

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

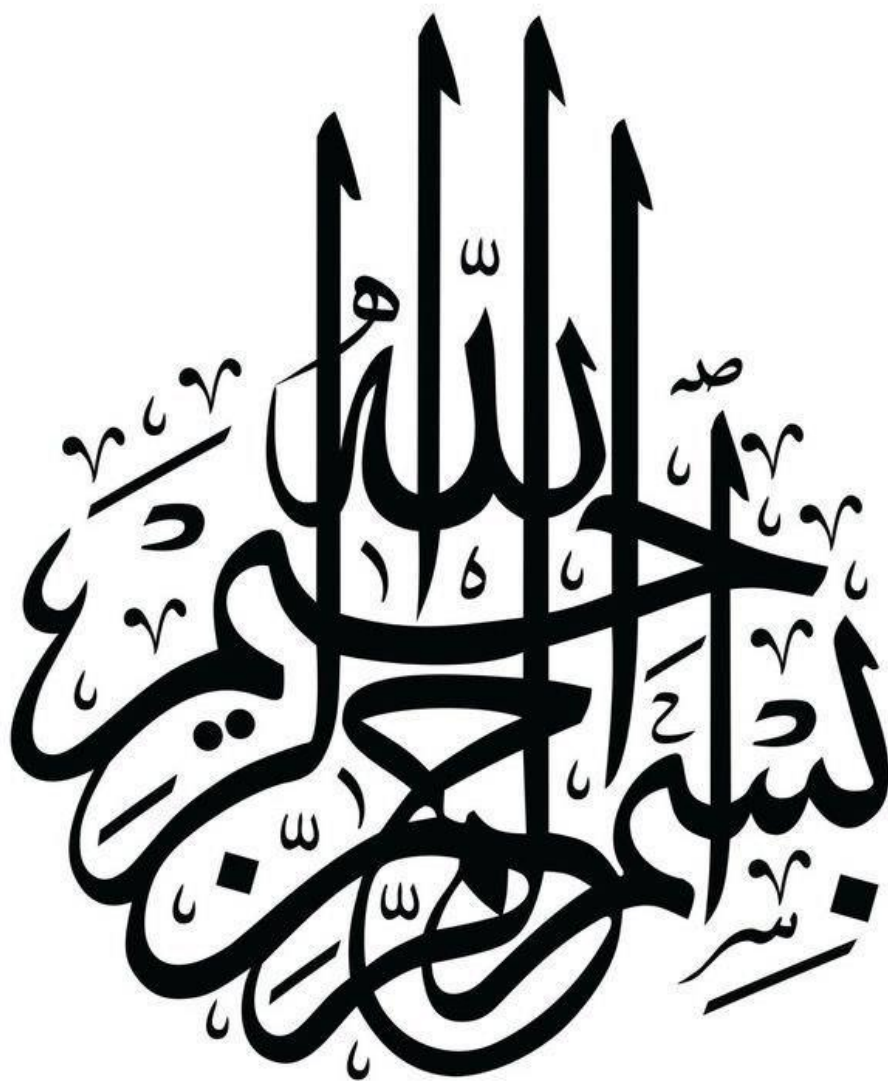
**Résolution faible d'un problème fractionnaire de
contact viscoélastique avec compliance normal**

Présenté par : Ben amor Hania et Guedda Rahma

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Douib bachir	Prof. Président	Univ. El Oued
Abdelaziz Azeb Ahmed	Prof. Rapporteur	Univ. El Oued
Rimi khazzani	MCB. Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire: 2024-2025 / 1446-1447 AH



إهداء

قال تعالى: (وَأَخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنِ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ)

الحمد لله حمدا يليق بجلاله وكماله والصلاه والسلام على خير أنامه وعلى آله وصحبه أجمعين

إلى نروحي الحبيب،

سندي في هذه الحياة، ورفيق دربي، الذي كان دعمه النور الذي أنار طريقي في كل لحظة.

إلى أولادي الأحبّة: (انس، سيرين، أساور)

نبض قلبي وبهجة أيامي بالذين أستمدهم من نور القوة والأمل

إلى أمي الغالية،

منبع الحنان، التي غرست فيّ الصبر والإصرار، وكان دعاؤها سراً لكل نجاح

وإلى أبي الغالي،

الذي علمني أن الطموح لا سقف له، وأن العزيمة تصنع المعجزات.

لكم جميعاً، أهدي ثمرة تعبتي وسنوات جهدي، فأنتم بعد الله، سبب هذا الإنجاز.

رحمة

إهداء

قال تعالى: (وَأَخِرُّ دَعْوَاهُمْ أَنْ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ)

الحمد لله حمدا يليق بجلاله وكماله والصلاه والسلام على خير أنامه وعلى آله وصحبه أجمعين

إلى الانسانية العظيمة إلى الصديقة والحبيبة

إلى بلسم الجراح وداعمة الكفاح إلى منبع الحنان أغلى الجباب

أمي جنتي

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار إلى من أحمل أسمه بكل إفخار

أبي الغالي

إلى الصديق والحبيب إلى السند الذي لا يغيب إلى من قال فيه الله

تعالى: (سَنَشُدُّ عَضُدَكَ بِأَخِيكَ)

أخي وحدي

إلى عائلتي الثانية إلى من أستقبلوني وأحتووني

إلى أمي الثاني خالتي وزوجها ألسه الله ثياب العافيه

إلى أعظم أمرزاق الله لمن أعطوني شعور الإخوة الصادق إلى أخواتي

(جميلة مبروكه وفاء الجبارية بهاهية نوال)

إلى ملاذ المروح وصديقات الدرب:

(صبرينة مبروكه، كنزة نسرين، مريم)

هنية

شكر و عرفان

قال رسول الله ﷺ: (من لا يشكر الناس لا يشكر الله)

نقدم خالص الشكر والتقدير للأستاذ المشرف

عازب أحمد عبد العزيز

على إرشاداته وتوجيهاته التي لم يخل بها علينا يوماً، والذي منحنا
من وقته الشين ومن حرم معلوماته وخبراته الواسعة ما شكل
إضافة كبيرة للعمل البحثي، فنسأل الله العزيز أن يجازيه خير
الجزاء.

والشكر موصول لأعضاء لجنة المناقشة الكرام على تفضلهم بقبول
مناقشة رسالة الماجستير هذه.

Table des matières

Notations générales	7
Introduction	11
1 Modélisation et quelques rappels mathématiques	13
1.1 Modélisation	13
1.1.1 Cadre physique	13
1.1.2 Modèle mathématique	15
1.1.3 Lois de comportement viscoélastique de Kelvin–Voigt	17
1.1.4 Conditions aux limites de contact	19
1.1.5 Lois de frottement	22
1.2 Quelques rappels mathématiques	23
1.2.1 Espaces normés	23
1.2.2 Espaces de Hilbert	24
1.2.3 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$	26
1.2.4 Quelques outils dans l’espace $L^p(\Omega)$	27
1.2.5 Espaces de Sobolev	28
1.2.6 Espaces fonctionnels	33
1.2.7 Fonctions convexes	35
1.2.8 Espaces $L^p(0, T, X)$ et $W^{k,p}(0, T, X)$	36
1.2.9 Dérivées fractionnaires	40
1.2.10 Inégalités auxiliaires	47
1.2.11 Inégalité de Gronwall	48
1.2.12 Méthode de Faedo Galarkin	49

2	Résolution faible d'un problème fractionnaire de contact viscoélastique avec compliance normal	51
2.1	Formulation mécanique du problème	51
2.2	Formulation variationnelle du problème	54
2.3	Existence de la solution	56
	Conclusion	66
	Bibliographie	68
	Bibliographie	68

- $\mathbb{N}$ Ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$ L'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{S}^d$ L'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$.
- c Constante réelle strictement positive.
- $u_{i,j}$ La dérivée partielle de u_i par rapport à x_j i.e. $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.
- Div Divergence du tenseur ; $\text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j})$.
- div Divergence du vecteur ; $\text{div } D = D_{i,i}$
- ${}_0^C D_t^\alpha$ La dérivée de Caputo d'ordre α telle que $0 < \alpha \leq 1$.
- ${}_0 I_t^\alpha$ L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
- $\partial J(x)$ Le sous différentiel de Clarke de J au point $x \in X$, est le sous ensemble de X' .
- $\cdot$ Produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{S}^d$.
- $\|\cdot\|$ La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{S}^d$.
- (x, y) Paire d'un espace produit $X \times Y$.
- $(\cdot, \cdot)_X$ Le produit scalaire de X .
- $\|\cdot\|_X$ La norme de X .
- $(\cdot, \cdot)_{X' \times X}$ Le produit dual entre X' et X .
- p.p. Presque partout.
- Ω Domaine borné avec une surface frontière régulière Γ .
- $\overline{\Omega}$ L'adhérence de Ω .
- Γ_i Les parties de frontière $\Gamma, (i = 1, 2, 3)$.
- $mes(\Gamma_i)$ Mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_i .
- dx Mesure superficielle sur Ω .
- da Mesure superficielle sur Γ_i .

- ν La normale unitaire sortante à Γ .
- v_ν, v_τ Les composantes normal et tangentielle du champ vectoriel v défini sur $\overline{\Omega}$.
- $C^1(\Omega)$ L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω .
- $\mathcal{D}(\Omega)$ L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact.
- $L^2(\Omega)$ L'espace des fonctions u mesurables sur Ω telles que $\int_{\Omega} |u|^2 dx < +\infty$.
- $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ La norme de $L^2(\Omega)$ définie par $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.
- $L^\infty(\Omega)$ L'espace des fonctions u mesurables sur Ω telles que, $\exists c > 0 : |u| < c$, p.p., sur Ω .
- $H^1(\Omega)$ L'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω .
- $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ L'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
- $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ L'espace dual $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
- $(\cdot, \cdot)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma}$ Le produit de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
- H_Γ L'espace $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)^d$.
- H'_Γ L'espace dual de H_Γ .
- $\gamma : Y \rightarrow H_\Gamma$ L'application trace pour les fonctions vectorielles.
- $\mathbb{H}$ L'espace $L^2(\Omega)^d$.
- $\mathbb{H}_1$ Espace de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)^d$.
- $\mathcal{H}$ L'espace $L^2(\Omega)^{d \times d}$.
- $\mathcal{H}_1$ L'espace des tenseurs $\sigma \in H_1$ telle que $\text{Div} \sigma \in |H|$.
- V L'espace $\{v \in \mathbb{H}_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$.
- $C(0, T; H)$ L'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H .
- $C(\overline{\Omega})$ L'espace $C(\overline{\Omega}) = \{ \psi|_\Omega : \psi \in C(\mathbb{R}^d) \}$.
- $AC(0, T; H)$ L'espace de toutes les fonctions absolument continues de $(0, T)$ dans H .
- $C^1(0, T; H)$ L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H .
- $L^p(0, T; H)$ L'espace des fonctions u mesurables sur $[0, T]$ telles que $\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt < +\infty$.
- $\|\cdot\|_{L^p(0, T; H)}$ La norme de $L^p(0, T; H)$ définie par $\|u\|_{L^p(0, T; H)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$.

- $W^{k,p}(0, T; H)$ L'espace de Sobolev de paramètres k et p sur $[0, T]$ dans H .
- $\| \cdot \|_{W^{k,p}(0, T; H)}$ La norme de $W^{k,p}(0, T; H)$ définie par

$$\| u \|_{W^{k,p}(0, T; H)} = \| u \|_{L^p(0, T; H)} + \sum_{\alpha=1}^k \| u^{(\alpha)} \|_{L^p(0, T; H)} .$$
- $\varepsilon(u)$ Tenseur linéarisé des déformations $\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u))$ et $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$
- ρ masse volumique du matériau (constante positive), exprimée en kg/m^3 .
- ∇U Le gradient de U .

