



N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Approximation par différences
finies de l'équation de transport
étude comparatives**

Présenté par: Tercha Fatima
Yousfi Farida

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Aissaoui Adel	MCA	Président	Univ. El Oued
Beggas Mohammed	MCB	Rapporteur	Univ. El Oued
Moumen Bekkouche Mohammd	MAA	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Remerciements

Je voudrais d'abord remercier **ALLAH** le plus puissant de nous avoir donné la force pour réaliser ce travail de master.

Nous exprimons notre profonde gratitude et nos remerciements : À notre encadreur de mémoire **Dr. Mohammed Beggas** Maître de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour avoir accepté de nous encadrer, pour son enseignement, son support, ses encouragements, sa patience qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail.

Un remerciement spécial à mon sens et à mon esprit, mon mental et mes pensées, et mon âme et mon souffle, à l'amour sincère, l'enseignant vertueux, le soleil qui illuminait les chemins du succès dans la vie, à ma mère et grâce aux quels j'ai pu terminer ce travail.

À celui qui m'a enseigné le sens de la vie, à celui qui a tenu ma main sur son chemin à celui qui m'a conseillé si je faisais des erreurs et qui m'a pris la main si elle a faibli "Mon père", que Dieu vous bénisse santé et bien-être

Celui qui a une sœur est le roi du monde entier parce que la sœur est en soi un monde et un monde. Ma belle sœur Afaf et Hana, Kheira, Nadjiba, Asma, Djamila, Nihad.

A mes chers frères : Mohamed Reda , Lamine, Ahmed

Un merci spécial à Mohamed el Sghir Labadi.

Un merci spécial à Abdelkader et Abdelfatah.

Nous n'oublions pas non plus les germes de ma vie : Meriem, Djihan, Sayeh

Abderrahmane, Zahra, Rema, Mehdi, Abdelah et Ania.

Enfin, je ne voudrais pas non plus oublier tous mes Amis Inase, Abir, Kenza, El kayma, Om el fadel, Manel, Heinda et ma cousine Amel Et tous les amis qui m'ont encouragé que je les aime beaucoup.

Notations

$L^p(\Omega)$	espaces des Lebesgue.
A	matrice.
A^t	matrice transposée.
A^{-1}	matrice inverse.
I	matrice unité.
λ	valeur propre.
$\sigma(A)$	rayon spectrale de la matrice A .
$M_n(\mathbb{K})$	ensemble de matrices carrées.
P_h	problème discret.
P_c	problème continu.
A_h	matrice de problème discret.
u_h	solution de problème discret.
u	solution de problème continu.
R_h	l'erreur de consistance de P_h .
Δx	le pas dans la direction de x .
Δy	le pas dans la direction de y .
$L^p(\Omega)$	espaces des Lebesgue.
$C^K([a, b])$	fonction continue k fois sur $[a, b]$.
E.D.P	des équations aux dérivées partielles.
C.I	condition initiale.
C.L	condition aux limite.
D.F	différence finies.

Table des figures

2.1	Membrane élastique	18
3.1	Discrétisation uniforme	24
4.1	Exemples de cartes de courants marins au large de côtes de Bretagne	32
4.2	Advection des fumées par le vent.	33
4.3	Diffusion moléculaire	33
4.4	Transport diffusif des polluants dégagés d'une usine	35
5.1	Schéma explicite centré pour l'équation de transport	41
5.2	Schéma de Lax-Friederichs pour l'équation de transport	43
5.3	Schéma décentré pour l'équation de transport	45
5.4	Schéma implicite centre pour l'équation de transport	49

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaire	4
1.1 Espace vectoriel	4
1.1.1 Espace vectoriel normé	4
1.2 Espaces fonctionnels	5
1.2.1 Espace $C^k([a, b])$	5
1.2.2 Espaces des Lebesgue $L^p(\Omega)$	5
1.3 Définition et quelques exemples	6
1.3.1 Divergence de vecteur V	6
1.3.2 Laplacien	6
1.3.3 Combinaison convexe	6
1.4 Formules de Taylor et développements limités	6
1.4.1 Dérivation d'une fonction	7
1.4.2 Dérivées successives	7
1.4.3 Diverses formules de Taylor	8
1.4.4 Généralisation	9
1.5 Rappel sur les matrices	10
1.5.1 Norme matricielle	10
1.5.2 Valeur propre	10
1.5.3 Matrices monotones	11
1.5.4 Rayon spectrale	11
1.5.5 Matrices particuliers	11

2	Généralité Sur les équation aux dérivées partielles	14
2.1	Généralités	14
2.1.1	E.D.P linéaire d'ordre deux à coefficients constants en dimension 2 . .	15
2.1.2	Classification	16
2.1.3	Les problèmes aux limites	16
2.1.4	Condition initiale	17
2.1.5	Problème bien posé	17
2.1.6	Problème mal posé	17
2.2	Quelques modèles tirés de la physique	18
2.3	problème parabolique	19
2.3.1	L'équation de la chaleur	19
2.4	problème hyperbolique	19
2.4.1	L'équation des ondes	19
3	Principe de la méthode des différence finie	21
3.1	Quelques définition et propriété	21
3.1.1	l'ordre	22
3.1.2	Consistance	22
3.1.3	La stabilité	23
3.1.4	Interprétation de la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) . .	23
3.1.5	Convergence	23
3.2	Différences finies en dimension 1	24
3.2.1	Quelques formules d'approximation des dérivées	24
3.2.2	Différence finie Centrée	25
3.2.3	Pour la dérivée seconde	26
3.2.4	Différences finies en dimension 2	26
3.3	Pour la dérivée première en D2	28
3.3.1	Semi-discrétisation en temps	29
4	L'équation de transport	30
4.1	Système du premier ordre équivalent	30

4.2	Quelques phénomènes modélisent l'équation du transport (advection)	31
4.2.1	Déplacement d'une nappe de pétrole	31
4.2.2	Le transport diffusion d'une gaz fumées dégage d'une usine	32
4.3	Différence entre l'advection et la diffusion	34
4.4	Applications des problèmes d'advection-diffusion	34
4.4.1	Équation d'advection - diffusion	34
4.4.2	Advection pure	36
4.4.3	Diffusion pure	36
4.4.4	Équation linéaire, cas 1D	36
5	Schémas aux D.F pour l'équation du transport	39
5.1	Problème continue :	39
5.2	Les schémas aux D.F	40
5.3	Discrétisation	40
5.4	Schéma centré	40
5.4.1	L'ordre du schéma :	41
5.4.2	Stabilité	41
5.5	Schéma de Lax-Friederichs	42
5.5.1	Consistance	43
5.5.2	Stabilité	44
5.6	Schéma explicite décentre	44
5.6.1	consistance	45
5.6.2	Stabilité	46
5.6.3	Convergence	46
5.6.4	démonstration :	47
5.7	Schéma implicite centré	48
5.7.1	L'erreur de consistance	49
5.7.2	Stabilité :	49
5.8	Etude comparative	51
5.8.1	Comparaison	51

Introduction

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé E.D.P dans la suite . C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes au travers d'E.D.P que l'on a pu comprendre le rôle de tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises.

Quand sont apparues les E.D.P ? Elles ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17^{ème} siècle (Newton, Leibniz ...). Ensuite le "catalogue" des E.D.P s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique . S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit de citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'électromagnétisme, de Schrödinger et Heisenberg pour les équations de la théorie de la relativité.

L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des E.D.P, c'est qu'il n'est en général pas question d'obtenir leurs solutions explicitement ! Ce que les mathématiques peuvent faire par contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent, et décrire parfois très précisément certaines propriétés de ces solutions.

L'apparition d'ordinateurs extrêmement puissants permet néanmoins aujourd'hui d'obtenir des solutions approchées pour des équations aux dérivées partielles, même très compliquées. C'est ce qui s'est passé par exemple lorsque vous regardez les prévisions météorologiques, ou bien lorsque vous voyez les images animées d'une simulation d'écoulement d'air sur l'aile d'un avion. Le rôle des mathématiciens est alors de construire des schémas d'approximation,

et de démontre la pertinence des simulations en établissant des estimations a priori sur les erreurs commises.

En vue de passage d'un problème exacte (continu) au problème approche (discret), on dispose plusieurs techniques : les différences finies, les élément finie et les volumes finie.

Nous nous limiterons ici à l'exposé des technique des différences finies.

La méthode de différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans les problème continu par des différences divisées ou un nombre finie de points discrets ou nœuds du maillage

Avantage : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénient : limitation de la géométrie des domaines de calculs (Simple, non complexe), difficultés de prise en compte des conditions aux limites et en général absence de résultats de majoration d'erreurs.

Dans de nombreux domaines de la physique et en particulier dans le cas de la mécanique de fluides, on rencontre une équation aux dérivées partielles très simple modélisant le déplacement d'une grandeur, déplacement d'une quantité de matière, d'une quantité de mouvement ou d'une onde. Ce qui nous permettra d'en déduire des schémas numériques adéquats.

C'est l'équation de transport (ou d'advection).

Le travail présent se décompose en 5 chapitres.

Dans le premier, nous rappelons quelques résultats généraux sur les equation aux dérivées partielles, et les classification des E.D.P du deuxièmes ordre avec des exemples tires de la physique.

Quand au deuxième chapitre, il est consacré à la méthode différences finies.

Nous exposons le principe de ce méthode, en citons quelque schémas de discrétisation

Dans le troisième chapitre, nous exposons les différent types d'équation liées à l'équation du transport (advection), diffusion, avec des exemples qui modélisent l'équation du transport.

L'objectiton du quatième chapitre est l'etude des quelque schemas aux differences finies pour l'equation du transport lineair au D1 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (c > 0)$$

où c est la vitesse du vent.

