

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique



UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR D'EL
OUED
FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES
Département D'informatique



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales et appliqué

PAR

Sujet

**Etude mathématique d'un problème
aux limites avec réponse amortie normale
et endommagement**

Présenté par : LACHRAF Selssabila GHENBAZI Mouna

Devant le jury:

Lourabi Hariz-Bakkar

MCA

Président

Ferhat Mohammed Said

MCB

Encadreur

Aissaoui Adel

MCA

Examineur

Promotion : 2021/2022



Dédicaces

Nous dédions le fruit de cet humble travail à :

Nos chers parents... pour tous leurs sacrifices, leur amour,
leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de nos
études.

Nos frères, nos sœurs, nos chères familles qui ont toujours
été notre soutien dans cette vie et qui le sont toujours.

Nos chers amis qui nous ont toujours encouragés et malgré
les distances, mais ils sont toujours près de nous.



Remerciements

Nous remercions **Dieu** tout-Puissant qui nous a permis
de terminer ce travail.

Nous adressons nos sincères remerciements et notre
grande appréciation au l'encadreur de mémoire
Ferhat Mohammed Said pour votre aimable
acceptation de la supervision de ce travail et
pour l'effort et les conseils, les orientations et
les conseils qu'il a fournis.

Nous remercions également sincèrement et apprécions
les membres du comité de discussion, que nous serons
honorés de discuter et d'évaluer pour ce travail.

À tous ceux qui ont contribué à l'achèvement de
ces travaux, de près ou de loin,
nous remercions et apprécions beaucoup.

Table des matières

Introduction	ii
Notations générales	v
1 Modélisation et Préliminaires	1
1.1 Cadre physique	1
1.2 Phénomènes mécaniques et thermiques	2
1.2.1 L'endommagement	2
1.2.2 Le frottement	3
1.2.3 L'usure	3
1.2.4 La conduction thermique	3
1.2.5 L'adhésion	4
1.3 Lois de comportement	5
1.3.1 Lois de comportement viscoélastique avec mémoire longue	6
1.3.2 Lois de comportement viscoélastique avec mémoire court	6
1.3.3 Lois de comportement thermo-élastique	6
1.3.4 Lois de comportement élasto-viscoplastique avec variable interne d'état	7
1.3.5 Lois de comportement thermo-élasto-viscoplastique avec endom- magement	7
1.3.6 Modèle mathématique	8
1.3.7 Conditions aux limites	9
1.4 Lois de contact	9
1.4.1 Contact sans frottement	9
1.4.2 Contact avec compliance normale	10

1.4.3	Les conditions de contact avec compliance normale et adhésion.	10
1.4.4	Condition dans le plan tangent	11
2	Outils Mathématique	13
2.1	Espaces fonctionnels	13
2.2	Rappels sur les espaces de Hilbert	16
2.3	Espaces de Sobolev	17
2.4	Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	18
2.4.1	I- Opérateur fortement monotone	18
2.5	Lemme de Gronwall	23
3	Problème quasistatic de contact avec frottement et réponse normale instantanée	25
3.1	Formulation du Problème	25
3.2	Formulation variationnelle	28
3.3	Preuve du théorème 3.2.1	35
	Conclusion générale	46
	Bibliographie	47

Introduction générale

Le contact entre les corps déformables est un phénomène très courante dans le industriel et dans la vie de tous les jours, le contact entre les plaquettes de frein avec roues, les pneus de roue et de route, les pistons avec jupes ou les processus complexes de formage des métaux ne sont que quelques exemples. Des progrès importants ont été réalisés récemment dans la modélisation mathématique et l'analyse des différents processus impliqués en contact entre des corps déformés. En raison de sa complexité inhérente, les phénomènes de communication conduisent à de nouveaux modèles mathématiques intéressants, c'est-à-dire un système d'équations différentielles partielles, associées aux conditions aux limites et aux conditions initiales, qui décrivent à la fin un processus de contact spécifique. Actuellement, une théorie mathématique générale de la mécanique de la contact (MTCM) apparaît. Il s'intéresse aux structures mathématiques qui sont à la base des problèmes de communication avec différentes lois constitutives, c'est-à-dire différents matériaux, différentes techniques et différentes conditions de communication ; Voir par exemple [30, 25].

La théorie mathématique émergente de la mécanique de la communication s'intéresse aux structures mathématiques qui sous-tendent les problèmes du contact généraux avec différentes lois constitutives, à savoir divers matériaux, l'ingénierie et différentes conditions du contact. où le problème du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsqu'elles subissent ces forces. outre les problèmes cités ci-dessus, il y a d'autres phénomènes réels et qui sont très importants tels que l'endommagement du matériau et l'adhésion des corps.

Le sujet de l'endommagement est extrêmement important dans les conceptions en ingénierie puisqu'il influence directement sur la vie usuelle de la structure ou la composante conçue. Il existe une littérature très riche sur ce sujet. Les modèles prenant

en considération l'influence de l'endommagement interne du matériau sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. L'analyse mathématique de problèmes unidimensionnels peut être trouvée dans [16]. Les premiers modèles de l'endommagement mécanique provenant des considérations thermodynamiques sont apparus dans [10]. Des modèles généraux récents dans [13, 14, 18, 23] sont issus du principe de la puissance virtuelle. Dans tous ces travaux, l'endommagement du matériau est décrit par une fonction α ayant des valeurs entre zéro et un. Lorsque $\alpha = 1$, il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, lorsque $\alpha = 0$, le matériau est complètement endommagé et lorsque $0 < \alpha < 1$, il a un d'endommagement partiel et le système a une capacité réduite. Certains problèmes en thermo-mécanique de contact avec endommagement ont été étudiés dans [2, 6, 7, 21, 22, 24, 31].

Un autre phénomène sera considéré dans cette mémoire, il s'agit du phénomène de contact avec l'effet thermique. Les processus de contact et de frottement s'accompagnent invariablement d'une production de la chaleur qui peut être considérable. A titre d'exemple, le freinage brusque d'une voiture peut entraîner la dissipation d'une puissance importante sous forme de chaleur. L'effet thermique dans les processus de contact affecte la composition et la rigidité des surfaces et provoque des contraintes thermiques dans les corps en contact. La façon dont la chaleur affecte les propriétés mécaniques d'une surface peut être partiellement prise en compte (en supposant que le coefficient de frottement dépend de la température, voir [26]). Les modèles mathématiques en thermodynamique ont besoin de quatre éléments : la condition de production de la chaleur, la condition décrivant l'échange de la chaleur entre le corps et la fondation, la relation constitutive et l'équation de l'énergie. Ces modèles ont été développés récemment dans [1, 12, 19, 20, 33].

La thermomécanique s'intéresse aux effets de la chaleur sur les contraintes et les déformations des corps mécaniques et vice versa, c'est l'extension de la mécanique isotherme, cette extension est due au fait que les contraintes et les déformations proviennent non seulement des forces mécaniques mais également des variations de température.

Dans ce mémoire, nous traitons d'un modèle de contact frottant entre un corps élastique viscoplastique et un obstacle réactif, la soi-disant fondation. Les phénomènes de contact par frottement entre corps déformables abondent dans l'industrie et la vie quotidienne. Un problème majeur lié à la modélisation des phénomènes de contact qui,

actuellement, est encore à l'étude, est le choix des conditions aux limites de contact. L'une des conditions aux limites les plus populaires, utilisée à la fois dans la littérature technique et mathématique, est la condition de conformité normale. Il a été utilisé dans un grand nombre d'articles, voir [8] et les références qu'il contient. Notons que ces conditions de contact, utilisées dans la plupart des travaux connexes sur le sujet, sont formulées en termes de champ de déplacement. Cependant, lorsque les surfaces de contact sont lubrifiées, les conditions normales de compliance exprimées en termes de vitesse normale semblent plus appropriées. Ce type de conditions, appelées conditions de réponse amorties normales, a été utilisé dans divers articles (voir, par exemple, [3, 9, 11, 29] et les références qu'il contient).

Le mémoire comporte deux chapitres et est structurés de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique de problème à étudier.

Dans le deuxième chapitre nous Nous mentionnons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

Dans le troisième chapitre, nous étudions d'un problème de contact avec frottement et réponse normale instantanée en thermo-elasto-visco-plastique avec mémoire longue et endommagement. Nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution en utilisant des techniques de point fixe et lemme de Gronwall.

Notations générales

\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels,
\mathbb{R}	L'ensemble des nombres réels,
c	Constante réelle strictement positive,
i.e	C'est à dire,
$\partial_i \psi$	La dérivée partielle de ψ par rapport à la i^{eme} composante x : $\partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$,
$\nabla \psi$	Gradient de l'application ψ : $\nabla \psi = (\partial_1 \psi, \dots, \partial_d \psi)$,
\mathbb{S}^d	L'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$,
$\text{Div} \psi$	Divergence de l'application, ψ : $\text{Div} \psi = (\partial_1 \psi + \dots + \partial_d \psi)$,
$(\cdot, \cdot)_X$	Le produit scalaire de X,
$\ \cdot \ _X$	La norme de X,
p.p.	Presque partout,
Ω	Ouvert de \mathbb{R}^d , parfois domaine L'hertzien,
$\bar{\Omega}$	L'adhérence de Ω ,
Γ	La frontière de Ω : $\Gamma = \partial \Omega$,
Γ_i	Les parties de frontière Γ , ($i = 1, 2, 3$),
$mes \Gamma_i$	Mesure de Lebesgue ($d - 1$) dimensionnelle de Γ_i ,
$d\Gamma_i$	Mesure superficielle sur Γ_i ,
ν	La normale unitaire sortante à Γ ,
v_ν, v_τ	Les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v défini sur $\bar{\Omega}$,
σ_ν, σ_τ	Les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel σ défini sur $\bar{\Omega}$,
$L^2(\Omega)$	Espace des fonctions u mesurables sur Ω telles que $\int_\Omega u ^2 dx < +\infty$,
$\ \cdot \ _{L^2(\Omega)}$	La norme de $L^2(\Omega)$ définie par $\ u \ _{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega u ^2 dx)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions u mesurables sur Ω telles que, $\exists c > 0 : u < c$, p.p., sur Ω ,
H	L'espace $L^2(\Omega)^d$,

H_1	L'espace $H^1(\Omega)^d$,
\mathcal{H}	L'espace $L^2(\Omega)_s^{d \times d}$,
\mathcal{H}_1	L'espace $\{\tau = (\tau_{ij}) \in \mathcal{H}; \operatorname{div} \tau \in H\}$,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	L'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ ,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	L'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$,
$H^1(\Omega)$	L'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω ,
H_Γ	L'espace $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^d$,
H'_Γ	L'espace dual de H_Γ .
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	L'application trace pour les fonctions vectorielles,
W	L'espace $\{\psi \in E_1 \mid \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}$,
\mathcal{W}	L'espace $\{\mathbf{D} = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega), D_{i,i} \in L^2(\Omega)\}$,
	Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par
$C(0, T; H)$	L'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
$C^1(0, T; H)$	L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$L^p(0, T; H)$	L'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H ,
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; H)}$	La norme de $L^p(0, T; H)$,
$W^{k,p}(0, T; H)$	L'espace de Sobolev de paramètres k et p ,
$\ \cdot\ _{W^{k,p}(0, T; H)}$	La norme de $W^{k,p}(0, T; H)$,
$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$	Les parties de Γ ,
$\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$	L'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2 ,
u	Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω , on écrit u_i les composantes du vecteur dans la base canonique,
σ	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u , on écrit σ_i les composantes du tenseur dans la base canonique,
σ_ν	Normale des contraintes à la frontière du domaine : $\sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu$,
σ_τ	Le composante tangentielle du champ tensoriel σ ,
φ	Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω ,
β	Valeur d'adhésions sur la surface de contact Γ_3 ,
\mathbf{D}	Valeurs des déplacements électriques dans le domaine Ω ,
$\varepsilon(u)$	Tenseur linéarisé des déformations : $\varepsilon(u)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$.