Introduction

La théorie des opérateurs monotones est une branche de l'analyse fonctionnelle qui étudie les propriétés des opérateurs monotones dans les espaces vectoriels. Ces opérateurs jouent un rôle crucial dans divers domaines des mathématiques appliquées, notamment les équations aux dérivées partielles, l'analyse non linéaire et l'optimisation convexe. Les références classiques sur la théorie des opérateurs monotones incluent [4, 6]. La dérivée de Caputo est une généralisation de la dérivée classique, introduite par le mathématicien italien Michele Caputo dans les années 1960. Elle est utilisée pour décrire des phénomènes de dérivation non locale tels que la diffusion anormale, la déformation fractale ou le comportement non local dans divers domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie et les sciences appliquées ; voir [23, 21, 12, 16, 17]. La méthode de Galerkin porte le nom du mathématicien Boris Galerkin, qui l'a développée dans les années 1920. Il s'agit d'une approche numérique utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles (EDP). Elle repose sur la formulation variationnelle de l'EDP et permet d'obtenir une solution approchée en projetant l'EDP sur un sous-espace fini de fonctions test [28, 24]. Cette méthode trouve de nombreuses applications en mécanique des fluides et la mécanique des solides. La théorie du point fixe de Banach traite de l'existence et des propriétés des points fixes pour les opérateurs contractants dans les espaces complets [23, 9]. Le calcul fractionnaire a été utilisé dans les modèles biologiques pour capturer les propriétés de mémoire à long terme observées dans les systèmes biologiques. Un exemple notable est la mémoire immunologique, qui permet au système immunitaire de reconnaître et de se souvenir des agents pathogènes rencontrés auparavant. Cette caractéristique de mémoire facilite une réponse plus rapide et plus efficace aux infections ou invasions ultérieures par le même agent pathogène, entraînant une défense immunitaire renforcée (voir [18, 14]). L'analyse et le comportement dynamique d'un nouveau modèle de la dengue, qui englobe des phénomènes tels que la transmission de l'infection, la vaccination, le traitement et la réinfection, nécessitent l'application du calcul fractionnaire, comme décrit dans [28]. Rappelons que l'application des dérivées fractionnaires de Caputo et d'Atangana-Baleanu pour étudier les interactions complexes entre les cellules T CD4+ et les virus du VIH est relativement récente, puisqu'elle a été introduite dans [28]. Dans la modélisation mécanique des gommages et des caoutchoucs, le calcul fractionnaire revêt une importance significative, en particulier lorsqu'il s'agit

de matériaux capables de se souvenir des déformations passées et présentant un comportement viscoélastique. En effet, la dérivation fractionnaire y est naturellement introduite, comme en témoignent les lois constitutives de Kelvin-Voigt fractionnaire et les modèles de Maxwell fractionnaire que l'on peut retrouver dans [23, 9, 16]. Les auteurs de [20, 22] ont étudié une classe d'inégalités hémivariationnelles impliquant l'opérateur intégral d'ordre fractionnaire en temps, en utilisant la loi de Kelvin-Voigt fractionnaire, dans laquelle le contact est décrit par la sous-différentielle de Clarke d'une fonctionnelle non convexe et non lisse. Un modèle similaire avec un problème de contact sans frottement peut être trouvé dans [15]. Très récemment, en 2021, Bouallala et al. [8] ont initié l'étude d'un nouveau modèle de problème de contact fractionnaire avec conformité normale et frottement de Coulomb en thermo-viscoélasticité. Les problèmes de contact dynamique pour des matériaux viscoélastiques ont été étudiés dans [5, 11, 13], et pour des matériaux piézoélectriques dans [5]. Un modèle mathématique qui décrit le contact dynamique avec frottement entre un corps thermo-viscoélastique et une fondation conductrice est présenté dans [7]. En 2002, Han et al. ont présenté des résultats sur la solvabilité des problèmes de contact adhésif dynamiques et quasi-statiques pour des matériaux élastiques et viscoélastiques. Une excellente référence sur les problèmes de contact dynamique avec frottement formulés à l'aide d'une condition de sous-différentielle générale sur la vitesse se trouve dans les actes [10].

Dans le premier chapitre : nous introduisons dans la première section, des notions générales pour une bonne compréhension du problème traité dans la suite. Nous commençons par la description du cadre physique et modèle mathématique du problème de contact étudié puis nous les lois de comportement viscoélastique, les conditions aux limites de contact et les lois de frottement. Dans la deuxième section, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle, énoncés de certains théorème. Enfin, nous terminons par rappeler les lemmes de Gronwall.

Dans le deuxième chapitre : nous intéressons à l'étude mathématique d'un problème de contact sans frottement pour des matériaux viscoélastiques dans un processus quasistatique. Le contact est modélisé par une compliance normale. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible en utilisant des résultats sur les équations dépendant du temps dans le cas fractionnaire, ainsi que des arguments de point fixe de Banach.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion on concernant les différents travaux effectués.

Modélisation et quelques rappels mathématiques

Afin de faciliter la lecture de ce manuscrit, il nous est paru utile de présenter dans ce premier chapitre le cadre physique et fonctionnel dans lequel nous allons travailler. Nous allons commencer par une description de les lois constitutives des matériaux viscoélastiques, ensuite nous présentons les différents types de conditions aux limites et les loi de frottement. A la fin de ce chapitre nous passons en revue quelques Rappels d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert, ainsi que les outils mathématiques que nous utilisons pour la réalisation de ce travail, notamment des résultats sur les espaces fonctionnels, les lemmes de Gronwall qui seront utiles dans les démonstrations, et quelques théorèmes classiques qui joueront un rôle important dans le développement de notre étude.

1.1 Modélisation

Dans cette section, la modélisation mathématique des problèmes de contact en mécanique des milieux continus est essentielle pour comprendre le comportement des matériaux sous diverses conditions de contact. Dans ce cadre, nous concentrons sur un problème de contact viscoélastique fractionnaire avec une compliance normale.

1.1.1 Cadre physique

Nous allons introduire dans ce paragraphe le modèle générale de problème de contact dans ce mémoire. Le cadre physique est le suivant. Nous envisageons un corps viscolastique occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ avec une surface de Lipschitz Γ qui est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$. Soit $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps d'intérêt. Le corps est fixé sur $\Gamma_1 \times (0, T)$, et le champ de déplacement y est donc nul. Des tractions superficielles de densité f_1 agissent sur $\Gamma_2 \times (0, T)$ et une force volumique

de densité f_0 est appliquée dans $\Omega \times (0, T)$. Le corps est en contact sans frottement avec une fondation déformable sur la surface de contact potentielle $\Gamma_3 \times (0, T)$. De plus, le processus est dynamique et donc les termes inertiels sont inclus dans l'équation du mouvement.

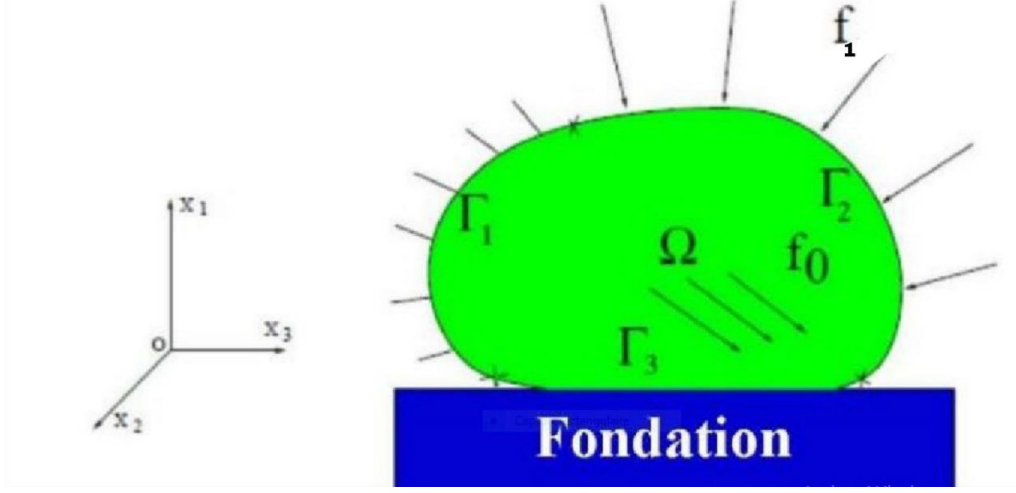


Figure 1.1 - Corps viscoélastique en contact avec une fondation

Ensuite, la formulation classique du problème de contact mécanique avec la compliance normale d'un matériau élastique-viscoélastique la suivante. Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$; "." représente le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d, \mathbb{S}^d$ et $\|\cdot\|$ représentent respectivement la norme sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$. Ainsi, nous avons

$$u \cdot v = u_i \cdot v_i, \quad \|v\| = \sqrt{v \cdot v}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \cdot \tau_{ij}, \quad \|\tau\| = \sqrt{\tau \cdot \tau}, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d.$$

Pour un vecteur v , nous notons par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par

$$v_\nu = v \cdot \nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu. \quad (1.1)$$

Nous désignons par $\sigma = \sigma(x, t)$ le champ des contraintes, par $u = u(x, t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(u)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \bar{\Omega}$

et $t \in [0, T]$. Nous avons aussi pour un champ des contraintes σ nous dénotons par σ_ν et σ_τ les traces normale et tangentielle d'une fonction $\sigma \in \mathbb{H}_1$, on rappelle que lorsque σ est une fonction régulière alors :

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \cdot \nu. \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma\nu) \cdot v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau. \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans l'établissement de formulation variationnelle de problème mécanique de contact. En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps.

par exemple .

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2},$$

où $\dot{u}$ désigne le champ des vitesses et $\ddot{u}$ désigne le champ des accélérations. Rappelons maintenant la relation déformation déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq d, \quad (1.4)$$

nous allons maintenant décrire le modèle mathématique associé au cadre physique que nous avons vu aux conditions précédent.

1.1.2 Modèle mathématique

Le modèle mathématique qu'on va étudier dans cette mémoire, décrit l'évolution du corps dans le cadre physique de la figure 1.1. Dans le cas générale, on décrit l'évolution d'un corps matériel par l'équation de mouvement suivante :

$$\text{Div } \sigma(t) + f_0(t) = \rho \ddot{u}(t) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (1.5)$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse et "Div" désigne l'opérateur divergence des tenseurs tel que

$$\text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j})$$

Les inconnues du problème dans ce cas sont le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$. Les processus d'évolution définis par (1.5) s'appellent processus dynamiques. On remarque que dans le cas où le champ de vitesse varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho \ddot{u}$ peut être négligé et l'équation (1.3) devient

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (1.6)$$

Cette équation s'appelle l'équation d'équilibre et les processus d'évolution définis par cette équation s'appellent processus quasistatiques.

Dans le cas fractionnaire l'équation (1.5) est appelée l'équation de mouvement à feubs fractionnaire et s'écrit comme suit

$$\text{Div } \sigma(t) + f_0(t) = \rho_0^C D_t^{2\alpha} u(t) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (1.7)$$

où ${}_0^C D_t^{2\alpha} u(t)$ représente la dérivée fractionnaire de Caputo de $u(t)$ et sera définie ultérieurement. L'équation (1.7) représente l'équation du mouvement dans le problème P étudié dans ce mémoire. Pour compléter le modèle mathématique (1.7), nous préciserons ultérieurement les conditions aux limites de contact sur les trois parties $\Gamma_{1,2,3}$. Du point de vue mathématique l'équation ne permet pas de modéliser le problème d'équilibre précédent car, par exemple, les u_i du champ des déplacements ne figurent pas dans cette équation. Par ailleurs, du point de vue physique, nous remarquons que l'équation (1.7) exprime une loi universelle valable pour tous les solides. Donc, soumis à des conditions identiques les divers milieux continus auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde. Par conséquent, il faut lui ajouter d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de solide. C'est l'objet des lois de comportements que nous décrirons dans la section suivante.