Le but de notre étude est la comparaison entre ces schémas du point de vue :
Consistance, stabilité, convergence.

Finalement, on va choisir le meilleur schéma selon les critères cités

Chapitre 1

Préliminaire

Ce chapitre est consacré essentiellement à l'introduction de quelques notions fondamentales d'analyse et un rappel sur les matrices que nous utiliserons pas la suite.

1.1 Espace vectoriel

Définition 1.1.1. *On définit sur un ensemble non vide X deux opérations, l'addition l'intérieur $(+)$ et le multiplication l'extérieur $(\cdot)$ et soit les conditions suivante :*

1. $(X, +)$ est un groupe abélien
2. $\forall (x, y) \in X \times X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a :
 - * $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
 - * $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
 - * $\alpha(\beta.x) = (\alpha\beta).x$
 - * $1.x = x$

si les conditions sont vérifiées on dit que X est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et noté par $(X, +, \cdot)$.

1.1.1 Espace vectoriel normé

Définition 1.1.2. *Soit V un espace vectoriel. Une norme sur V est une application de V dans $\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tout x, y dans V et tout α dans $\mathbb{K}$:*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogénéité),
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.1.3. Un espace vectoriel normé est un couple $(V, \|\cdot\|)$ où V est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\|\cdot\|$ est une norme sur V .

1.2 Espaces fonctionnels

1.2.1 Espace $C^k([a, b])$

Définition 1.2.1 (Espace $C^k[a, b]$).

$(f \in C^k[a, b]) \Leftrightarrow (f \text{ est dérivable jusqu'à l'ordre } k \text{ et la dérivée d'ordre } k \text{ est continue})$.

1.2.2 Espaces des Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.2.2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < +\infty$

$L^p(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions mesurables de puissance p -ème intégrable, i.e :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable telque } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

- pour $p = 1$

$L^1(\Omega)$ est un espace de toute le fonction intégrable sur Ω

- pour $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable telque : } \exists C > 0 \text{ } |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega \right\}.$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \left\{ C, \text{ tellque } |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega \right\} = \sup \text{ ess } f$$

Remarque 1.2.1.

On dit que f continue sur X si et seulement si pour toute $x_0 \in X$, f est continue en x_0 .

1.3 Définition et quelques exemples

Définition 1.3.1.

$$\text{grad}(u) = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}_{(i,j,k)}$$

1.3.1 Divergence de vecteur V

Soit V une fonction vectorielle de 3 variables (x, y, z) définie sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ et à valeurs V_1, V_2, V_3 dans $\mathbb{R}$. On appelle divergence du vecteur V et on note $\text{div}(V)$ ou $\nabla \cdot V$, le scalaire :

$$\text{div}(V) = \nabla \cdot V = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

1.3.2 Laplacien

On appelle Laplacien de u , et on note Δu ou $\nabla^2 u$, le scalaire :

$$\Delta u = \text{div}(\text{grad } u) = \nabla \cdot \nabla(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

1.3.3 Combinaison convexe

On dit que $u_1, u_2, \dots, u_n$ est une combinaison convexe de u_{n+1} tel que :

$$u_{n+1} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \text{ si :}$$

$$\bullet \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$$

$$\bullet \alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots n$$

1.4 Formules de Taylor et développements limités

Nous avons vu précédemment que la dérivation est essentielle dans l'étude des fonctions. On va voir que les développements limités fournissent encore plus de précision dans l'allure et le comportement d'une fonction au voisinage d'un point donné. Une autre application importante de cette notion est le calcul approché de la valeur d'une fonction en un point, en particulier pour celles qui ne sont pas de type polynomial.

1.4.1 Dérivation d'une fonction

Définition 1.4.1. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I est un intervalle ouvert) est dérivable en un point $x_0 \in I$ si le taux

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

défini sur I/x_0 , admet une limite finie lorsque $x \longrightarrow x_0$. Ainsi, cette limite est dite la dérivée de f au x_0 et notée $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

De même ici, on peut définir une dérivée à gauche et une dérivée à droite au point x_0 par exemple la dérivée à gauche est, quand elle existe,

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et la dérivée à droite est, quand elle existe,

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si f est dérivable en x_0 alors

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

1.4.2 Dérivées successives

Définition 1.4.2. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Si la fonction f' est dérivable, on dira que f est deux fois dérivable et on note

$$f''(x) = (f')'(x)$$

En réitérant, on définit de même la dérivée à l'ordre n de f notée $f^{(n)}$ par

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$$

On peut montrer par récurrence la formule dite de Leibnitz :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

$$\text{où } C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

1.4.3 Diverses formules de Taylor

Formule de Mac-Laurin

On se place dans le cas où l'intervalle $[a, b]$ est de la forme $[0, x]$, x étant une variable positive réelle quelconque. Alors la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n devient :

$$f(x) - f(0) = xf'(0) + \frac{1}{2!}x^2f''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}f^{(n+1)}(c),$$

où $c \in]0, x[$.

Formule de Taylor-Young

Considérons maintenant le cas où f est une application d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, et soit a et x deux points de I . Alors on montre qu'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

avec

$$\varepsilon(x) \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad x \longrightarrow a.$$

Le terme $(x-a)^n \varepsilon(x)$ est appelé reste d'ordre n pour $x \longrightarrow a$.

Noter qu'à l'opposé des autres formules données précédemment, cette dernière précise le comportement du reste d'ordre n pour x tendant vers a .

Dans le cas particulier où $a = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x)^k}{k!} f^{(k)}(0) + (x)^n \varepsilon(x) \\ &= f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2!}x^2f''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(0) + (x)^n \varepsilon(x) \end{aligned}$$

On peut noter, en utilisant les notations de Landau

$$(x)^n \varepsilon(x) = O(x^n) \quad (x \longrightarrow 0)$$

et

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2!}x^2f''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(0) + O(x^n)$$

On dira que

$$f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2!}x^2f''(0) + \dots + \frac{1}{n!}x^nf^{(n)}(0),$$

est le développement limité (en abrégé D.L.) d'ordre n de f au voisinage de 0.

Les D.L, sont très utiles pour l'étude locale des fonctions puisqu'ils permettent :

- Une expression plus simple de f , (au voisinage du point)
- Une recherche facile de limites
- Un tracé plus précis de la courbe (recherche d'asymptotes, position de la courbe par rapport à celles-ci,...).

1.4.4 Généralisation

on a la fonction f définie par :

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in C^p(\Omega),$$

pour $p = 1$:

$$Df(x_0)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i,$$

pour $p = 2$:

$$D^2f(x_0)(h^2) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(x_0)(h_{i_1}, h_{i_2}),$$

si on pose :

$$p = n = 2, \quad x_{i_1} = x, x_{i_2} = y, \quad h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$D^2f(x_0, y_0)(h, h) = D^2f(x_0)(h^2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)h_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)h_1h_2,$$

Formule de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} D^k f(x_0) h^k + O(\|h\|^p) \quad (1.1)$$

si $n = p = 2$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)h_2^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)h_1h_2 \right]$$

si $p = 1, n = 3, h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)h_3 + O(\|h\|),$$

1.5 Rappel sur les matrices

1.5.1 Norme matricielle

Définition 1.5.1. On appelle norme matricielle $\| \cdot \|$ sur $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) vérifiant de plus propriété suivante :

1. $\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
2. $\| \alpha A \| = |\alpha| \| A \|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, A \in M_n(\mathbb{K})$
3. $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|, \forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ (inégalité triangulaire)
4. $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|, \forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$

Par exemple

$$\| \cdot \|_1 = \max_{j=1 \dots n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \\ \| \cdot \|_\infty = \max_{i=1 \dots n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

1.5.2 Valeur propre

Définition 1.5.2.

- Soit A une matrice carrée d'ordre n . Un vecteur propre de A est un vecteur non nul $\vec{X}$ tel que $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$, pour un certain scalaire λ .
- Un scalaire λ est appelé une valeur propre de A si l'équation $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$ admet une solution non triviale $\vec{X}$; $\vec{X}$ est appelé le vecteur propre associé à λ .

Remarque 1.5.1.

- λ est une valeur propre de A si et seulement si l'équation

$$(A - \lambda I)\vec{X} = 0 \quad (\star)$$

- L'espace solution de $(\star)$ n'est pas autre que $\text{Ker}(A - \lambda I)$. Cet espace est appelé l'espace propre de A associé à valeur propre λ .

1.5.3 Matrices monotones

Définition 1.5.3. Une matrice $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est dite monotone si A est inversible et si $A^{-1} \geq 0$ i.e. tous les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls.

1.5.4 Rayon spectrale

Spectre :

Le spectre $A \in M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$, est l'ensemble des valeurs propres de A :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}, A - \lambda I \text{ singulière} \}.$$

Le rayon spectral de A est le plus grand des modules des valeurs propres de A :

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}$$

1.5.5 Matrices particuliers

- **Transposée d'une matrice**

On appelle transposée d'une matrice $A = (a_{ij})$ de type $p \times q$. La matrice $B = (b_{ij})$ de type $q \times p$. Obtenue en échangeant lignes et colonnes de A : $b_{ij} = a_{ji}$.

- **Matrice symétrique**

C'est une matrice A carrée telle que : $A = A^t$

- **Matrice définie positive (forme quadratique)**

On appelle forme quadratique associée à la matrice A la forme :

$$Q(x) = X^t A X$$

Une forme quadratique est dite définie positive si :

$$X^t A X > 0 \quad \forall X \neq 0$$

La matrice unité d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n dont les termes de la diagonale principale sont $a_{ij} = 1, 1 \leq i \leq n$

Remarque 1.5.2. Si $X^t A X \geq 0 \quad \forall X \neq 0$

matrice est positive mais non définie

Une matrice carrée est définie positive si la forme quadratique qui lui est associée est définie positive.