Chapitre 1

Modélisation et Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons dans un premier temps le cadre physique des problèmes de contact ainsi qu'un bref rappel sur la mécanique des milieux continus et le comportement des solides déformables (lois thermo-électro-viscoélastique, électro-élasto-viscoélastique). Puis, nous présentons les différentes conditions aux limites de contact avec adhésion, et frottement qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

1.1 Cadre physique

Nous allons introduire dans ce paragraphe le modèle générale de problème de contact étudiés dans ce mémoire.

Le **cadre physique** est le suivant. Nous envisageons un corps matériel déformable qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec une frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$, partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a et Γ_b , correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que $mes(\Gamma_1) > 0$, $mes(\Gamma_a) > 0$. Nous étudions dans l'intervalle de temps $[0, T]$ l'évolution du corps sous l'application de forces de volume et de tractions de surface.

Nous notons par $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champs des déplacements, $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ le champ des contraintes, $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ le potentiel électrique, $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champ des déplacements électriques.

Le corps Ω est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et agissent des forces volumiques de densité f_0 et des charges

électriques de densité volumiques q_0 .

Nous supposons que f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au temps. Les corps sont soumis à l'action de potentiel nul sur la partie Γ_a de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2 , agissent sur la partie Γ_b .

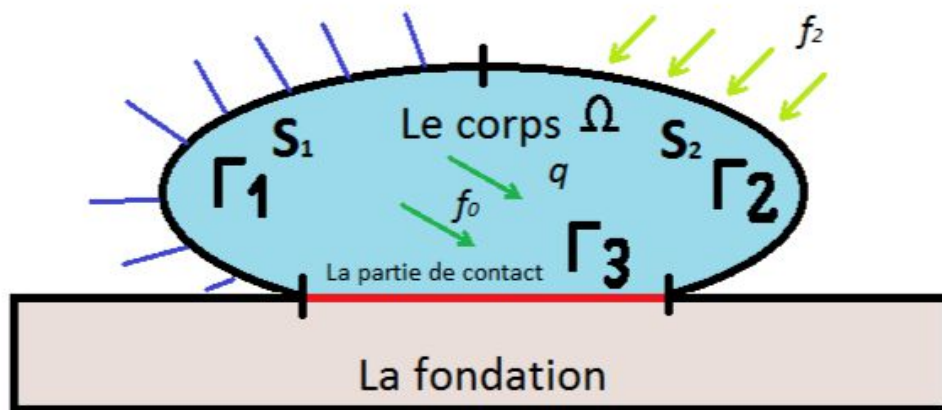


Fig.1 : contact entre un corps mécanique et un fondation .

Les hypothèses physiques introduites pour la piézoélectricité consistent à négliger les effets magnétiques et à considérer l'interaction électro-mécanique uniquement. Cette hypothèse est raisonnable pour les matériaux mécaniques utilisés habituellement comme les céramiques, les polymères .

Il s'agit d'un problème quasistatique modélisant l'évolution un corps déformable thermo-mécanique, soumis à l'action des force extérieures . Le comportement du matériau est décrit à l'aide d'une équation constitutive thermo-viscoélastique avec endommagement . Le contact est avec frottement normale et adhésion réponse normale instantanéé .

1.2 Phénomènes mécaniques et thermiques

1.2.1 L'endommagement

L'endommagement est un phénomène très important en mécanique car il affecte directement la structure des machines. La fonction d'endommagement varie entre 0 et 1. Quand $\alpha = 1$ le matériau est complètement endommagé. Quand $\alpha = 0$ il n'y a pas d'endommagement dans le matériau. Quand $0 < \alpha < 1$, l'endommagement est partiel.

L'évolution du champ d'endommagement élastique est décrite par :

$$\dot{\alpha} - \kappa \Delta \alpha + \partial \psi_K(\alpha) \ni \Psi(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha), \quad (1.1)$$

où κ est une constante positive, Ψ est la fonction source de l'endommagement, $\partial \psi_K$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice ψ_K et K est l'ensemble des endommagements admissibles défini par

$$K = \{\alpha \in H^1(\Omega); 0 \leq \alpha \leq 1, \text{ p.p. dans } \Omega\}. \quad (1.2)$$

1.2.2 Le frottement

Le frottement est causé par les irrégularités d'une surface. Bien qu'une surface puisse paraître lisse à l'oeil nu, des petites aspérités (des irrégularités) sont présentes sur la surface d'un objet lorsqu'on le regarde au microscope. Il faut également considérer la force normale. Cette force est en lien direct avec la force gravitationnelle, puisqu'elle est généralement en action-réaction. Plus la force normale est grande, plus la force de frottement sera grande.

1.2.3 L'usure

L'usure est un problème majeur pour les matériaux. Lorsque deux corps entrent en contact avec frottement et glissement, les surfaces en contact s'en retrouvent usées, la surface la plus rigide use l'autre, les particules ainsi perdues des surfaces en contact forment alors une fine couche entre les deux corps.

L'évolution de la fonction d'usure est décrite dans la littérature par la loi d'Archard suivant :

$$\dot{\omega} = -\lambda_0 \sigma_\nu \|\mathbf{v}^*\|, \quad (1.3)$$

où λ_0 est un coefficient d'usure, et \mathbf{v}^* représente la vitesse relatives des surfaces en contact, pour plus de détails voir par exemple [33, 34, 35].

1.2.4 La conduction thermique

La conduction thermique est un mode de transfert de température ou de chaleur entre deux milieux en contact.

La température θ est défini par une équation parabolique, qui représente la conservation de l'énergie comme suit

$$\dot{\theta} - \kappa_0 \Delta \theta = \Theta(\varepsilon(\mathbf{u}), \theta) + \chi, \quad (1.4)$$

où Θ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures. Ici et ci-dessous κ_0 est une constante strictement positive et χ une donnée, qui représente la source de chaleur du volume.

1.2.5 L'adhésion

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{\beta} = \mathbf{H}_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_\nu([u_\nu]), \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.5)$$

\mathbf{H}_{ad} est une fonction générale qui s'annule quand le premier de ses variables s'annule. Un exemple d'une telle fonction, utilisée dans [?].

On considère la possibilité d'une diminution de l'efficacité de collage quand les cycles de collage et de décollage continuent. Par conséquent, le processus est supposé dépendre de l'histoire d'adhésion qu'on note par :

$$\xi_\beta(x, t) = \int_0^t \beta(x, s) ds \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.6)$$

On donne quelques exemples de ce genre de fonctions

$$\mathbf{H}_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_1, R_2) = -\beta_+ \gamma_n R_1^2,$$

où γ_n est le coefficient de vitesse normale et $\beta_+ = \max(0, \beta)$. Nous notons que dans ce cas, seule la déconnexion est autorisée. Une équation de taux différente pour l'évolution du champ de collage est

$$\mathbf{H}_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_1, R_2) = -(\beta(\gamma_n R_1^2 - \gamma_t |R_2|^2 + \gamma_t) - \varepsilon_a)_+,$$

ici, γ_t est le coefficient de vitesse tangentielle, qui peut également être interprété comme le coefficient de rigidité tangentielle de l'interface lorsque l'adhérence est terminée ($\beta = 1$).

Un autre exemple, dans lequel \mathbf{H}_{ad} dépend de ses trois variables, est

$$\mathbf{H}_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_1, R_2) = -\gamma_n \beta_+ R_1^2 - \gamma_t \beta_+ |R_2|^2 + \gamma_r \frac{\beta_+(1-\beta)}{1+\xi_\beta^2},$$

où γ_r est le coefficient tangentielle de collage. Cependant, la liaison ne peut pas dépasser $\beta = 1$ et, de plus, la ré-association devient plus faible au fur et à mesure du processus, ce qui est représenté par le facteur $1+\xi_\beta^2$ dans le dénominateur, et β_0 l'adhésion initiale, tel que :

$$0 \leq \beta_0 \leq 1, \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (1.7)$$

Sous les conditions (1.5)-(1.7), on a la remarque suivante :

Remarque 1.2.1. Nous remarquons que sous les trois conditions précédentes le champ d'adhésion vérifie la restriction $0 \leq \beta \leq 1$. En effet, puisque $\dot{\beta} \leq 0$ donc $\beta \leq \beta_0 \leq 1$. En outre, si $\beta = 0$ quand $t = t_0$, donc $\dot{\beta} = 0$ pour tout $t \geq t_0$, et d'où $\beta = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Alors, nous concluons que $0 \leq \beta \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. $x \in \Gamma_3$.

1.3 Lois de comportement

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une lois de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement mécanique, par lois de comportement (ou lois constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ , le tenseur des déformations infinitésimales ε et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$.

Nous présentons par la suite les lois de comportement des matériaux : matériaux

thermo-viscoélastique, matériaux thermo-élastique, matériaux thermo-viscoplastique, matériaux élasto-viscoplastique avec variable interne d'état .

1.3.1 Lois de comportement viscoélastique avec mémoire longue

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est reliés par la loi de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \int_0^t \mathcal{Q}(t-s, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)))ds \quad (1.8)$$

où $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ est l'opérateur d'élasticité non linéaire, , $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_{ij})$ est un tenseur de relaxation,

1.3.2 Lois de comportement viscoélastique avec mémoire court

La loi de comportement d'un matériau électro-viscoélastique avec mémoire court est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t))) + \mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) \quad (1.9)$$

où \mathbf{u} , $\boldsymbol{\sigma}$ représentent respectivement le champ de déplacement et le champ de contrainte où le point ci-dessus désigne la dérivée par rapport au variable de temps. . $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ désigne le tenseur de déformation linéarisé, \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des opérateurs non linéaires décrivant le purement visqueux et les propriétés élastiques du matériau, respectivement. .

1.3.3 Lois de comportement thermo-élastique

La loi de comportement d'un matériau thermo-élastique est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t))) - \mathcal{M}(\theta(t)) \quad (1.10)$$

où \mathcal{A} , \mathcal{M} représentent respectivement l'opérateur d'élasticité non linéaire et une cartographie de dilatation thermique non linéaire. De plus, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ désigne le tenseur de déformation linéarisé, θ représente la température.

La température θ est défini par une équation parabolique, qui représente la conservation de l'énergie comme suit

$$\dot{\theta} - \kappa_0 \Delta \theta = \Theta(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \theta, \alpha) + \chi, \quad (1.11)$$

où Θ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures. Ici et ci-dessous κ_0 est une constante strictement positive et χ une donnée, qui représente la source de chaleur du volume.

1.3.4 Lois de comportement élasto-viscoplastique avec variable interne d'état

La lois de comportement d'un matériau élasto-viscoplastique avec variable interne d'état est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds \quad (1.12)$$

$$\dot{\mathbf{k}}(t) = \phi(\boldsymbol{\sigma}(t) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \mathbf{k}(t)) \quad (1.13)$$

dans $\Omega \times (0, T)$,

1.3.5 Lois de comportement thermo-élasto-viscoplastique avec endommagement

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t))) + \mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))$$

$$+ \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s))), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \theta(s), \beta(s)) ds. \quad (1.14)$$

L'endommagement β est une variable internes d'état définie dans $\Omega \times [0, T]$, avec $0 \leq \beta \leq 1$: L'évolution du champ d'endommagement utilisée au troisième chapitre est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation :

$$\dot{\beta} - \kappa \Delta \beta + \partial \phi_K(\beta) \ni \phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \theta, \beta), \quad (1.15)$$

où κ est une constante positive, ϕ est la fonction source de l'endommagement, $\partial\phi_K$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice ϕ_K et K est l'ensemble des endommagements admissibles défini par

$$K = \{\beta \in H^1(\Omega); 0 \leq \beta \leq 1, \text{ p.p. dans } \Omega\}. \quad (1.16)$$

1.3.6 Modèle mathématique

Notons que le point au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

où \dot{u} désigne le champ des vitesses et \ddot{u} désigne le champ des accélérations.

