



N° d'ordre :

N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
EL OUED**

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Thème

**Théorème de Lax-Milgram et ses applications
sur les problèmes de Dirichlet**

Présenté par:

- HARZALLAH Aboubaker
- KERTIOU Yahaia
- LEBBA Smail

Sous la supervision de :

- Mr. LETOUFA Yassine

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciements

Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail.

*Ce travail a été réalisé sous l'encadrement du professeur **Letoufa yassine**, à l'université **Chahid H amma lakhdar** à El-Oued. Nous voudrions lui exprimer notre profonde gratitude pour la disponibilité, l'aide et les conseils pour réaliser ce travail.*

*Ainsi qu'aux professeurs **Habita Khaled**, **Doudi Nadjat** et à tous les professeurs de cette université.*

Nous remercions vivement nos parents pour l'aide et le soutien moral qu'ils nous ont prodigués.

*Nous tenons à remercier **Laib Bachir** et tous les étudiants de La promotion de Mathématique (2014/2015) de l'université **Chahid H amma lakhdar**.*

Notations générales

∂	: La dérivée partielle.
H	: Espace de Hilbert .
H'	: Dual Topologique de H .
$D(\Omega)$	: Espace de fonction C^∞ à support compact dans Ω .
∇u	: $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T = \overrightarrow{\text{grad} u}$.
Ω	: Ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
$\langle, \rangle$	: Produit scalaire.
$p.p$	: Presque partout.
C^m	: Espace des fonctions de classe C^m .
$L^p(\Omega)$	: $\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} f ^p < +\infty\}$.
$W^{m,p}(\Omega)$	: $\{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p \text{ pour tout } \mathbb{N}^N \text{ t.q. } \alpha \leq m\}$.
$\ \cdot\ _{1,\Omega}$	: Norme de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$.
$C^k(\Omega)$	: Fonctions k fois continûment différentiables sur Ω (k entier ≥ 0).
$ \cdot _{1,\Omega}$	: Semi-norme de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$.
$D^\alpha u$	: $\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} u, \quad \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
Δu	: $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{Laplacien de } u$.
$L^\infty(\Omega)$	: $\{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et il existe } C \text{ tel que } u(x) \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$.
$\overline{\Omega}$	: Fermeture de Ω .
u''	: La dérivée seconde de u par rapport à t .
$H^1(\Omega)$	: Espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω .
$H_0^1(\Omega)$	: Adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.
Γ	: Frontière de Ω .

Table des matières

Introduction générale	1
1 Notions préliminaires	2
1.1 Rappel d'analyse fonctionnelle	3
1.1.1 Produit scalaire dans un espace vectoriel	3
1.1.2 Espace pré-hilbertien	3
1.1.3 Identité du parallélogramme	4
1.1.4 Espace hilbertien	4
1.1.5 Espace de Banach	5
1.1.6 Théorème de point fixe de Banach	5
1.1.7 Théorème de Riez	5
1.2 Théorème de Lax-Milgram	5
1.2.1 Théorème de Lax-Milgram	5
1.2.2 Approximations variationnelles	10
1.2.3 conformité	12
1.2.4 Convergence de u_h vers u	12
1.2.5 Théorème de Stampacchia	13
1.3 Espaces de Sobolev et propriétés	14
1.3.1 Espace $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$	14
1.3.2 Espace $D(\Omega)$	16
1.3.3 Dérivée au sens faible	16

1.3.4	Espace de $H^1(\Omega)$ et espace de $H_0^1(\Omega)$	17
1.3.5	Espace de $H^m(\Omega)$	17
1.3.6	Espace $W^{1,p}$	18
1.3.7	L'espace $W_0^{1,p}(I)$	19
1.3.8	Propriété (inégalité de Poincaré)	20
1.4	Formule de Green	20
2	Application sur le problème de Dirichlet homogène	22
2.1	Position du problème	23
2.2	Formulation variationnelle du problème	23
2.3	Existence et unicité de solution de la Formulation variationnelle du problème	26
2.3.1	Régulation du problème	31
2.4	Approximation numérique	31
2.4.1	Eléments finis : exemple en dimension 1	31
3	Application sur le problème de Dirichlet non homogène	38
3.1	Position du problème	39
3.2	formulation variationnelle du problème elliptique	40
3.3	Existence et unicité de solution de la Formulation variationnelle du problème	43
3.3.1	Exemple	44

Introduction générale

Le calcul explicite de la solution exacte n'est souvent pas atteint, parce que dans la plupart des problèmes aux limites, il y a impossibilité de trouver une solution analytique.

Comme moyen simple et efficace pour résoudre les équations aux différentielles partielles linéaires elliptiques, nous avons utilisé le théorème de Lax-Milgram. Nous avons d'abord transformé les problèmes de formes originales dites classiques aux forme variationnelles. Un grand accès à des résultats fondamentaux sur le caractère bien posé de l'équation est offert par l'approche variationnelle. Cela signifie l'existence et l'unicité de la solution, la stabilité de cette solution par rapport à des perturbations des données. Le théorème de Lax-Milgram assure le caractère précédent.

L'approche variationnelle est à la base de méthodes performantes pour l'approximation variationnelle où on peut utiliser des approximations numériques efficaces comme les éléments finis.

Notre mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres après une brève citation sur la thématique abordée.

Dans le premier chapitre nous sommes intéressés à donner quelques notions préliminaires d'analyse fonctionnelle et quelques définitions des espaces de Hilbert et l'espaces de Sobolev. Ainsi que le théorème de Lax-Milgram et la démonstration analytique en basant sur le théorème de point fixe.

Le second chapitre contient l'application pratique du théorème de Lax-Milgram sur le problème de Dirichlet homogène en basant par la formulation variationnelle pour trouver la solution unique.

Dans la troisième chapitre nous cherchons la solution du problème de Dirichlet non homogène en utilisant le théorème de Stampacchia au en passant par la formulation faible.

La fin du chapitre est consacrée aux exemple .

Chapitre 1

Notions préliminaires

Ce chapitre est consacré essentiellement à l'introduction de quelques notions fondamentales d'analyse et certaines définitions des espaces de Hilbert et du théorème de Lax-Milgram ainsi que des espaces de Sobolev que nous utiliserons dans le chapitre 2 et 3.

1.1 Rappel d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Produit scalaire dans un espace vectoriel

Définition 1.1.1 Soit E un espace vectoriel réel, une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$, est appelé un produit scalaire. Si elle possède les propriétés suivantes:

- 1) Elle est bilinéaire .
- 2) Elle est symétrique. $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
- 3) Elle est positive. $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$.
- 4) Elle est définie. $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$.

Définition 1.1.2 Soit E un espace vectoriel complexe, une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$, est appelée un produit scalaire (parfois produit scalaire hermitien). Si elle possède les propriétés suivantes:

1. Elle est sesquilinéaire.
2. Elle est hermitienne. $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3. Elle est positive. $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$.
4. Elle est définie. $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$ [7].

1.1.2 Espace pré-hilbertien

Définition 1.1.3 Un espace vectoriel réel ou complexe H est un espace préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$.

Proposition 1.1.1 (Inégalité de Cauchy Schwartz) Dans un espace préhilbertien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$

$$|\langle x, y \rangle_H| \leq \|x\|_H \|y\|_H \quad x, y \in H$$

[3]

1.1.3 Identité du parallélogramme

Théorème 1.1.1 Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, alors $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert si et seulement si :

$$\forall x, y \in E : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

1.1.4 Espace hilbertien

Définition 1.1.4 Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle u, v \rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 1.1.1 L'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ carré intégrable est un espace vectoriel muni du produit scalaire et la norme associée, pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

la norme associée est :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème 1.1.2 [5] $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$ est un espace Hilbert et on a les propriétés suivantes :

1.

$$\left| \int_{\Omega} f \right| \leq \int_{\Omega} |f|$$

2.

$$(f = g \quad \text{p.p. sur } \Omega) \implies \int_{\Omega} f = \int_{\Omega} g$$

3.

$$\left(\int_{\Omega} f = 0 \right) \implies (f = 0) \quad \text{p.p. sur } \Omega \quad (1.1.1)$$

1.1.5 Espace de Banach

Définition 1.1.5 *Un espace de Banach est un espace normé complet [4].*

1.1.6 Théorème de point fixe de Banach

Théorème 1.1.3 *Soient X un espace métrique complet et $S : X \rightarrow X$ une application telle que :*

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq K d(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X \text{ avec } K < 1.$$

Alors S admet un point fixe unique, $u = Su$ [5].