- **La matrice unité**

La matrice unité noté I est définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- **Matrice diagonale**

C'est une matrice carrée telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} = 0 & \text{si } i \neq j \\ \neq 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

- **Matrice par blocs**

Une matrice par blocs $A = (A_{ij}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ est une matrice dont les entrées (a_{ij}) sont des matrices au lieu d'être des scalaire.

On doit toutefois respecter les deux règles suivants :

1. Toutes les matrices d'un même ligne $(A_{ij} \text{ avec } 1 \leq j \leq n)$ ont même nombre de ligne.

2. Toutes les matrices d'une même colonne (A_{ij} avec $1 \leq i \leq n$) ont même nombre de colonnes. Ainsi, il existe des nombres entiers m_i et n_j tel que $A_{ij} \in \mathbb{C}^{m_i \times n_j}$.

- **Matrice tridiagonale**

On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (ou $\mathbb{C}^{m \times n}$) est une matrice tridiagonale si elle n'admet des éléments non nuls que sur un "certain nombre" de diagonales autour de la diagonale principale.

Plus précisément, on dit que A est une matrice bande- p inférieure si $a_{ij} = 0$ quand $i < j + p$ et bande- q supérieure si $a_{ij} = 0$ quand $j > i + q$.

On appelle simplement matrice bande- p une matrice qui est bande- p inférieure et supérieure.

Chapitre 2

Généralité Sur les équation aux dérivées partielles

Dans ce chapitre, on va citer quelques définitions qui concerne les équations aux dérivées partielles, ainsi des phénomènes physiques modéliser par des equation aux dérivée partielle (en abrégé E.D.P) .

2.1 Généralités

une équation aux dérivées partielles est une relation entre une fonction de plusieurs variables u et ses dérivées partielles et une fonction f donnée :

$$F(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}) = f \quad (2.1)$$

Ω est une ouvert de $\mathbb{R}^n$, F est une fonction de plusieurs variable réelles . L'ordre de dérivation le plus élève est appelé l'ordre de E.D.P .

Remarque 2.1.1. *Notons que si $n = 1$, alors l'E.D.P est une équation différentielle ordinaire (E.D.O) . Si dans (1.1) f est nulle, on dit que l'équation est homogène, c'est à dire : $F(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}) = 0$*

Définition 2.1.1. *Si u est ses dérivées apparaissent séparément dans l'E.D.P, celle ci est dit linéaire .*

Exemple 2.1.1.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

1^{er} ordre linéaire et homogène

Définition 2.1.2. *Si u n'est pas linéaire en au moins une dérivée dans l'E.D.P, alors l'E.D.P est non lineaire.*

Exemple 2.1.2.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f,$$

2^{ème} ordre non linéaire, alors l'E.D.P est non lineaire.

Exemple 2.1.3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f,$$

3^{ème} ordre linéaire

La forme la plus générale pour une E.D.P linéaire du 1^{er} ordre est :

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = D(x, y)$$

2.1.1 E.D.P linéaire d'ordre deux à coefficients constants en dimension 2

Elles sont de la forme :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0$$

les trois premier termes A, B, C sont des Constantes

2.1.2 Classification

Le type de l'E.D.P (1.2) dépend de signe de $B^2 - 4AC$

- Si $B^2 - 4AC > 0$, alors l'E.D.P est dit hyperbolique .
- Si $B^2 - 4AC = 0$, alors l'E.D.P est dit parabolique.
- Si $B^2 - 4AC < 0$, alors l'E.D.P est dit elliptique.

Exemple 2.1.4.

1) L'équation des ondes hyperbolique est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad C > 0$$

$$B^2 - 4AC = 4C^2$$

2) L'équation de la diffusion parabolique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, d > 0, B^2 - 4AC = 0$$

$$B^2 - 4AC = 0$$

3) L'équation de Laplace elliptique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2.1.3 Les problèmes aux limites

Soient u et une E.D.P valide sur un ouvert Ω , les trois principaux types de conditions aux frontières sont :

1. On impose la valeur de u sur $\partial\Omega$, c'est la condition de Dirichlet .
2. On impose la valeur de $\frac{\partial u}{\partial n}; \frac{\partial u}{\partial n} = (\text{gradu}) \cdot \vec{n}$ c'est la condition de Neumann.
3. On impose ces deux condition sur $\partial\Omega$ c'est la condition de Mixte.

Remarque 2.1.2. Si l'E.D.P est valide dans tout l'espace, il n'y a pas de frontière, on impose souvent des conditions à l'infini .

2.1.4 Condition initiale

Si l'E.D.P modélise un problème d'évolution on ajoute la condition initiale qui dépende du temps .

Remarque 2.1.3. *(E.D.P+condition aux limite) $\Rightarrow$ Problème aux limite*

2.1.5 Problème bien posé

Soit (P) un problème aux limite.

Proposition 2.1.1. [8] *on dit que (P) bien posé si :*

1. Il existe une solution de (P) satisfaisant les conditions aux frontières .
2. la solution doit-être unique.
3. la solution doit-être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées

2.1.6 Problème mal posé

Un problème qui n'est pas bien posé est dit mal posé .

Exemple 2.1.5.

$$(P) \begin{cases} u''(x) = 0 \\ u'(a) = u_0 \\ u'(b) = v_0 \end{cases}$$

$$u'' = 0 \Rightarrow u' = c_1 \quad u' = c_1 \Rightarrow u = c_1x + c_2 \quad u'(a) = u_0, u'(b) = v_0$$

cas 1 :

si $u_0 \neq v_0$ le problème (P) n'admet aucune solution.

cas 2 :

si $u_0 = v_0$

le problème (P) admet une infini de solution : $u(x) = u_0x + c$

donc le problème (P) est mal posé.

2.2 Quelques modèles tirés de la physique

problème elliptique

l'équation de poisson

On considère une membrane élastique plane Ω fixée sur son pourtour Γ .

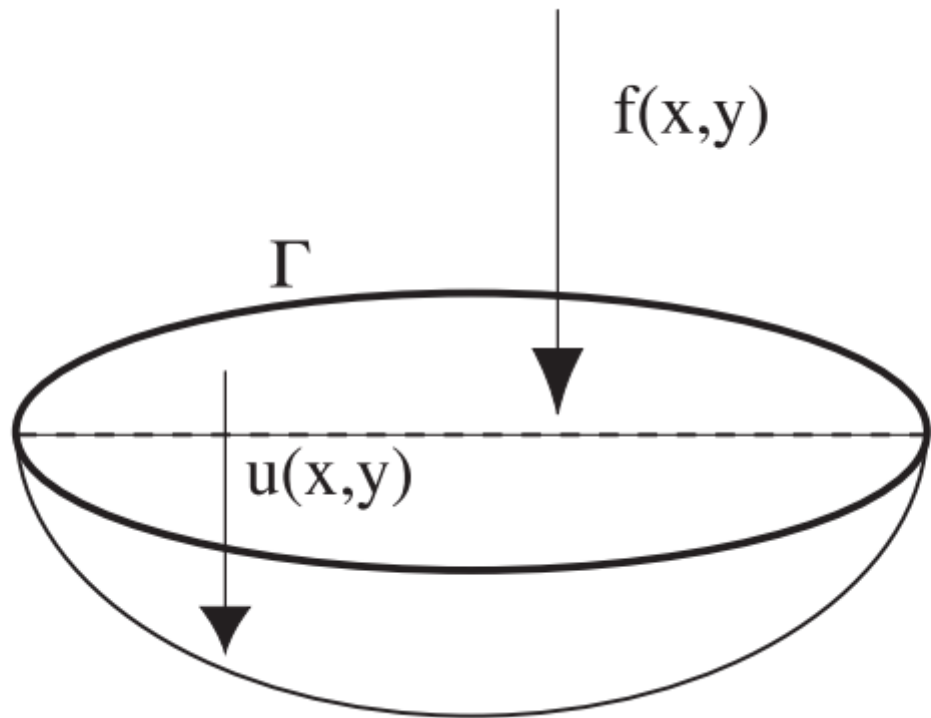


FIGURE 2.1 – Membrane élastique

On suppose la membrane soumise en tout point (x,y) à une densité de forces f s'exerçant perpendiculairement au plan de la membrane.

Sous l'action de f chaque point de la membrane subit un petit déplacement le déplacement transversal, perpendiculaire au plan de ω est l'inconnue u de ce problème et vérifie d'équation :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y) & \forall x,y \in \Omega \\ u(x,y) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

2.3 problème parabolique

2.3.1 L'équation de la chaleur

On considère une barre de longueur L dont la température est fixée à zéro aux extrémités. L'équation de la température au cours du temps s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) + f(x, t) & \forall x \in [0, L] \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & CI \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & CL \end{cases}$$

2.4 problème hyperbolique

2.4.1 L'équation des ondes

Position du problème

Considérons une membrane élastique de surface Ω , plan au repos et fixée sur son bord Γ . Lors de petites vibration transversales, le déplacement normal au plan d'équilibre en tout point x, y de Ω et à chaque instant t est une fonction $u : x, y, t \rightarrow u(x, y, t)$ qui vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + f \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T]$$

ou c désigne la vitesse des ondes.

Ce problème du second ordre en temps est un modelé de problème hyperbolique. La détermination de la solution nécessite de fixer deux conditions initiales en temps.

En fixant les valeurs du déplacement transversal u et de sa dérivée partielle en temps, au temps

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial t}u(x, y, 0) = v^0(x, y) \end{cases}$$

on obtient un problème à valeur initiale ou problème de Cauchy.

