $\frac{d^2y}{dt^2} + 25y(t) = 0$ sur l'intervalle $[0, 0.1]$ avec $h = 0.01$. alors $t_{i+1} = t_i + 0.01$. de $t = 0$ pour $t = 0.1$ avec taille de pas $h = 0.01$ Nous trouvons :

$t_0 = 0$ $t_1 = 0.01$ $t_2 = 0.02$ $t_3 = 0.03$ $t_4 = 0.04$ $t_5 = 0.05$ $t_6 = 0.06$ $t_7 = 0.07$ $t_8 = 0.08$ $t_9 = 0.09$ $t_{10} = 0.1$

une étape 0 $t_0 = 0$ $y_0 = 5$

une étape 1 $t_1 = 0.01$

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 0 & l_1 &= -25t_1 = -0.25 \\
 k_2 &= 0.5t_1l_1 = -0.125 & l_2 &= -25t_1(1 + 0.5k_1) = -0.25 \\
 k_3 &= 0.5t_1l_2 = -0.125 & l_3 &= -25t_1(1 + 0.5k_2) = -0.24 \\
 k_4 &= t_1l_3 = -0.0024 & l_4 &= -25t_1(1 + k_3) = -0.24
 \end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 4.998750$$

⋮

une étape 10

$$t_{10} = 0.1$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 & l_1 &= -25t_{10} = -2.5 \\ k_2 &= 0.5t_{10}l_1 = 0.1250 & l_2 &= -25t_{10}(1 + 0.5k_1) = -2.5 \\ k_3 &= 0.5t_{10}l_2 = -0.1250 & l_3 &= -25t_{10}(1 + 0.5k_2) = -2.34 \\ k_4 &= t_{10}l_3 = -0.2343 & l_4 &= -25t_{10}(1 + k_3) = -2.18 \end{aligned}$$

$$y_{10} = y_9 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 4.5253$$

Comparons maintenant ce que nous avons obtenu avec la solution exacte

t_i	Solution exacte Y_i	Solution numérique y_i	Erreur $ y_i - Y_i $
0	5	5	0
0.01	4.9973	4.998750	0.004
0.02	4.97502	4.99375	0.01
0.03	4.94385	4.982526	0.03
0.04	4.90033	4.962569	0.06
0.05	4.84456	4.931505	0.08
0.06	4.77668	4.8868	0.11
0.07	4.69686	4.8262	0.12
0.08	4.60530	4.7472	0.14
0.09	4.50223	4.647743	0.14
0.1	4.3879	4.5253	0.132

III.4.1.2 code Matlab

```

1  clc
2  t=[0 :0.01 :0.1] ;
3  y=5*cos(5*t) ;
4  z=[0 ;0.01 ;0.02 ;0.03 ;0.04 ;0.05 ;0.06 ;0.07 ;0.08 ;0.09 ;0.1] ;
5  c
    =[5 ;4.998750 ;4.99375 ;4.982526 ;4.962596 ;4.931505 ;4.8868 ;4.8262 ;4.7472 ;4.64774 ;4.5253] ;
6  hold on
7  plot(z,c,'b*') ;
8  plot(t,y,'r') ;
9  xlabel('Temps en secondes (s) ')
10 ylabel('Tension electrique en volts (v) ')
11 legend('range-kutta(oder4)', 'Solution exacte y(t)')
12 hold off
13 %grid on

```

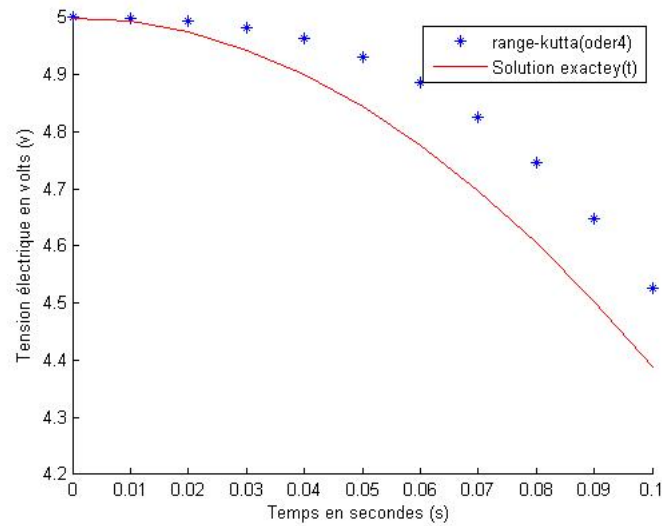


FIG. III.8 : la solution exacte et (Runge-Kutta order4) sur l'intervalle $[0, 0.1[$