1.1.7 Théorème de Riez

Théorème 1.1.4 *Soient H' le dual topologique de H , et $a \in H$, on note $\phi_a : x \in H \rightarrow \langle a, x \rangle \in K, IK = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$.*

Alors $\phi : a \in H \rightarrow \phi_a \in H'$ est bien définie, et c'est un isomorphisme de H sur H' [6].

1.2 Théorème de Lax-Milgram

1.2.1 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.2.1 (Lax-Milgram) *Soient H un espace de Hilbert réel, α une forme bilinéaire sur H , L une forme linéaire sur H . On suppose que:*

1) α est continue

$$\forall u, v \in H, |\alpha(u, v)| \leq \|\alpha\| \|u\|_H \|v\|_H. \quad (1.2.1)$$

2) α est coercive, il existe $a > 0$ tel que :

$$\forall u \in H, \alpha(u, u) \geq a \|u\|_H^2. \quad (1.2.2)$$

3) L est continue

$$\forall u \in H, |L(u)| \leq \|L\| \|u\|_H.$$

Alors, il **existe** un **unique** u dans H qui vérifie

$$\forall v \in H, \alpha(u, v) = L(v), \quad (1.2.3)$$

et celui-ci vérifie

$$\|u\|_H \leq \frac{\|L\|}{a}.$$

Si de plus α est symétrique, alors u est aussi l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}\alpha(v, v) - L(v).$$

Remarque 1.2.1 Il y a deux preuves (Algébrique et Analytique), nous avons choisi la preuve Analytique.

Preuve. (Approche Analytique)

Par application du théorème de Riez sur la forme linéaire continue, il existe un vecteur $f \in H$ tel que :

$$\forall v \in H, L(v) = \langle f, v \rangle$$

Par application de ce même théorème aux formes bilinéaire continues, il existe un endomorphisme linéaire continue $A \in L(H)$ tel que :

$$\forall u, v \in H, \alpha(u, v) = \langle Au, v \rangle$$

la proposition (1.2.3) se réécrit alors :

$$\exists! u \in H, Au = f \quad (1.2.4)$$

Soit $p > 0$. Définissons

$$T_p : H \rightarrow H$$

par

$$T_\rho(u) = u - \rho(Au - f) \quad (1.2.5)$$

u est solution de (1.2.4) si et seulement si :

$$T_P(u) = u \quad (1.2.6)$$

On va appliquer le théorème de point fixe de Banach c-à-d on doit prouver que T_P est une contraction on a :

$$\begin{aligned} \|T_\rho(u) - T_\rho(v)\|^2 &= \|u - v\|^2 - 2\langle u - v, \rho(Au - Av) \rangle + \rho^2 \|A(u - v)\|^2 \\ &= \|u - v\|^2 - 2\rho\langle u - v, A(u - v) \rangle + \rho^2 \|A(u - v)\|^2 \end{aligned}$$

comme

$$\langle u - v, A(u - v) \rangle = a(a - u, u - v) \geq a \|u - v\|^2 \quad (\text{coercivité})$$

et

$$\|A(u - v)\| \leq c \|u - v\| \quad (\text{continuité de } A)$$

On a donc

$$\|T_\rho(u) - T_\rho(v)\|^2 \leq \|u - v\|^2 (1 - 2\rho a + \rho^2 c^2)$$

Il suffit de montrer qu'il existe $\rho > 0$, tel que :

$$0 < (1 - 2\rho a + \rho^2 c^2) < 1$$

Soit l'inégalité :

$$1 - 2\rho a + \rho^2 c^2 < 1$$

d'où

$$(-2\rho a + \rho^2 c^2) < 0 \implies \rho(c^2 \rho - 2a) < 0$$

$$\rho(c^2 \rho - 2a) = 0 \implies \begin{cases} \rho = 0 \\ \vee \\ \rho c^2 - 2a = 0 \end{cases}$$

$$\rho(c^2 \rho - 2a) = 0 \implies \begin{cases} \rho = 0 \\ \vee \\ \rho = \frac{2a}{c^2} \end{cases}$$

L'inégalité de droite donne $\rho \in]0, \frac{2a}{c^2}[$.

Soit maintenant l'inégalité :

$$1 - 2\rho a + \rho^2 c^2 > 0 \tag{1.2.7}$$

et soit l'équation

$$\varphi(\rho) = 1 - 2\rho a + \rho^2 c^2 = 0 \tag{1.2.8}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

$$\Delta' = a^2 - c^2$$

Si le discriminant ($\Delta' = a^2 - c^2 < 0$) alors la relation (1.2.7) est satisfaite quelque-soit le réel ρ , d'où l'opérateur S_ρ est une contraction $\rho \in]0, \frac{2a}{c^2}[$.

Si $\Delta' \geq 0$, alors il suffit de remarquer que :

$$\varphi(0) = 1 - 2(0)a + (0)^2 c^2 = 1$$

$$\varphi\left(\frac{2a}{c^2}\right) = 1 - 2\left(\frac{2a}{c^2}\right)a + \left(\frac{2a}{c^2}\right)^2 c^2$$

$$= 1 - \frac{4a^2}{c^2} + \left(\frac{4a^2}{c^4}\right)c^2 = 1$$

Donc

$$\varphi(0) = \varphi\left(\frac{2a}{c^2}\right) = 1$$

d'où l'on a :

$$0 < \rho_1 \leq \rho_2 < \frac{2a}{c^2}$$

où ρ_1 et ρ_2 sont les racines de (1.2.8). Donc (1.2.7) est satisfaite, et l'opérateur S_ρ est une contraction .

Lorsque $\rho \in]0, \rho_1[\cup]\rho_2, \frac{2a}{c^2}[$.

Alors d'après le théorème du point fixe, on a l'existence et l'unicité de la solution de (1.2.6), d'où la solution de (1.2.5).

Soit alors $\bar{\rho} = \frac{a}{c^2} > 0$. On a

$$1 - 2\bar{\rho}a + \bar{\rho}^2c^2 = 1 - \frac{2a^2}{c^2} = 1 - \frac{a^2}{c^2}$$

comme $0 \leq 1 - \frac{a^2}{c^2} < 1$, on obtient que T_ρ est une contraction qui admet un point fixe unique $u \in H$.

Cas symétrique :

La démonstration est simple par rapport au cas général.

1- L'existence:

Si $a(v, u) = a(u, v)$ donc : $a(., .)$ est un produit scalaire sur H norme : $(a, (u, v))^{\frac{1}{2}}$ est une norme équivalent à $\|\cdot\|_H$.

D'après le théorème de Riez $\exists! \sigma L \in H$ tel que :

$$a(\sigma L, v) = (\sigma L, v) = L(v)$$

$$\|\sigma L\| = \sup_{v \in H, v \neq 0} \frac{a(\sigma L, v)}{\|v\|} = \sup_{v \in H, v \neq 0} \frac{L(v)}{\|v\|} = \|L\|_H$$

2-L'unicité :

Soit u_1, u_2

$$\left. \begin{array}{l} a(u_1, v) = L(v) \\ a(u_2, v) = L(v) \end{array} \right\} a(u_1 - u_2, v) = 0 \forall v \in H$$

Prenons $v = u_1 - u_2$, $a(., .)$ est coercive

donc :

$$0 = a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq a \|u_1 - u_2\|^2$$

donc :

$$(u_1 - u_2 = 0) \implies (u_1 = u_2)$$

d'où l'unicité .

Cette partie du théorème de Lax-Milgram suppose de plus que la forme bilinéaire est symétrique afin de donner une équivalence entre la formulation variationnelle (1.1.1) et un problème de minimisation [8]. ■

1.2.2 Approximations variationnelles

Il s'agit de résoudre numériquement un problème sous forme variationnelle : sachant que la solution cherchée n'est pas représentable en général sous une forme fonctionnelle explicite simple (comme une fonction polynôme ou exponentielle ou sinusoidale ou ...) on cherche une solution approchée par morceaux. C'est-à-dire on va découper le domaine Ω sur lequel on cherche la solution, et sur chaque morceau on va chercher à approcher la solution par une fonction simple (de type polynômiale par exemple).

Nous limitons notre travail sur le cadre abstraite.

1.2.2.1 Approximations variationnelle abstraite

Le problème variationnelle abstraite [1]. Dans un espace de Hilbert H , il s'agit de résoudre le problème (1.2.3) :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H & \text{tel que :} \\ a(u, v) = L(v), & \forall v \in H \end{cases} \quad (1.2.9)$$

où L est une forme linéaire donnée, et $a(.,.)$ une forme bilinéaire donnée.