Les conditions aux limites choisies, pour la membrane fixée sur son bord Γ , sont des conditions de Dirichlet homogènes mais on pourrait choisir d'autres types de conditions aux limites comme dans les cas stationnaires ou paraboliques.

Remarque 2.4.1. (*solution stationnaire*)

Lorsque la solution ne dépend plus du temps (*régime permanent ou stationnaire*) on retrouve une équation déjà étudiée de forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \forall (x, y) \in \Omega \\ + \quad \text{Conditions aux limites sur } \Gamma \end{array} \right.$$

L'équation des ondes et l'équation de la chaleur ont les mêmes expression dans le cas stationnaire. C'est pourquoi les solutions du problème de Poisson ci-dessus peuvent s'interpréter physiquement, à la fois comme des déplacements d'une membrane élastique ou des températures. (Voir[5])

Chapitre 3

Principe de la méthode des différence finie

En vue de passage d'un problème exacte (continu) au problème approchée (discret) on dispose plusieurs techniques : les différences finies, les élément finie et les volumes finie.

Nous nous limiterons ici à l'exposé des technique des différences finies.

La méthode de différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans les problème continu par des différences divisées ou un nombre finie de points discrets ou noeuds du maillage

Avantage : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénient : limitation de la géométrie des domaines de calculs (simple, non complexe), difficultés de prise en compte des conditions aux limites et en général absence de résultats de majoration d'erreurs.

3.1 Quelques définition et propriété

Définition 3.1.1. *Un schéma aux différences finies est dit schéma à p pas en temps si les valeurs u_i^{n+1} des solutions approchées au temps t^{n+1} sont fonctions des valeurs aux p instants précédents, soit aux temps $t^n, t^{n-1}, \dots, t^{n-p+1}$.*

En particulier, un schéma est dit à un pas si les u_i^{n+1} ne dépendent que des u_i^n .

les deux principales propriétés d'un schéma numérique sont :

3.1.1 l'ordre

Définition 3.1.2. *L'ordre du schéma qui mesure la précision ou erreur de troncature mathématique commise en remplaçant les dérivées partielles exactes par leurs approximations sous formes de différences divisées.*

L'ordre est déterminé par des développements de Taylor obtenus en injectant dans l'écriture du schéma numérique la fonction solution continue exacte du problème différentiel.

3.1.2 Consistance

Définition 3.1.3. *par l'opérateur au différences posons :*

$$L : u \rightarrow -v''$$

$$L_h : u \rightarrow D_h(D_h v)$$

L'erreur de consistance de (P_h) par rapport à (P) est définie par :

$$R_h u(x) = Lu(x) - L_h u(x)$$

Le problème (P_h) est dite consistant par rapport à (P) si :

$$R_h u \rightarrow 0 \quad q^d h \rightarrow 0$$

Cette convergence à la norme discrète du maximum, définie par :

$$\|u\|_{h,\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} |u(x_i)|$$

3.1.3 La stabilité

Définition 3.1.4. *le schéma concerne l'évolution de vecteur des valeurs approchées de la solution aux points x_i au cours des temps t^n (et non plus la solution exacte continue) dans le cas concret où Δt et Δx ne tendent pas vers zéro, mais ont des valeurs fixées.*

Numériquement, ce critère est relatif à la propagation et l'amplification des erreurs d'arrondis, la condition minimale de stabilité impose que le vecteurs de composantes U_i^n reste borné pour tout $n \in [0, T]$.

Sinon il n'est même pas calculable, Si l'on désire de plus que la solution approchée reproduise le comportement de la solution exacte au cours du temps, on devra imposer des conditions de stabilité plus sévères.

Par exemple, dans le cas de l'équation la chaleur, on cherche à reproduire sur la solution numérique le comportement dissipatif du problème continu. On choisira donc des schémas tels que la solution approchée soit décroissante au cours du temps.

3.1.4 Interprétation de la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

La condition de Courant Friedrichs Lewy souvent mentionnée exprime la compatibilité nécessaire entre domaine de dépendance théorique et domaine de dépendance numérique. Le pas de temps Δt doit rester inférieur à la valeur limite au delà de laquelle des parties du domaine de dépendance théorique ne seraient pas prises en compte dans le schéma numérique.

3.1.5 Convergence

Théorème 3.1.1. [8] *(De Lax) Dans un problème bien posé, et avec un schéma numérique consistant la stabilité est une conditions nécessaire et suffisante pour la convergence.*

3.2 Différences finies en dimension 1

Tout les méthodes numériques présupposent les discrétisation du domaine géométrique afin de passer d'un problème continues a une infinité d'inconnues à un problème discret ne comptant d'un nombre fini d'inconnues .

Dans les cas des différences finies en dimension un, on discrétise l'intervalle continues $[a, b]$ en un nombre fini de points x_i d'une manière un informe (pas régulière de longueur h) constant tel que : $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = h$ On remplace ainsi le problème continue par celui

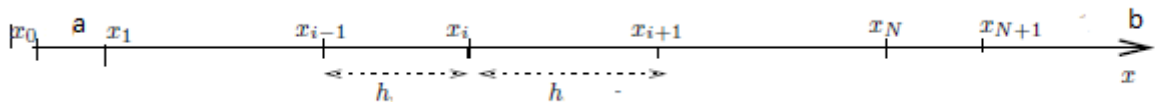


FIGURE 3.1 – Discrétisation uniforme

de la recherche de valeurs, approchées u_i des solutions $u(x_i)$ au points x_i de la discrétisation on remplace les opérateurs de dérivation qui s'appliquent à des fonctions continues pas des analogues discrets

3.2.1 Quelques formules d'approximation des dérivées

Pour la dérivée première

En utilisant le développement limité de Taylor de la fonction u jusqu'à l'ordre 2 au point $(x_i + h)$ on obtient :

$$u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i)$$

d'ou :

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - \frac{h}{2}u''(c)$$

on obtient alors l'approximation suivante :

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h}$$

Notation indicielle :

différence progressive d'ordre 1 (en avant).

$$u'_i \simeq \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h)$$

De la même manière on obtient la différence régressive d'ordre 1 (en arrière) :

$$u'_i \simeq \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h)$$

3.2.2 Différence finie Centrée

A partir du développements de Taylor aux point $(x_i + h)$ et $(x_i - h)$ on obtient :

$$u'_i = \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} u^{(3)}(\xi_i)$$

Notation indicielle :

Différence contrée d'ordre 2

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

Définition 3.2.1. La puissance de h (ou Δx) avec le quelle l'erreur de troncature tend vers 0 est appelée l'ordre de la méthode .

Remarque 3.2.1.

1. On peut déduire des différence finies progressive ou régressive d'ordre 2.
2. On peut utiliser la formule suivante pour la dérivée Centrée

$$u'_i = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{h} + O(h^2)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} \longrightarrow x_i + \frac{h}{2}$$

$$u_{i-\frac{1}{2}} \longrightarrow x_i - \frac{h}{2}$$

3.2.3 Pour la dérivée seconde

Différence finie Centrée

de la même manière on obtient :

$$u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_i)(O_1) \quad , O_1 \in]x_i, x_i + h[$$

$$u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_i)(O_2) \quad , O_2 \in]x_i - h, x_i[$$

$$u(x_i + h) + u(x_i - h) = 2u(x_i) + h^2u''(x_i) + \frac{h^4}{4!}(u^{(4)}(O_1) + u^{(4)}(O_2))$$

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2} - \frac{h^2}{4}(u^{(4)}(O_1) + u^{(4)}(O_2))$$

Notation indicielle.

différence centrée d'ordre 2 est :

$$u''(x_i) \simeq \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

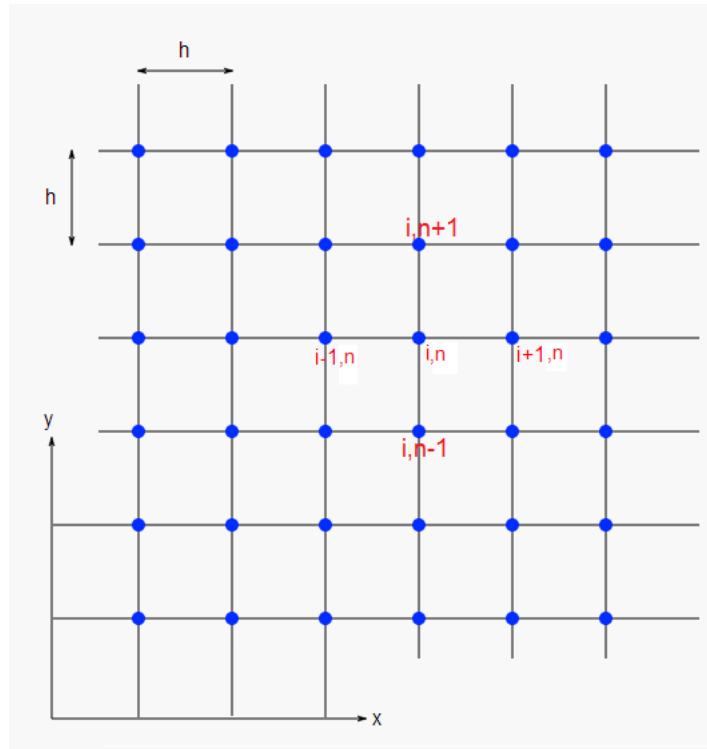
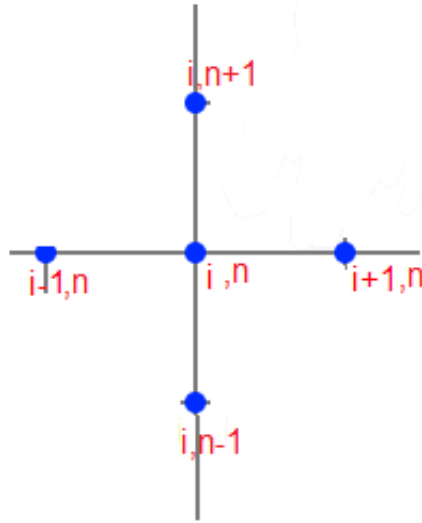
pour la dérivée troisième :

$$u^{(3)}(x_i) \simeq \frac{u_{i+1} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2}}{h^3}$$

Remarque 3.2.2. On peut déduire des différences finies (en avant, en arrière) pour u'' .