conclusion

Remarquez maintenant qu'il est devenu plus proche de la solution exacte lorsque nous avons réduit le domaine. Le tableau et la figure suivants illustrent la solution lorsque nous avons encore réduit le l'intervalle $[0, 0.01]$.

t_i	Solution exacte Y_i	Solution numérique y_i	Erreur $ y_i - Y_i $
0	5	5	0
0.001	4.99993	4.99998	4.9e-5
0.002	4.999750	4.999938	1.8e-4
0.003	4.999437	4.999825	3.8e-4
0.004	4.999000	4.999625	6.2e-4
0.005	4.99843	4.999313	8.7e-4
0.006	4.99775	4.998863	1.1e-3
0.007	4.99693	4.998250	1.3e-3
0.008	4.99600	4.997450	1.4e-3
0.009	4.99643	4.996438	1.4e-3
0.01	4.99375	4.995188	1.4e-3

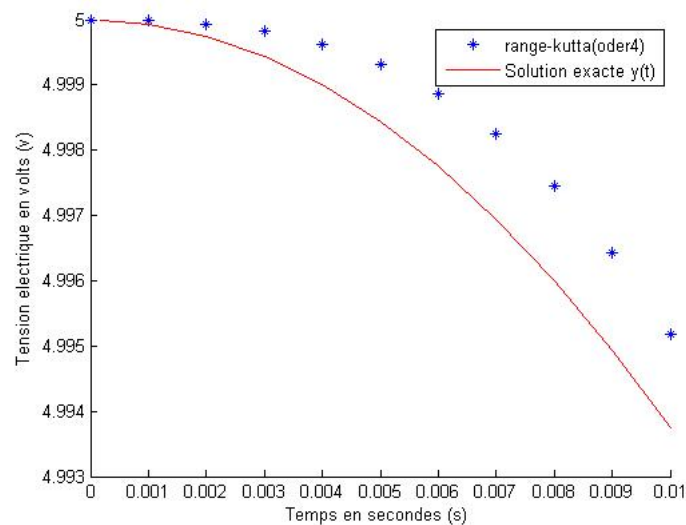


FIG. III.9 : la solution exacte et (Runge-Kutta order4) sur l'intervalle $[0, 0.01]$

Résultat : Cette méthode converge lors de la résolution d'une équation d'un deuxième degré lorsque le l'intervalle d'étude est suffisamment petit .

III.4.2 Méthodes des différences finies

le problème (III.20) équivalent :

$$\begin{cases} u''(t) + 25u(t) = 0 & t \in]0, 1[\\ u(0) = 5 & u(1) = 1.4 \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. On définit les points dediscrétisation du maillage par

$$t = ih, i \in \{1, \dots, N\}; h = \frac{1}{N+1}$$

Les points $t_0 = 0$ et $t_{N+1} = 1$ constituent les extrémités de l'intervalle de définition de u et les points $t_1, \dots, t_N$ sont appelés points internes du maillage.

On cherche en chacun de ces points une valeur approchée, notée u_i de $u(t_i)$

On prend naturellement $u_0 = u(0) = 5$ et $u_{N+1} = u(1) = 1.4$. et l'approximation

$$u''(t) = \frac{u_{i+1} - u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Alors le problème (III.23) :

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i + u_{i-1}}{h^2} + 25u_i = 0 & \text{pour } i \in \{1, \dots, N\} \\ u_0 = 5, u_{N+1} = 1.4, \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

le schéma centré de la dérivée seconde. .