1.1.3 Lois de comportement viscoélastique de Kelvin–Voigt

La loi de comportement de KelvinVoigt est un modèle fondamental en rhéologie pour décrire le comportement des matériaux viscoélastiques. Dans sa forme classique, elle combine un ressort (comportement élastique) et un amortisseur (comportement visqueux) connectés en parallèle. L'expression de la contrainte $\sigma(t)$ en fonction de la déformation $\varepsilon(t)$ est donnée par :

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(t) + \mathcal{B}\dot{\varepsilon}(t), \quad (1.8)$$

où $\mathcal{A}$ est le module d'élasticité, $\mathcal{B}$ le coefficient de viscosité, et $\dot{\varepsilon}(t)$ la dérivée temporelle classique de la déformation.

Certains matériaux, comme les polymères (gommes, caoutchouc,...), présentent un comportement visco-élastique. De tels systèmes peuvent être modélisés à l'aide de la relation suivante entre les deux tenseurs

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(t) + \mathcal{B} {}^C D_t^\alpha \varepsilon(t),$$

où ${}^C D_t^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo. Ce modèle est particulièrement adapté pour les systèmes où les effets de mémoire et de diffusion anormale sont significatifs.

Cette loi est justifiée par Bagle dans [4] (pour $\alpha = \frac{1}{2}$). Dans, l'introduction de dérivées fractionnaires le cas de polymères est motivée par l'analyse suivante : à cause de la longueur des fibres, les déformations appliquées prennent du temps à être communiquées de proche en proche (la longueur des fibres enroulées, étant bien supérieure à la distance géométrique). Elles sont progressivement amorties et induisent des effets de mémoire (l'état à l'instant t va dépendre des états antérieurs). Si la contrainte décroît comme $t^{-(1+\alpha)}$ elle pourra induire une dérivée fractionnaire d'ordre α . Cet opérateur permet ainsi de donner une description macroscopique simple (ne nécessitant que peu de paramètres) de phénomènes microscopiques complexes. Une présentation de la viscoélasticité via la dérivation fractionnaire.

Loi de comportement viscoélastique à mémoire courte

Une loi de comportement viscoélastique générale à mémoire courte est donnée par

$$\sigma = \mathcal{B}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{A}\varepsilon(u)$$

où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$ sont des fonctions constitutives non linéaires, tel que $\mathcal{B}$ représente l'opérateur de viscosité et $\mathcal{A}$ est l'opérateur d'élasticité. Pour un corps élastique, la loi se réduit à

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(u)).$$

On rappelle qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contrainte $\sigma = (\sigma_{ij})$ est donné par

$$\sigma_{ij} = b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{u}) + a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u),$$

où $\mathcal{B} = (b_{ijkl})$ est le tenseur de viscosité et $\mathcal{A} = (a_{ijkl})$ est le tenseur d'élasticité, pour $i, j, k, l = 1, \dots, d$.

Loi de comportement viscoélastique à mémoire longue

Une loi de comportement viscoélastique à mémoire longue est donnée par

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) + \mathcal{B}\varepsilon(\dot{u}) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s)\varepsilon(u(s))ds$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des fonctions constitutives non linéaires. $\mathcal{B}$ représente l'opérateur de viscosité et $\mathcal{A}$ désigne l'opérateur d'élasticité. Ici $\mathcal{G}$ est le tenseur de relaxation d'ordre quatre qui définit le comportement du matériau avec mémoire longue

lorsque $\mathcal{G} \cong 0$ on retrouve la viscoélasticité de mémoire courte.

Loi de comportement viscoélastique fractionnaire

Le comportement viscoélastique du matériau est modélisé à l'aide d'une loi constitutive linéaire avec temps fractionnaire. Plus précisément, le tenseur des contraintes σ est lié au tenseur

des déformations linéarisées $\varepsilon(u)$ par :

$$\sigma(t) = \mathcal{B}\varepsilon \left({}^C D_t^\alpha u(t) \right) + \mathcal{A}\varepsilon(u(t)) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (1.9)$$

où :

— D_t^α est la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in (0, 1)$ au sens de Caputo.

Cette relation traduit un comportement viscoélastique avec mémoire, typique des matériaux à réponse non instantanée.

1.1.4 Conditions aux limites de contact

Par une condition de contact, nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes. Nous commençons par présenter les conditions aux limites de contact sur chacune des trois parties de Γ . Les égalités et les inégalités qui suivent sont considérées vraies presque partout.

Condition aux limites de déplacement-traction

La condition aux limites de déplacement sur la partie Γ_1 est

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T) \quad (1.10)$$

qui exprime que le corps est encastré sur cette partie.

La condition aux limites de traction est

$$\sigma\nu = f_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T) \quad (1.11)$$

où f_1 représente la densité des forces surfacique appliquées sur Γ_2 et constitue une donnée du problème.

Condition de contact bilatéral

Le contact se fait d'une façon bilatérale, c'est à dire le contact est maintenu pendant le mouvement et il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle. La composante normale du champ des déplacements s'annule sur la surface de contact et donc

$$u_\nu = 0$$

Condition de contact de type Signorini

Cette condition modélise le contact avec une fondation rigide ; elle est donnée par les relations suivantes :

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0.$$

Ici u_ν et σ_ν représentent les composantes normales du champ des déplacements du champ des contraintes.

Ces conditions ont été utilisées dans [12]. qui sont les conditions de contact classiques de Signorini.

Condition de contact avec réponse normale instantanée.

Une condition de contact avec réponse normale instantanée a été utilisé principalement pour décrire un contact lubrifié. Cette condition suppose que la contrainte normale sur la surface de contact est liée à la vitesse normale, c'est-à-dire

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu).$$

où, p_ν est une fonction donnée qui s'annule lorsque l'argument est négatif.

Contact avec compliance normale

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte σ_ν satisfait la condition dite de compliance normale

$$-\sigma_\nu(t) = p_\nu(u_\nu(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.12)$$

Où u_ν est le déplacement normal, et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale. Cette condition indique que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration u_ν .

Comme exemple de fonctions de compliance normale, nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = cr_+ \quad (1.13)$$

et

$$p_\nu(r) = \begin{cases} cr^+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c\alpha & \text{si } r > \alpha. \end{cases} \quad (1.14)$$

où $c > 0$ et $\alpha > 0$ sont des paramètres de surface. En introduisant (1.13) dans (1.12) il vient que $u_\nu > 0 \Rightarrow -\sigma_\nu = cu_\nu$, c'est-à-dire que la réaction de l'obstacle est proportionnelle à la pénétration. En utilisant (1.14) dans (1.12) il vient que $u_\nu > \alpha \Rightarrow -\sigma_\nu = c\alpha$ qui montre que si la pénétration excède la valeur α , alors l'obstacle n'offre pas de résistance supplémentaire à la pénétration. Lorsque le champ d'adhésion est nul (1.12) devient :

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T)$$

L'absence des forces tangentielles de frottement est donnée par :

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times]0, T[\quad (1.15)$$

ce qui représente la condition de compliance normale.

Les relations (1.10), (1.11), (1.12) et (1.15) seront incluses dans les conditions aux limites du problème étudié en chapitre 2

Nous passons maintenant aux conditions dans les directions tangentielles, appelées conditions de frottement ou lois de frottement. Par loi de frottement nous comprenons une relation entre la contrainte tangentielle σ_τ et le déplacement tangentiel u_τ .

1.1.5 Lois de frottement

Dans ce paragraphe, nous allons citer quelques lois de frottement que nous utiliserons dans notre travail. A la surface du contact d'un corps matériel avec une fondation, la contrainte tangentielle σ_τ joue un rôle important dans la nature du glissement, si celle ci est nulle ($\sigma_\tau = 0$) on dit qu'on a un glissement sans frottement ou "glissement parfait". Dans le cas contraire on dit que l'on a un le glissement avec frottement. Il devient nécessaire dans ce cas de modéliser ce frottement par une loi.

Loi de Tresca

Lorsque la force tangentielle est inférieure à un certain seuil S le corps reste bloqué dans la fondation et dès que celle ci dépasse le seuil S , le corps perd sa resistance et entre en glissement, Ce phénomène est interprété par la loi de Tresca. La condition imposée sur la zone de contact est donc la suivante :

$$\|\sigma_\tau\| \leq S$$

S est appelé seuil de frottement. Dans le cas statique, on a,

$$\sigma_\tau = -S \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|}, \quad \text{si, } u_\tau \neq 0$$

Dans le cas quasi-statique les forces de frottement s'écrivent

$$\sigma_\tau = -S \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|}, \quad \text{si, } \dot{u}_\tau \neq 0$$

Loi de Coulomb

Cette loi a été initialement introduite par Amontons, mais c'est grâce à Coulomb que cette-ci est devenue connue. Il montre que le seuil S est proportionnel à la composante normale de la force exercée sur la zone de contact. Le coefficient de frottement dépend de la matière du corps et de la fondation rigide. Cette loi s'interprète par la condition

$$\|\sigma_\tau\| \leq \mu |\sigma_\nu|$$

où μ est une fonction positive appelée aussi seuil de frottement. Dans le cas statique on a

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| < \mu |\sigma_\nu|, \text{ alors, } u_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = \mu |\sigma_\nu|, \text{ alors, } \exists \lambda > 0, \text{ tel que, } u_\tau = -\lambda \sigma_\tau \end{cases}$$

Dans le cas quasi-statique

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| < \mu |\sigma_\nu|, \text{ alors } \dot{u}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = \mu |\sigma_\nu|, \text{ alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \dot{u}_\tau = -\lambda \sigma_\tau \end{cases}$$

1.2 Quelques rappels mathématiques

Cette section présente un ensemble de rappels fondamentaux et avancés en analyse fonctionnelle, essentiels pour la compréhension des équations aux dérivées partielles et des espaces fonctionnels. Nous commencerons par les espaces normés et hilbertiens, puis nous introduirons les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$, les espaces de Sobolev, ainsi que d'autres structures fonctionnelles indispensables dans l'analyse moderne. Des outils puissants comme les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo, les fonctions convexes, et diverses inégalités (dont celle de Gronwall) seront également abordés.

1.2.1 Espaces normés

Définition 1.2.1 (*Norme*). Soit E un espace vectoriel. Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tous x, y dans E et tout α dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

ou $\mathbb{C}$:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (homogénéité),
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.2.2 On dit que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\alpha, \beta > 0$ telles que :

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Définition 1.2.3 On appelle espace normé $(E, \|\cdot\|)$ tout ensemble E muni norm $\|\cdot\|$.

Exemple 1.2.1 L'espace $C([0; 1], \mathbb{R})$ est normé lorsqu'il est muni d'une des normes suivantes :

1. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$
2. $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 [f(t)]^2 dt}$
3. $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)|$ (La norme de la convergence uniforme)

1.2.2 Espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H .

On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\|u\|_H = \sqrt{(u, u)_H}, \tag{1.16}$$

et on rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H,$$

on dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme défini par (1.16).

Soit H' l'espace dual de H

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{(\eta, v)_{H' \times H}}{\|v\|_H}, \quad (1.17)$$

où $(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$ représente la produit dual entre H' et H .

Définition 1.2.4 Soit (X, τ) un espace topologique. Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit **relativement compact** si l'adhérence $\overline{A}$ de A dans X est compacte.

Théorème 1.2.1 (Représentation de Riesz-Fréchet)

Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual, alors pour tout $\phi \in H'$ il existe un unique $f \in H$ tel que

$$(\phi, v)_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H, \quad (1.18)$$

de plus

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H. \quad (1.19)$$

L'importance de ce théorème est que tout forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

Triplet de Gelfand

Dans cette paragraphe nous rappelons la définition d'un triplet de Gelfand. Pour cela on va utiliser le Théorème 1.2.1 de représentation de Riesz-Fréchet. Soit V un espace de Hilbert réel tel que V dense dans H et l'injection $V \subset H$ est continue, et on identifie H et H' . Soit V^* le dual de V , on peut alors prolonger H dans V^* grâce au procédé suivant : étant donné $f \in H$, l'application $v \in V \mapsto (f, v)_H$ est une forme linéaire continue sur H et a fortiori sur V , on la note $Tf \in V^*$ de sorte que

$$(Tf, v)_{V^* \times V} = (f, v)_H, \quad \forall f \in H, \quad \forall v \in V.$$

On vérifie que $T : H \rightarrow V^*$ possède les propriétés suivantes

- 1) $\|Tf\|_{V^*} \leq C\|f\|_H, \quad \forall f \in H,$
- 2) T est injective,
- 3) $T(H)$ est dense dans V^* .