Si on ne connaît pas la solution $u \in H$ explicitement, on essaie de trouver une fonction approchée u_h dans un sous-espace H_h de dimension finie n , solution du problème :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in H_h & \text{tel que :} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h), & \forall v_h \in H_h \end{cases} \quad (1.2.10)$$

Si on connaît une base $(\varphi_i)_{i=1, \dots, n}$ de H_h , alors (1.2.10) est équivalent à :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in H_h & \text{tel que :} \\ a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i), & \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1.2.11)$$

Et pour connaître u_h sur H_h il suffit de connaître ses composantes u_h^j sur la base, c'est à dire notant :

$$u_h = \sum_{j=1}^n u_h^j \varphi_j, \quad u_h^j \in \mathbb{R} \text{ pour } j = 1, \dots, n \quad (1.2.12)$$

il suffit de connaître les réels u_h^j . Le problème s'écrit donc comme le système matriciel :

$$\begin{cases} \text{trouver les } u_h^j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n & \text{tels que :} \\ \sum_{j=1}^n a(\varphi_j, \varphi_i) u_h^j = L(\varphi_i), & \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1.2.13)$$

on note alors :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_{h1} \\ \vdots \\ u_{hn} \end{pmatrix}, \quad A = [a_{ij}] \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j), \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} L(\varphi_1) \\ \vdots \\ L(\varphi_n) \end{pmatrix}$$

et il s'agit de trouver $\vec{u}$ tel que :

$$A.\vec{u} = \vec{f} \quad (1.2.14)$$

c'est un système matriciel $n \times n$ qu'on peut résoudre dès que A est inversible. Une fois $\vec{u}$ trouvé la fonction solution est donnée par (1.2.12).

On supposera que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur v , et que $L(.)$ est une forme linéaire continue sur v . Dans ces conditions, le problème (1.2.9) est bien posé (théorème de Lax-Milgram), et la matrice A sera inversible et bien conditionnée.

1.2.3 conformité

Hypothèse de conformité. *On suppose que $H_h \subset H$ avec H_h sous-espace de Hilbert muni de la norme induite par v , on dit dans ce cas que v_h est une approximation conforme de v .*

Dans ces conditions, $a(.,.)$ est également une forme bilinéaire continue et coercive sur H_h , et L est une forme linéaire continue sur H_h . Et le problème (1.2.10) est bien posé indépendamment de h .

Remarque 1.2.2 *Il n'est pas suffisant de vérifier que $a(.,.)$ est coercive sur H_h : on obtiendrait uniquement dans ce cas que $a(v_h, v_h) \geq a_h \|v_h\|$ pour tout $v_h \in H_h$. Et-il se pourrait que a_h tend vers 0 avec h . Par contre, vérifier que $a(.,.)$ est coercif sur H implique avec la conformité que $a_h \geq a$ quel que soit h , et donc a_h ne peut pas tendre vers 0, et le problème est bien posé indépendamment de h :*

$$\|u_h\|_H \leq \frac{1}{a_h} \|L\| \leq \frac{1}{a} \|L\| \quad (1.2.15)$$

Et $\|u_h\|_H$ dépend alors continument de $\|L\|$ indépendamment de h .

1.2.4 Convergence de u_h vers u

On note u la solution du problème continue (1.2.9) et u_h la solution du problème discret (1.2.10). La question est de savoir si $\|u - u_h\|$ est "petit" et de mesurer ce "petit".

Ici on ne dispose que de la norme $\|\cdot\|_H$ et ce sera donc $\|u - u_h\|_H$ qu'on pourra mesurer. On a le résultat suivant, qui donne l'erreur d'approximation a priori :

Théorème 1.2.2 Si $H_h \subset H$ (conformité), si $\|a\|$ est sa constante de coercivité sur H , alors:

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{\|a\|}{a} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H \quad (1.2.16)$$

c'est à dire

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{\|a\|}{a} d(u, H_h)$$

où $d(u, H_h)$ est la distance de u à H_h .

Preuve. Ayant supposé $H_h \subset H$ (approximation conforme), il vient à partir de (1.2.9) (valable donc pour tout $v_h \in H$) et de (1.2.10) :

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in H_h. \quad (1.2.17)$$

Et donc:

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - u_h + u_h), \quad \forall v_h \in H_h.$$

Et puisque H_h est un espace vectoriel, c'est équivalent à :

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - w_h), \quad \forall w_h \in H_h. \quad (1.2.18)$$

Puis la coercivité de $a(.,.)$ et sa continuité donnent:

$$a \|u - u_h\|_H^2 \leq \|a\| \|u - u_h\|_H \|u - w_h\|_H, \quad \forall w_h \in H_h, \quad (1.2.19)$$

ce qui est le résultat annoncé. ■

1.2.5 Théorème de Stampacchia

Définition 1.2.1 On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est:

Continue: *S'il existe une constante C telle que*

$$|a(u, v)| \leq C |u| |v|, \forall u, v \in H$$

Coercive: *S'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$|a(v, v)| \geq M |v|^2, \forall v \in H$$

Théorème 1.2.3 (De Stampacchia) *Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H .*

Soit K un convexe, fermé et non vide de H . Etant donné $\varphi \in H'$, il existe $u \in K$ unique tel que

$$a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle, \forall v \in K.$$

De plus, si a est symétrique. Alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in K; \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}$$

[5]

1.3 Espaces de Sobolev et propriétés

1.3.1 Espace $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$

Définition 1.3.1 *Soit p un réel de $[1; +\infty[$. On définit*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

$\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme .

Définition 1.3.2 *On pose*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C ; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

$\|\cdot\|_{L^\infty}$ est une norme [5].

Proposition 1.3.1 (Inégalité de Hölder) Si $f \in L^p(\Omega, \mu)$ et $g \in L^{p'}(\Omega, \mu)$ alors

$$fg \in L^1(\Omega, \mu) \text{ et } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Remarque 1.3.1 Si $f \in L^\infty$ on a : $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ p.p. sur Ω .

En effet, il existe une suite C_n telle que $C_n \rightarrow \|f\|_{L^\infty}$ et pour chaque n , $|f(x)| \leq C_n$ p.p. sur Ω .

Remarque 1.3.2 Donc $|f(x)| \leq C_n$ pour tout $x \in \Omega \setminus E_n$ avec E_n négligeable. On pose $E = \cup E_n$ de sorte que E est négligeable et l'on a $|f(x)| \leq C_n$ pour tout n et pour tout $x \in \Omega \setminus E$. Par conséquent

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ pour tout } x \in \Omega \setminus E.$$

[5]

Propriétés

Théorème 1.3.1 L^p est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Preuve. Le cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont évidents (utiliser la remarque (1.2.1)) supposons que $1 < p < \infty$ et $f, g \in L^p$. On a :

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Par conséquent $f + g \in L^p$. D'autre part on a :

$$\|f + g\|_{L^p}^p = \int |f + g|^{p-1} |f + g| \leq \int |f + g|^{p-1} |f| + \int |f + g|^{p-1} |g|.$$

Or $|f + g|^{p-1}$ et grâce à l'inégalité de Hölder on obtient

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

[5] ■

Théorème 1.3.2 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue).

Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 . On suppose que:

a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p sur Ω .

b) Il existe une fonction $g \in L$ telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω .

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ [5].

1.3.2 Espace $D(\Omega)$

Définition 1.3.3 [4] On appelle support d'une fonction f , l'ensemble :

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

Exemple 1.3.1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \mathbb{Q}$$

alors :

$$\text{supp} f = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \quad (\mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R})$$

donc f n'est pas à support compact.

Définition 1.3.4 $D(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ telle que } \text{supp } \varphi \text{ compact de } \Omega\}$.

1.3.3 Dérivée au sens faible

Définition 1.3.5 Soit $f \in L^p(\Omega)$

On dit que f dérivable au sens faible si existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que :

$$\int_{\Omega} f \phi' = - \int_{\Omega} g \phi, \quad \forall \phi \in D(\Omega).$$

Exemple 1.3.2 Soit $f =]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x|$

On cherche que $g \in L^p(\Omega)$ telle que : $\int_{\Omega} f \phi' = - \int_{\Omega} g \phi$

$$\int_{\Omega} f \phi' = \int_{-1}^0 -x \phi' + \int_0^1 x \phi' = \left([-x\phi]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \phi \right) + \left([x\phi]_0^1 - \int_0^1 \phi \right)$$

$$= \int_{-1}^0 -\varphi + \int_0^1 \varphi$$

alors la dérivée de f au sens faible est $g(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & , -1 < x < 0 \\ 1 & , 0 < x < 1 \end{cases}$$

1.3.4 Espace de $H^1(\Omega)$ et espace de $H_0^1(\Omega)$

Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$; elle s'identifie à une distribution sur Ω . Encore notée v , et on peut donc définir ses dérivées $\frac{\partial v}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq n$, en tant que distribution sur Ω , $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ n'appartient pas au sous-espace $L^2(\Omega)$.