On note que la connaissance des conditions aux limites u_0 et u_{N+1} est nécessaire à la résolution du système, puisqu'elles apparaissent dans le schéma (III.24) lorsque $i = 1$ et $i = N$.

le problème s'écrit

$$\begin{cases} u_{i-1} + u_i(25h^2 - 1) + u_{i+1} = 0 & \text{pour } i \in \{1, \dots, N\} \\ u_0 = 5, u_{N+1} = 1.4, \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

$$\begin{cases} \begin{matrix} i = 1 & u_0 = 5 \\ & + (25h^2 - 1)u_1 + u_2 = -5 \\ i = 2 & u_1 + (25h^2 - 1)u_2 + u_3 = 0 \\ & \vdots \\ i = N-1 & u_{N-2} + (25h^2 - 1)u_{N-1} + u_N = 0 \\ i = N & u_{N-1} + (25h^2 - 1)u_N = -1.4 \\ & u_{N+1} = 1.4 \end{matrix} \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

Matriciellement, le problème s'écrit

$$A_h U_h = b_h \quad (\text{III.27})$$

où

$$A_h = \begin{pmatrix} 25h^2 - 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 25h^2 - 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 25h^2 - 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 25h^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} \quad b_h = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1.4 \end{pmatrix}$$

III.4.2.1 code Matlab

```

1 %y''+25y=0;
2 %Boundary Conditions :y(0)=5, y(1)=1.4;
3 x=0 :0.20 :1 ;
4 n=length(x);
5 h=0.01;
6 y=zeros(1,n);
7 y(1,1)=5; y(1,n)=1.4;
8 y
9 A=zeros(n-2);
10 B=zeros(1,n-2);
11 for i=1 :n-2
12     A(i,i)=25*h.^2-1;
13 end
14 for i=2 :n-2
15     A(i,i-1)=1;
16     A(i-1,i)=1;
17 end
18 A %coefficient matrix
19 B(1,1)=x(1,2).^2-(y(1,1));
20 B(1,n-2)=x(1,n-1).^2-(y(1,n));
21 for i=2 :n-3
22     B(1,i)= 0
23
24 end
25 B;
26 BB=B' %second side of the equations;
27 %AX=B ----> X=A\B
28 X=A\BB;
29 XX=X';
30 y(1,2 :n-1)=XX(1,1 :n-2);
31 y %final answers
32 Y=5*cos(5*x);
33 hold on
34 plot(x,y,'b');
35 plot(x,Y,'r') ;
36 legend('differences finies', 'Solution exacte y(t)')
37 xlabel('Temps en secondes (s) ')
38 ylabel('la tension et son unite le volte (v) ')
39 hold off

```

$$A = \begin{pmatrix} 0.9975 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.9975 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.9975 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.9975 \end{pmatrix}$$

$$U_h = \begin{pmatrix} 4.2336 \\ -0.7370 \\ -4.96687 \\ -4.2193 \end{pmatrix} \quad b_h = \begin{pmatrix} -4.960 \\ 0 \\ 0 \\ -0.760 \end{pmatrix}$$

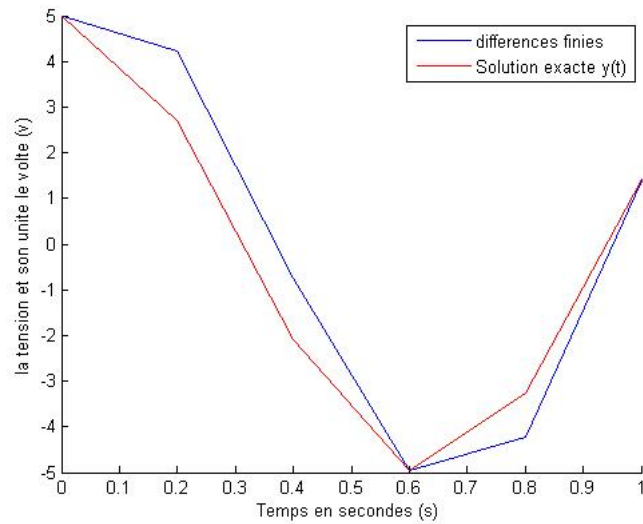


FIG. III.10 : la solution numérique (différences finies) $h = 0.2$

Comparons maintenant ce que nous avons obtenu avec la solution exacte

t_i	Solution exacte Y_i	Solution numérique y_i	Erreur $ y_i - Y_i $
0.0	5	5	0
0.2	4.2336	4.9992	0.7
0.4	-0.7370	-1.6800	0.943
0.6	-4.96687	-4.9499	0.01
0.8	-4.2193	-3.2682	0.95
1	1.4	1.4	0