En général T n'est pas surjective de H sur V^* . A l'aide de T on prolonge H dans V^* et on a le schéma suivant

$$V \subset H \equiv H' \subset V^*$$

où les injections canoniques sont continues et denses. Ce triplet est appelé Triplet de Gelfand, on dit que H est l'espace pivot.

Soit E un espace de Banach et $J : E \longrightarrow E''$ l'injection canonique de E dans E'' , définie par $J_x(f) = f(x)$ pour tout $x \in E, f \in E'$.

Définition 1.2.5 *L'espace E est dit réflexif, si $J(E) = E''$.*

D'où le résultat suivant : (équivalence)

Théorème 1.2.2 *Soit E est un espace de Banach, alors E est réflexif si et seulement si toute suite bornée dans E admet au moins une sous suite converge faiblement.*

Définition 1.2.6 *Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble dense et dénombrable.*

Théorème 1.2.3 *Soit E un espace de Banach séparable $\Rightarrow$ toute suite bornée $(f_n)_n$ dans E' admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

1.2.3 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

On à $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |v(x)| dx.$$

On va rappeler des résultats d'intégration très outils sur tout pour la dernière partie de ce mémoire.

Définition 1.2.7 Soit $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, et } |v|^p \in L^1(\Omega)\},$$

muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

On Rappelons l'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ c'est l'ensemble

$$L^\infty(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \exists C > 0, |v(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\},$$

muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C, \text{ telle que } |v(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)|.$$

1.2.4 Quelques outils dans l'espace $L^p(\Omega)$

Théorème 1.2.4 (Convergence faible)

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ converge faiblement vers $x \in H$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y) = (x, y) \quad \forall y \in H.$$

On écrit souvent $x_n \rightharpoonup x$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte que si $x_n \rightarrow x$ dans H , alors $x_n \rightharpoonup x$.

Définition 1.2.8 (Convergence faible*)

soit E un espace Banach, et soit E' l'espace dual, une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E' converge faible* vers f dans E' , et on note $f_n \xrightarrow{*} f$, si

$$(f_n, x)_{E' \times E} \rightarrow (f, x)_{E' \times E} \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Théorème 1.2.5 Soit (x_n) une suite bornée de H . Alors il existe un élément $x \in H$ et une sous-suite de (x_n) encore notée par (x_n) telle que $x_n \rightarrow x$.

Théorème 1.2.6 (*Convergence dominée de Lebesgue*)

Soit (v_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = v(x)$, p.p. sur Ω ,
- 2) il existe une fonction positive $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $|v_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω .

Alors $v \in L^1(\Omega)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{L^1(\Omega)} = 0$.

1.2.5 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles. On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, d\}, \quad (1.20)$$

On note par ∇u le vecteur des composantes $\partial_i u$, et on a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^d (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)}, \quad (1.21)$$

et la norme associée :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{H^1(\Omega)}},$$

et on écrit :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}^2, \quad (1.22)$$

on a les résultats suivants

$$C^1(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega). \quad (1.23)$$

Théorème 1.2.7 (*Injection continue de Sobolev*)

Soient I un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$, et $r, s \in \mathbb{R}$. Alors, les injections suivantes sont continues

1. si $s \leq r$: on a $H^r(I) \hookrightarrow H^s(I)$;

c'est à dire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\|u\|_{H^s(I)} \leq C \|u\|_{H^r(I)} \quad \forall u \in H^r(I). \quad (1.24)$$

2. si $s > \frac{N}{2}$; on a $H^{s+j}(I) \hookrightarrow C_b^j(\bar{I}) \quad \forall j \in \mathbb{N}$;

c'est à dire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\|u\|_{C_b^j(\bar{I})} \leq C \|u\|_{H^{s+j}(I)} \quad \forall u \in H^{s+j}(I).$$

Théorème 1.2.8 (Théorème de Rellich-Kondrachov) Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné et de classe C^1 , alors $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^p(\Omega)$: de toute suite bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans $L^p(\Omega)$ et faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

La convergence faible de la sous-suite vient, bien sûr, de la réflexivité de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

En particulier, on a toujours :

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow H_0^{m-1}(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \text{et on en déduit :}$$

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$$

Définition 1.2.9 (Frontière lipschitzienne) Un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$ est dit à frontière lipschitzienne s'il existe des ouverts $(\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n)$ de $\mathbb{R}^N$ et des applications $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ telles que :

1. $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^n \Omega_i$ et $\Omega_0 \subset \Omega$,
2. $\phi_0 : \Omega_0 \rightarrow B_{1,N} = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < 1\}$ est bijective, et ϕ_0 ainsi que ϕ_0^{-1} sont lipschitziennes,
3. Pour tout $i \geq 1$, $\phi_i : \Omega_i \rightarrow B_{1,N}$ est bijective, ϕ_i et ϕ_i^{-1} sont lipschitziennes, et :

$$\phi_i(\Omega_i \cap \Omega) = B_{1,N} \cap \mathbb{R}_+^N, \quad \phi_i(\Omega_i \cap \partial\Omega) = B_{1,N} \cap \{(0, y) : y \in \mathbb{R}^{N-1}\}.$$

Théorème 1.2.9 *si I est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à Frontière "assez régulière" (lipschitzienne) alors, le injection suivante est compact*

$$\text{on a } H^m(I) \hookrightarrow L^p(I) \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}^* \text{ telle que } m - \frac{N}{2} > -\frac{N}{p}.$$

Théorème 1.2.10 (trace de Sobolev)

Soit Ω un domaine Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ et $1 < p < \infty$. Il existe une application linéaire et continue γ définie sur l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ à valeurs dans l'espace $L^p(\Gamma)$ telle que :

- 1) $\gamma v = v|_{\Gamma}$ si $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$,
- 2) l'application γ est une application compact,
- 3) il existe une constante $C > 0$, provenant de la continuité de l'application γ , tel que

$$\|\gamma v\|_{L^p(\Gamma)} \leq C \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega).$$

L'application γ s'appelle application de tâche sur $W^{1,p}(\Omega)$,

Définition 1.2.10 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par*

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_{\alpha} \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_{\alpha} = D^{\alpha}u \right\}.$$

Où $D^{\alpha}u$ est la dérivée faible d'ordre α de u .

Remarque 1.2.1 *Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^{\alpha}u$ et v_{α} .*

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)} & \text{si } p = \infty, \end{cases} \quad (1.25)$$

pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 1.2.11 *Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\|\cdot\|$, sont des espaces de Banach. De plus, les espaces $H^k(\Omega)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.*

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev .

Remarque 1.2.2 *On note par $R = \{u \in H^1(\Omega)^d : \varepsilon(u) = 0\}$, où $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^\top)$ est le tenseur des déformations symétriques, et $\mathbf{R}$ désigne l'espace des champs de déplacements rigides (translations et rotations).*

Théorème 1.2.12 (Inégalité de Korn)

Soit $\mathbf{V}$ un sous-espace fermé de $W^{1,2}(\Omega)^d$ tel que :

$$\mathbf{V} \cap \mathbf{R} = \{0\}. \quad (1.26)$$

Alors, il existe $C > 0$ ne dépendant que Ω et $\mathbf{V}$ tel que

$$\|\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}} \geq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)^d} \quad \forall u \in \mathbf{V}. \quad (1.27)$$

Preuve

1. Première inégalité de Korn .

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné à bord Lipschitzien. Pour tout $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)},$$

où $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ est le gradient symétrisé.

2. Par l'absurde .

Supposons que cette inégalité est fausse. Alors, il existe une suite $(u_k) \subset H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \text{et} \quad \|\varepsilon(u_k)\|_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{k}.$$

La suite (u_k) est bornée dans H_0^1 , donc il existe une sous-suite (notée encore (u_k)) qui converge faiblement dans H_0^1 et fortement dans L^2 vers une fonction u . Par continuité

de ε , on a :

$$\varepsilon(u_k) \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega),$$

ce qui implique que $\varepsilon(u) = 0$. Donc u est un champ de vecteurs dont le gradient est antisymétrique. Mais comme $u \in H_0^1$, cela implique $u = 0$. D'autre part, $\|\nabla u_k\|_{L^2} = 1$, donc ∇u_k ne peut pas converger faiblement vers zéro, ce qui est une contradiction.

3. Décomposition du gradient .

On peut décomposer le gradient ∇u en la somme d'une partie symétrique $\varepsilon(u)$ et d'une partie antisymétrique $\omega(u)$:

$$\nabla u = \varepsilon(u) + \omega(u), \quad \text{où} \quad \omega(u) = \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla u^T)$$

Alors, la norme au carré du gradient peut s'écrire comme :

$$|\nabla u|^2 = |\varepsilon(u)|^2 + |\omega(u)|^2 + 2\langle \varepsilon(u), \omega(u) \rangle$$

Mais comme $\varepsilon(u)$ est symétrique et $\omega(u)$ est antisymétrique, leur produit scalaire est nul :

$$\langle \varepsilon(u), \omega(u) \rangle = 0$$

Donc, on a :

$$|\nabla u|^2 = |\varepsilon(u)|^2 + |\omega(u)|^2 \geq |\varepsilon(u)|^2$$

Ce qui donne une première inégalité :

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \geq \|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}$$

Mais cette inégalité est dans le sens inverse de celle que l'on souhaite démontrer. Pour obtenir l'inégalité de Korn, il faut montrer que $\|\nabla u\|_{L^2}$ est **contrôlée** par $\|\varepsilon(u)\|_{L^2}$.

4. Raisonnement par l'absurde .

Supposons par l'absurde que l'inégalité de Korn n'est pas vraie. Alors pour tout entier

$k \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction $u_k \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \text{et} \quad \|\varepsilon(u_k)\|_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{k}$$

La suite (u_k) est donc bornée dans $H_0^1(\Omega)$, ce qui implique (par compacité de l'injection de Rellich-Kondrachov) qu'il existe une sous-suite (encore notée (u_k)) et une fonction $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ telles que :

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } H^1 \quad \text{et} \quad u_k \rightarrow u \quad \text{fortement dans } L^2$$

Or, $\varepsilon(u_k) \rightarrow 0$ dans L^2 , donc $\varepsilon(u) = 0$. Cela signifie que u est un champ de vecteurs à gradient antisymétrique. Mais comme $u \in H_0^1$, la seule telle fonction est $u = 0$.

Ce qui implique :

$$u_k \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^2$$

Mais cela contredit le fait que :

$$\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \text{pour tout } k$$

Donc, par contradiction, l'inégalité de Korn est bien vérifiée.

1.2.6 Espaces fonctionnels

Dans cette section, nous dérivons une formulation faible du problème **P** et étudions sa solvabilité. Partout dans ce qui suit, nous utilisons la notation classique pour les espaces L^p et Sobolev associés à Ω et Γ . Soit X un espace de Banach et T un nombre réel positif. Alors, pour $k = 1, 2, \dots$, nous utilisons la notation classique pour $L^p(0, T; X)$, $C(0, T; X)$ et $W^{k,p}(0, T; X)$. Nous introduisons maintenant les espaces fonctionnels :

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= [L^2(\Omega)]^d, \quad \mathbb{H}_1 = [H^1(\Omega)]^d, \\ \mathcal{H} &= \left\{ \tau = (\tau_{ij}) \mid \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega), \ i, j = 1, \dots, d \right\}, \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \mid \text{Div } \sigma \in |H|\}.$$

sont des espaces réels de Hilbert :

$$\begin{aligned} (u, v)_{\mathbb{H}} &= \int_{\Omega} \rho u_i v_i dx, \\ (u, v)_{\mathbb{H}_1} &= (u, v)_{\mathbb{H}} + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} &= (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, \text{Div } \tau)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

et les normes associées : $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$, $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_1}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$.