Les fonctions inconnues du problème sont les champs des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, $\ell = 1, 2$. Notons la densité de la masse par $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ et la densité des forces volumiques par $f_0 : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps est décrite par l'équation du mouvement de Cauchy :

$$\text{Div}\boldsymbol{\sigma} + f_0 = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (1.17)$$

Les processus d'évolution modélés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier : par exemple dans le cas où $\dot{\mathbf{u}} = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesse $\dot{\mathbf{u}}$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho\ddot{\mathbf{u}}$ peut être négligé (processus quasi statiques). Dans ces deux cas l'équation du mouvement devient :

$$\text{Div}\boldsymbol{\sigma} + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (1.18)$$

L'équation équivaut à de relations scalaires, et mathématiquement cette équation ne suffit par à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple les composantes \mathbf{u}_i du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation.

A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir les potentiels électriques $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacement électrique :

$$\text{div}\mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (1.19)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\text{div}\mathbf{D} = \mathbf{D}_{i,i}$, et q_0 représente la densité des charges électriques volumiques sur Ω .

Nous passons maintenant les conditions aux limites utilisées dans le chapitre 2 et 3.

1.3.7 Conditions aux limites

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ .

La condition aux limites de déplacement

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1 \times [0, T]$, le champ des déplacements \mathbf{u} est par conséquent nul :

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T]. \quad (1.20)$$

La condition aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité f_2 agit sur $\Gamma_2 \times [0, T]$ et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}$ satisfait :

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T]. \quad (1.21)$$

Condition de contact bilatéral

On note u_ν le déplacement normal et \mathbf{u}_τ le déplacement tangent

Le contact se fait d'une façon bilatérale, c'est à dire le contact est maintenu pendant le mouvement et il n'y a pas de séparation entre les deux corps.

La composante normale du champ des déplacements s'annule sur la surface de contact et donc

$$u_\nu = 0$$

1.4 Lois de contact

1.4.1 Contact sans frottement

Dans un contact parfait, où sans frottement, l'action mécanique transmissible par obstacle entre deux solides ne peut être en tout point que normale au contact (perpen-

diculaire au plan tangent commun du contact). Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0,$$

qui signifie que la contrainte tangentielle est nulle. Si ce n'est pas le cas, on dit que le mouvement tangentielle se produit avec frottement ce qui nous oblige à introduire une lois de frottement qui prend en considération la composante tangentielle avec les autres variables du système.

1.4.2 Contact avec compliance normale

Dans ce cas, les corps est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν satisfait la condition dite de compliance normale

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) \quad (1.22)$$

où u_ν est le déplacement normal, g représente l'interstice entre les corps et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale. Cette condition indique que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$. Comme exemple de la fonction p_ν nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \quad (1.23)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases} \quad (1.24)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.22) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

1.4.3 Les conditions de contact avec compliance normale et adhésion.

On va décrire la condition de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, on introduit une variable interne d'état définie sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, qui représente

l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, et quand $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plus détails sur ce section, on renvoie par exemple [15].

On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion :

$$\sigma_\nu = -p_\nu(u_\nu) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.25)$$

où σ_ν est le déplacement normal, γ_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par :

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Ici $L > 0$ est longueur caractéristique des liens. La condition (1.25) indique que chaque corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u]$, où le deuxième terme de l'égalité est la contribution de l'adhésion à la tension de surface.

Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.25) a été déjà utilisée dans [17, 32].

Quand le champ d'adhésion β est nul, (1.25) devient :

$$\sigma_\nu = -p_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.27)$$

qui représente la condition de compliance normale.

1.4.4 Condition dans le plan tangent

Aux points de Γ_3 , la rigidité tangentielle générée par la colle est supposée dépendre de l'adhésion et du déplacement tangentiel,

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta) \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.28)$$

où \mathbf{R}_τ est un opérateur de troncature défini par la relation

$$\mathbf{R}_\tau(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } \|\mathbf{v}\| \leq L, \\ L \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} & \text{si } \|\mathbf{v}\| > L. \end{cases} \quad (1.29)$$

Alors, $p_\tau(\beta)$ agit comme une constante de ressort, qui croit avec β ; la traction est en direction opposé au déplacement. Le module maximum de la traction tangentielle dans (1.28) est $p_\tau(1)L > 0$. La traction de frottement tangentielle est supposée être beaucoup plus petite que l'adhésion et est donc omise. Quand elle n'est pas négligeable on doit ajouter la traction de frottement comme cela a été fait en [27].

Chapitre 2

Outils Mathématique

Dans ce chapitre nous faisons quelques rappels d'analyse comme, par exemple, un survol des propriétés fondamentales des espaces de Banach, de Hilbert ainsi que les espaces de type Sobolev. En outre, nous introduisons certains espaces fonctionnels pour la mécanique dont nous avons besoin dans l'étude des problèmes de contact que nous abordons dans le reste du manuscrit. et nous présentons un bref rappel portant sur les opérateurs fortement monotones. nous en donnons quelques exemples et nous rappelons un résultat d'existence et d'unicité pour les égalités et les inégalités variationnelles avec type d'opérateur.

2.1 Espaces fonctionnels

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques \mathbf{u} et $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} H = \left\{ \mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega) \right\} = (L^2(\Omega))^d, \\ \mathcal{H} = \left\{ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \right\} = (L^2_s(\Omega))^{d \times d}, \\ H_1 = \left\{ \mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega) \right\} = (H^1(\Omega))^d, \\ \mathcal{H}_1 = \left\{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \mid \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \in H \right\}. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Les espaces H, \mathcal{H}, H_1 et \mathcal{H}_1 sont des espaces réels de Hilbert munis des produits

scalaires suivants :

$$\begin{cases} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx, \\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_1} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H + (\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}_1} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}, \text{Div} \boldsymbol{\tau})_H, \end{cases} \quad (2.2)$$

respectivement, où $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ et $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div} \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces H, \mathcal{H}, H_1 et \mathcal{H}_1 sont notées par $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$, respectivement.

Puisque la frontière Γ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur $\boldsymbol{\nu}$ à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v} \in H_1$ nous utilisons la notation $\boldsymbol{\nu}$ pour désigner la trace $\gamma \mathbf{v}$ de \mathbf{v} sur Γ . Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective.

Désignons par H'_Γ le dual de H_Γ , et (\cdot, \cdot) le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ . Pour tout $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément $\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \in H'_\Gamma$ tel que :

$$(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}, \gamma \mathbf{v}) = (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H \quad \forall \mathbf{v} \in H_1. \quad (2.3)$$

En outre, si $\boldsymbol{\sigma}$ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}, \gamma \mathbf{v}) = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in H_1. \quad (2.4)$$

Donc, pour $\boldsymbol{\sigma}$ assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in H_1, \quad (2.5)$$

où da est un élément de mesure de surface.

De même, pour un champ tenseur $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow S_d$ on note $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ et $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ ses composantes normale et tangentielle sur \mathcal{H}_1 , et quand $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction régulière (disons C^1) alors

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu = (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\sigma}_\nu \boldsymbol{\nu}. \quad (2.6)$$

Maintenant, nous définissons les formules de green suivants :

$$(\Delta\theta(t), \xi)_{L^2(\Omega)} + (\nabla\theta(t) \cdot \nabla\xi)_{L^2(\Omega)} = \kappa_0 \int_{\Gamma} \frac{\partial\theta(t)}{\partial\nu} \delta dx, \quad \forall \xi \in V, \quad (2.7)$$

$$(\Delta\alpha(t), \xi)_{L^2(\Omega)} + (\nabla\alpha(t) \cdot \nabla\xi)_{L^2(\Omega)} = \kappa \int_{\Gamma} \frac{\partial\alpha(t)}{\partial\nu} \xi dx, \quad \forall \xi \in V, \quad (2.8)$$

Soit donc V le sous-espace fermé de H_1 défini par

$$V = \{\mathbf{v} \in H_1 \mid \mathbf{v} = 0 \text{ ; sur } \Gamma_1\}.$$

Puisque $meas(\Gamma_1) \geq 0$ et Γ est Lipschitz, l'inégalité de Korn suppose qu'il existe une constante positive C_k qui ne dépend que de Ω et Γ_1 tel que

$$|\varepsilon(\mathbf{v})|_{\mathcal{H}} \geq C_k |\mathbf{v}|_{H_1}, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.9)$$

La preuve de cette inégalité se trouve dans [25, p. 79].

On considère sur V le produit scalaire et la norme associée donnée par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad (2.10)$$

$$|\mathbf{v}|_V = |\varepsilon(\mathbf{v})|_{\mathcal{H}}, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.11)$$

Il découle de (2.9) et (2.10) que $|\cdot|_{H_1}$ et $|\cdot|_V$ sont des normes équivalentes sur V et donc $(V, |\cdot|_V)$ est un espace de Hilbert réel.

Nous notons que l'hypothèse que Γ est continue de Lipschitz est suffisante pour notre propos. Tout d'abord, il s'assure que la normale extérieure $\boldsymbol{\nu}$ est définie a.e. sur Γ , puis les composantes normale et tangentielle de diverses fonctions ont un sens. Deuxièmement, il suffit que l'inégalité de Korn (2.9) soit vraie. De plus, par le théorème de trace de Sobolev et (2.9), on a une constante positive $C_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω , Γ_1 , et Γ_3 tel que

$$|\mathbf{v}|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 |\mathbf{v}|_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.12)$$

Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel, nous utilisons la classique notation pour les espaces $L^p(0, T; X)$, $W^{k,p}(0, T; X)$, où $1 \leq p \leq \infty$, $k \geq 1$.

Nous notons par $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ avec valeur sur X , respectivement, avec les normes :

$$\|f\|_{C(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X,$$

$$\|f\|_{C^1(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|\dot{f}(t)\|_X.$$

Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $[0, T]$ à valeurs dans X .

Définition 2.1.1. Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

2.2 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\|u\|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \quad (2.13)$$

et on rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (2.14)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme défini par (2.13). Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}}{\|v\|_H},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

Théorème 2.2.1. (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) : Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

De plus

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H.$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

2.3 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque là.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega) \ i = 1, \dots, d \right\}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée :

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \text{ et on écrit } \| u \|_{H^1(\Omega)}^2 = \| u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Remarque 2.3.1.

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 2.3.2. (trace de Sobolev)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 2.3.3. L'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représente l'espace de fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle $d\Gamma$. L'application δ s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 2.3.4. On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compacte.

Définition 2.3.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_\alpha \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_\alpha = D^\alpha u \right\}.$$

Remarque 2.3.5. Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 2.3.6. Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\| \cdot \|$, sont des espaces de Banach. De plus, les espaces $H^k(\Omega)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le [?].

2.4 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques.

2.4.1 I- Opérateur fortement monotone

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs frottements monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert X munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associé $\| \cdot \|_X$.

Définition 2.4.1. Soient $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire, l'opérateur A est dit :

1. monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0, \forall u, v \in X,$$

2. fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2, \forall u, v \in X,$$

3. Lipschitz s'il existe $L > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq L \|u - v\|_X, \forall u, v \in X,$$

4. hémicontinu si

$$\forall u, v \in X, \text{ l'application } t \rightarrow A(u + tv) : \mathbb{R} \rightarrow X' \text{ est continue.}$$

Théorème 2.4.1. (Théorème de point fixe de Banach)

Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in]0, 1[$ telle que

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq c \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e, possède un point fixe unique dans K .

Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}) \quad m \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe.

Théorème 2.4.2. Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda^m : K \rightarrow K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .

Définition 2.4.2. Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 2.4.3. Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que :

$$a(u, u) \geq m \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

II- Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que X est un espace de Hilbert et K un sous ensemble de l'espace X .

Définition 2.4.4. On appelle fonction indicatrice de K , la fonction Ψ_K définie par

$$\Psi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K. \end{cases}$$

Définition 2.4.5. Soit une fonction $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ et u un élément de l'espace X tel que $j(u) \neq \pm\infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u , noté $\partial j(u)$ est l'ensemble défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + (u', v - u), \forall v \in K\}. \quad (2.15)$$

Le crochet (\cdot, \cdot) désignant la dualité entre X' et X .

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de la fonction j en u . La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X .