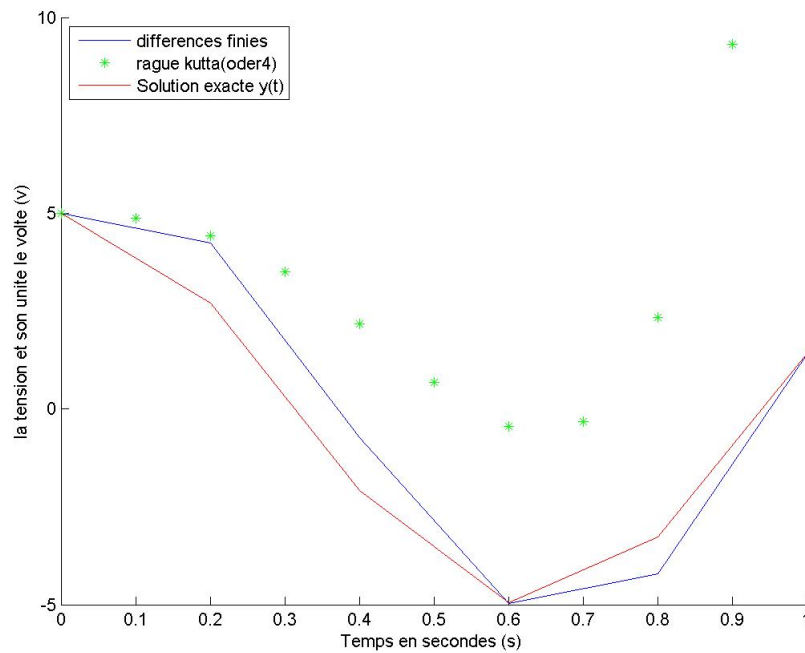
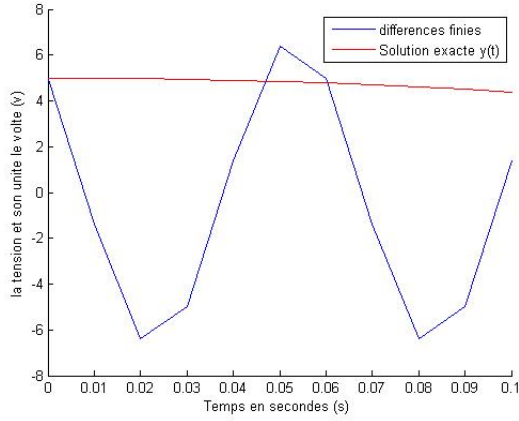
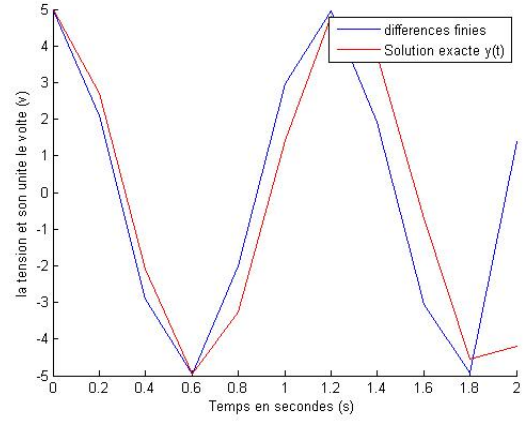


FIG. III.11 : la solution exacte et différences finies et range kutta sur l'intervalle $[0, 1]$

la figures suivants illustrent la solution sur l'intervalle $[0, 0.1]$ et $[0, 2]$



(a) différences finies et solution exacte sur l'intervalle $[0, 0.1]$



(b) différences finies et solution exacte sur l'intervalle $[0, 2]$

On remarque que la méthode des différences finies donne des résultats moins précis sur l'intervalle $[0, 0.1]$ et plus précis sur l'intervalle $[0.2]$.