3.2.4 Différences finies en dimension 2

Comme en dimension 1, la première étape consiste à discrétiser le domaine . La méthode de différence finie n'est bien adaptée qu'à discrétisation de domaine rectangulaire



Dans le cas de $D2$ $u(x, t)$ est décomposé en $N \times P$ nœuds (x_i, t^n) répartis régulièrement avec un pas d'espace Δx dans la direction x et Dy dans la direction, on notera u_i^n la valeur discrète de la grandeur $u(x, t)$ au nœud (x_i, t^n)

3.3 Pour la dérivée première en D2

De la même manière on obtient :

Différentielle progressive(avant) d'ordre 1

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta y} + O(\Delta y)$$

Différentielle régressive (arrière) d'ordre 1

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_n = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta y} + O(\Delta y)$$

Cas 1D (instationnaire) :

$$u(x, t) = N \text{ nœuds } x_i$$

$$\text{pas d'espace} = \Delta x$$

$$\text{pas de temps} = \Delta t$$

On notera u_i^n valeur discute de la grandeur $u(x, t)$ au nœud x_i au temps $n\Delta t$

$$u_{i \longleftarrow \text{espace}}^{n \longleftarrow \text{temps}}$$

On discrétise de façon uniforme les intervalles d'espace et du temps :

$$\begin{aligned}
x_i &= 1h & i &= 1, \dots, M+1 \\
t^n &= n\Delta t & n &= 0, \dots, N \\
h = \Delta x &= \frac{1}{M+1} & , & \quad \Delta t = \frac{T}{N}
\end{aligned}$$

On cherche alors une approximation $u_i^n \simeq u(x_i, t^n)$ de la solution exacte avec nœuds P_i^n .

3.3.1 Semi-discrétisation en temps

Pour la discrétisation du problème (P) on a trois possibilités pour $(\frac{\partial u}{\partial t})$:

- a) schéma centrée le plus naturel $\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t}$.
- b) schéma décentrée (en avant) $\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$ on obtient le schéma d'Euler explicite calcule directe de u^{n+1} en fonction de u^n .
- c) schéma décentrée (en arriéré) $\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t}$ on obtient le schéma d'Euler implicite.

On doit passer par un système linéaire pour trouver u^{n+1} en fonction de u^n .

Chapitre 4

L'équation de transport

Dans de nombreux domaines de la physique et en particulier dans le cas de la mécanique de fluides, on rencontre une équation aux dérivées partielles très simple modélisant le déplacement d'une grandeur, déplacement d'une quantité de matière, d'une quantité de mouvement ou d'une onde. Ce qui nous permettra d'en déduire des schémas numériques adéquats. C'est l'équation de transport (ou d'advection) qui s'écrit dans le cas monodimensionnel

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Cette équation représente le transport de u avec la vitesse c , c'est encore un modèle de problème hyperbolique, la quantité transportée étant conservée.

On relèvera la similitude de ce problème avec le système du premier ordre équivalent à l'équation des ondes.

4.1 Système du premier ordre équivalent

L'équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

se ramène en posant

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{et} \quad w = c \frac{\partial u}{\partial x}$$

au système de deux équation du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = c \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Le lien avec l'équation de transport est évident.

4.2 Quelques phénomènes modélisent l'équation du transport (advection)

L'exemple type d'équation hyperbolique est l'équation de transport.

Supposons par exemple, qu'on connaisse l'emplacement d'une nappe de pétrole due au dégazonnement intempestif d'un supertanker au large des côtes, et qu'on cherche à prévoir son déplacement dans les heures à venir, par exemple pour la mise en œuvre efficace de barrages.

On suppose connu $v : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$, le champ des vecteurs vitesse des courants marins, qui dépend de la variable d'espace x et du temps t , ce champ de vecteurs est donné par exemple par la table des marées.

4.2.1 Déplacement d'une nappe de pétrole

À $t = 0$, on connaît $\rho_0(x)$: la densité d'hydrocarbure initiale, et on cherche à calculer $\rho(x, t)$ = densité de d'hydrocarbure au point x et au temps t .

On écrit alors l'équation de conservation de la masse :

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \tag{4.1}$$

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A^c \end{cases} \tag{4.2}$$

Où A représente le lieu initial de la nappe de pétrole.

Dans le cas d'un déplacement maritime, le vecteur $v : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$, n'est évidemment pas

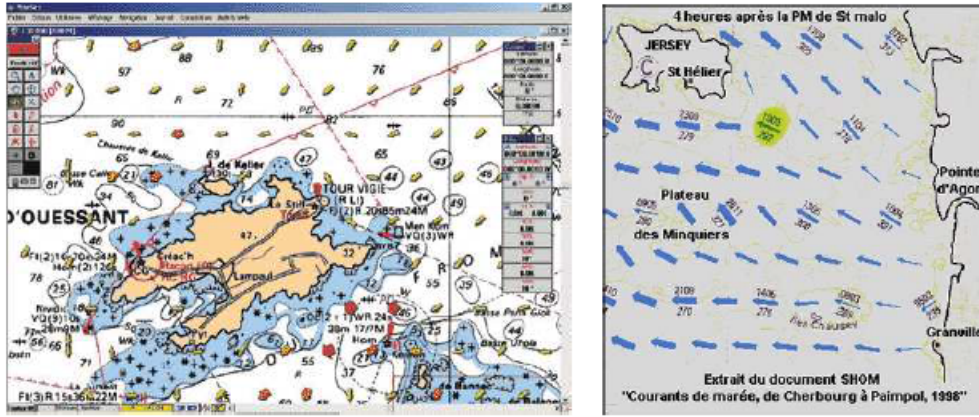


FIGURE 4.1 – Exemples de cartes de courants marins au large de côtes de Bretagne

constant. De plus le déplacement de la nappe dépend également du vent, qui affecte donc le vecteur v . On supposera pourtant ici, pour simplifier l'exposé, que v soit constant en espace et en temps. Alors le problème (3.1)-(3.2) admet comme solution :

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - vt). \quad (4.3)$$

qui exprime le transport de la nappe à la distance vt du point de départ dans la direction de V , au temps t . Notons que les systèmes d'équations hyperboliques sont très importants en mécanique des fluides ; les équations d'Euler, par exemple sont utilisées pour modéliser l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion.

Dans le cadre de ce mémoire, nous n'étudierons que le cas des équations scalaires. Par souci de simplicité, nous n'aborderons dans le cadre de ce mémoire que les problèmes posés en une dimension d'espace, dans le cas relativement simple d'une équation linéaire .(d'après[11])

4.2.2 Le transport diffusion d'une gaz fumées dégage d'une usine

Advection : L'advection correspond au transport d'une propriété telle que l'humidité, la température, la pollution, par un fluide, tel que l'air ou l'eau, en générale selon un mouvement à dominante horizontale. Un exemple est le transport des fumées dégagées d'une usine à l'aide de l'air (vent). L'advection est due au mouvement de l'air, qui disperse le polluant. Ce phénomène est un phénomène macroscopique (mélange de masses d'air).

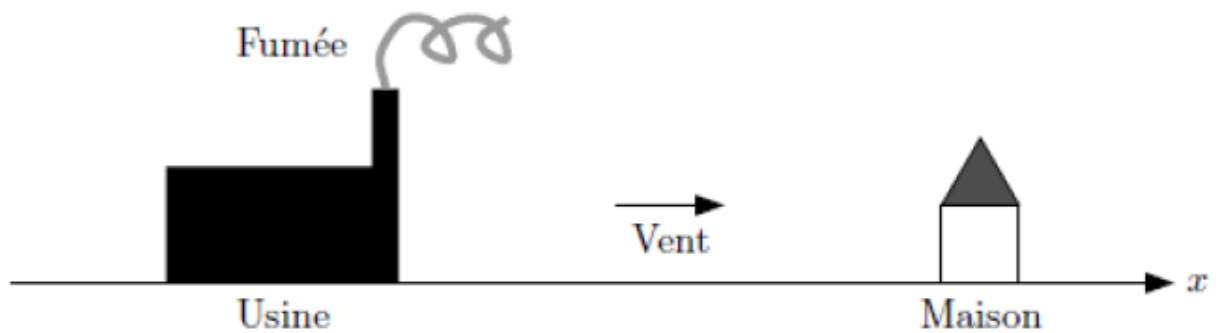
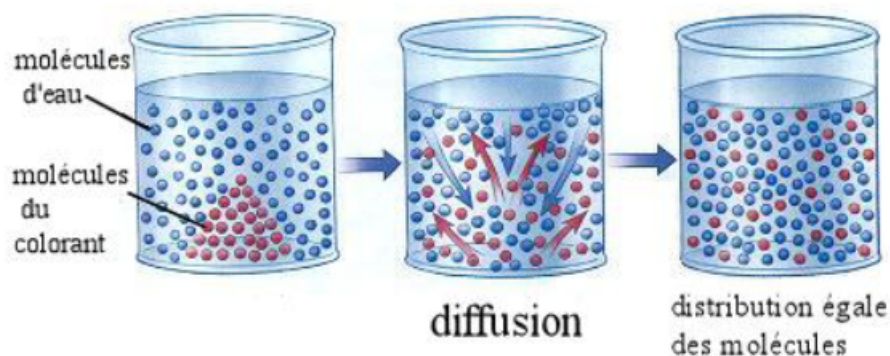


FIGURE 4.2 – Advection des fumées par le vent.