Nous pouvons caractériser le sous-différentiel $\partial \Psi_K$ d'une fonction indicatrice Ψ_K d'un ensemble convexe non vide.

$$\partial \Psi_K = \{u' \in X' \mid (u', v - u) \leq 0, \forall v \in K\}. \quad (2.16)$$

III- Inéquations quasi-variationnelles elliptiques d'évolution

La modélisation de plusieurs classes de problèmes physiques conduit aux inégalités variationnelles elliptiques ou d'évolution, dans lesquelles la fonctionnelle non différentiable dépend de la solution elle même. Ce dernières sont appelées. Nous donnons par la suite un résultat d'existence et d'unicité pour ce type de problèmes.

Pour cela, nous considérons un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et de la norme associée $\|\cdot\|_H$ et soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire, $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et $f \in X$. Compte tenu de ces données, nous considérons l'inégalité quasivariationnelle suivante.

$$u \in X, \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X. \quad (2.17)$$

Pour résoudre cette inéquation, nous supposons que $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_A > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|Au_1 - Au_2\|_X \leq L_A \|u_1 - u_2\|_X, \quad \forall u_1, u_2 \in X, \\ (b) \text{ Il existe } m_A > 0 \text{ tel que} \\ \quad (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m_A \|u_1 - u_2\|_X^2, \quad \forall u_1, u_2 \in X. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

et la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Pour tout } j(u, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i. sur } X \\ (b) \text{ Il existe } m_j > 0 \text{ tel que} \\ \quad j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \\ \quad \leq m_j \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in X \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Aussi, nous supposons que

$$f \in X \quad (2.20)$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème (2.17) est donnée par le résultat suivant.

Théorème 2.4.3. Supposons que les hypothèses (2.18) et (2.19) et (2.20) sont satisfaites, et si $m_j < m_A$. Alors :

1. Il existe une unique solution $u \in X$ du problème (2.17).
2. Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (2.17) correspondant aux données $f_1, f_2 \in X$ alors il existe $c > 0$ tel que

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq c \|f_1 - f_2\|_X. \quad (2.21)$$

Ce résultat d'existence, d'unicité et de régularité a été prouvé dans [?] p.51.

IV- Équation différentielle ordinaire

Théorème 2.4.4. (Cauchy-Lipschitz) : Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$, qui satisfait les propriétés

suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \| F(t, x) - F(t, y) \|_X \leq L_F \| x - y \|_X \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ (b) \text{ Il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que} \\ F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

Définition 2.4.6. S'il est l'inclusion de $(V, \| \cdot \|_V)$ dans $(H, \| \cdot \|_H)$ est continue et V est dense dans H , le triplet

$$V \subset H \subset V'$$

s'appelle le triplet de Gelfand, où V' l'espace dual de V .

V- Équation aux dérivées partielles d'évolution

Théorème 2.4.5. Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur hemicontinu et monotone qui satisfait :

$$(Av, v)_{V' \times V} \geq w \|v\|_V^2 + \lambda, \quad \forall v \in V, \quad (2.22)$$

$$\|Av\|_{V'} \leq C_1(\|v\|_V + 1), \quad \forall v \in V. \quad (2.23)$$

Pour des constantes $w > 0$, $C_1 > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etant donnée $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$, alors il existe une fonction unique u satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \text{ p.p. } t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

VI- Inéquation variationnelle d'évolution

Théorème 2.4.6. Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand, K est un sous-ensemble fermé non vide et convexe de V , et soit $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur linéaire, symétrique et continue qui satisfait

$$\text{il existe } C_2 > 0 \text{ et } C_3 > 0 \quad (Av, v)_{V \times V'} + C_2 \|v\|_H^2 \geq C_3 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \quad (2.24)$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; V')$, il existe une unique fonction u qui satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C^2(0, T; H) \cap W^{1,2}(0, T; V'), \quad (2.25)$$

$$u(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.26)$$

$$(\dot{u}(t), v - u(t))_{V' \times V} + (Au(t), v - u(t))_{V' \times V} \geq (f(t), v - u(t))_{V' \times V} \quad v \in K, \text{ p.p.t } \in [0, T]. \quad (2.27)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.28)$$

Si $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; H)$, alors il existe une unique fonction u satisfaisant (2.26)–(2.28) et vérifie

$$u \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^2(0, T; V). \quad (2.29)$$

Les démonstrations de deux théorèmes 2.4.5–2.4.6 précédentes peuvent être trouvées par exemple dans [4, 5].

2.5 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 2.5.1. Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$.

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s) ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

pour le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 2.5.1. Soit $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s) ds\right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Le corollaire 2.5.1 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. En supposant qu'il existe deux solutions, en notant par ψ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ψ sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_0^t n(s)\psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ψ .

Lemme 2.5.1. Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0 \forall t \in [0, T]$, $a \geq 0$. Soit également $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que :

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t) dt + \int_0^s n(t)\phi^2(t) dt, \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t) dt\right) e^{\int_0^s n(t) dt}, \quad \forall s \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $n = 0$, le Lemme 2.5.1 devient :

Corollaire 2.5.2. Soit $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0 \forall t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$.

Soit également $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que :

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t) dt, \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq a + \int_0^s m(t) dt, \quad \forall s \in [0, T].$$

Chapitre 3

Problème quasistatic de contact avec frottement et réponse normale instantanée

3.1 Formulation du Problème

Dans cette section nous décrivons le modèle du processus, présentons sa formulation variationnelle. Le cadre physique est le suivant.

Un corps élastique-thermo-viscoplastique occupe un domaine Ω avec une surface régulière Γ , et soit $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ un partition de Γ en trois parties mesurables disjointes telles que $meas(\Gamma_1) > 0$. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps considéré. On suppose que le corps est fixé sur $\Gamma_1 \times (0, T)$ et donc le champ de déplacement s'y annule. Les tractions de surface de densité f_2 agissent sur $\Gamma_2 \times (0, T)$ et une force volumique de densité f_0 agit sur $\Omega \times (0, T)$. On admet une éventuelle source de chaleur externe appliquée dans $\Omega \times (0, T)$, donnée par la fonction q . Nous supposons que les forces et les tractions du corps varient lentement dans le temps, et par conséquent, les accélérations dans le système peuvent être négligées. Négliger les termes inertiels dans l'équation du mouvement conduit à une approche quasi statique du processus. Enfin, le corps est en contact avec une fondation réactive sur la surface de contact potentielle Γ_3 .

Nous supposons que la contrainte normale σ_ν satisfait une condition générale de

réponse normale instantanée

$$- \boldsymbol{\sigma}_\nu = p_\nu(\dot{\mathbf{u}}_\nu), \quad (3.1)$$

où $\dot{\mathbf{u}}_\nu$ représente la vitesse normale et p_ν est une fonction prescrite.

L'égalité (3.1) indique une dépendance générale de la contrainte normale sur la vitesse normale. Dans le cas où

$$p_\nu(r) = kr, \quad (3.2)$$

avec $k \geq 0$, la résistance de la fondation à la pénétration est proportionnelle à la vitesse normale. Ce type de comportement a été considéré dans [29] lors de la modélisation du mouvement d'un corps déformable sur du sable ou un matériau granulaire.

Le contact est frottant et la loi de frottement associée est choisie comme suit

$$- \boldsymbol{\sigma}_\tau = p_\tau(\dot{\mathbf{u}}_\tau), \quad (3.3)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ représente la force tangentielle sur la frontière de contact, $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ désigne la vitesse tangentielle et p_τ est une fonction à valeur vectorielle prescrite.

Nous utilisons une loi de comportement thermo-élastique-viscoplastique avec endommagement pour modéliser le comportement du matériau, et une inclusion différentielle de type parabolique pour décrire l'évolution de l'endommagement.

Avec les hypothèses ci-dessus, le problème mécanique du contact quasistatique avec réponse normale instantanéé peut être formulé classiquement comme suit.

Problème P

Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_d$, le champ d'endommagement $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et la température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(\mathbf{u}(t))) \quad (3.4)$$

$$+ \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s))), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \theta(s), \beta(s)) ds, \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + f_0 = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.5)$$

$$\dot{\theta} - k_0 \Delta \theta = \Theta(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}), \theta, \beta) + q, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.6)$$

$$\dot{\beta} - k_1 \Delta \beta + \partial \varphi_K(\beta) \ni \phi(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u}), \theta, \beta), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.7)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \nu = f_2, \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.9)$$

$$-\boldsymbol{\sigma} \nu = p_\nu(\dot{\mathbf{u}}_\nu), \quad -\boldsymbol{\sigma} \tau = p_\tau(\dot{\mathbf{u}}_\tau), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.10)$$

$$k_0 \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + B\theta = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.13)$$

Ce problème représente l'évolution quasistatique de l'endommagement dans les matériaux thermo-élastiques-viscoplastiques. L'équation (3.4) représente la loi de comportement thermo-élastique-viscoplastique, déjà introduite dans la première section. La relation (3.5) est l'équation d'équilibre, nous l'utilisons ici puisque nous supposons que le processus est quasistatique. L'équation (3.6) représente la conservation de l'énergie

où Θ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur générée par le travail des forces internes et q est une source de chaleur volumique donnée. L'inclusion (3.7) décrit l'évolution du champ d'endommagement, gouverné par la fonction d'endommagement source ϕ , où $\partial\varphi_K$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble K de fonctions des endommagements admissibles.

Les conditions (3.8) et (3.9) sont respectivement les conditions aux limites de déplacement et de traction. (3.10) représente la condition de réponse amortie normale et sa loi de frottement associée, décrite ci-dessus sur la surface de contact potentielle Γ_3 . L'équation (3.11) représente une condition aux limites de Fourier pour la température sur Γ . L'équation (3.12) représente une condition aux limites de Newmann homogène pour le champ de dommages sur Γ , où $\frac{\partial\beta}{\partial\nu}$ est la dérivée normale de β . Enfin les fonctions \mathbf{u}_0 , β_0 et θ_0 dans (3.13) sont les données initiales.

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème (3.4)–(3.13), nous avons besoin d'une notation supplémentaire.

3.2 Formulation variationnelle

Dans l'étude du problème mécanique (3.4)–(3.13), on considère les hypothèses suivantes

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times S_d \rightarrow S_d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\
 \quad |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|, \\
 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_d, \text{ a.e. } x \in \Omega. \\
 (b) \text{ Il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\
 \quad (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2, \\
 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_d, \text{ a.e. } x \in \Omega. \\
 (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\
 \quad \forall \varepsilon \in S_d. \\
 (d) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}.
 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B} : \Omega \times S_d \rightarrow S_d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que} \\
 \quad |\mathcal{B}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{B}} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|, \\
 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_d, \text{ a.e. } x \in \Omega. \\
 (b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\
 \quad \forall \varepsilon \in S_d. \\
 (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, 0,) \text{ appartient à } \mathcal{H}.
 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

L'opérateur de plasticité $\mathcal{G} : \Omega \times S_d \times S_d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S_d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\
 \quad |\mathcal{G}(x, \boldsymbol{\sigma}_1, \varepsilon_1, \theta_1, \beta_1) - \mathcal{G}(x, \boldsymbol{\sigma}_2, \varepsilon_2, \theta_2, \beta_2)| \leq L_{\mathcal{G}} (|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2| \\
 \quad + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\theta_1 - \theta_2| + |\beta_1 - \beta_2|), \\
 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2 \in S_d, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_d, \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \Omega. \\
 (b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \boldsymbol{\sigma}, \varepsilon, \theta, \beta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\
 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \varepsilon \in S_d, \forall \theta, \beta \in \mathbb{R}. \\
 (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0, 0, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}.
 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

La fonction constitutive non linéaire $\Theta : \Omega \times S_d \times S_d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_\Theta > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\Theta(x, \boldsymbol{\sigma}_1, \varepsilon_1, \theta_1, \beta_1) - \Theta(x, \boldsymbol{\sigma}_2, \varepsilon_2, \theta_2, \beta_2)| \leq L_\Theta (|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2| \\ \quad + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\theta_1 - \theta_2| + |\beta_1 - \beta_2|), \\ \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2 \in S_d, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_d, \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \Theta(x, \boldsymbol{\sigma}, \varepsilon, \theta, \beta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \varepsilon \in S_d, \forall \theta, \beta \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \Theta(x, 0, 0, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