Définition 1.3.6 On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\}$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$\|v\|_{1,\Omega} = (u; v)_{1,\Omega}^{\frac{1}{2}}$$

la norme correspondante [7].

Définition 1.3.7 On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

1.3.5 Espace de $H^m(\Omega)$

On généralise la définition (1.3.6) de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$.

Définition 1.3.8 Pour tout entier $m \geq 1$, on appelle espace de Sobolev d'ordre m sur Ω l'espace :

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire

$$(u, v)_{m, \Omega} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^{\alpha} u \partial^{\alpha} v \right\} dx$$

et on note :

$$\|v\|_{m, \Omega} = (u; v)_{m, \Omega}^{\frac{1}{2}}$$

la norme correspondante [7] .

1.3.6 Espace $W^{1,p}$

Définition 1.3.9 Soient $I =]a, b[$ un intervalle borné ou non et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est défini par

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ tel que } \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}$$

On pose

$$H^1(I) = W^{1,2}(I)$$

Pour $u \in W^{1,p}(I)$ on note $u' = g$.

Exemple 1.3.3 Soit $I =]-1, 1[$:

i) La fonction $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ appartient à $W^{1,p}(I)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et que $u' = H$ où

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Plus généralement une fonction continue sur $\bar{I}$ et continument dérivable par morceaux sur $\bar{I}$ appartient à $W^{1,p}(I)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

ii) La fonction H n'appartient pas à $W^{1,p}$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.3.10 (Norme de $W^{1,p}$)

L'espace $W^{1,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

(ou par fois si, $1 \leq p < \infty$ de la norme équivalente $[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}}$). L'espace H^1 est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

La norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Est équivalente à la norme de $W^{1,2}$ [5].

Propriétés

- a) L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
- b) L'espace $W^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.
- c) L'espace H^1 est un espace de Hilbert séparable.

Remarque 1.3.3 Il convient de retenir de la démonstration précédente le fait suivant: Soit (u_n) une suite de $W^{1,p}$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans L^p et u'_n converge vers une certaine limite dans L^p , alors $u \in W^{1,p}$ et $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$. Lorsque $1 < p \leq \infty$ (il suffit de savoir que (u'_n) reste borné dans L^p pour conclure que $u \in W^{1,p}$).

Les fonctions de $W^{1,p}$ sont << en gros >> des primitives des fonctions de L^p . Plus précisément on a le .

Théorème 1.3.3 Il existe une constante C (dépendant) seulement de $|I| \leq \infty$ telle que :

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Autrement dit $W^{1,p}$ avec injection continue pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

De plus, lorsque I est borné on a :

l'injection $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ est compacte pour $1 < p \leq \infty$

l'injection $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ est compacte pour $1 \leq q < \infty$

[5]

1.3.7 L'espace $W_0^{1,p}(I)$

Définition 1.3.11 Etant donné $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture de $C_c^1(I)$ dans $W^{1,p}(I)$. On note

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I) \quad (1).$$

L'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}$; l'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1 .

L'espace $W_0^{1,p}$ est espace de Banach séparable; il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$. L'espace H_0^1 est un espace de Hilbert séparable [5].

1.3.8 Propriété (inégalité de Poincaré)

On suppose que $I = [a, b]$ est borné, alors il existe une constante C (dépendant $|I|$) telle que

$$\|u\|_{w^{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p} \quad \forall u \in w_0^{1,p}(I)$$

Autrement dit, sur $w_0^{1,p}$ la quantité $\|u'\|_{L^p}$ est une norme équivalente à la norme de $w^{1,p}$.

Preuve. Pour $u \in w_0^{1,p}(I)$ on a :

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(t) dt \right| \leq \|u'\|_{L^1}$$

donc

$$\|u(x)\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^1};$$

on en déduit d'après l'inégalité de Hölder [5]. ■

1.4 Formule de Green

Théorème 1.4.1 (Formule d'intégration par partie)

Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit u et v deux fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$.

Alors elles vérifient la formule d'intégration par partie

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) ds$$

[4]

Corollaire 1.4.1 Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit u une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$ et v une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$, toutes deux à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par partie

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) ds$$

ou $\nabla u(x) = (\frac{\partial u}{\partial x_i})_{1 \leq i \leq N}$ est le vecteur gradient de u , et $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$.

Preuve.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d (\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \cdot v) = \sum_{i=1}^d \left[\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial}{\partial x_i}) \cdot v \right] \\ &= \sum_{i=1}^d \left[\int_{\Gamma} v \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] \\ &= \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^d v \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \end{aligned}$$

■

Chapitre 2

Application sur le problème de Dirchlet homogène

On va proposer des applications concernant les équations différentielles partielles où on va appliquer le théorème de Lax-Milgram sur le problème de Dirchlet homogène, après avoir mis notre problème sous forme variationnelle .

2.1 Position du problème

Définition 2.1.1 Soit $\Omega =]a, b[$ un ouvert borné de $\mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in H^2(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} -u'' + u = f, \text{ sur } \Omega =]a, b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Remarque 2.1.1 On dit que le problème (2.1.1) problème classique .

2.2 Formulation variationnelle du problème

Lemme 2.2.1 Le problème (2.2.1) équivalente le problème (2.1.1)

$$\begin{cases} \text{trouver} & u \in H \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Preuve. de problème fort à problème faible .

On a

$$-u'' + u = f$$

On multiplie les deux membres par v on trouve:

$$-u''v + uv = fv$$

puis on intègre les deux membres

$$\int -u''v + \int uv = \int fv$$

Formule de Green nous donne:

$$\int_a^b -u''v = [-u'v]_a^b + \int_a^b u'v'$$

alors

$$\int_a^b u'v' + \int_a^b uv = \int_a^b fv \quad \forall v \in H$$

on pose

$$a(u, v) = \int_a^b (u'v') dx + \int_a^b (uv) dx \quad \forall v \in H$$

$$L(v) = \int_a^b (fv) dx \quad \forall v \in H$$

alors la formulation variationnelle du problème est :

$$\begin{cases} \text{trouver} & u \in H \\ a(u, v) = L(v) & \forall v \in H \end{cases} \quad (2.2.2)$$

On choisit ici :

$$H = H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : u' \in L^2(\Omega), u(a) = u(b) = 0\}$$

car u, u' existent dans le problème et $u(a) = u(b) = 0$, on sait que $H = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{1, \Omega} &= \langle f, g \rangle_{0, \Omega} + \langle f', g' \rangle_{0, \Omega} \\ &= \int_{\Omega} f \cdot g + \int_{\Omega} f' \cdot g' \end{aligned}$$

donc le problème sera :

$$\begin{cases} \text{trouver} & u \in H_0^1 \\ \langle u, v \rangle_{1, \Omega} = L(v) & \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Retour au problème(2.1.1)

Supposons que le formulation variationnelle du problème elliptique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H = H_0^1(\Omega) \text{ telle que :} \\ \langle u, v \rangle_{1,\Omega} = \int_a^b (fv) dx, \forall v \in H \end{array} \right.$$

admet une solution unique alors :

$$\langle u, v \rangle_{1,\Omega} = \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} u'v' = \int_a^b (fv) dx, \forall v \in H$$

on a :

$$\int_a^b (u'v') dx = u'v|_a^b - \int_a^b (u''v) dx = u'(b).v(b) - u'(a).v(a) - \int_a^b (u''v) dx = - \int_a^b (u''v) dx, (v(a) = v(b) = 0)$$

d'où

$$\int_a^b (uv) dx - \int_a^b (u''v) dx = \int_a^b (fv) dx, \forall v \in H$$

alors

$$\int_a^b (-u'' + u - f)v dx = 0 \implies -u'' + u - f = 0 \quad (\text{presque partout sur } \Omega)$$

(on applique la relation (1.1.1))

et $u(a) = u(b) = 0$, donc u est une solution du problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -u'' + u = f & \text{dans } \Omega \\ u(a) = u(b) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : u' \in L^2(\Omega), u(a) = u(b) = 0\}$$