Diffusion : Un processus de transport fondamental dans la mécanique des fluides environnementale est la diffusion. La diffusion est un phénomène microscopique qui désigne la tendance naturelle d'un système à rendre homogènes les concentrations des espèces chimiques en son sein, elle se diffère de l'advection parce qu'elle est un processus aléatoire dans la nature (ne suit pas nécessairement une particule fluide). Un exemple connu est la diffusion d'un parfum dans une chambre vide, Si une bouteille de parfum est ouverte et laissée évaporer dans l'air, rapidement on va sentir ce parfum dans la chambre entière . Ainsi, la diffusion a

FIGURE 4.3 – Diffusion moléculaire



deux principales propriétés : elle est aléatoire dans la nature, et le transport est des régions de fortes concentrations vers les faibles concentrations. On sait aussi par expérience que l'odeur sera plus forte près de la source et de moins en moins forte en éloignant.

4.3 Différence entre l'advection et la diffusion

Les deux processus advection et diffusion déplacent le polluant d'un endroit à un autre, mais chacun accomplit les choses différemment, la différence essentielle est la suivante :

- L'advection va dans un sens (en aval).
- La diffusion va dans les deux sens (indépendamment du sens du courant).

Cela se voit dans les expressions mathématiques respectives.

- L'advection $c \frac{\partial u}{\partial x}$ est une dérivée du premier ordre, ce qui signifie que si (x) est remplacé par $(-x)$ le terme change de signe (antisymétrique).
- La diffusion $D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est une dérivée de deuxième ordre, ce qui signifie que si (x) est remplacé par $(-x)$, le terme ne change pas de signes (symétrie). (Voir[14])

4.4 Applications des problèmes d'advection-diffusion

On considère la situation suivante, une usine rejette à l'instant initial une fumée toxique qui, sous l'effet du vent, va se propager aux habitations voisines. On souhaite connaître la densité de la fumée et le temps lorsque celle-ci atteint une maison.

4.4.1 Équation d'advection - diffusion

L'équation d'advection - diffusion est une combinaison de l'équation d'advection et de diffusion, elle décrit des phénomènes physiques, où les particules, l'énergie, ou d'autres grandeurs physiques sont transférés dans un système physique en raison de deux processus : advection et diffusion. De la définition ci-dessus, il s'ensuit que l'équation d'advection, diffusion combine à la fois des équations paraboliques (diffusion) et hyperboliques (advection) aux dérivées partielles.

En cas de : coefficient de diffusion constant, la vitesse d'écoulement constante, l'équation en $2D$ peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(c \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = r$$

Les deux termes sur le côté gauche représentent les différents processus physiques : le premier correspond à l'advection tandis que le second décrit la diffusion normale.



FIGURE 4.4 – Transport diffusif des polluants dégagés d’une usine

- u : c'est la variable d'intérêt (concentration de l'espèce de transfert de masse).
- La constante D est la diffusion pour la masse.
- $c; v$: les composantes de la vitesse du fluide porteur selon les axe (x, y) respectivement.
- r : La source.

4.4.2 Advection pure

La notion d'advection pure, signifie le transport d'une propriété par un seul processus qui est l'advection et sans l'intervention d'aucun autre processus comme la diffusion.

L'équation de l'advection pure s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(c \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = r$$

4.4.3 Diffusion pure

La notion de diffusion pure, signifie le transport d'une propriété par un seul processus qui est la diffusion et sans l'intervention d'aucun autre processus comme l'advection.

L'équation de la diffusion pure s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = r$$

4.4.4 Équation linéaire, cas 1D

Commençons par étudier le cas d'une équation hyperbolique linéaire :

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, t) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.4)$$

ou la vitesse de transport $c \in \mathbb{R}$ et la condition initiale $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont données. Le problème (3.4) s'appelle “ problème de Cauchy ”. On cherche $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, solution de ce problème.

Nous commençons par une étude succincte du problème continu, pour lequel on peut trouver une solution exacte explicite.

Définition 4.4.1. (*Solution classique*)

On dit qu'une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est solution classique du (3.4) si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, et u vérifie (3.4)

Une condition nécessaire pour avoir une solution classique est que $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$

Théorème 4.4.1. [11] *si $u \in C^1(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique solution classique du problème (3.4), qui s'écrit $u(x, t)u_0(x - ct)$.*

Remarque 4.4.1. (*Terme source*)

Le modèle physique peut amener à une équation avec terme source au second membre $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x, t), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (4.5)$$

et $u_0 \in C(\mathbb{R})$. Ceci peut modéliser un dégazage sur un temps plus long, comme dans le cas du Prestige sur les côtes de Galicie en 2003 par exemple. Pour montrer l'unicité de la solution de (3.5), on suppose que u est solution classique et on pose : $\varphi_{x_0}(t) = u(x_0 + ct, t)$. Par un calcul identique au précédente, on a

$$\varphi'_{x_0}(t) = f(x_0 + ct, t). \quad (4.6)$$

Donc :

$$\varphi_{x_0}(t) = \varphi_{x_0}(0) + \int_0^t f(x_0 + cs, s)ds,$$

On en déduit que :

$$u(x_0 + ct, t) = \varphi_{x_0}(0) + \int_0^t f(x_0 + cs, s)ds,$$

on pose alors : $x = x_0 + ct$, et on obtient :

$$u(x, t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(x - c(t - s), s)ds$$

Ce qui prouve l'unicité On obtient alors l'existence en remarquant que la fonction $u(x, t)$ ainsi définie est effectivement solution de (3.5), car elle est de classe C^1 et elle vérifie $u_t + cu_x = f$.

Proposition 4.4.1. [12] *(Sur les propriétés de la solution) Remarquons que la solution de (3.4) possède les propriétés suivantes :*

$$1) \quad \text{Si} \quad u_0 \geq 0 \quad p.p \quad \text{alors} \quad u \geq 0 \quad p.p.$$

$$2) \quad \|u(., t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u_0(x)\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad \forall p \in [1, +\infty].$$

Lors de l'élaboration de schémas numériques pour la recherche d'une approximation, on s'attachera à vérifier que ces propriétés sont encore satisfaites par la solution approchée.

Chapitre 5

Schémas aux D.F pour l'équation du transport

Dans ce chapitre, on va étudier quelques schémas aux différences finies, pour notre problème du transport en dimension 1. Dans le but de faire une comparaison entre ces schémas, du point de vue :consistences, stabilité, et convergence.

5.1 Problème continue :

Ce problème consiste à chercher :

$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifie

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{conditions initiales} \end{cases}$$

on suppose que le paramètre c (vitesse du vent) est positive .

Remarque 5.1.1. *Si le domaine est borné, en temps et espace, notre problème devient :*

$$(P_1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 & x \in [0, L], t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & C.I \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & C.L \end{cases}$$

5.2 Les schémas aux D.F

On va étudier les schémas suivant :

- Schéma centré
- Schéma de Lax-Friederichs
- Schéma explicite décentré
- Schéma implicite centré

5.3 Discrétisation

Une première méthode pour résoudre numériquement les problèmes d'évolution consiste à discrétiser le problème continu par différences finies.

Plaçons nous dans le cas mono-dimensionnel d'une barre de longueur L pour simplifier.

On choisit une discrétisation régulière de $[0, L] \in \mathbb{R}$ en intervalles Δx et une discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T] \in \mathbb{R}^+$ en pas de temps de longueur Δt .

Notons x_i le point $i\Delta x$ et t_n le temps $n\Delta t$.

Notons u_i^n la valeur de la solution approchée au point x_i et au temps t_n .

En vue de passage d'un problème exacte (continue) au problème approché (discret) on dispose plusieurs technique les différences les éléments finie et les volumes finie.

5.4 Schéma centré

On discrétise $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ en introduisant les points $x_i = i\Delta x$ pour $i \in \mathbb{Z}$ et les instants $t^n = n\Delta t$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On cherche alors une approximation $u_i^n \simeq u(x_i, t^n)$.

Le problème continue (P) s'écrit en utilisant le schéma centré sous la forme suivante :

$$(P_h) \begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 & \text{pour } i \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \\ u_i^0 = u_0(x_i) & \text{C.I} \end{cases}$$

C'est un schéma explicite qui calcule la valeur inconnue u_i^{n+1} à l'étape t^{n+1} en fonction des valeurs connue $\{u_i^n, u_{i+1}^n, u_{i-1}^n\}$ à l'étape t^n

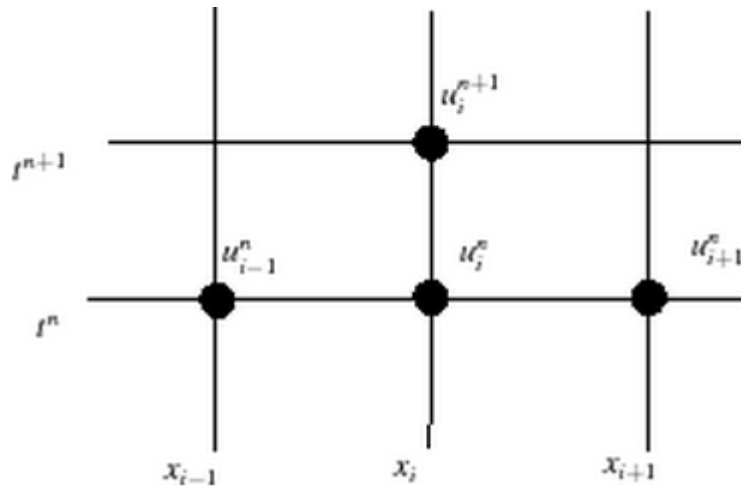


FIGURE 5.1 – Schéma explicite centré pour l'équation de transport

5.4.1 L'ordre du schéma :

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t) \\ \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2)\end{aligned}$$

Ce schéma est d'ordre 1 en temps et deux en espace

5.4.2 Stabilité

Ce schéma est toujours instable, et inutilisable malgré que ce schéma est le plus naturel.