La fonction source de l'endommagement $\phi : \Omega \times S_d \times S_d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_\phi > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\phi(x, \boldsymbol{\sigma}_1, \varepsilon_1, \theta_1, \beta_1) - \phi(x, \boldsymbol{\sigma}_2, \varepsilon_2, \theta_2, \beta_2)| \leq L_\phi (|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2| \\ \quad + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\theta_1 - \theta_2| + |\beta_1 - \beta_2|), \\ \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2 \in S_d, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_d, \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \phi(x, \boldsymbol{\sigma}, \varepsilon, \theta, \beta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \varepsilon \in S_d, \forall \theta, \beta \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \phi(x, 0, 0, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

La fonction de contact normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_\nu > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2|, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \Gamma_3. \\ (b) (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \Gamma_3. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto p_\nu(x, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \\ \quad \forall r \in \mathbb{R}. \\ (d) \text{ L'application } r \mapsto p_\nu(x, r) \text{ est continu sur } \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

La fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_\tau > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p_\tau(x, r_1) - p_\tau(x, r_2)| \leq L_\tau |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d, \text{ a.e. } x \in \Gamma_3. \\ (b) (p_\tau(x, r_1) - p_\tau(x, r_2)) \cdot (r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d, \text{ a.e. } x \in \Gamma_3. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto p_\tau(x, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \\ \quad \forall r \in \mathbb{R}^d. \\ (d) \text{ L'application } r \mapsto p_\tau(x, r) \text{ est continu sur } \mathbb{R}^d, \text{ a.e. } x \in \Gamma_3. \\ (e) p_\tau(x, r) \cdot \nu(x) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } r \cdot \nu(x) = 0, \text{ a.e. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

On suppose que le corps force et les tractions de surface satisfont :

$$f_0 \in L^2(0, T; H), \quad f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d). \quad (3.21)$$

La source de chaleur volumique satisfait :

$$q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.22)$$

Nous supposons aussi que

$$B > 0, \quad k_i > 0 \quad (i = 0, 1). \quad (3.23)$$

Enfin, nous supposons que les données initiales satisfont aux conditions suivantes :

$$\mathbf{u}_0 \in V, \quad \theta_0 \in V, \quad \beta_0 \in K.. \quad (3.24)$$

Ensuite, on note $f(t)$ l'élément de V' donné par

$$(f(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.25)$$

Ensuite, on note $f(t)$ l'élément de V' donné par

$$f \in L^2(0, T; V'). \quad (3.26)$$

On définit les formes bilinéaires suivantes

$$a_0 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_0(\zeta, \xi) = k_0 \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \xi \, dx + B \int_{\Gamma} \zeta \xi \, d\gamma, \quad (3.27)$$

$$a_1 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_1(\zeta, \xi) = k_1 \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \xi \, dx. \quad (3.28)$$

On considère la fonctionnelle $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} (p_\nu(\mathbf{u}_\nu) \mathbf{v}_\nu + p_\tau(\mathbf{u}_\tau) \cdot \mathbf{v}_\tau) da, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (3.29)$$

En gardant à l'esprit (3.19) et (3.20), nous observons que l'intégrale dans (3.29) est bien définie. Ensuite, nous supposons que $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ sont des fonctions régulières satisfaisant (3.5)-(3.10) et soit $\mathbf{v} \in V$, $t \in [0, T]$. Enfin à partir de (3.29), (3.32) et (3.33) on trouve

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) = (f(t), \mathbf{v})_{V' \times V}.$$

Ainsi, nous pouvons obtenir la formulation variationnelle du problème quasistatique avec réponse normale instantanée, frottement et endommagement comme suit

Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \theta, \beta)$ un quadruple des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (3.4)-(3.13). En utilisant la formule de Green (2.5) et (3.5) nous avons

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.30)$$

En appliquant les conditions aux limites (3.8) et (3.9), on a

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da = \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da. \quad (3.31)$$

Il découle maintenant de (3.30), (3.31) et (3.25) que

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = (f(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.32)$$

D'autre part, à partir de (2.5), (2.6) et (3.10) on obtient

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} = -p_\nu(\dot{\mathbf{u}}_\nu(t)) \mathbf{v}_\nu - p_\tau(\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)) \cdot \mathbf{v}_\tau, \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (3.33)$$

Maintenant, pour tout $t \in [0, T]$ et de (3.6), on obtient :

$$\begin{aligned} (\dot{\theta}(t) - q(t), \xi)_{L^2(\Omega)} - (\kappa_0 \Delta \theta(t), \xi)_{L^2(\Omega)} &= \Theta(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}), \theta, \beta)_{L^2(\Omega)}, \\ &\forall \xi \in V. \end{aligned} \quad (3.34)$$

En utilisant la formule de Green (2.7) afin d'obtenir :

$$-\kappa_0 (\Delta \theta(t), \xi)_{L^2(\Omega)} = \kappa_0 \int_{\Omega} \nabla \theta(t) \cdot \nabla \xi dx - \kappa_0 \int_{\Gamma} \frac{\partial \theta(t)}{\partial \nu} \xi dx, \quad \forall \xi \in V$$

on a d'après (3.11) :

$$-\kappa_0 (\Delta \theta(t), \xi)_{L^2(\Omega)} = \kappa_0 \int_{\Omega} \nabla \theta(t) \cdot \nabla \xi dx + B \int_{\Gamma} \theta(t) \xi dx, \quad \forall \xi \in V. \quad (3.35)$$

Nous utilisons (3.34) et l'égalité (3.35), on trouve :

$$\begin{aligned} & (\dot{\theta}(t) - q(t), \xi)_{L^2(\Omega)} + \kappa_0 \int_{\Omega} \nabla \theta(t) \cdot \nabla \xi dx + B \int_{\Gamma} \theta(t) \cdot \xi dx \\ & = \Theta(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}), \theta, \beta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \xi \in V, \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} & (\dot{\theta}(t) - q(t), \zeta)_{L^2(\Omega)} + \kappa_0 \int_{\Omega} \nabla \theta(t) \cdot \nabla \zeta dx + B \int_{\Gamma} \theta(t) \cdot \zeta dx \\ & = \Theta(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}), \theta, \beta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in V. \end{aligned}$$

D'après (3.27), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\theta}(t) - q(t), \xi \right)_{L^2(\Omega)} + a_0(\theta(t), \xi) = \Theta(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}), \theta, \beta), \xi)_{L^2(\Omega)} \\ & \quad \forall \xi \in V. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Enfin, soit $\beta(t) \in K$ et pour tout $t \in [0, T]$. De la définition (2.16) de $\partial\varphi_K(\beta)$ et de (3.7), on obtient :

$$\left(\phi(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u}), \theta, \beta) - \dot{\beta}(t) + \kappa \Delta \beta(t), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)} \leq 0, \quad \forall \beta \in K.$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \left(\phi(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u}), \theta, \beta), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \left(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)} - \kappa (\Delta \beta(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Nous utilisons la formule de Green (2.8) et le condition (3.12) afin d'obtenir :

$$(\Delta \beta(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} = - \int_{\Omega} \nabla \beta(t) \cdot \nabla (\xi - \beta(t)) dx.$$

En suite :

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)} + \kappa \int_{\Omega} \nabla \beta(t) \cdot \nabla (\xi - \beta(t)) dx \\ & \geq \left(\phi(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u}), \theta, \beta), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)} + \kappa \int_{\Omega} \nabla \beta(t) \cdot \nabla (\xi - \beta(t)) dx \\ & \geq \left(\phi(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u}), \theta, \beta), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \delta \in K. \end{aligned}$$

D'après (3.28), on trouve :

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\ & \geq \left(\phi(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u}), \theta, \beta), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \xi \in K. \end{aligned} \quad (3.37)$$

De (3.33), (3.36) et (3.37) on obtient la formulation variationnelle du Problème \mathcal{PV} .

Problème \mathcal{PV}

Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$, le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, la température $\theta : [0, T] \rightarrow V$, le champ d'endommagement $\beta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ tel que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(\mathbf{u}(t))) \quad (3.38)$$

$$+ \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s))), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \theta(s), \beta(s)) ds, \quad \text{a.e. } t \in (0, T),$$

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) = (f(t), \mathbf{v})_{V' \times V}, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.39)$$

$$(\dot{\theta}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + a_0(\theta(t), \mathbf{v}) = (\Theta(\boldsymbol{\sigma}(t)), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \theta(t), \beta(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad (3.40)$$

$$+ (q(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0, T),$$

$$\beta(t) \in K, \quad (\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + a_1(\beta(t), \xi - \beta(t)) \geq \quad (3.41)$$

$$(\phi(\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \theta(t), \beta(t), \xi - \beta(t)))_{L^2(\Omega)},$$

$$\forall \xi \in K, \quad \text{a.e. } t \in (0, T),$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (3.42)$$

On remarque que le problème variationnel PV est formulé en termes de champ de déplacement, de champ de contraintes, de température et de champ d'endommagement. Notre résultat principal que nous énonçons ici et que nous démontrons dans la section suivante est le suivant.

Théorème 3.2.1. Supposons que (3.14)–(3.20) sont vérifiées. Alors il existe une solution unique $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \theta, \beta\}$ au problème \mathcal{PV} . De plus, la solution satisfait

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T; V), \quad (3.43)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in C(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (3.44)$$

$$\theta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V), \quad (3.45)$$

$$\beta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.46)$$

Le "quadruple" $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \theta, \beta\}$ qui satisfait (3.38)–(3.42) est appelée une solution faible du problème de contact \mathcal{P} . Nous concluons que sous les hypothèses énoncées, le problème (3.4)–(3.13) a une unique solution faible satisfaisant (3.43)–(3.46).

3.3 Preuve du théorème 3.2.1

La démonstration du théorème 3.2.1 se fera en plusieurs étapes et s'appuie sur des arguments d'équations d'évolution à opérateurs monotones, un résultat classique d'existence et d'unicité sur des inégalités paraboliques et en point fixe.

Pour cela, nous supposons dans la suite que (3.14)–(3.20) est vraie et, partout dans cette section C représentera une constante strictement positive qui peut dépendre des données du problème mais il est indépendant du temps, et dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre.

De plus, par souci de simplicité, nous supprimons, dans ce qui suit, la dépendance explicite de diverses fonctions vis-à-vis de $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma$.

Soit $\eta \in L^2(0, T; V')$ donné. Dans un premier temps, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème PV_η . Trouver un champ de déplacement $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$(\mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t))), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t), \mathbf{v}) + (\eta(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = (f(t), \mathbf{v})_{V' \times V}, \quad (3.47)$$

$$\forall \mathbf{v} \in V \quad a.e. t \in (0, T),$$

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0. \quad (3.48)$$

Dans l'étude du problème PV_η nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3.1. Il existe une solution unique au problème PV_η et elle a la régularité exprimée en (3.43).

De plus, si \mathbf{u}_i représente la solution du problème PV_{η_i} pour $\eta_i \in L^2(0, T; V')$, $i = 1, 2$ alors il existe $C > 0$ tel que

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V \leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'} ds. \quad (3.49)$$

Démonstration. En utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous définissons

l'opérateur $T : V \rightarrow V'$ et l'élément $f_\eta(t) \in V'$ par

$$(T\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u})), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (3.50)$$

$$(f_\eta(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = (f(t), \mathbf{v})_{V' \times V} - (\eta(t), \mathbf{v})_{V' \times V}, \quad (3.51)$$

pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $t \in [0, T]$. Soit $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$.