■

2.3 Existence et unicité de solution de la Formulation variationnelle du problème

Théorème 2.3.1 Soit $\Omega =]a, b[$ un ouvert borné de $\mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in L^2(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Formulation variationnelle du problème (2.3.1)

$$-u'' + u = f$$

On multiplie les deux membres par v on trouve:

$$-u'' \cdot v + u \cdot v = f \cdot v$$

puis on intègre les deux membres

$$\int_{\Omega} -\Delta u \cdot v + \int_{\Omega} u \cdot v = \int_{\Omega} f \cdot v$$

Formule de Green nous donne:

$$\int_a^b (-u''v) dx = [-u'v]_a^b + \int_a^b (u'v') dx$$

alors

$$\int_a^b (u'v') dx + \int_a^b (uv) dx = \int_a^b (fv) dx \quad \forall v \in H$$

on pose

$$a(u, v) = \int_a^b (u'v') dx + \int_a^b (uv) dx \quad \forall v \in H$$

$$L(v) = \int_a^b (fv) dx \quad \forall v \in H$$

alors la formulation variationnelle du problème faible est :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H \\ a(u, v) = L(v) \forall v \in H \end{cases} \quad (2.3.2)$$

On choisit ici :

$$H = H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : u' \in L^2(\Omega), u(a) = u(b) = 0\}$$

car u, u' existent dans le problème et $u(a) = u(b) = 0$, on sait que $H = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{1,\Omega} &= \langle f, g \rangle_{0,\Omega} + \langle f', g' \rangle_{0,\Omega} \\ &= \int_{\Omega} (f \cdot g) dx + \int_{\Omega} (f' \cdot g') dx \end{aligned}$$

donc le problème sera :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \\ \langle u, v \rangle_{1,\Omega} = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

On applique le théorème de Lax-Milgram sur le problème (2.3.2) d'abord on va vérifier la condition du théorème :

- $a(u, v)$ bilinéaire

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u_1, u_2, v \in H_0^1(\Omega) :$

$$\begin{aligned}
 a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= \int_a^b (\alpha u_1 + \beta u_2)' v' dx + \int_a^b (\alpha u_1 + \beta u_2) v dx \\
 &= \int_a^b (\alpha u_1 v' + \beta u_2 v') dx + \int_a^b (\alpha u_1 v + \beta u_2 v) dx \\
 &= \int_a^b (\alpha u_1 v') dx + \int_a^b (\alpha u_1 v) dx + \int_a^b (\beta u_2 v') dx + \int_a^b (\beta u_2 v) dx \\
 &= \alpha \int_a^b (u_1 v' + u_1 v) dx + \beta \int_a^b (u_2 v' + u_2 v) dx \\
 &= \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a(v, \alpha u_1 + \beta u_2) &= \int_a^b v' (\alpha u_1 + \beta u_2)' dx + \int_a^b v (\alpha u_1 + \beta u_2) dx \\
 &= \int_a^b (v' \alpha u_1 v' + v' \beta u_2) dx + \int_a^b (v \alpha u_1 + v \beta u_2) dx \\
 &= \int_a^b (v' \alpha u_1) dx + \int_a^b (v \alpha u_1) dx + \int_a^b (v' \beta u_2) dx + \int_a^b (v \beta u_2) dx \\
 &= \alpha \int_a^b (v' u_1 v' + u_1 v) dx + \beta \int_a^b (v' u_2 + v u_2) dx \\
 &= \alpha a(v, u_1) + \beta a(v, u_2)
 \end{aligned}$$

donc $a(u, v)$ bilinéaire.

• $a(u, v)$ continue

$\forall u, v \in H_0^1(\Omega) :$

on a

$$\begin{aligned}
 | a(u, v) | &= \left| \int_a^b (u'v') dx + \int_a^b (uv) dx \right| \\
 &\leq \int_a^b | u'v' | dx + \int_a^b | uv | dx \\
 &\leq \|u'\|_{0,\Omega} \cdot \|v'\|_{0,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega} \cdot \|v\|_{0,\Omega} \\
 &\leq (\|u'\|_{0,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega}) (\|v\|_{0,\Omega} + \|v'\|_{0,\Omega})
 \end{aligned}$$

donc $| a(u, v) | \leq M (\|u\|_{1,\Omega} + \|v\|_{1,\Omega})$ telle que $M = 1$

donc : la forme bilinéaire est continue.

• $a(u, v)$ coercive:

$$\begin{aligned}
 \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad : \quad a(v, v) &= \int_a^b (v')^2 dx + \int_a^b (v)^2 dx \\
 &= \langle v, v \rangle_{1,\Omega} = \|v\|_{1,\Omega}^2
 \end{aligned}$$

d'où la coercivité .

• $L(v)$ linéaire

$$\begin{aligned}
 L(a_1 v_1 + a_2 v_2) &= \int_a^b f(a_1 v_1 + a_2 v_2) \\
 &= a_1 \int_a^b f v_1 + a_2 \int_a^b f v_2 \\
 &= a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2)
 \end{aligned}$$

donc $L(v)$ est linéaire.

• $L(v)$ continue

$\exists M \succ 0$ telle que : $| L(v) | \leq M \| v \|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(v)$

$$| L(v) | = \left| \int_{\Omega} f.v \right| \leq \int_{\Omega} | f.v | \leq \left(\int_{\Omega} | f |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Omega} | v |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Inégalité de Cauchy-Schwarz})$$

$$= \| f \|_{0,\Omega} \cdot \| v \|_{0,\Omega}$$

$$\leq \| f \|_{0,\Omega} \cdot \| v \|_{1,\Omega}$$

donc $L(v)$ est continue.

Alors : le problème (2.3.2) admet une solution unique d'après le théorème de Lax-Milgram.

retour au problème (2.3.1).

Supposons que le formulation variationnelle du problème faible elliptique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H = H_0^1(\Omega) \text{ telle que :} \\ \langle u, v \rangle_{1,\Omega} = \int_a^b f v, \forall v \in H \end{array} \right.$$

admet une solution unique alors :

$$\langle u, v \rangle_{1,\Omega} = \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} u'v' = \int_a^b f v, \forall v \in H$$

on a :

$$\int_a^b u'v' = u'v|_a^b - \int_a^b u''v = u'(b).v(b) - u'(a).v(a) - \int_a^b u''v = - \int_a^b u''v \quad (v(a) = v(b) = 0)$$

d'où

$$\int_a^b uv - \int_a^b u''v = \int_a^b f v, \forall v \in H$$

alors

$$\int_a^b (-u'' + u - f)v = 0 \implies -u'' + u - f = 0 \quad (\text{presque partout})$$

sur Ω) (on applique la relation (1.1.1))

et $u(a) = u(b) = 0$, donc u est une solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{dans } \Omega \\ u(a) = u(b) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : u' \in L^2(\Omega), u(a) = u(b) = 0\}$$

2.3.1 Régulation du problème

Théorème 2.3.2 (Régularité)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. On suppose que Ω a une frontière de classe C^2 , ou que Ω est convexe à frontière Lipschitzienne. Si $f \in L^2(\Omega)$ et si $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution faible de (2.3.1). Alors $u \in H^2(\Omega)$. De plus, si $f \in H^m(\Omega)$ alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$ [9].

2.4 Approximation numérique

2.4.1 Éléments finis : exemple en dimension 1

Problème modèle [2]

On considère le problème de Dirichlet sur le domaine $\Omega =]0; 1[$: Trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{dans } \Omega \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Le domaine Ω est discrétisé grâce à la subdivision $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ avec $x_j = jh, h = \frac{1}{n+1}$

Éléments finis P_1

On considère comme ensemble V_h

$$V_h = \{ u \in C^0([0, 1]), \quad V_i = 0, \dots, n, \quad u|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1 \}$$

où P_1 est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 sur $\mathbb{R}$. De même on pose

$$V_h^0 = \{ u \in V_h, \quad u(0) = u(1) = 0 \}$$

D'après la proposition 2, ces deux espaces sont des sous-espaces de $H^1(0, 1)$, donc des Hilbert puisqu'ils sont de dimension finie. En effet en introduisant la fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x) = 1 - |x| \quad \text{sur} \quad [-1, 1] \quad \text{et nulle ailleurs, une base de } V_h \quad \text{est formée des fonctions} \\ \phi_j(x) = \left(\phi \frac{x - x_j}{h}\right), \quad \text{pour} \quad j = 0, \dots, n + 1$$

On les appelle les fonctions de base éléments finis P_1 . De même V_h^0 est engendré par

ces mêmes fonctions pour $j = 1; \dots; n$. Les espaces V_h et V_h^0 sont donc de dimension $n+2$ et n respectivement. Un élément $u_h \in V_h$ s'exprime sous la forme alors que $u_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} u_h(x_j) \phi(x_j)$ alors que $u_h^0 \in V_h^0$ aura pour expression $u_h^0(x) = \sum_{j=0}^n u_h(x_j) \phi(x_j)$. La formulation variationnelle approchée est écrite pour ce problème de Dirichlet sur V_h^0 pour transcrire les conditions aux limites.