III.4.2.2 Erreur de consistance

$$\begin{aligned} u(t_{i+1}) &= u_{i+1} = u_i + hu'(t_i) + \frac{h^2}{2}u''(t_i) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(t_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\theta_1), \\ u(t_{i-1}) &= u_{i-1} = u_i - hu'(t_i) + \frac{h^2}{2}u''(t_i) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(t_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\theta_2), \end{aligned}$$

où $\theta_1 \in]t_i, t_{i+1}[$ et $\theta_2 \in]t_{i-1}, t_i[$.

$$u''(t_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{24} \left(u^{(4)}(\theta_1) + u^{(4)}(\theta_2) \right)$$

Alors L' erreur de consistance est donnée par :

$$\begin{aligned} |\pi_h(u)| &= |u''(t_i) + 25u(t_i) - \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + 25u(t_i) \right)| \\ &= \left| \frac{h^2}{24} \left(u^{(4)}(\theta_1) + u^{(4)}(\theta_2) \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{h^2}{24} \left(2 \sup_{\theta \in]0,1[} |u^{(4)}(\theta)| \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{h^2}{12} \left(\sup_{\theta \in]0,1[} |u^{(4)}(\theta)| \right) \right| \end{aligned}$$

le schéma est consistance d' order 2 avec $|\pi_h(u)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

conclusion

Grâce à l'étude précédente, nous avons montré que la méthode des différences finies était plus proche de la solution exacte que la méthode de Runge kutta lors de la résolution d'équations différentielles ordinaires du second ordre.

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons développé deux méthodes numériques de résolution des équations différentielles de première ordre et de second ordre avec conditions aux limites, puis nous avons comparé les résultats des approximations pour chaque méthode et illustré l'efficacité d'approximation de la solution à la solution exacte .

comme suite nous tirons les résultats suivant :

- ⇒ Dans les opérations arithmétiques, nous remarquons que la méthode des différences finies est plus rapide que la Runge kutta.
- ⇒ La méthode Runge kutta donne des résultats plus précis que la méthode des différences finies par rapport à la solution correcte d'une l'équation différentielle du premier ordre (pour la tension électrique entre les deux extrémités du condensateur) sur l'intervalle $[0, 1]$.
- ⇒ La méthode des différences finies donne des résultats plus précis que la Runge kutta par rapport à la solution correcte d'une l'équation différentielle du second ordre (pour la tension électrique entre les deux extrémités du condensateur) . sur l'intervalle $[0, 1]$
- ⇒ La méthode Runge Kutta donne des résultats plus précis dans les petits sur l'intervalle.
- ⇒ La méthode des différences finies donne des résultats moins précis dans les petits sur l'intervalle .

Les deux méthodes ci-dessus peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes d'un autre type, tels que les équations différentielles partielles.