Quand σ est une fonction régulière, la formule de type Green suivante est valable :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_{\mathbb{H}} = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da, \text{ pour tout } v \in \mathbb{H}_1 \quad (1.28)$$

De plus, en gardant à l'esprit (1.10) et (1.11), nous introduisons l'espace et l'ensemble de déplacements admissibles suivants :

$$V = \{v \in \mathbb{H}_1, v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\},$$

et

$$V_{ad} = \{v \in V, v_{\nu} \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\}$$

produit scalaire et de la norme donnés par :

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad \|v\|_V = (v, v)_V^{\frac{1}{2}}, \text{ pour tout } v \in V$$

Depuis mes mesures $(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn est vraie : il existe $c_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 tel que :

$$\|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq c_K \|v\|_{H_1}, \text{ pour tout } v \in V. \quad (1.29)$$

De plus, selon le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $c_S > 0$ dépendant uniquement de Ω, Γ_1 , et Γ_3 tel que :

$$\|v\|_{[L^2(\Gamma_3)]^d} \leq c_S \|v\|_V, \text{ pour tout } v \in V \quad (1.30)$$

Soit $V \subset H \subset V^*$ un triple d'espaces d'évolution, où V est un espace de Banach réflexif et séparable, H est un espace de Hilbert séparable, et l'embedding $V \rightarrow H$ est dense et continue. L'opérateur d'intégration entre V et H est noté ι et est supposé compact. L'espace dual de V est noté V^* , et la cartographie duale $\iota : H \rightarrow V^*$ est également linéaire, continue et compacte.

Définition 1.2.11 Une **fonction propre** f d'un opérateur linéaire A sur un espace fonctionnel est un **vecteur propre** de cet opérateur. En d'autres termes, une fonction propre d'un opérateur linéaire A , défini sur un certain espace de fonctions, est toute fonction f , non identiquement nulle, qui, lorsqu'on lui applique l'opérateur, est simplement multipliée par un scalaire. Autrement dit, elle satisfait :

$$Af = \lambda f,$$

où λ est une **valeur propre** associée à f .

L'existence de telles fonctions propres est particulièrement utile pour l'analyse de l'opérateur A , car elles permettent souvent de mieux comprendre sa structure et son spectre.

1.2.7 Fonctions convexes

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et à valeurs dans $] -\infty, +\infty[$. Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est à dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u, v \in X, t \in]0, 1[$$

La fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tels que $u \neq v$. Pour toute fonction $\varphi : X \rightarrow] -\infty, +\infty[$, on définit le domaine et

l'épigraphe de φ respectivement par

$$\text{dom}(\varphi) = \{u \in X \mid \varphi(u) < +\infty\}$$

$$\text{epi } \varphi = \{(u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(u) \leq \alpha\}$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants :

1. φ est propre si et seulement si $\text{dom}(\varphi) \neq \emptyset$,
2. le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe.
3. φ est convexe si et seulement si $\text{epi } \varphi$ est un ensemble convexe dans $X \times \mathbb{R}$.

Soit maintenant H un espace de Hilbert. Une fonction $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty[$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) en $u_0 \in H$ si

$$\liminf_{u \rightarrow u_0} \varphi(u) \geq \varphi(u_0)$$

Une fonction est s.c.i. sur $K \subset H$ si elle est s.c.i. en tout point de K et elle est dite s.c.i. si elle est s.c.i. sur tout H . La propriété de semi-continuité peut être caractérisée de la façon suivante :

Lemme 1.2.1 *Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty[$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. φ est semi-continue inférieurement.
2. L'épigraphe de φ est fermé dans $H \times \mathbb{R}$.

1.2.8 Espaces $L^p(0, T, X)$ et $W^{k,p}(0, T, X)$

Définition 1.2.12 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions mesurables $u : (0, T) \rightarrow X$ telles que l'application $t \mapsto \|u(t)\|_X$ appartienne à $L^p(0, T)$. On sait que $L^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé muni de la norme :*

$$\begin{cases} \|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf \{C > 0 : \|u(t)\|_X \leq C \text{ p.p. sur } (0, T)\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Par ailleurs, on a les résultats suivants.

Proposition 1.2.1

- (1) $L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p \leq \infty$) est un espace de Banach.
- (2) Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

- (3) $L^r(0, T; X) \subset L^q(0, T; X)$ avec injection continue $1 \leq q \leq r \leq \infty$.
- (4) Si X est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X) \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' = L^\infty(0, T; X),$$

où $L^p(0, T; X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.2.13 Soit $u, v \in L^1(0, T; X)$. La fonction v s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0, T)$ si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t) u(t) dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) v(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T).$$

$C_c^\infty(0, T)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans $(0, T)$. Nous écrivons $v = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $v = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

Définition 1.2.14 Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ est l'espace des fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ telles que $u \in L^p(0, T; X)$ et $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$. Notons que $W^{1,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)} = \|u\|_{L^p(0, T; X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0, T; X)}.$$

En particulier, $W^{1,2}(0, T; X)$ muni de la norme précédente est un espace de Hilbert.

Définition 1.2.15 *Étant donné un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace*

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{u \in W^{k-1,p}(0, T; X) \mid \dot{u} \in W^{k-1,p}(0, T; X)\}.$$

On vérifie aisément que $u \in W^{k,p}(0, T; X)$ si et seulement s'il existe k fonctions $g_1, \dots, g_k \in L^p(0, T; X)$ telle que

$$\int_0^T u(t) \varphi^{(j)}(t) dt = (-1)^j \int_0^T g_j(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_c^\infty([0, T]), \forall j = 1, 2, \dots, k,$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j de φ . On peut donc considérer les successives $\dot{u} = g_1, u^{(2)} = g_2, \dots, u^{(k)} = g_k$. L'espace $W^{k,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k} \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Théorème 1.2.13 *Si la fonction u appartient à l'espace $W^{1,p}(0, T; X)$, $p \in [1, \infty]$. Nous avons alors :*

1. $\|u(t) - u(s)\|_X \leq \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$
2. *si de plus $p < \infty$, on a*

$$\|u(t) - u(s)\|_X^p \leq (t-s)^p \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X^p dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

3. *si $p = \infty$, on a*

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leq \|\dot{u}\|_{L^\infty(0,T;X)} \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Théorème 1.2.14 *Dans le cas où l'espace $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ est un espace de Hilbert et si la fonction u appartient à l'espace $W^{1,2}(0, T; X)$, alors*

1. *la fonction $t \mapsto \frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle $]0, T[$,*
2. $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_X^2 = (\dot{u}(t), u(t))_X, \quad p.p. \ t \in]0, T[$,
3. $\frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} \|u(0)\|_X^2 + \int_0^t (\dot{u}(s), u(s))_X ds, \quad \forall t \in [0, T].$

Ces quelques propriétés achèvent cette section. Pour plus de détails sur les résultats dans ce paragraphe nous renvoyons le lecteur

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs frottements monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert H munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et de la norme associé $\|\cdot\|_H$.

Définition 1.2.16 Soient $A : H \rightarrow H$ un opérateur non linéaire, l'opérateur A est dit

1. monotone si

$$(Au - Av, u - v)_H \geq 0, \quad \forall u, v \in H,$$

2. fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_H \geq m\|u - v\|_H^2, \quad \forall u, v \in H,$$

3. Lipschitz s'il existe $L > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_H \leq L\|u - v\|_H, \quad \forall u, v \in H,$$

4. hemicontinu si pour toute suite numérique (t_n) tel que $t_n \rightarrow t$ lorsque $n \rightarrow \infty$ on a :

$$(A(u + t_n v), w)_H \rightarrow (A(u + tv), w)_H \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall u, v, w \in H.$$

Définition 1.2.17 Soit la fonction $j : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ et soit Ω ouvert dans $H \times H$, on dit que j est localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si , pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un voisinage $U \subset \Omega$ de (t_0, x_0) et une constante $C > 0$ tels que, pour tous (t, x_1) et $(t, x_2) \in U$, on a

$$|j(t, x_1) - j(t, x_2)| \leq C\|x_1 - x_2\|.$$

Théorème 1.2.15 (Théorème de point fixe de Banach)

Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in]0, 1[$ telle que

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq c\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e, possède un point fixe unique

dans K .

Pour l'opérateur $\Lambda^n : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1}) \quad n \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe.

Théorème 1.2.16 *Sous les mêmes conditions du Théorème 1.2.15. Supposons que $\Lambda^n : K \rightarrow K$ est une contraction pour n un entier positif. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .*

Définition 1.2.18 *Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que*

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 1.2.19 *Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que*

$$a(u, u) \geq m \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

1.2.9 Dérivées fractionnaires

Fonctions Spéciales

Fonction Gamma

Définition 1.2.20 *Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$, la fonction $\Gamma(z)$ est définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Proposition 1.2.2 *Pour tout $z > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(n+1) = n!$.
3. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Quelques exemples de valeurs spécifiques de la fonction Gamma ($\Gamma(\alpha)$)

- $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = 1$
- $\Gamma(0^+) = +\infty$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

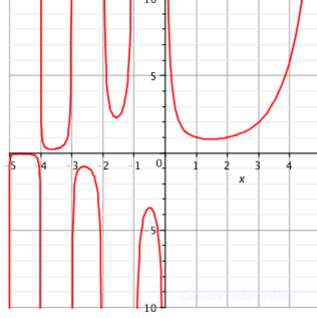


Figure 2.2: Graph of the Gamma function $\Gamma(x)$ in a real domain.

Figure 1.2 : Graphique de la fonction Gamma $\Gamma(x)$ dans un domaine réel.

Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.2.21 pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n - 1 \leq \alpha < n$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction est définie par :

$$D_a^\alpha f(x) := D^n \mathcal{J}_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, x > 0 \quad (1.31)$$

$$D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

En particulier,

1. pour $\alpha = 0$, on a :

$$D_a^0 f(x) = D \mathcal{J}_a^1 f(x) = I f(x) \quad (1.32)$$

2. pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$ on a :

$$D_a^m f(x) = D^{m+1} \mathcal{J}_a^{m+1-m} f(x) = D^{m+1} \mathcal{J}_a^1 f(x) = D^m f(x) \quad (1.33)$$

Ainsi pour $\alpha \in \mathbb{N}$, la dérivée fractionnaire de R-L coïncide avec la dérivée usuelle.