La formulation variationnelle étant de la forme $a(u, v) = L(v)$ avec $a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv)dx$ et $L(v) = \int_0^1 f v dx$ on obtient en remplaçant u_h par son expression en fonction de la base $\phi(x_j)$ le problème : trouve $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1} \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\sum_{j=1}^n a(\phi_j, \phi_i) u_j = L(\phi_i), \quad i = 1, \dots, n$$

ce qui constitue un système de n équations à n inconnues, de matrice de terme général $a(\phi_i, \phi_j)$ (est symétrique). Calculons ces coefficients pour les fonctions de base P_1 .

Comme le support de ϕ_i est $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, le produit $\phi_i \phi_j$ est identiquement nul lorsque $|i - j| > 1$. Nous n'avons donc à calculer que $a(i, i - 1)$, $a(i, i)$ et $a(i, i + 1)$

sachant que par symétrie on a $a(i, i - 1) = a(i, i + 1)$ calculons :

$$a(\phi_i, \phi_j) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi' \left(\frac{x - x_j}{h} \right)^2 dx + 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi \left(\frac{x - x_j}{h} \right)^2 dx = \frac{2}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} 1^2 dx + 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi \left(1 - \left(\frac{x - x_j}{h} \right) \right)^2 dx$$

On trouve $a(\phi_i, \phi_i) = \frac{2}{h} + \frac{2h}{3}$. Un calcul analogue donne $a(\phi_i, \phi_{i+1}) = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$. Le système à résoudre est donc tridiagonal. Pour poursuivre l'étude de cette méthode, il nous faut un résultat d'approximation des fonctions de $H^1(0,1)$, par les éléments de V_h .

Théorème 2.4.1 Soit r_h l'opérateur d'interpolation de $H^1(0,1)$ dans V_h . Alors pour tout $u \in H^1(0,1)$, $\lim_{h \rightarrow 0} \|r_h u - u\|_{H^1(0,1)} = 0$ et il existe $C > 0$ tel que pour tout

$$u \in H^2(0,1) \quad \|r_h u - u\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)}.$$

Corollaire 2.4.1 Soit $u \in H^1(\Omega)$ solution de (FV) et $u_h \in V_h$ solution de (FV_h). Alors la méthode P_1 converge : $\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_{H^1(0,1)} = 0$ et il existe $C > 0$ tel que pour tout

$$u \in H^2(0,1) \quad \|u_h - u\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)}.$$

Preuve. Sur $[x_i, x_{i+1}]$ on a pour $v \in C^\infty([0,1])$

$$r_h v(x) = v(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} ((v(x_{i+1}) - v(x_i))) \in P_1. \text{ Opérons une première estimation. On a}$$

:

$$\begin{aligned} r_h v(x) - v(x) &= v(x_i) - v(x) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} ((v(x_{i+1}) - v(x_i))) \\ &= \int_x^{x_i} v'(t) dt + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v'(t) dt \\ &= (x - x_i) v'(\xi_1) + (x_i - x) v'(\xi_2) = (x - x_i) (v'(\xi_2) - v'(\xi_1)) \\ &= (x - x_i) \int_{\xi_1}^{\xi_2} v''(t) dt \end{aligned}$$

Donc

$$(r_h v(x) - v(x))^2 \leq (x - x_i)^2 \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |v''(t)| dt \right)^2 \leq h^2 \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} 1^2 dt \right)^2 \|v''\|_{L^2(x_{i-1}, x_{i+1})}^2 \leq h^3 \|v''\|_{L^2(x_{i-1}, x_{i+1})}^2$$

En intégrant sur $[x_i, x_{i+1}]$ on obtient $\int_{x_i}^{x_{i+1}} (r_h v(x) - v(x))^2 dt \leq h^4 \|v''\|_{L^2(x_{i-1}, x_{i+1})}^2$ et finalement

$$\|r_h v(x) - v(x)\|_{L^2(0,1)} \leq h^{23} \|v''\|_{L^2(0,1)}$$

Cette inégalité est valable sur $H^2(0, 1)$ par densité. Faisons maintenant une estimation sur les dérivées :

$$r_h v(x)' - v(x)' = \frac{v(x_{i+1})}{x_{i+1}} - \frac{v(x_i)}{x_i} - v(x)' = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v'(t) - v(x)' dt = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_x^t v''(y) dy dt$$

Donc

$$\begin{aligned} |r_h v(x)' - v(x)'|^2 &\leq \frac{1}{h^2} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_x^t v''(y) dy dt \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{h^2} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} 1^2 dt \right) \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_x^t v''(y) dy \right)^2 dt \right) \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_x^t 1^2 dy \int_x^t v''(y) dy dt \leq h \|v''\|_{L^2(x_{i-1}, x_{i+1})}^2 \end{aligned}$$

En intégrant sur $[x_i, x_{i+1}]$ et en sommant sur i on obtient finalement

et cette inégalité est valable sur $H^2(0, 1)$ par densité. En regroupant ces deux inégalités on a l'inégalité cherchée :

$$\|r_h v(x) - v(x)\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|v''\|_{L^2(0,1)}$$

Démontrons maintenant la convergence annoncée. On repart de l'estimation en dérivée première :

$$r_h v(x) - v(x) = \int_x^{x_i} v'(t) dt + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v'(t) dt$$

qui donne $|r_h v(x) - v(x)| \leq 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |v'(t)| dt$ donc grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|r_h v(x) - v(x)|^2 \leq 4h \|v''\|_{L^2(x_{i-1}, x_{i+1})}^2 \quad \text{d'où en intégrant sur } [x_i, x_{i+1}],$$

$$\|r_h v(x) - v(x)\|_{L^2(x_{i-1}, x_{i+1})}^2 \leq 4h \|v''\|_{L^2(x_{i-1}, x_{i+1})}^2 \quad \text{et enfin en sommant sur } i,$$

$$\|r_h v(x) - v(x)\|_{L^2(0,1)} \leq 2h \|v'\|_{L^2(0,1)}$$

Pour conclure il faut montrer que $\|r_h v'(x) - v'(x)\|_{L^2(0,1)} \rightarrow 0$ Pour cela soit $\epsilon > 0$.
Comme $C^\infty([0, 1])$ est dense dans $H^1(0, 1)$ il existe $\phi \in C^\infty([0, 1])$ telle que :

$\|\phi - v(x)\|_{H^1(0,1)} < \epsilon$, et à fortiori, $\|\phi' - v'(x)\|_{L^2(0,1)} < \epsilon$, comme
 $C^\infty([0, 1]) \subset H^2(0, 1)$, on a l'inégalité démontrée ci-dessus, $\|(r_h \phi)' - \phi'\|_{L^2(0,1)} \leq h \|v''\|_{L^2(0,1)}$.
D'autre part on peut estimer. $\|(r_h v')(x) - \phi'\|_{L^2(0,1)}$ en écrivant sur $[x_i, x_{i+1}]$:

$$(r_h v')(x) = \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v'(t) dt$$

donc $(r_h v')(x)^2 \leq \frac{1}{h} \|v'\|_{L^2(x_{i-1}, x_{i+1})}^2$ ce qui en intégrant sur $[x_i, x_{i+1}]$ donne $\|(r_h v')\|_{L^2(x_{i-1}, x_{i+1})}^2$
 $\leq \|v'\|_{L^2(x_{i-1}, x_{i+1})}^2$ et enfin en sommant sur i ,

$$\|(r_h v')\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \|v'\|_{L^2(0,1)}^2$$

En particulier on a donc

$$\|(r_h v') - (r_h \phi)'\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \|v' - \phi'\|_{L^2(0,1)}^2 < \epsilon$$

Cette inégalité permet de conclure puisque

$$\begin{aligned} \|(r_h v)'(x) - v'(x)\|_{L^2(0,1)}^2 &\leq \|(r_h v)'(x) - (r_h \phi)'\|_{L^2(0,1)}^2 + \|(r_h \phi)' - \phi'\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\phi' - v'(x)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq 2\epsilon h \|\phi''\|_{L^2(0,1)}^2 \end{aligned}$$

Prenons $h_0 \leq \frac{\epsilon}{\|\phi''\|_{L^2(0,1)}} \quad \text{alors } h < h_0$

donne $\|(r_h v)'(x) - v'(x)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 3\epsilon$. Ceci prouve l'assertion [2]. ■