Bibliographie

- [1] M. A. Aziz Alaoui, C. Bertelle, METHODES NUMERIQUES APPLIQUEES, France, (2002).
- [2] J.M. Arnaudies, H. Fraysse, Cours de mathématiques 4, algèbre linéaire et géométrie
- [3] R.P. Agarwal, D.O'Regan, An Introduction to Ordinary Differential Equations, Springer, 2000.
- [4] K. Atkinson, Weimin Han , NUMERICAL SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS , University of Iowa ,2009 .
- [5] G. Allaire, Analyse Numérique et Optimisation, Ed. de l'Ecole Polytechnique de Paris, 2005
- [6] F.S, Acton,1970NumericalMethodsThatWork1990,correctededition(Washington Mathematical Association of America),
- [7] J.C. Butcher and K. Burrage . “Stability criteria for implicit Runge-Kutta methods”,SIAM J. Numer. Anal.16(1979), pp. 46–57.
- [8] I. bouguefa, A. Al-Hindawah, Équations différentielles régulières. Solutions et applications, Université des sciences et technologies du Yémen.
- [9] G.Ciarlet, Philippe Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, cours, ed. Masson, 1988.
- [10] D. Christian, Cours méthodes d'approximation des équations aux dérivées partielles par différences finies et volumes finis, Master MAP M1 Math Appliquée UE2 EDP2 2010/2011, Université de Cergy-Pontoise, France.
- [11] R. Herbin, Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, cours et exercices, Master de Mathématiques, Université Aix Marseille 1, décembre 2008.
- [12] R. J. Leveque, Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, SIAM 2007.
- [13] J. Lambert (1991) Numerical Methods for Ordinary Differential Systems. John Wiley and Sons, Chichester.
- [14] J. Pierre, A. Roux :Équations aux dérivées partielles cours et exercices corrigés, Paris, 2015.
- [15] N. Piskounov, Calcul Différentiel et Intégral, tome II, ÉDITIONS MIR. MOSCOU.
- [16] <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk-history/Mathematicians/Kutta.html> ,
<http://www.geometry.net/scientists/runge-carle.php> . 5-26-2021 .
- [17] <https://es.wikipedia.org/wiki/Circuito-RLC> [28 Avril 2021]
- [18] <https://eddirasa.com/bac-math-physique-2017/> ONEC DZ [29 Avril 2021]
- [19] fr.wikipedia.org/wiki/Condensateur*Loi-de-comportement-du-condensateur
- [20] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Bobine-\(C3-A9lectricit-C3-A9\)*Le-dip-C3-B4le-bobine](https://fr.wikipedia.org/wiki/Bobine-(C3-A9lectricit-C3-A9)*Le-dip-C3-B4le-bobine)

Résumé

Dans ce mémoire , nous présentons une étude informatique des deux méthodes numériques pour résoudre des équations différentielles ordinaires. Le but de ce travail est de montrer l'efficacité et les avantages des deux méthodes présentées. Ensuite, nous avons fait une comparaison entre les résultats de ces deux méthodes et la solution exacte de l'équation.

La méthode de Runge Kutta a ses résultats numériques plus proches de la solution exacte que la méthode des différences finies, et c'est lors de la résolution de l'équation différentielle du premier ordre pour la tension électrique entre les deux extrémités du condensateur pendant le processus de charge, l'équation différentielle second ordre (la tension électrique entre les deux extrémités du condensateur pendant le processus de décharge) était Les différences de fin sont plus proches de la solution exacte.

Mots clés : Résolution ,équation différentielle ,méthod Runge-Kutta, méthode différences finies , charge le conducteur, Décharge le condensateur.

Abstract

In this thesis, we have studied two numerical methods to solve ordinary differential equations. The aim of this study is to show the accuracy and the advantages of these methods. We made a comparison between these methods and the exact solution of some equations, and we obtain that Runge–Kutta method is more accurate than finite difference method when they are applied on the first order equation of electric current between the terminals of a capacitor while charging, but when they are applied on second order equation (electric current between the terminals of a capacitor while discharging) finite difference method is more accurate than Runge–Kutta method.

Key words : Resolution ,ordinary differential equation, Runge–Kutta method, finite difference method, capacitor charging, capacitor discharging. .

الملخص

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة حاسوبية لطريقتين عدديتين لحل معادلات تفاضلية إعتيادية .
الهدف من هذا العمل هو إظهار فعالية الطريقتين المقدمة ومزاياهم ،
ثم قمنا بإجراء مقارنة بين نتائج هذه الطريقتين والحل المضبوط للمعادلة .

طريقة رونج كيتا نتائجها العددية أقرب إلى الحل المضبوط من طريقة الفروق المنتهية ، وهذا عند حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الاولى للتوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة خلال عملية الشحن ،
وأما بالنسبة للمعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية (التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة عند التفريغ)
كانت الفروق المنتهية أقرب للحل المضبوط

كلمات مفتاحية: دقة- معادلة تفاضلية- طريقة رونج كيتا- طريقة الفروق المنتهية -شحن مكثفة - تفريغ مكثفة .