En utilisant (3.29) et (3.50) on trouve

$$\begin{aligned} (T\mathbf{u}_1 - T\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_{V' \times V} &= (\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}_1)) - \mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}_2)), \varepsilon(\mathbf{u}_1) - \varepsilon(\mathbf{u}_2))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (p_\nu(\mathbf{u}_{1\nu}) - p_\nu(\mathbf{u}_{2\nu}))(\mathbf{u}_{1\nu} - \mathbf{u}_{2\nu}) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (p_\tau(\mathbf{u}_{1\tau}) - p_\tau(\mathbf{u}_{2\tau})) \cdot (\mathbf{u}_{1\tau} - \mathbf{u}_{2\tau}) da, \end{aligned}$$

et, en gardant à l'esprit (3.14)(b), (3.19)(b) et (3.20)(b), on obtient

$$(T\mathbf{u}_1 - T\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V^2. \quad (3.52)$$

En utilisant à nouveau (3.50) et (3.29) il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (T\mathbf{u}_1 - T\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_{V' \times V} &= (\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}_1)) - \mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}_2)), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (p_\nu(\mathbf{u}_{1\nu}) - p_\nu(\mathbf{u}_{2\nu}))(\mathbf{v}_\nu) da + \int_{\Gamma_3} (p_\tau(\mathbf{u}_{1\tau}) - p_\tau(\mathbf{u}_{2\tau})) \cdot (\mathbf{v}_\tau) da, \end{aligned}$$

pour tout $\mathbf{v} \in V$ et, par (3.14)(a), on en déduit que

$$|T\mathbf{u}_1 - T\mathbf{u}_2|_{V'} \leq L_{\mathcal{A}} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V. \quad (3.53)$$

L'inégalité (3.52) montre que $T : V \rightarrow V'$ est un opérateur fortement monotone. En outre, l'inégalité (3.53) implique que T est continue de Lipschitz. Par conséquent, en utilisant un résultat standard pour les équations non linéaires (voir, par exemple, [?]), il existe un élément unique \mathbf{w}_η qui satisfait

$$T\mathbf{w}_\eta(t) = f_\eta(t) \quad a.e. t \in (0, T), \quad (3.54)$$

$$\mathbf{w}_\eta \in C(0, T; V), \quad (3.55)$$

Considérons maintenant la fonction $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \rightarrow V$ définie par

$$\mathbf{u}_\eta = \int_0^t \mathbf{w}_\eta(s) ds + \mathbf{u}_0. \quad (3.56)$$

Il découle de (3.50), (3.54) et (3.56) que \mathbf{u}_η est une solution de l'équation (3.47) et elle satisfait (3.43).

Il reste à montrer l'estimation (3.49). Soit $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T, V')$ et utilise la notation $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$ pour $i = 1, 2$. De plus, en utilisant (3.47) et en soustrayant les deux équations obtenues, en choisissant $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2$ comme fonction de test, conduit à

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_1(t))) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_2(t))), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_1(t)) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_2(t)) \right)_{\mathcal{H}} \\ & + j(\dot{\mathbf{u}}_1(t), \dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t)) - j(\dot{\mathbf{u}}_2(t), \dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t)) \\ & = (\eta_2(t) - \eta_1(t), \dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t))_{V' \times V}, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

En gardant à l'esprit (2.11) et (3.14)(b) on en déduit que

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{w}_1(t))) - \mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{w}_2(t))), \varepsilon(\mathbf{w}_1(t)) - \varepsilon(\mathbf{w}_2(t)) \right)_{\mathcal{H}} \\ & \geq C |\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)|_V^2, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

A partir de (3.29), (3.19) et (3.20), on trouve

$$j(\mathbf{w}_1(t), \mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)) - j(\mathbf{w}_2(t), \mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.59)$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons

$$(\eta_2(t) - \eta_1(t), \dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t))_{V' \times V} \leq |\eta_2(t) - \eta_1(t)|_{V'} |\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)|_V. \quad (3.60)$$

La combinaison de (3.57)–(3.60) avec quelques manipulations algébriques conduit à

$$|\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)|_V \leq C |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}. \quad (3.61)$$

Puisque $\mathbf{u}_i(t) = \int_0^t \mathbf{w}_i(s) ds + \mathbf{u}_0$ et $\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0)$ nous avons

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V \leq \int_0^t |\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)|_V ds.$$

Des deux inégalités précédentes on déduit (3.49) ce qui conclut la preuve. \square

Dans la deuxième étape, nous considérons le problème auxiliaire suivant, dans lequel $\chi \in L^2(0, T, V')$ est donné.

Problème PV_χ

Trouver la température $\theta_\chi : [0, T] \rightarrow V$ telle que

$$(\dot{\theta}_\chi(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + a_0(\theta_\chi(t), \mathbf{v}) = (\chi(t) + q(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad (3.62)$$

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad a.e. t \in (0, T),$$

$$\theta_\chi(0) = \theta_0. \quad (3.63)$$

Lemme 3.3.2. Il existe une solution unique θ_χ au problème auxiliaire PV_χ et elle a la régularité exprimée en (3.45). De plus, si θ_i représente la solution du problème PV_{χ_i} pour $\chi_i \in L^2(0, T; V')$, $i = 1, 2$ alors il existe $C > 0$ tel que

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_V^2 \leq C \int_0^t |\chi_1(s) - \chi_2(s)|_{V'}^2 ds. \quad (3.64)$$

Démonstration. En utilisant la définition (3.27) de la forme bilinéaire a_0 , conduit à

$$a_0(\xi, \xi) = k_0 \int_\Omega |\nabla \xi|^2 dx + B \int_\Gamma |\xi|^2 d\gamma.$$

Par une application de l'inégalité de Friedrichs –Poincaré, on peut trouver une constante $F > 0$ telle que

$$\int_\Omega |\nabla \xi|^2 dx + \frac{B}{k_0} \int_\Gamma |\xi|^2 d\gamma \geq F \int_\Omega |\xi|^2 dx.$$

Ainsi, il existe une constante $C > 0$ qui satisfait

$$a_0(\xi, \xi) \geq C |\xi|_{V'}^2, \quad \forall \xi \in V,$$

ce qui implique que a_0 est V-elliptique. Par conséquent, sur la base des arguments classiques de l'analyse fonctionnelle concernant les équations paraboliques, l'équation variationnelle (3.62) a une solution unique θ_χ satisfaisant (3.45). Il reste à montrer l'estimation (3.64), considérons $\chi_1, \chi_2 \in L^2(0, T; V')$ et notons $\theta_\chi = \theta_i$ for $i = 1, 2$. Si on prend la substitution $\chi = \chi_1, \chi = \chi_2$ dans (3.62) et en soustrayant les deux équations obtenues nous obtenons, en choisissant $\mathbf{v} = \theta_1 - \theta_2$ comme fonction de test

$$\begin{aligned} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2, \theta_1 - \theta_2)_{V' \times V} + a_0(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2) &= (\chi_1 - \chi_2, \theta_1 - \theta_2)_{V' \times V}, \\ a.e. t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.65)$$

En gardant à l'esprit l'inégalité $a_0(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2) \geq 0$ nous trouvons que

$$(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2, \theta_1 - \theta_2)_{V' \times V} \leq (\chi_1 - \chi_2, \theta_1 - \theta_2)_{V' \times V}. \quad (3.66)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons

$$(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2, \theta_1 - \theta_2)_{V' \times V} \leq |\chi_1 - \chi_2|_{V'} |\theta_1 - \theta_2|_V. \quad (3.67)$$

Nous intégrons l'inégalité précédente par rapport au temps et utilisons les conditions initiales $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$ pour trouver que

$$\frac{1}{2} |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_V^2 \leq \int_0^t |\chi_1(s) - \chi_2(s)|_{V'} |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_V ds. \quad (3.68)$$

En multipliant les membres de l'inégalité précédente par 2, et en appliquant l'inégalité

$$2ab \leq a^2 + b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

permettre à nous de trouver

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_V^2 \leq \int_0^t |\chi_1(s) - \chi_2(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_V^2 ds.$$

Il découle maintenant d'un argument de type Gronwall que

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_V^2 \leq C \int_0^t |\chi_1(s) - \chi_2(s)|_{V'}^2 ds. \quad (3.69)$$

□

Soit $\mu \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Dans la troisième étape, nous considérons le problème variationnel suivant pour le champ de d'endommagement.

Problème PV_μ

Trouver le champ d'endommagement $\beta_\mu : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ tel que

$$\beta_\mu(t) \in K, \quad (\dot{\beta}_\mu(t), \xi - \beta_\mu(t))_{L^2(\Omega)} + a_1(\beta_\mu(t), \xi - \beta_\mu(t)) \quad (3.70)$$

$$\geq (\mu(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in V, \text{ a.e. } t \in (0, T),$$

$$\beta_\mu(0) = \beta_0. \quad (3.71)$$

On applique le Théorème 2.4.6 au problème PV_μ .

Lemme 3.3.3. Il existe une solution unique β_μ au problème auxiliaire PV_μ satisfaisant (3.46), De plus, si β_i représente la solution du problème PV_{μ_i} pour $\mu_i \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $i = 1, 2$ alors il existe $C > 0$ tel que

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t |\mu_1(s) - \mu_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \quad (3.72)$$

Démonstration. On a $H^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, et la carte d'inclusion est continue, $L^2(\Omega)$ est identifié par $(L^2(\Omega))'$ et il est identifié par un sous-espace de $(H^1(\Omega))'$, où $(L^2(\Omega))'$ et $(H^1(\Omega))'$ représentent le dual de $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$, respectivement. La

notation $(\cdot, \cdot)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$ désigne l'appariement de dualité entre $(H^1(\Omega))'$ et $H^1(\Omega)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &\subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))' \\ (\beta, \xi)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} &= (\beta, \xi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

et nous notons que K est un ensemble convexe fermé dans $H^1(\Omega)$. Alors, en utilisant (3.28) la définition de la forme bilinéaire a_1 , et le fait que $\beta_\mu \in K$ in (3.24), il est facile de voir que le lemme 3.3.3 est une conséquence directe du théorème 2.4.6. Considérons maintenant $\mu_1, \mu_2 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et notons $\beta_\mu = \beta_i$ pour $i = 1, 2$. Si nous prenons la substitution $\mu = \mu_1$, $\mu = \mu_2$ dans (3.71) et en soustrayant les deux inégalités obtenues on obtient, en choisissant $\xi = \beta_1 - \beta_2$ comme fonction de test

$$(\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)} + a_1(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \leq (\mu_1 - \mu_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)} \quad a.e. t \in (0, T).$$

En tenant compte que $a_1(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \geq 0$, on obtient

$$(\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)} \leq (\mu_1 - \mu_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)}. \quad (3.73)$$

En intégrant l'inégalité précédente par rapport au temps et en utilisant les conditions initiales $\beta_1(0) = \beta_2(0) = \beta_0$, on trouve

$$\frac{1}{2} |\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t (\mu_1 - \mu_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)} ds. \quad (3.74)$$

En utilisant les inégalités de Hölder et Young, on en déduit que

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t |\mu_1(s) - \mu_2(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds + \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds.$$

L'inégalité précédente combinée à l'inégalité de Gronwall conduit à

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^t |\mu_1(s) - \mu_2(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds. \quad (3.75)$$

□

Dans l'étape suivante, nous utilisons $\mathbf{u}_\eta, \theta_\chi$ et β_μ obtenus ci-dessus dans le lemme 3.3.1, lemme 3.3.2 et lemme 3.3.3, respectivement pour construire le problème suivant pour le champ de contraintes.