Exemple 1.2.2 Soit $f(x) = (x - a)^\nu$ avec $\nu > -1$ et $\alpha \leq 0$ et tel que $n - 1 \leq \alpha < n$, on a :

$$D_a^\alpha f(x) = D^n \mathcal{J}^{n-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + n - \alpha + 1)} D^n (x - a)^{n-(\alpha-\nu)} \quad (1.34)$$

pour le cas, $(\alpha - \nu) \in \mathbb{N}$ on a :

$$D_a^\alpha f(x) = 0, (\alpha - \nu) \in 1, 2, \dots, n \quad (1.35)$$

par ailleurs si $(\alpha - \nu) \notin \mathbb{N}$, on a :

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1 - \alpha)} (x - a)^{\nu-\alpha} \quad (1.36)$$

Proposition 1.2.3 Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ alors pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$D_a^\alpha f(x) = D^m \mathcal{J}_a^{m-\alpha} f(x), m > \alpha \quad (1.37)$$

Preuve . comme $m \geq n$, on a :

$$\begin{aligned} D^m \mathcal{J}_a^{m-\alpha} f(x) &= D^n D^{m-n} \mathcal{J}_a^{m-n} \mathcal{J}_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^n \mathcal{J}_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D_a^\alpha f(x) \end{aligned}$$

car $D^{m-n} \mathcal{J}_a^{m-n} = I$

Théorème 1.2.17 Soient f et g deux fonction dont les dérivées fractionnaire de $R - L$ existent, pour c_1 etc $c_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$D_a^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 D_a^\alpha f(x) + c_2 D_a^\alpha g(x) \quad (1.38)$$

Remarque 1.2.3 Supposons que $f \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$ tel que $D^\alpha f \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$ alors :

$$\mathcal{J}^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n C_k t^{\alpha-x}, C_k \in \mathbb{R}, n = [\alpha] + 1 \quad (1.39)$$

Lemme 1.2.2 Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a, b]$, alors l'égalité :

$$D_a^\alpha \mathcal{J}_a^\alpha f(x) = f(x) \quad (1.40)$$

et vraie pour presque tout $x \in [a, b]$

Preuve. En utilisant la Définition 1.2.21 on a :

$$D_a^\alpha \mathcal{J}_a^\alpha f(x) = D^n \mathcal{J}_a^{n-\alpha} \mathcal{J}_a^\alpha f(x) = D^n \mathcal{J}_a^n f(x) = f(x)$$

Théorème 1.2.18 Soient $\alpha, \beta > 0$ et $n-1 \leq \alpha < n, m-1 \leq \beta < m$ tel que $n, m \in \mathbb{N}^*$ alors :

1. Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1[a, b]$ l'égalité :

$$D_a^\beta (\mathcal{J}_a^\alpha f)(x) = \mathcal{J}_a^{\alpha-\beta} f(x) \quad (1.41)$$

est presque partout sur $[a, b]$.

2. S'il existe une fonction $\varphi \in L^1[a, b]$ tel que $f = \mathcal{J}_a^\alpha \varphi$, alors :

$$\mathcal{J}_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x) \quad (1.42)$$

pour presque tout $x \in [a, b]$.

3. pour $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}^*$. si les dérivées fractionnaire $D_a^\alpha f$ et $D_a^{k+\alpha} f$ existes, alors :

$$D^k (D_a^\alpha f(x)) = D_a^{k+\alpha} f(x) \quad (1.43)$$

4. Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $D_a^{\beta-\alpha} f$ existe, alors :

$$D_a^\beta (\mathcal{J}_a^\alpha f)(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x) \quad (1.44)$$

Preuve. En utilisant la Définition 1.2.21 on obtient :

a) pour $\alpha > \beta > 0$, alors $n \geq m$, on a :

$$\begin{aligned} D_a^\beta (\mathcal{J}_a^\alpha f)(x) &= D^n \mathcal{J}_a^{n-\beta} (\mathcal{J}_a^\alpha f)(x) \\ &= D^n (\mathcal{J}_a^{n+\alpha-\beta} f)(x) \\ &= D^n \mathcal{J}_a^n (\mathcal{J}_a^{\alpha-\beta} f)(x) \\ &= \mathcal{J}_a^{\alpha-\beta} f(x) \end{aligned}$$

presque pour tout $x \in [a, b]$

b) Par la relation (1.40) on obtient :

$$\mathcal{J}_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = \mathcal{J}_a^\alpha (D_a^\alpha \mathcal{J}_a^\alpha f(x)) = \mathcal{J}_a^\alpha (f(x)) = f(x)$$

c) on a

En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann–Liouville :

$$D_a^\alpha f(x) = D^n \mathcal{J}_a^{n-\alpha} f(x), \quad \text{avec } n = \lceil \alpha \rceil,$$

on obtient :

$$D^k [D_a^\alpha f(x)] = D_a^{k+\alpha} f(x),$$

ce qui montre que la composition d'une dérivée entière d'ordre k avec une dérivée fractionnaire d'ordre α donne une dérivée fractionnaire d'ordre $k + \alpha$.

d'où la résultat.

d) on a :

$$D_a^\beta (\mathcal{J}_a^\alpha f)(x) = D^m \mathcal{J}_a^{m-\beta} (\mathcal{J}_a^\alpha f)(x) = D^m \mathcal{J}_a^{m-(\beta-\alpha)} f(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x)$$

existe pour $i - 1 \leq \beta - \alpha < i$ et $i \leq m$

Théorème 1.2.19 Si $f \in L^1[a, b]$, $b > 0$, la transformée de R - L de f est :

$$\mathcal{L}(D_0^\alpha f)(s) = s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(x)]_{t=0} \quad (1.45)$$

avec $n - 1 < \alpha < n$, cette transformée de Laplace est bien connue.

Preuve. Par la Définition 1.2.21, on trouve

$$\mathcal{L}(D_a^\alpha f)(s) = \mathcal{L}(D^n \mathcal{J}_0^{n-\alpha} f)(s) \quad (1.46)$$

$$= s^n \mathcal{L}(\mathcal{J}_0^{n-\alpha} f)(s) - \sum_{n=0}^{n-1} s^{k-n-1} [D^k (\mathcal{J}_0^{n-\alpha} f)(t)]_{t=0} \quad (1.47)$$

$$= s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{n=0}^{n-1} s^{k-n-1} [D^k (\mathcal{J}_0^{n-\alpha} f)(t)]_{t=0} \quad (1.48)$$

Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.2.22 (*L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville*).

Soit X un espace de Banach et $(0; T)$ un intervalle de temps fini. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ pour une fonction donnée $f \in L^1(0, T; X)$ est définie par

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \quad \text{pour tout } t \in (0, T),$$

Pour compléter la définition, nous fixons ${}_0I_t^0 = I$, où I est l'opérateur d'identité, ce qui signifie que ${}_0I_t^0 f(t) = f(t)$ pour $p.p. t \in (0, T)$.

Définition 1.2.23 (*La dérivée Caputo de l'ordre, $0 < \alpha \leq 1$*). Soit X un espace de Banach, $0 < \alpha < 1$ et $(0, T)$ un intervalle de temps fini. Pour une fonction donnée $f \in AC(0, T; X)$, la dérivée fractionnaire de Caputo de f est définie par

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = {}_0I_t^{1-\alpha} f'(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds \quad \text{pour tout } t \in (0, T).$$

Pour compléter la définition pour $\alpha = 1$ nous avons

$${}_0^C D_t^1 f(t) = I f'(t) = f'(t) \quad \text{pour p.p. } t \in (0, T).$$

De plus, nous rappelons le critère de compacité, analogue au lemme d'Aubin-Lions, pour l'existence de solutions faibles aux EDP fractionnaires en temps

Théorème 1.2.20 *Soit $T > 0, \alpha \in (0, 1)$ et $p \in [1, \infty)$. Soit $V, L^2(0, T; V)$ et V^* des espaces de Banach. $V \hookrightarrow L^2(0, T; V)$ de façon compacte et $L^2(0, T; V) \hookrightarrow V^*$ de façon continue. Supposons que $W \subset L_{loc}^1((0, T); V)$ satisfasse :*

(i). *Il existe $r_1 \in [1, \infty)$ et $c > 0$ tels que pour tout $u \in W$,*

$$\sup_{t \in (0, T)} {}_0 I_t^\alpha (\|u\|_V^{r_1}) = \sup_{t \in (0, T)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|u(s)\|_V^{r_1} ds \leq c.$$

(ii). *Il existe $p_1 \in (p, \infty]$ tels que W est borné dans $L^{p_1}((0, T); L^2(0, T; Q))$.*

(iii). *There exist $r_2 \in [1, \infty)$ and $c_s > 0$ tels que $\forall u \in W$, il existe une affectation de la valeur initiale u_0 telle que la dérivée faible de Caputo satisfasse :*

$$\|{}_0^C D_t^\alpha u\|_{L^{r_2}((0, T); V^*)} \leq c_s,$$

Alors, W est relativement compact dans $L^p((0, T); L^2(0, T; V))$.

Proposition 1.2.4 *Soit X un espace de Banach et $\alpha, \beta > 0$. Les énoncés suivants sont alors valables :*

(i) *pour $y \in L^1(0, T; X)$, nous avons*

$${}_0 I_t^\alpha {}_0 I_t^\beta y(t) = {}_0 I_t^{\alpha+\beta} y(t) \quad \text{pour p.p. } t \in (0, T),$$

(ii) *pour $y \in AC(0, T; X)$ et $\alpha \in (0, \alpha]$, nous avons*

$${}_0 I_t^{\alpha C} D_t^\alpha y(t) = y(t) - y(0) \quad \text{pour p.p. } t \in (0, T),$$

(iii) pour $y \in L^1(0, T; X)$, nous avons

$${}_0^C D_t^\alpha I_t^\alpha y(t) = y(t) \quad \text{pour p.p. } t \in (0, T).$$

Maintenant, nous établissons le comportement global suivant de l'EDO fractionnaire.

Proposition 1.2.5 [21] soit $\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$. supposons $f : [0, \infty) \times (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$

est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. En d'autres termes, pour tout $A > 0$ et tout $K \subset (\alpha, \beta)$ compact, il existe une constante $L_{A,K} > 0$ telle que :

$$\sup_{0 \leq t \leq A} |f(t, v_1) - f(t, v_2)| \leq L_{A,K} |v_1 - v_2| \quad \forall v_1, v_2 \in K.$$

soit $0 < \gamma < 1$ et $v_0 \in (\alpha, \beta)$. Alors, le problème à valeur initiale

$$D^\gamma v(t) = f(t, v(t)), \quad v(0) = v_0,$$

admet une solution continue unique $v(\cdot)$ sur $[0, T_b)$, où

$$T_b = \sup \{h > 0 : v \in C[0, h), \quad v(t) \in (\alpha, \beta) \quad \forall t \in [0, h)\}$$

est le temps maximal d'existence avec $T_b \in (0, \infty]$.

si $T_b < \infty$, Alors :

$$\liminf_{t \rightarrow T_b} v(t) = \alpha \quad \text{où} \quad \limsup_{t \rightarrow T_b} v(t) = \beta.$$

1.2.10 Inégalités auxiliaires

Lemme 1.2.3 (Inégalité de Young)

Soit $1 < p < \infty$ alors pour tous $a, b \geq 0$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

où $q \in]1, +\infty[$ est l'exposant conjugué à p définie par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lemme 1.2.4 (Inégalité de Hölder)

Soient p et q deux exposants conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), $1 \leq p \leq \infty$. Soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$. Alors, $f \cdot g \in L^1(\Omega)$, et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondant à l'inégalité de Hölder pour $p = q = 2$ est vérifiée, i.e.

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Lemme 1.2.5 (Inégalité de Poincaré) Pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, il existe une constante C telle que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Cas particulier pour $p = 2$:

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \quad \text{pour } u \in H_0^1(\Omega)$$

1.2.11 Inégalité de Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 1.2.6 Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour le cas particulier $m = 0$ la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 1.2.1 Soit $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$, si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T].$$

1.2.12 Méthode de Faedo Galerkin

La méthode de Faedo-Galerkin, est une technique numérique utilisée pour résoudre les équations différentielles aux dérivées partielles (EDP), y compris les EDP fractionnaires. Elle s'appuie sur la méthode de Galerkin pour construire une suite de solutions approchées, puis passe à la limite pour obtenir une solution au problème original.

En détails :

1. Approximation :

La méthode de Faedo-Galerkin commence par approcher la solution du problème d'EDP dans un espace de dimension finie, en utilisant des fonctions de base.

2. Équations discrètes :

Une fois l'approximation établie, on discrétise l'EDP, ce qui conduit à un système d'équations linéaires ou non linéaires.

3. Résolution des équations discrètes :

Ces équations discrètes sont ensuite résolues numériquement pour obtenir des solutions approchées.

4. Passage à la limite :

Enfin, la méthode fait passer à la limite, c'est-à-dire qu'elle examine ce qui se passe lorsque la dimension de l'espace d'approximation tend vers l'infini. Ceci est souvent fait en utilisant des techniques de compacité.

Applications en EDP fractionnaires :

Les EDP fractionnaires, qui sont des généralisations des EDP classiques, impliquent des opérateurs dérivés d'ordre non entier. La méthode de Faedo-Galerkin peut être utilisée pour résoudre ces EDP fractionnaires, en adaptant les étapes décrites ci-dessus pour tenir compte de la nature non entière de l'opérateur.