Contre exemple

On pose :

$$u_i^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq 0 \\ a > 0 & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

Notre schéma est :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

pour $n = 0, i = 0$

on a :

$$u_0^1 = u_0^0 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_1^0 - u_{-1}^0)$$

$$u_0^1 = 0 - \frac{\Delta t}{2\Delta x} < 0$$

la positivité n'est pas gardée, alors le principe du maximum n'est pas respecté, donc le schéma centré est instable

5.5 Schéma de Lax-Friederichs

Le schéma de Lax-Friederichs est obtenu à partir d'un développement de Taylor au deuxième ordre :

$$u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n)$$

on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

devient :

$$u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n)$$

En utilisant les discrétisation usuelles (centrée) :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Le schéma (P) s'écrit sous la forme :

$$(P_h) \begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{c\Delta t}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \\ u_i^0 = u_0(x_i) \quad \text{C.I} \end{cases}$$

C'est un schéma explicite qui calcule la valeur inconnue u_i^{n+1} à l'étape t^{n+1} en fonction des

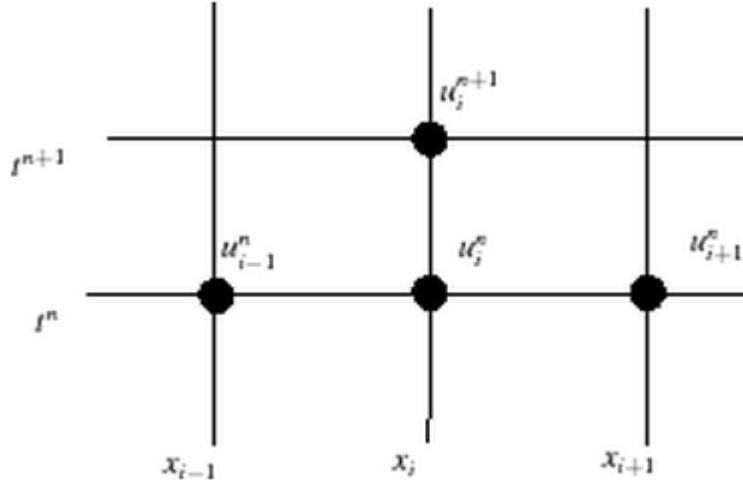


FIGURE 5.2 – Schéma de Lax-Friedrichs pour l'équation de transport

valeurs connues $\{u_i^n, u_{i+1}^n, u_{i-1}^n, u_i^{n+1}\}$ à l'étape t^n

5.5.1 Consistance

La solution étant régulière, on a :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t)$$

$$\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2)$$

et :

$$u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n = \Delta x^2 \times \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^4)$$

L'erreur de consistance du schéma est donc :

$$O(\Delta t + \Delta x^2) + \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} + O\frac{\Delta x^4}{\Delta t}$$

La condition nécessaire et suffisante de consistance est que Δt soit choisi de telle sorte que :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} = 0$$

5.5.2 Stabilité

Le schéma de Lax-Friederichs est stable (donc convergent) sous la condition de C.F.L :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Le schéma de Lax-Friederichs est en fait est une amélioration du schéma centré instable, mais sa condition de convergence repose sur le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ c'est à dire :
il faut le farder fixe .

C'est l'inconvénient de cet schéma car si Δt tend vers 0 plus vite que $(\Delta x)^2$ alors le schéma n'est pas consistant, et par la suite n'est pas convergent.

5.6 Schéma explicite décentré

Le problème continu (P) s'écrit en utilisant le schéma décentré sous la forme suivante :

$$(P_h) \begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, & c > 0 \\ u_i^0 = u_0(x_i) & \text{C.I} \end{cases}$$

C'est un schéma explicite qui donne la valeur inconnue u_i^{n+1} à l'étape t^{n+1} en fonction des valeurs connues $\{u_i^n, u_{i-1}^n\}$ à l'étape t^n , on note que la valeur aval u_{i+1}^n n'intervient pas dans ce cas pour le calcul de u_i^{n+1} .

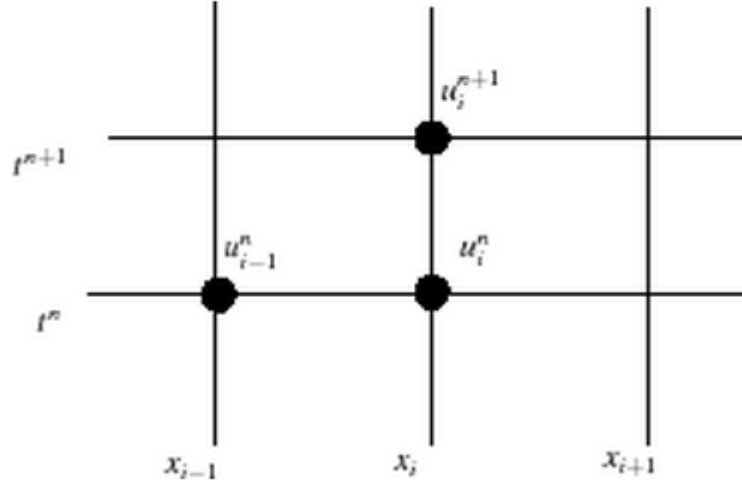


FIGURE 5.3 – Schéma décentré pour l'équation de transport

Remarque 5.6.1. *Pour le cas où $(c < 0)$, on prend :*

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0$$

5.6.1 consistance

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t)$$

$$\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x)$$

Donc :

$$|R_i^n(h)| = \left| \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \right| \leq O(\Delta t + \Delta x)$$

l'erreur de consistance est d'ordre 1 en temps et en espace : $O(\Delta t + \Delta x)$.

5.6.2 Stabilité

$$u_i^{n+1} = \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_{i-1}^n - u_i^n) + u_i^n$$

$$= \frac{c\Delta t}{\Delta x}u_{i-1}^n + \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)u_i^n$$

pour que u_i^{n+1} soit une combinaison convexe de u_{i+1}^n, u_i^n , il faut que :

$$1) \quad \frac{c\Delta t}{\Delta x} + 1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} = 1$$

$$2) \quad 0 \leq \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

(1) est vérifiée

alors :

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

$$c\Delta t \leq \Delta x \quad (C.F.L)$$

le schéma est stable en norme L^∞ sous la condition C.F.L. $c\Delta t \leq \Delta x$

5.6.3 Convergence

Proposition 5.6.1. [2]

On suppose que $u_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que u_0, u_0', u_0'' sont bornées.

Soit

$$A = \inf_{x \in \mathbb{R}} u_0(x) \quad \text{et} \quad B = \sup_{x \in \mathbb{R}} u_0(x)$$

alors :

$$1. A \leq u_i^n \leq B, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Soit $\tilde{u}_i^n = u(x_i, t_n)$, où u est la solution exacte de (P), alors:

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}, n\Delta t \leq n\Delta t} |u_i^n - \tilde{u}_i^n| \leq n\Delta t C_{u_0}(\Delta t + \Delta x),$$

où $n\Delta t C_{u_0} \geq 0$ ne dépend que de u_0 .

5.6.4 démonstration :

le point 1 se démontre par récurrence sur n à partir de la propriété précédente. Le point 2 (estimation d'erreur) se démontre en remarquant d'abord que l'erreur de consistance

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - \tilde{u}_i^n}{\Delta t} + c \frac{\tilde{u}_i^n - \tilde{u}_{i-1}^n}{\Delta x} = R_i^n \quad (5.1)$$

vérifie :

$$|R_i^n| \leq C_{u_0}(\tilde{\Delta}x + \Delta t)$$

$$\text{où } \tilde{\Delta}x = \max_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x.$$

On a donc :

$$\tilde{u}_i^{n+1} = \tilde{u}_i^n \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \tilde{u}_{i-1}^n + \Delta t R_i^n,$$

or le schéma numérique s'écrit :

$$u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) + \frac{c\Delta t}{\Delta x} u_{i-1}^n$$

Par différence, on obtient :

$$u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1} = (u_i^n - \tilde{u}_i^n) \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) + (u_{i-1}^n - \tilde{u}_{i-1}^n) \frac{c\Delta t}{\Delta x} - \Delta t R_i^n$$

et donc :

$$|u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}| \leq |u_i^n - \tilde{u}_i^n| \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) + |u_{i-1}^n - \tilde{u}_{i-1}^n| \frac{c\Delta t}{\Delta x} - \Delta t C_{u_0}(\tilde{\Delta}x + \Delta t) \quad (5.2)$$

On effectue alors l'hypothèse de récurrence :

$$\sup |u_i^n - \tilde{u}_i^n| \leq (n-1)\Delta t C_{u_0}(\Delta t + \tilde{\Delta}x) \quad (5.3)$$

grâce à (4.2) et (4.3), on obtient :

$$|u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}| \leq (n-1)\Delta t C_{u_0}(\Delta t + \tilde{\Delta}x) + \Delta t (C_{u_0}(\Delta t + \tilde{\Delta}x)).$$

Donc finalement :

$$|u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}| \leq n\Delta t C_{u_0}(\Delta t + \tilde{\Delta}x)$$

Remarque 4.2.2.(Décentrement) Pour une équation de transport telle que (P), le choix du décentrement est crucial. Ici, on a approché $u_x(x_i)$ par $c \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$.