Problème $PV_{\eta\chi\mu}$. Trouver le champ de contrainte $\sigma_{\eta\chi\mu} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ tel que

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\chi\mu}(t) &= \mathcal{B}(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t))) + \int_0^t \mathcal{G}\left(\sigma_{\eta\chi\mu}(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s))), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \theta_\chi(s), \beta_\mu(s)\right) ds, \\ &\quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Dans l'étude du problème $PV_{\eta\chi\mu}$ nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3.4. Il existe une solution unique au problème $PV_{\eta\chi\mu}$ et elle satisfait $\boldsymbol{\sigma}_{\eta\chi\mu} \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H})$. De plus, si \mathbf{u}_i , θ_i , β_i et $\boldsymbol{\sigma}_i$, représentent les solutions de problème PV_{η_i} , PV_{χ_i} , PV_{μ_i} and $PV_{\eta_i\chi_i\mu_i}$, respectivement, pour $(\eta_i, \chi_i, \mu_i) \in L^2(0, T; V' \times V' \times L^2(\Omega))$, $i = 1, 2$, alors il existe $C > 0$ tel que $\forall t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t (|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 + |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_V^2 + |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2) ds \right). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Démonstration. Soit $\Lambda_{\eta\chi\mu} : L^2(0, T; \mathcal{H}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{H})$ l'opérateur donné par

$$\begin{aligned} \Lambda_{\eta\chi\mu} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathcal{B}(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t))) + \int_0^t \mathcal{G} \left(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s))), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \theta_\chi(s), \beta_\mu(s) \right) ds, \\ \forall \boldsymbol{\sigma} &\in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \forall t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Pour $\boldsymbol{\sigma}_i \in L^2(0, T; \mathcal{H})$, $i = 1, 2$ on utilise (3.78), l'hypothèse (3.16) et l'inégalité de Holder pour obtenir pour tout $t \in (0, T)$

$$|\Lambda_{\eta\chi\mu} \boldsymbol{\sigma}_1(t) - \Lambda_{\eta\chi\mu} \boldsymbol{\sigma}_2(t)|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t |\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)|_{\mathcal{H}} ds.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |\Lambda_{\eta\chi\mu} \boldsymbol{\sigma}_1(t) - \Lambda_{\eta\chi\mu} \boldsymbol{\sigma}_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \left(L_{\mathcal{G}} \int_0^t |\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)|_{\mathcal{H}} ds \right)^2 \\ &\leq (L_{\mathcal{G}})^2 T \int_0^t |\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds \\ &\leq C \int_0^t |\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds. \end{aligned}$$

Il découle du lemme 2.4.1 qu'il existe un élément unique $\boldsymbol{\sigma}_{\eta\chi\mu} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ tel que $\Lambda_{\eta\chi\mu} \boldsymbol{\sigma}_{\eta\chi\mu} = \boldsymbol{\sigma}_{\eta\chi\mu}$. De plus, $\boldsymbol{\sigma}_{\eta\chi\mu}$ est l'unique solution du problème $PV_{\eta\chi\mu}$ et, en utilisant (3.78), (3.15), (3.16) et la régularité de $\mathbf{u}_\eta, \theta_\chi, \beta_\mu$, il s'ensuit que $\boldsymbol{\sigma}_{\eta\chi\mu} \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H})$. Considérons maintenant $(\eta_1, \chi_1, \mu_1), (\eta_2, \chi_2, \mu_2) \in L^2(0, T; V' \times V' \times L^2(\Omega))$, et pour $i = 1, 2$ désigne $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$, $\theta_{\chi_i} = \theta_i$, $\beta_{\mu_i} = \beta_i$ et $\boldsymbol{\sigma}_{\eta_i\chi_i\mu_i} = \boldsymbol{\sigma}_i$. Ainsi nous avons

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathcal{B}(\varepsilon(\mathbf{u}_i(t))) + \int_0^t \mathcal{G} \left(\boldsymbol{\sigma}_i(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_i(s))), \varepsilon(\mathbf{u}_i(s)), \theta_i(s), \beta_i(s) \right) ds, \quad \forall t \in (0, T),$$

et en utilisant les propriétés (3.15) et (3.16) des opérateurs \mathcal{B} et \mathcal{G} , on trouve

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t (|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 + |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_V^2) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t (|\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2) ds \right), \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.79)$$

En utilisant maintenant un argument de Gronwall dans l'inégalité précédente on en déduit (3.77), ce qui conclut la preuve. \square

Enfin en conséquence de ces résultats et en utilisant les propriétés des opérateurs \mathcal{B} et \mathcal{G} , et des fonctions Θ et ϕ , on peut considérer l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : L^2(0, T; V' \times V' \times L^2(\Omega)) &\rightarrow L^2(0, T; V' \times V' \times L^2(\Omega)) \\ \mathcal{L}(\eta, \chi, \mu)(t) &= (\mathcal{L}_1(\eta, \chi, \mu)(t), \mathcal{L}_2(\eta, \chi, \mu)(t), \mathcal{L}_3(\eta, \chi, \mu)(t)), \end{aligned} \quad (3.80)$$

où, pour tout $t \in [0, T]$ les correspondances $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ et \mathcal{L}_3 sont donnés par

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_1(\eta, \chi, \mu)(t), \mathbf{v})_{V' \times V} &= \left(\mathcal{B}(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t))) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}_{\eta\chi\mu}(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s))), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \theta_\chi(s), \beta_\mu(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}) \right)_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\mathcal{L}_2(\eta, \chi, \mu)(t) = \Theta(\boldsymbol{\sigma}_{\eta\chi\mu}(t), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \theta_\chi(t), \beta_\mu(t)). \quad (3.82)$$

$$\mathcal{L}_3(\eta, \chi, \mu)(t) = \phi(\boldsymbol{\sigma}_{\eta\chi\mu}(t), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), \theta_\chi(t), \beta_\mu(t)). \quad (3.83)$$

Ici, pour chaque $(\eta, \chi, \mu) \in L^2(0, T; V' \times V' \times L^2(\Omega))$, $u_\eta, \theta_\chi, \beta_\mu$ et $\boldsymbol{\sigma}_{\eta\chi\mu}$ représentent le champ de déplacement, la température, le champ d'endommagement et le champ de contraintes obtenu respectivement dans les lemmes 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 et 3.3.4 et nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3.5. L'opérateur \mathcal{L} a un unique point fixe, autrement dit, il existe un unique élément $(\eta^*, \chi^*, \mu^*) \in L^2(0, T; V' \times V' \times L^2(\Omega))$ tel que $\mathcal{L}(\eta^*, \chi^*, \mu^*) = (\eta^*, \chi^*, \mu^*)$.

Démonstration. Compte tenu de Lemmas 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 et 3.3.4, il est clair que l'opérateur \mathcal{L} est bien défini et prend des valeurs en $L^2(0, T; V' \times V' \times L^2(\Omega))$.

Soit $t \in]0, T[$ et $(\eta_1, \chi_1, \mu_1), (\eta_2, \chi_2, \mu_2) \in L^2(0, T; V' \times V' \times L^2(\Omega))$, et par souci de simplicité, nous écrivons $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$, $\theta_{\chi_i} = \theta_i$, $\beta_{\mu_i} = \beta_i$ et $\boldsymbol{\sigma}_{\eta_i\chi_i\mu_i} = \boldsymbol{\sigma}_i$, pour $i = 1, 2$.

En utilisant (2.12), (3.15), (3.16), et des manipulations algébriques élémentaires, nous trouvons

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_1(\eta_1, \chi_1, \mu_1)(t) - \mathcal{L}_1(\eta_2, \chi_2, \mu_2)(t)|_{V'}^2 &\leq C \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t (|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 + |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_V^2) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t (|\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2) ds \right). \end{aligned} \quad (3.84)$$

De plus, à partir de la définition (3.82), des hypothèses (3.17) sur Θ nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \left| \mathcal{L}_2(\eta_1, \chi_1, \mu_1)(t) - \mathcal{L}_2(\eta_2, \chi_2, \mu_2)(t) \right|_{V'}^2 \\
 & \leq \left| \Theta(\boldsymbol{\sigma}_1(t), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_1(t)), \theta_1(t), \beta_1(t)) - \Theta(\boldsymbol{\sigma}_2(t), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_2(t)), \theta_2(t), \beta_2(t)) \right|_{V'}^2, \quad (3.85) \\
 & \leq C \left(\left| \boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t) \right|_{\mathcal{H}}^2 + \left| \dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t) \right|_V^2 + \left| \theta_1(t) - \theta_2(t) \right|_V^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left| \beta_1(t) - \beta_2(t) \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

De même, en utilisant la définition (3.83), les hypothèses (3.18) sur ϕ nous trouvons

$$\begin{aligned}
 & \left| \mathcal{L}_3(\eta_1, \chi_1, \mu_1)(t) - \mathcal{L}_3(\eta_2, \chi_2, \mu_2)(t) \right|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq \left| \phi(\boldsymbol{\sigma}_1(t), \varepsilon(\mathbf{u}_1(t)), \theta_1(t), \beta_1(t)) - \phi(\boldsymbol{\sigma}_2(t), \varepsilon(\mathbf{u}_2(t)), \theta_2(t), \beta_2(t)) \right|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.86) \\
 & \leq C \left(\left| \boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t) \right|_{\mathcal{H}}^2 + \left| \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t) \right|_V^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left| \theta_1(t) - \theta_2(t) \right|_V^2 + \left| \beta_1(t) - \beta_2(t) \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Il découle de (3.84)–(3.86) et (3.80) que

$$\begin{aligned}
 & \left| \mathcal{L}(\eta_1, \chi_1, \mu_1)(t) - \mathcal{L}(\eta_2, \chi_2, \mu_2)(t) \right|_{L^2(0,T;V' \times V' \times L^2(\Omega))}^2 \leq C \left(\left| \boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t) \right|_{\mathcal{H}}^2 \right. \\
 & \quad + \left| \dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t) \right|_V^2 + \left| \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t) \right|_V^2 \\
 & \quad + \left| \theta_1(t) - \theta_2(t) \right|_V^2 + \left| \beta_1(t) - \beta_2(t) \right|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \quad + \int_0^t \left(\left| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \right|_V^2 + \left| \theta_1(s) - \theta_2(s) \right|_V^2 \right) ds \\
 & \quad \left. + \int_0^t \left(\left| \beta_1(s) - \beta_2(s) \right|_{L^2(\Omega)}^2 + \left| \boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s) \right|_{\mathcal{H}}^2 \right) ds \right). \quad (3.87)
 \end{aligned}$$

L'insertion de (3.77) dans (3.87) donne

$$\begin{aligned}
 & \left| \mathcal{L}(\eta_1, \chi_1, \mu_1)(t) - \mathcal{L}(\eta_2, \chi_2, \mu_2)(t) \right|_{L^2(0,T;V' \times V' \times L^2(\Omega))}^2 \quad (3.88) \\
 & \leq C \left(\left| \dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t) \right|_V^2 + \left| \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t) \right|_V^2 + \left| \theta_1(t) - \theta_2(t) \right|_V^2 + \left| \beta_1(t) - \beta_2(t) \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^t \left(\left| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \right|_V^2 + \left| \theta_1(s) - \theta_2(s) \right|_V^2 + \left| \beta_1(s) - \beta_2(s) \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \right).
 \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant (3.49) on peut en déduire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\left| \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t) \right|_V^2 \leq C \int_0^t \left| \eta_1(s) - \eta_2(s) \right|_{V'}^2 ds. \quad (3.89)$$

En tenant compte du fait que $|\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)|_V \leq C |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{V'}$, en appliquant les estimations (3.64), (3.72), (3.89) et en les remplaçant par (3.88) nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{L}(\eta_1, \chi_1, \mu_1)(t) - \mathcal{L}(\eta_2, \chi_2, \mu_2)(t) \right|_{L^2(0, T; V' \times V' \times L^2(\Omega))}^2 \\ & \leq C \left(\int_0^t (|\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 + |\chi_1(s) - \chi_2(s)|_{V'}^2 + |\mu_1(s) - \mu_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2) ds \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t \int_0^s (|\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 + |\chi_1(s) - \chi_2(s)|_{V'}^2 + |\mu_1(s) - \mu_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2) dr ds \right), \end{aligned} \quad (3.90)$$

ce qui implique avec quelques manipulations algébriques, qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{L}(\eta_1, \chi_1, \mu_1)(t) - \mathcal{L}(\eta_2, \chi_2, \mu_2)(t) \right|_{L^2(0, T; V' \times V' \times L^2(\Omega))}^2 \\ & \leq C \int_0^t \left| (\eta_1, \chi_1, \mu_1)(t) - (\eta_2, \chi_2, \mu_2)(t) \right|_{L^2(0, T; V' \times V' \times L^2(\Omega))}^2 ds. \end{aligned} \quad (3.91)$$

En appliquant 2.4.1, nous déduisons que l'opérateur \mathcal{L} a un point fixe unique en $L^2(0, T; V' \times V' \times L^2(\Omega))$, c.-à-d. qu'il existe un élément unique $(\eta^*, \chi^*, \mu^*) \in L^2(0, T; V' \times V' \times L^2(\Omega))$ tel que $\mathcal{L}(\eta^*, \chi^*, \mu^*) = (\eta^*, \chi^*, \mu^*)$. \square

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver le Theorem 3.2.1 que nous complétons maintenant.