Points importants :

1. Dimension finie :

La méthode réduit le problème de dimension infinie (EDP) à un problème de dimension finie, ce qui facilite le calcul numérique.

2. Approximations successives :

Elle construit une suite de solutions approchées, convergeant vers la solution exacte du problème original.

3. Techniques de compacité :

Le passage à la limite est souvent assuré par des techniques de compacité, qui permettent d'établir des estimations a priori pour les solutions approchées.

En résumé, la méthode de Faedo-Galerkin est un outil puissant pour résoudre les EDP, y compris les EDP fractionnaires, en combinant des techniques d'approximation et de passage à la limite pour obtenir des solutions approchées et, dans certains cas, la solution exacte.

Résolution faible d'un problème fractionnaire de contact viscoélastique avec compliance normal

Les problèmes de contact avec des matériaux viscoélastiques jouent dans diverses applications industrielles et biomécaniques. Dans ce contexte, l'étude des modèles fractionnaires a suscité un intérêt croissant en raison de leur capacité à capturer des phénomènes de ce mémoire et d'hérédité, typiques des matériaux complexes. Ce travail se concentre sur la résolution faible d'un problème fractionnaire de contact avec compliance normale, où les dérivées fractionnaires permettent une modélisation plus précise du comportement temporel des matériaux viscoélastiques, l'objectif principal de ce travail est de prouver l'existence et l'unicité de la solution faible en utilisant les EDP d'ordre fractionnaire, méthode de Galerkin, compris les théorèmes du point fixe.

2.1 Formulation mécanique du problème

Le modèle mécanique que l'on étudie peut se formuler de la manière suivante :

Problème P. Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij}) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, tels que :

$$\sigma(t) = \mathcal{B}\varepsilon({}_0^C D_t^\alpha u(t)) + \mathcal{A}\varepsilon(u(t)) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1)$$

$$\rho_0^C D_t^{2\alpha} u(t) - \text{Div } \sigma(t) = f_0(t) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.2)$$

$$u(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (2.3)$$

$$\sigma(t)\nu = f_1(t) \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (2.4)$$

$$u(x, 0) = u_0, \quad {}_0^C D_t^\alpha u(x, 0) = w_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.5)$$

$$-\sigma_\nu(t) = p_\nu(u_\nu(t)), \sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.6)$$

L'équation (2.1) représente la loi constitutive viscoélastique de Kelvin-Voigt fractionnaire en le temps de type Caputo telle que décrite dans [5]. où, $\mathcal{B} = (b_{ijkl})$ et $\mathcal{A} = (a_{ijkl})$ désignent respectivement le tenseur de viscosité et le tenseur d'élasticité. La relation (2.2) du mouvement avec dérivée fractionnaire en temps, où ρ représente la densité de masse. suit Div désigne l'opérateur de divergence appliqué à un tenseur. En outre, les relations (2.3) et (2.4) de déplacement-traction sont les conditions mécaniques. La condition initiale est donné par l'équation (2.5).

Ensuite, l'équation (2.6) représente la condition compliance normal de contact sans frottement, où p_ν est une fonction prescrite u_ν représente la pénétration des aspérités de la surface dans la fondation.

Pour tout u, v dans V .

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) := (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}. \quad (2.7)$$

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(u, v) := (\mathcal{B}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}. \quad (2.8)$$

et les applications $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ donné par :

$$j(u, v) := \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu da. \quad (2.9)$$

En vertu du théorème de représentation de Riesz, on peut trouver un élément $f(t) \in V$ tel que :

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_1(t) \cdot v \, da, \quad \forall v \in V. \quad (2.10)$$

Dans notre analyse du problème mécanique défini par les équations (2.1) et (2.6), nous faisons l'hypothèse suivante :

(HP1) :

(i) satisfont la propriété habituelle de symétrie.

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{lkij} \in L^\infty(\Omega),$$

$$b_{ijkl} = b_{jikl} = b_{lkij} \in L^\infty(\Omega)$$

(ii) Les opérateurs a et b satisfont aux propriétés de l'ellipticité.

$$a(u, u) \geq m_a \|u\|_V^2, \quad b(u, u) \geq m_b \|u\|_V^2,$$

$$\forall u \in V,$$

où m_a et m_b sont des constantes positives.

(HP2) : Les opérateurs a et b satisfont la propriété habituelle de bornitude.

Il existe des constants positifs M_a et M_b tels que pour tout u, v dans V , nous avons :

$$|a(u, v)| \leq M_a \|u\|_V \|v\|_V, \quad |b(u, v)| \leq M_b \|u\|_V \|v\|_V$$

(HP3) :

(i) La force, la traction et les conditions initiales sont supposées être les suivantes :

$$f_0 \in C\left(0, T; L^2(\Omega^2)^d\right), f_1 \in C\left(0, T; L^2(\Gamma_2)^d\right) \text{ et } u_0 \in V_{ad}.$$

(ii) La densité de masse satisfait $\rho \in L^\infty(\Omega)$, et il existe $\rho^* > 0$ tel que $\rho(x) \geq \rho^*$ p.p. $x \in \mathbb{R}$.

(HP4) : La fonction de compliance normale p_ν satisfait à l'hypothèse suivante l'hypothèse suivante :

$$(i) \quad p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

(ii) $x \mapsto p_\nu(x, u)$ est mesurable sur Γ_3 , pour tout $u \in \mathbb{R}$.

(iii) $x \mapsto p_\nu(x, u) = 0$ pour $u \leq 0$ p.p. $x \in \Gamma_3$;

(iv) Il existe $L_\nu > 0$ tel que :

$$|p_\nu(\cdot, u) - p_\nu(\cdot, v)| \leq L_\nu |u - v|, \forall u, v \in \mathbb{R}_+$$

Ensuite on utilise le produit scalaire induit sur l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)^d$ donné par

$$((u, v))_H = (\rho u, v)_H \quad \forall u, v \in H,$$

ceci est le produit scalaire avec le poids ρ , et soit $\|\cdot\|_H$ la norme associée à ce produit, c'est à dire :

$$\|v\|_H = (\rho v, v)_H^{1/2} \quad \forall v \in H.$$

Selon les hypothèses (HP3) les normes $\|\cdot\|_H$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes sur H , ainsi l'application injective de $(V, \|\cdot\|)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. On dénote par V^* le dual de V , donc on peut identifier l'espace H avec son propre dual, d'où le triplet de Gelfand

$$V \subset H \subset V^*.$$

On utilise la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^* \times V}$ pour présenter le couple dual entre V^* et V , on a

$$\langle u, v \rangle_{V^* \times V} = (u, v)_H \quad \forall u \in H, \forall v \in V.$$

2.2 Formulation variationnelle du problème

Pour de montrer la formulation variationnelle du problème **P**. en utilisant la forme de Green (1.28) si nous supposons que u et σ sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (2.1), (2.3) et (2.4), pour tout $v \in V$, et $t \in [0, T]$

on déduit que :

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma(t), v)_{\mathbb{H}} = \int_{\Gamma} \sigma(t) \nu \cdot v da.$$

On a

$$\int_{\Omega} \sigma(t) \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \text{Div } \sigma(t) \cdot v dx = \int_{\Gamma_1} \sigma(t) \nu \cdot v da$$

$$+ \int_{\Gamma_2} \sigma(t) \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot v da,$$

D'après la Définition (2.2), et les conditions (2.3) et (2.4) et pour tout $v \in V$ on a

$$\int_{\Omega} \sigma(t) \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \rho_0^C D_t^{2\alpha} u(t) \cdot v dx - \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx = \int_{\Gamma_2} f_1(t) \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot v da$$

et en utilisant la Définition (2.10), on a :

$$\int_{\Omega} \sigma(t) \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \rho_0^C D_t^{2\alpha} u(t) \cdot v dx = (f(t), v)_V + \int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot v da, \quad (2.11)$$

et aussi le equation (2.1), on a

$$\int_{\Omega} (\mathcal{B} \varepsilon({}_0^C D_t^{\alpha} u(t)) + \mathcal{A} \varepsilon(u(t))) (\varepsilon(v)) dx + \int_{\Omega} \rho_0^C D_t^{2\alpha} u(t) \cdot (v) da = (f(t), v)_V + \int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot (v) da,$$

d'après la définition (2.7) et (2.8), on obtient

$$b({}_0^C D_t^{\alpha} u(t), v) + a(u(t), v), v) + \int_{\Omega} \rho_0^C D_t^{2\alpha} u(t) \cdot v dx - \int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot (v) da = (f(t), v)_V. \quad (2.12)$$

D'après l'équation (1.1) et (1.2), nous calculons le terme d'integral :

$$- \int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot v da = - \int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu}(t) \cdot v_{\nu} da. \quad (2.13)$$

D'après l'équation (2.6), et par la définition (2.9), nous avons

$$- \int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot v da = j(u(t), v). \quad (2.14)$$

Finalement, de (2.12) et (2.14), on obtient la formulation variationnelle du problème de contact **P**.

Problème PV : Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times]0, T[\rightarrow V$ et un tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathcal{H}$ pour $v \in V$ et $\alpha \in (0, 1]$ tel que :

$$\begin{aligned} &({}_0^C D_t^{2\alpha} u(t), v)_{V \times V^*} + b({}_0^C D_t^\alpha u(t), v) \\ &+ a(u(t), v) + j(u(t), v) = (f(t), v)_V, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$u(x, 0) = u_0, \quad {}_0^C D_t^\alpha u(x, 0) = w_0. \quad (2.16)$$

2.3 Existence de la solution

L'existence du problème variationnel **PV** est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 *En supposant que les hypothèses (HP1) à (HP4) se vérifient, nous pouvons conclure que le problème **PV** a au moins une solution (u, σ) qui satisfait les conditions suivantes :*

$$u \in W^{2,2}(0, T; V), \text{ et } \sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}). \quad (2.17)$$

Démonstration du Théorème 2.3.1

La démonstration du théorème 2.3.1 effectuée en plusieurs étapes, en s'appuyant sur diverses techniques telles que les inégalités la méthode de Galerkin, la méthode de compacité et le théorème du point fixe de Banach.

Première étape : Dans la première étape, notons $w(t) = {}_0^C D_t^\alpha u(t)$ pour p.p $t \in (0, T)$. En appliquant la Proposition 1.2.4, nous obtenons $u(t) = {}_0 I_t^\alpha w(t) + u_0$.