Eléments finis P_2

On considère comme ensemble V_h

$$V_h = \{ u \in C^0([0, 1]), \quad u_i = 0, \dots, n, \quad u|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_2 \}$$

où P_2 est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 sur $\mathbb{R}$. De même on pose

$$V_h^0 = \{ u \in V_h, \quad u(0) = u(1) = 0 \}$$

Pour constituer une base de V_h , on considère comme dans le cas de P_1 les polynômes interpolateurs de Lagrange sur $[x_i, x_{i+1}]$. Ceux-ci s'écrivent

$$\psi_i(x) = \frac{2}{h^2} (x - x_{i+\frac{1}{2}}) (x - x_{i+1}), \quad \psi_{i+1}(x) = \frac{2}{h^2} (x - x_{i+\frac{1}{2}}) (x - x_i), \quad \psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = -\frac{4}{h^2} (x - x_i) (x - x_{i+1})$$

Le support de ψ_i est $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ et celui de $\psi_{i+\frac{1}{2}}$ l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Un élément de V_h s'écrit

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n+1} v(x_i) \psi_i(x) + \sum_{i=1}^n v(x_{i+\frac{1}{2}}) \psi_{i+\frac{1}{2}}(x)$$

ce qui en fait un espace de dimension $2n + 3$. Un élément de V_h^0 s'écrit

$$v(x) = \sum_{i=1}^n v(x_i) \psi_i(x) + \sum_{i=1}^n v(x_{i+\frac{1}{2}}) \psi_{i+\frac{1}{2}}(x)$$

ce qui en fait un espace de dimension $2n + 1$. Dans le cas du problème de Dirichlet associé à l'équation différentielle $-u'' = f$ sur $[0; 1]$, on cherche donc une solution sous la forme

$$u_h = \sum_{K=1}^{2n+1} u_{\frac{K}{2}} \psi_{\frac{K}{2}}(x)$$

et le problème revient à résoudre le système $K_h U_h = F_h$ où $K_h^{Kl} = \int_0^1 \psi'_{\frac{K}{2}}(x) \psi'_{\frac{l}{2}}(x) dx$. La matrice du système s'écrit après calcul :

$$K_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \vdots \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \vdots \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Elle est donc un peu plus pleine que dans le cas de l'approximation P_1 , et surtout deux fois plus grande.

Quel est donc l'intérêt de cette approximation ? Il tient dans le résultat de convergence.

Théorème 2.4.2 Soit $u \in H_0^1(0,1)$ et $u_h \in V_h^0$ solution des formulations variationnelles exactes et approchées associées au problème ci-dessus. Alors la méthode P_2 converge et

$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_{H^1(0,1)} = 0$. De plus, si $u \in H^3(0,1)$, alors il existe $C > 0$ indépendant de h tel que :

$$\|u_h - u\|_{H^1(0,1)} \leq Ch^2 \|u'''\|_{L^2(0,1)}.$$

Donc la méthode P_2 a une convergence quadratique en h pour les solutions régulières. C'est rentable pour n assez grand. En effet si on considère que le coût de résolution d'un système matriciel de taille n et de largeur de bande b est de l'ordre de $b \times n$, elle sera de l'ordre de $3n$ pour la méthode P_1 et $5n$ pour P_2 . Mais pour augmenter la précision d'un facteur 100 pour la première méthode, cela coûtera 100 fois plus cher, pour seulement 10 fois plus cher pour la deuxième [2].

Chapitre 3

Application sur le problème de Dirichlet non homogène

On va proposer des applications concernant les équations différentielles partielles où on va appliquer le théorème de Stampacchia sur le problème de Dirichlet non homogène, après avoir mis notre problème sous forme variationnelle .

3.1 Position du problème

Définition 3.1.1 Soit $\Omega =]0, 1[$ un ouvert borné de $\mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in H^2(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & \text{sur } \Omega =]0, 1[\\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1.1)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donnés et f fonction donnée.

3.2 formulation variationnelle du problème elliptique

On a :

$$-u'' + u = f$$

multiplie les deux membres par v on trouve :

$$-u''v + uv = fv$$

puis on intègre les deux membres

$$\int -u''v + \int uv = \int fv$$

on utilise formule de Green on trouve :

$$\int_0^1 -u''v = \int_0^1 u'v' - [u'v]_0^1$$

alors

$$\int_0^1 u'v' - [u'v]_0^1 + uv = \int_0^1 fv$$

donc on travaille dans l'espace

$$K = \{v \in H^1 : v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}$$

Est-ce que K est un sous-espace ?

$$\forall v_1, v_2 \in K : v(0) = \alpha, v(1) = \beta$$

$$(v_1 + v_2)(0) = v_1(0) + v_2(0) = 2\alpha \notin K$$

$$\text{donc } v_1 + v_2 \notin K$$

alors K n'est pas sous-espace .

Est-ce que K est fermé ?

$$K = \{v \in H^1 : v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}$$

Soit (u_n) suite de K convergente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$l \in K$?

$$l \in H^1 \implies l(0) = \alpha, l(1) = \beta$$

$$l(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha = \alpha$$

$$l(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta = \beta$$

donc $l \in K$, alors K fermé.

Est-ce que K convexe ?

Soit $v_1, v_2 \in K$, $t \in [0, 1]$, on montrer que $[tv + (1 - t)v] \in K$

$$v_1 \in K \implies v_1 \in H^1 : v_1(0) = \alpha, v_1(1) = \beta$$

$$v_2 \in K \implies v_2 \in H^1 : v_2(0) = \alpha, v_2(1) = \beta$$

$$\begin{aligned} [tv_1 + (1-t)v_2](0) &= tv_1(0) + (1-t)v_2(0) \\ &= t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha \in K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [tv_1 + (1-t)v_2](1) &= tv_1(1) + (1-t)v_2(1) \\ &= t\beta + (1-t)\beta = \beta \in K \end{aligned}$$

donc K convexe.

K convexe et fermé on peut alors appliquer le théorème de Stampacchia.

Si u est une solution classique de (3.1.1) on a :

$$\int_{\Omega} u'(v-u)' + u(v-u) = \int_{\Omega} f(v-u) \quad \forall v \in K$$

Donc en particulier on a :

$$\int_{\Omega} u'(v-u)' + u(v-u) \geq \int_{\Omega} f(v-u) \quad \forall v \in K \quad (3.2.1)$$

On utilise alors le théorème de Stampacchia : $\exists u \in H^1$, unique, vérifiant (3.2.1); de plus s'obtient par

$$\min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int f(v'^2 + u^2) - \int f v \right\}$$

la forme faible

$$a(u, v-u) = \int_{\Omega} u'(v-u)' + uv - u \quad \text{et} \quad L(v-u) = \int_{\Omega} f(v-u)$$

alors problème faible sera :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1 & \text{telle que} \\ a(u, v-u) \geq L(v-u) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

3.3 Existence et unicité de solution de la Formulation variationnelle du problème

On applique le théorème de Stampacchia sur le problème d'abord on va vérifier la condition du théorème :

1. $a(u, v - u)$ est bilinéaire, c'est claire.

2. $a(u, v - u)$ continue

$$\begin{aligned}
 \forall u, v \in H^1 : |a(u, v - u)| &= \left| \int_{\Omega} u'(v - u)' + u(v - u) \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} |u'(v - u)' + u(v - u)| \\
 &\leq \int_{\Omega} |u'(v - u)'| + \int_{\Omega} |u(v - u)| \\
 &\leq \|u'\|_{0,\Omega} \|(v - u)'\|_{0,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega} \|v - u\|_{0,\Omega} \\
 &\leq (\|u'\|_{0,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega}) (\|(v - u)'\|_{0,\Omega} + \|v - u\|_{0,\Omega}) \\
 &\leq \|u\|_{1,\Omega} \|v - u\|_{1,\Omega}
 \end{aligned}$$

$M = 1$ alors $a(u, v - u)$ continue.

3. $a(u, v)$ coercive :

$$\begin{aligned}
 a(u, v) &= \int_{\Omega} v'^2 + u^2 = \int_{\Omega} |v'|^2 + \int_{\Omega} |u|^2 \\
 &= \|u'\|_{0,\Omega}^2 + \|u\|_{0,\Omega}^2 = \|u\|_{1,\Omega}^2
 \end{aligned}$$

4. $L(v - u)$ bilinéaire c'est claire.