Preuve du théorème 3.2.1. Soit $(\eta^*, \chi^*, \mu^*) \in L^2(0, T; V' \times V' \times L^2(\Omega))$ soit le point fixe de l'opérateur \mathcal{L} défini par (3.80)-(3.83) et soit \mathbf{u}_{η^*} , θ_{χ^*} , β_{μ^*} , $\boldsymbol{\sigma}_{\eta^* \chi^* \mu^*}$ les solutions des problèmes PV_{η} , PV_{χ} , PV_{μ} et $PV_{\eta \chi \mu}$ respectivement, pour $\eta = \eta^*$, $\chi = \chi^*$, et $\mu = \mu^*$, et on note

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\eta^*}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \boldsymbol{\sigma}_{\eta^* \chi^* \mu^*}, \quad (3.92)$$

$$\theta = \theta_{\chi^*}, \quad \beta = \beta_{\mu^*}. \quad (3.93)$$

Nous allons prouver que le quadruple $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \theta, \beta\}$ est l'unique solution du problème PV. En effet, on écrit (3.76) pour $\eta = \eta^*$, $\chi = \chi^*$, et $\mu = \mu^*$ et utilisez (3.92) pour obtenir que (3.38) soit satisfait. Ensuite, nous utilisons (3.47) pour $\eta = \eta^*$ et utilisons la première égalité dans (3.92) pour trouver

$$(\mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) + (\eta^*(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = (f(t), \mathbf{v})_{V' \times V}, \quad (3.94)$$

$$\forall \mathbf{v} \in V \quad a.e. \ t \in (0, T).$$

En utilisant l'égalité $\mathcal{L}_1(\eta^*, \chi^*, \mu^*) = \eta^*$ combiné avec (3.81) mène à

$$\begin{aligned} (\eta^*(t), \mathbf{v})_V &= \mathcal{B}(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)))_{\mathcal{H}} \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}\left(\boldsymbol{\sigma}_{\eta\chi\mu}(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta(s))), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \theta_\chi(s), \beta_\mu(s)\right) ds. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Nous substituons (3.95) dans (3.94) et utilisons (3.38) pour conclure que (3.39) est satisfait. De plus, à partir des égalités $\mathcal{L}_2(\eta^*, \chi^*, \mu^*) = \chi^*$ et $\mathcal{L}_3(\eta^*, \chi^*, \mu^*) = \mu^*$ combiné avec (3.82) et (3.83), on trouve que

$$\chi^* = \Theta(\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \theta(t), \beta(t)). \quad (3.96)$$

$$\mu^* = \phi(\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \theta(t), \beta(t)). \quad (3.97)$$

Nous écrivons (3.62) pour $\chi = \chi^*$ et utilisons la première égalité dans (3.93) nous obtenons

$$\begin{aligned} (\dot{\theta}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + a_0(\theta(t), \mathbf{v}) &= (\chi^*(t) + q(t), \mathbf{v})_{V' \times V}, \\ \forall \mathbf{v} \in V \quad a.e. \ t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Substituer (3.96) dans (3.98) implique que (3.40) est satisfaite.

Ensuite, nous écrivons (3.71) pour $\mu = \mu^*$ et utilisons la deuxième égalité dans (3.93) pour trouver

$$\begin{aligned} (\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + a_1(\beta(t), \xi - \beta(t)) &\geq (\mu^*(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)}, \\ \forall \xi \in V, \quad a.e. \ t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Nous combinons maintenant (3.99) et (3.97) pour voir que (3.41) est satisfaite, ce qui conclut la partie existence du théorème 3.2.1. La partie unicité du théorème 3.2.1 est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur \mathcal{L} et l'unicité de la résolution des problèmes PV_η , PV_χ , PV_μ et $PV_{\eta\chi\mu}$ qui conclut la preuve. □

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié théoriquement un problème de contact avec frottement et compliance normale entre un corps thermo-visco-plastic avec endommagement et un obstacle .

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème. Comme la frontière des corps et les données des problèmes ont des bonnes régularités. Donc, la solution du problème électro-mécanique et du problème variationnelle est la même.

On a montré l'existence et l'unicité de la solution des problèmes précédents par l'utilisation des arguments suivants : équation variationnelle dépendant du temps, équation variationnelle d'évolution, équation différentielle, le lemme de Gronwall et point fixe.

Bibliographie

- [1] K. T. Andrews, K. L. Kuttler and M. Shillor (1997), *On the dynamic behavior of a thermoviscoelastic body in frictional contact with a rigid obstacle*, Euro. J. Appl. Math. 8, 417-436.
- [2] A. A. Ahmed, S. Boutechebak, *Analysis of a dynamic thermo-elasto-viscoplastic contact problem* *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2013, No. 71,1-17; December 2013.
- [3] M. BARBOTEU, D. DANAN, M. SOFONEA, *Analysis of a contact problem with normal damped response and unilateral constraint*, ZAMM–Journal of Applied Mathematics and Mechanics, **96** (4) (2016), 408–428.
- [4] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff (1976).
- [5] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman, Boston (1984).
- [6] E. Bonetti, G. Bonfanti, *Existence and Uniqueness of the Solution to 3D Thermo-viscoelastic System*, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2003, No . 50, pp. 1-15.
- [7] S. Boutechebak, A. A. Ahmed, *Analysis of a dynamic frictional contact Problem for thermo-elasto-viscoplastic materials with damage*, Gen. Math. Notes, Vol. 19, No. 1, No-vember 2013, pp.60-77.
- [8] M. CAMPO, J.R. FERNÁNDEZ, W. HAN, M. SOFONEA, *A dynamic viscoelastic contact problem with normal compliance and damage*, *Finite Elem. Anal. Des*, **42** (1) (2015), 1–24.
- [9] O. CHAU, B. AWBI, *Quasistatic thermoviscoelastic frictional contact problem with damped response*, *Applicable Analysis*, **83** (6) (2004), 635–648.

-
- [10] G. Duvant, J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Numerische Mathematik 90 (2002), 689-719.
- [11] J.R. FERNÁNDEZ, W.HAN, M. SOFONEA, J.M. VIAÑO, *Variational and numerical analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with internal state variables*, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, **54** (4) (2001), 501-522.
- [12] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, (2002).
- [13] M. Frémond and B. Nedjar, *Damage in concret : the unilateral phenomenon*, Nuclear Engng. Design, 156 (1995), pp.323-335.
- [14] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage, Gradient of Damage and Principle of Virtual Work*, Int. J. Solids Structures, 33 (8), 1083-1103. (1996).
- [15] M. Frémond, *Contact with adhesion. Dans Topics in nonsmooth mechanics (Edité par J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos, et G.Strang)*, Birkhauser Verlag, Basel (1988), 177-221.
- [16] M. Frémond, K.L. Kuttle, B. Nedjar, M. Shillor ; *One-dimensional models of damage*, Adv. Math. Sci. Appl., 8(2) , pp. 541-570, 1998.
- [17] M. Frémond, *Adhérence des solides*, *J.Mécanique Théorique et Appliquée*, 6(1987), pp. 383-407 .
- [18] P. Germain, *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, Masson et Cie, Paris, (1973).
- [19] R. J. Gu and M. Shillor (2001), *Thermal and wear analysis of an elastic beam in sliding contact*, Int. J. Solids Structures 38(14), 2323-2333.
- [20] G. Leszek, A. Ochala, M. Shillor, *Quasistatic thermoviscoelastic problem with normal compliance, multivalued friction and wear diffusion. Nonlinear Analysis : R. W. A* (27), 183-202. (2016).
- [21] A. B Merouani, F. Messelmi, *Dynamic Evolution of Damage in Elastic- Thermo-Viscoplastic Materials*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010 (2010), No. 129, pp. 1-15.
- [22] F. Messelmi, B. Merouani, M. Meflah, *Nonlinear Thermoelasticity Problem*, Analele Universității Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XV (2008), 207-217.
-

- [23] F. Messelmi, B. Merouani, *Quasi-Static Evolution of Damage in Thermo-Viscoplastic Materials*, Analele Universității Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XVII (2010), Issue No. 2, 133-148.
- [24] R.D Mindlin, *Polarisation gradient in elastic dielectrics*, Int. J. Solids Structures 4 (1968),637-663.
- [25] J. Nečas, I. Hlavaček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, (1981).
- [26] E. Rabinowiz (1995), *Friction and Wear of Materials*, (2nd ed.) Wiley, N.Y.
- [27] M. Raous, L. Cangémi, and M. Cocu, *A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 177 (1999), no. 3-4, 383-399.
- [28] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, *Quasistatic viscoelastic contact with normal compliance and friction*, Journal of Elasticity 51 (1998),105-126.
- [29] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, *A quasistatic contact problem with directional friction and damped response*, Applicable Analysis, **68** (3–4) (1998), 409–422.
- [30] M. Shillor, M. Sofonea, J. J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics 655, Springer, Berlin, (2004).
- [31] M. Sofonea, *Functional Methods in Thermo- Elasto- Plasticity*, Ph. D. Thesis, Univ of Buccharest, (1988) (in Romanian).
- [32] M. Sofonea, W. Han and M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and App. Math. 276, Chapman-Hall/CRC Press, New York, (2006).
- [33] N. Stromberg, *Continuum Thermodynamics of Contact, Friction and Wear*, Thesis No, 491, Departement of Mechanical Engineering, Linkoping Institute of Technology, Linkoping, Sweden, (1995).
- [34] N. Stromberg, L. Johansson and A. Klarbring, *Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear*, Int. J. Solids Structures 33 (1996), 1817-1836.
- [35] M. Sofonea, F. P'atrulescu, Y. Souleiman, *Analysis of a contact problem with wear and unilateral constraint*, Appl. Anal. 95 (2016) 2590–2607.

Résumé

Nous considérons un problème de contact quasistatique par frottement entre un corps élasto-viscoplastique et un obstacle. Le contact est modélisé avec une réponse amortie normale et une loi de frottement local. Le matériau est élasto-viscoplastique avec deux variables internes qui peuvent décrire un paramètre de température et l'endommagement de la surface en contact. Nous fournissons une formulation variationnelle du problème et prouvons l'existence d'une unique solution faible au modèle. La preuve est basée sur des arguments d'équations d'évolution avec des opérateurs monotones, un résultat classique d'existence et d'unicité sur des inégalités paraboliques et un point fixe.

Mots clés : Matériaux thermo-élastiques-viscoplastiques ; Processus quasistatique ; contact par friction ; Champ de dégâts ; Réponse amortie normale ; Un point fixe.

Abstract

We consider a quasistatic frictional contact problem between an elastic-viscoplastic body and an obstacle. The contact is modelled with normal damped response and a local friction law. The material is elastic-viscoplastic with two internal variables which may describe a temperature parameter and the damage of the contacting surface. We provide a variational formulation of the problem and prove the existence of a unique weak solution to the model. The proof is based on arguments of evolution equations with monotone operators, a classical existence and uniqueness result on parabolic inequalities and fixed point. **Key words:** Thermo-elastic-viscoplastic materials; Quasistatic process; Frictional contact; Damage field; Normal damped response; Fixed point.

ملخص

نحن نعتبر مشكلة التلامس الاحتكاكية شبه الساكنة بين الجسم المرن اللزج والعائق. تم تصميم جهة الاتصال مع استجابة مخففة طبيعية وقانون احتكاك محلي. المادة عبارة عن بلاستيك مرن - لزج مع متغيرين داخليين قد يصفان معامل درجة الحرارة وتلف السطح الملامس. نحن نقدم صياغة متغيرة للمشكلة ونثبت وجود حل ضعيف فريد للنموذج. يعتمد الدليل على حجج معادلات التطور باستخدام عوامل أحادية ، وجود كلاسيكي و نتيجة فريدة على عدم المساواة في القطع المكافئ والنقطة الثابتة.

الكلمات المفتاحية: مواد لدائن حرارية مرنة ؛ عملية شبه ثابتة ؛ اتصال احتكاكي ؛ مجال الضرر ؛ استجابة مخففة طبيعية ؛ نقطة ثابتة.