Dans le cas où on étudie une équation de transport de type, $u_t + cu_x = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$, le choix décentré amont sera toujours

$$c \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \quad \text{si} \quad c > 0,$$

par contre, si $c < 0$ le choix amont donnera

$$c \frac{u_i - u_{i+1}}{\Delta x}$$

Regardons ce qui se passe si l'on effectue un "mauvais" décentrement. Considérons toujours l'équation $u_t + cu_x = 0$.

Effectuer le "mauvais décentrement" amène au schéma :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{n+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0,$$

c'est à dire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) - \frac{c\Delta t}{\Delta x} u_{i+1}^n.$$

Examinons le comportement de la solution approchée donnée par le schéma si on prend une condition initiale u_0 telle que $u_0(x) = 0, \forall x \geq 0$. Dans ce cas, on sait que $u(x, t) \neq 0$ pour t assez grand, or après calculs on obtient

$$u_{-1}^{n+1} = u_{-1}^n \left(1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) + 0 = u_{-1}^0 \left(1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) + 0 = u_{-1}^0 \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^n,$$

alors que $u_i^{n+1} = 0 \quad \forall i \geq 0$.

On en déduit que la solution approchée est très mauvaise.

5.7 Schéma implicite centré

Le problème continu (P) s'écrit en utilisant le schéma implicite centre sous la forme suivante :

$$(P_h) \begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \text{ pour } i = [0, l] \quad \text{et} \quad n = [0, t] \\ u_i^0 = u_0(x_i) \quad \text{C.I} \end{cases} \quad (5.4)$$

C'est un schéma implicite qui couple les valeurs inconnues $\{u_i^{n+1}, u_{i-1}^{n+1}, u_{i+1}^{n+1}\}$ à l'étape t^{n+1} à la valeur connue u_i^n à l'étape t^n .

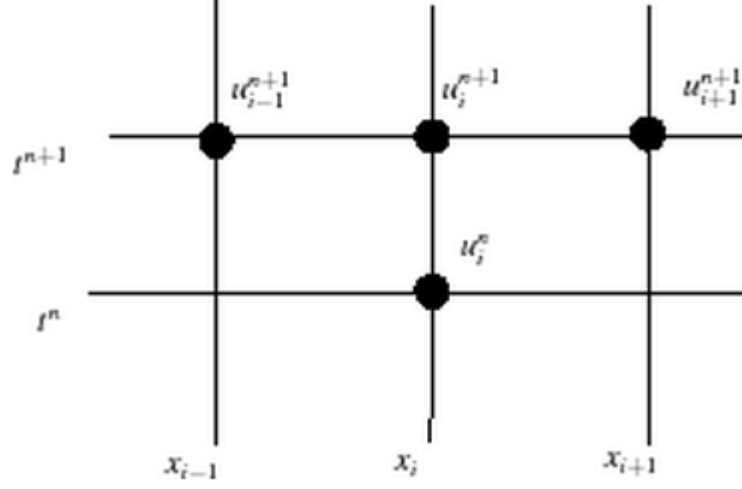


FIGURE 5.4 – Schéma implicite centre pour l'équation de transport

5.7.1 L'erreur de consistance

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t) \\ \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2)\end{aligned}$$

Ce schéma est d'ordre 1 en temps et deux en espace .

5.7.2 Stabilité :

On a :

$$\begin{aligned}u_i^{n+1} &= c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) + u_i^n \\ \left(-c \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{i+1}^{n+1} + u_i^{n+1} - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{i-1}^{n+1} \right) &= u_i^n \\ \left(-c \frac{\Delta t}{2\Delta x}, 1, -c \frac{\Delta t}{2\Delta x} \right) u^{n+1} &= u_i^n\end{aligned}$$

On obtient l'écriture matricielle :

$$u^{n+1} = \left(I - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} A \right)^{-1} u^n \quad (5.5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c \frac{\Delta t}{2\Delta x} & & 0 \\ -c \frac{\Delta t}{2\Delta x} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & -c \frac{\Delta t}{2\Delta x} & 1 \end{pmatrix}$$

où A matrice tridiagonale .

$$A(-1, \frac{\Delta x}{c\Delta t}, -1)$$

les valeur propres de A sont :

$$\lambda_k = -4 \frac{\Delta x}{c\Delta t} \sin^2 \frac{k\pi}{2M} \quad K = 1, \dots, M-1$$

Notre matrice d'itération est :

$$C = (I - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} A)^{-1}$$

ses valeur propres sont égales à :

$$\mu_k = 1 - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \lambda_k = 1 + 2 \sin^2 \frac{k\pi}{2M}$$

Revénons à (4.5), en majorant la norme euclidien on obtient :

$$\|u^{n+1}\|_2 \leq \|I - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} A\|_2 \|u^n\|_2$$

comme A est une matrice symétrique,

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

donc :

$$\begin{aligned} \|I - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} A\| &= \rho(I - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} A), \\ &= \max |1 + 2 \sin^2 \frac{k\pi}{2M}| > 1, \end{aligned}$$

donc :

$$\rho(c) = \frac{1}{1 + 2 \sin^2 \frac{k\pi}{2M}} < 1,$$

cette condition est toujours vérifié donc, le schéma est inconditionnellement instable.

5.8 Etude comparative

Schéma	Erreur de consistance	Stabilité
Schéma centré $u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$	$O(\Delta t + (\Delta x)^2)$	instable L^∞
Schéma de Lax-Friederichs $u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$ $+ \frac{1}{2} \frac{c\Delta t^2}{\Delta x}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$	$O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$ $\frac{c\Delta t}{\Delta x}$ constant	stable L^∞ si condition C.F.L. $c\Delta t \leq \Delta x$
Schéma explicite décentré amont $c > 0$ $u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n)$	$O(\Delta t + \Delta x)$	stable L^∞ si condition C.F.L. $c\Delta t \leq \Delta x$
Schéma implicite centré $u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})$	$O(\Delta t + (\Delta x)^2)$	stable L^∞

5.8.1 Comparaison

En premier lieu, on va écarter le schéma centré car il toujours instable, donc inutilisable.

Pour le schéma de Lax-Frederich, malgré sa stabilité (condition C.F.L) et l'ordre de consistance élevé mais son inconvénient majeur est le terme $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ qui doit-être égal à une constante pour avoir la convergence.

Il nous reste les deux schémas classiques :

- explicite
- implicite

Le schéma explicite est stable sous la condition de (C.F.L), mais le schéma implicite est toujours stable, pour l'erreur de consistance ont le même ordre, mais au point de vue calcul le schéma explicite est beaucoup mieux car on trouve u_i^{n+1} directement, tant que pour le schéma implicite, il faut à chaque fois résoudre une système d'équation linéaire .

Finalement on peut conclure que le schéma explicite est le meilleur schéma parmi les quatre schémas étudiées du point de vue :

consistance, stabilité, convergence et simplicité du calcul.

Bibliographie

- [1] G. Allaire, S.M. Kaber, *Algèbre linéaire numérique. Cours et exercices*, Éditions Ellipses, Paris (2002).
- [2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*, Masson, Paris (1983).
- [3] P.G. Ciarlet *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.*, Masson (1982).
- [4] I.Danaila, Joly, S.M. Kaber, M. Postel *Introduction au calcul scientifique par la pratique*, Dunod, Paris (2005).
- [5] P. Laurent-Gengoux, *Analyse des équations aux dérivées partielles*. École Centrale Paris, 2007-2008.
- [6] B. Lucquin, *Equations aux dérivées partielles et leurs approximations*, Ellipse (2004).
- [7] B. Mohammadi, J-H.Saiac, *Pratique de la simulation numérique*, Dunod, Paris (2003).
- [8] Ch. Nicolas, *Différences finies et analyse numérique matricielle*. Master, France. 2010, pp.51.
- [9] J. Philibert et coll, *Métallurgie, du minerai au matériau*. Dunod, 2002.
- [10] M. Picasso et J. Rappaz , *Introduction a l'analyse numérique. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*, Lausanne, 1998.
- [11] H.Raphaële, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Engineering school. Marseille, (2011).
- [12] P.A. Raviart and J.M. Thomas , *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*.
- [13] J.F. Scheid, *Méthodes numériques pour la dynamique des fluides*. Université de Lorraine, 2011-2012.

- [14] S.S. Suthersan, *Remediation engineering : design concepts*.CRC Press, 1996.
- [15] E.G. Silva, *Méthodes et Analyse Numériques*. Engineering school, Institut Polytechnique de Grenoble , 2007, pp.99
- [16] M.Zitouni, *Elements D'algebre*.O.P.U 1993.

Résumé

Dans cette thèse, on va exposer l'équations du transport, avec la procédure de discrétisation par la méthode des différences finie, dans le but de sélectionner le meilleur schéma selon : la consistance, la stabilité et la convergence du schéma

mots clés: Advection, Differences finies, la consistance, la stabilité, la convergence

Abstract

In this thesis, we study a class of advection equation, applying finite difference méthode . In the goal to choose the best schema via: the consistance, the stability , the convergence.

keys words: Advection, Finite differences, the consistance, stability, convergence

ملخص

في هذه المذكرة سيتم عرض معادلة النقل وكيفية تطبيق طريقة الفروق المنتهية عليها بهدف التوصل الى افضل طريقة فروق اعتماد على الملاممة، الاستقرار والتقارب .
الكلمات المفتاحية : التآفق، الفروق المحدودة ، الملاممة، الاستقرار، التقارب .