5. $L(v - u)$ continue

$$\begin{aligned}
 |L(v - u)| &= \left| \int_{\Omega} f(v - u) \right| \leq \int_{\Omega} |f(v - u)| \\
 &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Omega} |v - u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \|f\|_{0,\Omega} \|v - u\|_{0,\Omega} \\
 &\leq \|f\|_{0,\Omega} \|v - u\|_{1,\Omega}
 \end{aligned}$$

donc $L(v - u)$ continue,

donc u solution unique du problème .

3.3.1 Exemple

On se place ici en dimension 1 d'espace, $d = 1$, et on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{sur }]0, 1[\\ u(0) = a, \\ u(1) = b, \end{cases}$$

où a et b sont des réels donnés. Ces conditions aux limites sont dites de type Dirichlet non homogène; comme a et b ne sont pas forcément nuls, on cherche une solution dans $H^1(\Omega)$ et non plus dans $H_0^1(\Omega)$. Cependant, pour se ramener à l'espace $H_0^1(\Omega)$, en particulier pour obtenir que le problème est bien posé d'après le théorème de Lax-Milgram et à la coercivité de la forme bilinéaire

$$\alpha(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx$$

sur $H_0^1(\Omega)$, on va utiliser une technique dite de "relèvement". On pose : $u = u_{0+} \tilde{u}$ où u_0 est définie par: $u_0(x) = a + (b - a)x$.

On a en particulier $u_0(0) = a$ et $u_0(1) = b$. On a alors $\tilde{u}(0) = 0$ et $\tilde{u}(1) = 0$. La fonction $\tilde{u}$ vérifie donc le système :

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' = f, \\ \tilde{u}(0) = 0, \\ \tilde{u}(1) = 0, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

dont on connaît la formulation faible, et dont on sait qu'il est bien posé (voir paragraphe 3.1.1). Donc il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$

vérifiant $u = u_{0+} \tilde{u}$, où $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution du problème

$$\int_0^1 \tilde{u}' v' = \int_0^1 f v \quad \forall v \in H_0^1([0, 1])$$

De manière plus générale, soit $u_1 \in H_{\alpha,b}^1([0, 1]) = \{v \in H^1; v(0) = \alpha \text{ et } v(1) = b\}$, et soit $\bar{u} \in H_0^1([0, 1])$ l'unique solution faible du problème

$$\begin{cases} -\bar{u}'' = u_1'' + f, \\ \bar{u}(0) = 0, \\ \bar{u}(1) = 0, \end{cases} \quad (3.3.2)$$

alors $\bar{u} + u_1$ est l'unique solution faible de (3.3.1), c'est-à-dire la solution du problème

$$\begin{cases} u \in H_{\alpha,b}^1([0, 1]), \\ \int_0^1 u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1([0, 1]) \end{cases}$$

[9]

Il est facile de montrer que u ne dépend pas du relèvement choisi .

Considérons maintenant le cas de la dimension 2 d'espace : $d = 2$.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Pour se ramener au problème de Dirichlet homogène, on veut construire un relèvement, c'est à dire une fonction $u_0 \in H^1(\Omega)$ telle que $\gamma(u_0) = g$ où γ est l'application trace. On ne peut plus le faire de manière explicite comme en dimension 1. En particulier, on rappelle qu'en dimension 2, l'espace $H^1(\Omega)$ n'est pas inclus dans l'espace $C(\Omega)$ des fonctions continues, contrairement au cas de la dimension 1. Mais si on a $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, on sait qu'il existe $u_0 \in H^1(\Omega)$ tq. $g = \gamma(u_0)$. On cherche donc u sous la forme $u = \tilde{u} + u_0$ avec $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ et $u_0 \in H^1(\Omega)$ telle que $\gamma(u_0) = g$.

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ on multiplie (3.3.3) par v et on intègre sur Ω :

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$$

c'est-à-dire :

$$\int_{\Omega} -\nabla u(x)\nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$$

Comme $u = u_0 + \tilde{u}$, on a donc :

$$\begin{cases} \tilde{u} \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} -\nabla \tilde{u}(x)\nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx - \int_{\Omega} \nabla u_0(x)\nabla v(x)dx, \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

En dimension 2, il n'est pas toujours facile de construire le relèvement u_0 . Il est donc usuel, dans la mise en oeuvre des méthodes d'approximation (par exemple par éléments finis), de servir de la formulation suivante, qui est équivalente à la formulation :

$$\begin{cases} u \in \{v \in H^1; \gamma(v) = g \text{ sur } \partial\Omega\} \\ \int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Bibliographie

- [1] **Abert Cohen**; Approximations variationnelles de E.D.P, Notes du Cours .
- [2] **Emmanuel Maitre**; Notes du Cours Eléments Finis-ENSIMAG 2A-Version du 21 février 2011.
- [3] **G. Leborgne**; Approximations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques et **Éléments finis**; Notes du cours d'équations aux Dérivées Partielles de l'ISIMA deuxième année <http://isimath.fr.st>, Septembre 2003. Septembre 2003.
- [4] **Grégoire Allaire**; Analyse numérique et optimisation : une introduction à la Modélisation Mathématique et à la simulation numérique. Les éditions de l'école polytechnique, France (Mai 2006).
- [5] **H. Brézis**; Analyse fonctionnelle; DUNOD, Paris 1999.
- [6] **J. Saint Raymond**; Cours d'Analyse Réelle; MM003, Université Pierre et Marie Curie, octobre 2012.
- [7] **O. Glass**; Algèbre linéaire 3 : Produits Scalaires, Espace euclidiens, Formes quadratiques; Cours de l'Université Paris-Dauphine DU MI2E 2 ième année, 2010/2011.
- [8] **P. A. Raviart - J. M. Thomas**; Introduction à l'analyse Numérique des équations aux dérivées partielles; MASSON, 1988.
- [9] **R. Herbin**; Analyse numérique; cours pour Master 1 mathématiques, université Aix Marseille 1, 2011-2012.

ملخص:

نظرية لاكس ميلغرام وضعت كوسيلة بسيطة وفعالة توفر الإطار المناسب لإيجاد حلول للمعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية. في هذا العمل قمنا بإعطاء مقدمة بسيطة حول نظرة لاكس ميلغرام, ابتداءا بتذكرة في التحليل التابعي تحوي بعض التعاريف والنظريات, ثم قدمنا كيفية تشكيل الفضاء H^m انطلاقا من الفضاء L^p كما قمنا بدراسة نظرية لاكس ميلغرام التي توفر حل للمسائل التغايرية مع التأكيد على أهمية المقاربة التغايرية من جهة التحليل العددي من خلال التقارب التغايرلي. أخيرا قدمنا تطبيقات للنظرية على معادلات ديركلي التفاضلية الجزئية الناقصية.

الكلمات المفتاحية: فضاءات سوبولاف, فضاءات هيلبارت, التقريب التغايراتي, المقاربة التغايرية, شكل ثنائي الخطية, صيغة غرين, الصيغة الضعيفة.

Résumé

Le théorème de Lax-Milgram est utilisé comme un moyen simple et efficace fournissant le cadre adéquat pour la recherche de solutions aux équations différentielles partielles elliptiques. Dans ce travail nous avons donné une introduction simple au théorème de Lax-Milgram. On a commencé par un rappel d'analyse fonctionnelle qui contient quelques définitions et quelques théorèmes principaux, puis nous avons montrer comment construire des espaces H^m à partir des espaces L^p . Ainsi nous avons étudié Le théorème de Lax-Milgram qui consiste à résoudre des problèmes variationnels, en basant sur l'importance de cette approche qui nous offre une méthode numérique pour la résolution de problèmes variationnels a partir d'approximation variationnelle.

Finalement, on a étudié l'application sur les équations de Dirichlet aux équations différentielles partielles elliptiques.

Mots clés: Espace de Sobolev, Espace de Hilbert, Approche variationnelle, Approximation

variationnelle, Forme bilinéaire, Formule de Green, Formulation variationnelle.

Abstract:

the Lax-Milgram theory had been emerged as a simple and effective tool to provide the appropriate framework for the research's solutions of partial and elliptic differential equations. In this work we have given a brief introduction to Lax-Milgram theory, starting with a remindes of functional analysis that contains some definitions and some theorems, then we introduce the construction of the space H^m from the L^p spaces. After that we studied the theory of Lax-Milgram this theory consists notably the solution of problem variationnal, with the confirmation to the importance of the approximation variationnal from the side of number's analysis throught the variationnal approach. Finally, we presented the application of that theory on Dirichlet's application of partiel differential equations elliptiques.

Keywords: Sobolev space, Hilbert space, Approach variationnal, Approximation variationnal, Form bilinear, Green formul, Weak formulation.