On peut alors reformuler le problème (2.1) et (2.15) de la manière suivante :

Trouver $w \in V$ et $\sigma \in \mathcal{H}$ tels que :

$$\sigma(t) = \mathcal{B}\varepsilon(w(t)) + \mathcal{A}\varepsilon({}_0 I_t^\alpha w(t) + u_0) \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} &({}_0^C D_t^\alpha (w(t)), v)_V + b(w(t), v) + a({}_0 I_t^\alpha w(t) + u_0, v) \\ &+ j({}_0 I_t^\alpha w(t) + u_0, v) = (f(t), v)_V \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$u(x, 0) = u_0, \quad {}_0^C D_t^\alpha u(x, 0) = w_0. \quad (2.20)$$

Deuxième étape : soit $z \in L^2(0, T; V)$ donné par :

$$(z(t), v)_V = a({}_0I_t^\alpha w(t) + u_0, v) + j({}_0I_t^\alpha w(t) + u_0, v) \quad (2.21)$$

Nous pouvons alors exprimer le problème (2.18) et (2.19) comme suit :

Problème PV1 : Trouver un champ de déplacement $w_z \in V$ et un tenseur des contraintes $\sigma_z \in \mathcal{H}$ p.p. $t \in]0, T[, v \in V$ et $\alpha \in (0, 1)$ tel que :

$$\sigma_z(t) = \mathcal{B}\varepsilon(w_z(t)) + \mathcal{A}\varepsilon({}_0I_t^\alpha w_z(t) + u_0)$$

$$({}_0^C D_t^\alpha(w_z(t)), v)_V + b(w_z(t), v) + (z(t), v)_V = (f(t), v)_V \quad (2.22)$$

$$w_z(0) = w_0 \quad (2.23)$$

Nous avons le résultat suivant

Lemme 2.3.1 *Pour tout $v \in V$ et $t \in (0, T)$, le Problème PV1 a au moins une solution $w_z \in W^{1,2}(0, T; V)$ et $\sigma_z \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.*

Preuve. En utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous définissons l'opérateur f_z comme suit :

$$(f_z(t), v)_V = (f(t), v)_V - (z(t), v)_V. \quad (2.24)$$

L'équation peut (2.22) exprimée comme suit :

$$({}_0^C D_t^\alpha(w_z(t)), v)_V + b(w_z(t), v) = (f_z(t), v)_V \quad (2.25)$$

Nous commençons maintenant à appliquer la méthode de Faedo-Galerkin. À cette fin, nous supposons que les fonctions β_k , pour $k = 1, \dots, m$, sont des fonctions propres de $-\Delta$ telle que $(\beta_k)_{(1 \leq k \leq m)}$ forment une base hilbertienne de $H^1(\Omega)^d$. Fixons un entier positif m et considérons la recherche d'une fonction $w_{(z_m)} : (0, T) \rightarrow H^1(\Omega)^d$ de la forme suivante :

$$w_{z_m} := \sum_{i=1}^m d_m^i(t) \beta_i. \quad (2.26)$$

Nous notons F_m l'espace vectoriel généré par $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$.

D'où $w_{z_m} \in F_m$ et $w_{z_m} \rightarrow w_z$ dans V .

Problème approché : Pour chaque entier $m \geq 1$, notre problème approché prend la forme suivante :

Trouver $w_{z_m} \in L^2(0, T; F_m)$ tel que ${}_0^C D_t^\alpha w_{z_m} \in L^2(0, T; F_m)$ et

$$({}_0^C D_t^\alpha w_{z_m}(t), \beta_k)_V + b(w_{z_m}(t), \beta_k) = (f_z(t), \beta_k)_V \quad (2.27)$$

En supposant que w_{z_m} a la structure donnée par (2.26), on observe que :

$$({}_0^C D_t^\alpha w_{z_m}(t), \beta_k)_V = {}_0^C D_t^\alpha d_m^k(t) \quad (2.28)$$

$$b(w_{z_m}(t), \beta_k) = \mathcal{B}d_m^k(t). \quad (2.29)$$

$$(f_z(t), \beta_k)_V = f_z^k(t). \quad (2.30)$$

D'après (2.26), (2.27), nous avons

$$(w_0, \beta_k) = d_m^k(0) \quad (2.31)$$

Parce que

$$(w_{z_m}(0), \beta_k) := \left(\sum_{i=1}^m d_m^i(0) \beta_i, \beta_k \right) = d_m^k(0)$$

Maintenant, nous définissons l'opérateur $h :]0, T[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, comme suivant :

$$h(t, d_m^k(t)) = f_z^k(t) - \mathcal{B}d_m^k(t). \quad (2.32)$$

Alors, d'après (2.28), on a

$${}_0^C D_t^\alpha d_m^k(t) = h(t, d_m^k(t)), \quad (2.33)$$

Ensuite, l'hypothèse (HP2) implique que :

$$|h(t, d_{m_1}^k(t)) - h(t, d_{m_2}^k(t))| \leq M_b |d_{m_1}^k(t) - d_{m_2}^k(t)|. \quad (2.34)$$

Alors, en appliquant les méthodes standard du calcul fractionnel (voir [Proposition 1.2.5]), il existe une unique fonction continue de solvabilité $d_m(t) = (d_m^1(t), d_m^2(t), \dots, d_m^m(t))$ sur $[0, T_*)$ satisfaisant (2.33).

Ici et dans la suite, c_1 et c_2 des constantes génériques positives dont les valeurs peuvent varier d'une ligne à l'autre.

Estimations : Multiplier l'équation (2.27) par en additionnant pour $d_m^i(t)$, en additionnant pour $i = 1, \dots, m$, et en utilisant le fait que $w_{z_m} \mapsto \frac{1}{2} \|w_{z_m}\|_V^2$ est une fonctionnelle convexe, nous obtenons :

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^\alpha \left(\frac{1}{2} \|w_{z_m}(t)\|_V^2 \right) &\leq ({}_0^C D_t^\alpha w_{z_m}(t), w_{z_m}(t))_V \\ &\quad + b(w_{z_m}(t), w_{z_m}(t))_V \\ &= (f_z(t), w_{z_m}(t))_V \end{aligned} \quad (2.35)$$

En appliquant l'inégalité de Young et en utilisant l'hypothèse (HP1), nous obtenons

$$m_b \|w_{z_m}(t)\|_V^2 \leq b(w_{z_m}(t), w_{z_m}(t)) \quad (2.36)$$

et

$$|(f_z(t), w_{z_m}(t))| \leq \frac{1}{2\epsilon} \|f_z(t)\|_V^2 + \frac{\epsilon}{2} \|w_{z_m}(t)\|_V^2 \quad (2.37)$$

pour tout $\epsilon > 0$, et d'après (2.35), (2.36) et (2.37). Ainsi

$${}_0^C D_t^\alpha \left(\frac{1}{2} \|w_{z_m}(t)\|_V^2 \right) + c_1 \|w_{z_m}(t)\|_V^2 \leq c_2 \|f_z(t)\|_V^2. \quad (2.38)$$

où $c_1 = m_b - \frac{\epsilon}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2\epsilon}$.

En utilisant la Proposition 1.2.4, et l'opérateur ${}_0 I_t^\alpha$ défini dans la Définition 1.2.22, on a :

$${}_0 I_t^\alpha ({}_0^C D_t^\alpha \left(\frac{1}{2} \|w_{z_m}(t)\|_V^2 \right) + c_1 \|w_{z_m}(t)\|_V^2) \leq {}_0 I_t^\alpha (c_2 \|f_z(t)\|_V^2)$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \|w_{z_m}(t)\|_V^2 + \frac{2c_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|w_{z_m}(s)\|_V^2 ds \\
& \leq \|w_0\|_V^2 + \frac{2c_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f_z(s)\|_V^2 ds \\
& \leq \|w_0\|_V^2 + \frac{2c_2}{\Gamma(\alpha)} \|f_z\|_V^2 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
& \leq \|w_0\|_V^2 + \frac{T^\alpha}{\alpha} \frac{2c_2}{\Gamma(\alpha)} \|f_z\|_V^2.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
& \|w_{z_m}(t)\|_V^2 + \frac{2c_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|w_{z_m}(s)\|_V^2 ds \\
& \leq c_2 (\|f_z(t)\|_V^2 + \|w_0\|_V^2)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

On a alors que $T_* = +\infty$.

Fixons n'importe quel $v \in V$, avec $\|v\| \leq 1$, et écrivons $v = v_1 + v_2$, où $v_1 \in \text{span} \{\beta_k\}_{k=1}^m$ et $(v_2, \beta_k) = 0, (k = 1, \dots, m)$.

Puisque les fonctions $\{\beta_k\}_{k=1}^m$ sont orthogonales dans V

$$\|v_1\|_V \leq \|v\|_V \leq 1 \tag{2.40}$$

Par la relation (2.27), nous déduisons que

$$({}_0^C D_t^\alpha w_{z_m}(t), v_1)_V + b(w_{z_m}(t), v_1)_V = (f_z(t), v_1)_V \tag{2.41}$$

De (HP2) et du fait de la continuité de b , on a :

$$|b(w_{z_m}(t), v_1)| \leq M_b \|w_{z_m}(t)\|_V \tag{2.42}$$

$$|(f_z(t), v_1)| \leq \|f_z(t)\|_V \tag{2.43}$$

On peut donc conclure que :

$$\| {}_0^C D_t^\alpha w_{z_m}(t) \|_{V^*} \leq c_1 + c_2 (\|w_{z_m}(t)\|_V + \|f_z(t)\|_V) \quad (2.44)$$

Par l'inégalité (2.39), il existe une constante positive c telle que

$$\| {}_0^C D_t^\alpha w_{z_m}(t) \|_{L^2(0,T;V^*)} \leq c. \quad (2.45)$$

Passage à la limite : En utilisant les estimates précédents et en appliquant le résultat de compacité énoncé dans le Théorème 1.2.20 pour la dérivée de Caputo, nous pouvons déduire l'existence d'une sous-suite $w_{z_{m_l}}$ et $w_z \in L^2(0, T; V)$ telle que :

$$w_{z_{m_l}} \rightarrow w_z \text{ fortement dans } L^2(0, T; V), \quad (2.46)$$

et

$${}_0^C D_t^\alpha w_{z_{m_l}} \rightarrow {}_0^C D_t^\alpha w_z \text{ fortement dans } L^2(0, T; V^*). \quad (2.47)$$

puis

$$b(w_{z_{m_l}}(t), v) \rightarrow b(w_z(t), v) \text{ dans } \mathbb{R}, \quad ({}_0^C D_t^\alpha w_{z_{m_l}})_V \rightarrow ({}_0^C D_t^\alpha w_z)_V \text{ dans } \mathbb{R}, \quad (2.48)$$

et

$${}_0 I_t^\alpha w_{z_{m_l}} \rightarrow {}_0 I_t^\alpha w_z \text{ fortement dans } L^2(0, T; V). \quad (2.49)$$

Par conséquent, il existe une solution faible $w_z \in W^{1,2}(0, T; V)$ pour l'équation (2.22).

Maintenant, en considérant (2.21), (HP1), et (HP3), on peut conclure que $\sigma_z \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.

Par conséquent, la preuve du Lemme 2.3.1 est maintenant complète.

Dans la dernière Lemme 2.3.1, pour, $z \in L^2(0, T; V)$ nous utilisons la solution w_z dans le Lemme 2.3.1

Troisième étape : Nous considerons l'opérateur $\Lambda : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V)$ défini par .

$$(\Lambda z(t), v)_V := a({}_0 I_t^\alpha w_z(t) + u_0, v) + j({}_0 I_t^\alpha w_z(t) + u_0, v). \quad (2.50)$$

Nous obtenons le résultat suivant.

Lemme 2.3.2 $\forall z \in L^2(0, T; V), \alpha \in (0, 1]$, l'opérateur $\Lambda z :]0, T[\rightarrow V$ est continu. De plus, il existe un unique élément $z^* \in L^2(0, T; V)$ telle que $\Lambda z^* = z^*$.

Démonstration. Soit $z \in L^2(0, T; V)$ et $t_1, t_2 \in]0, T[$. En utilisant (2.49), on a

$$\begin{aligned} (\Lambda z(t_1) - \Lambda z(t_2), v) &= a({}_0I_t^\alpha w_z(t_1) - {}_0I_t^\alpha w_z(t_2), v) \\ &\quad + j({}_0I_t^\alpha w_z(t_1) + u_0, v) - j({}_0I_t^\alpha w_z(t_2) + u_0, v). \end{aligned} \quad (2.51)$$

En appliquant la définition 1.2.23 et en considérant (HP2), nous déduisons que

$$\begin{aligned} &|a({}_0I_t^\alpha w_z(t_1) - {}_0I_t^\alpha w_z(t_2), v)| \\ &\leq \frac{M_a T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|w_z(t_1) - w_z(t_2)\|_V \|v\|_V. \end{aligned} \quad (2.52)$$

D'après (2.9) et de l'hypothèse (HP4), nous pouvons dériver le résultat suivant :

$$\begin{aligned} &|j({}_0I_t^\alpha w_z(t_1) + u_0, v) - j({}_0I_t^\alpha w_z(t_2) + u_0, v)| \\ &\leq \left| \int_{\Gamma_3} (p_\nu({}_0I_t^\alpha w_z(t_1) + u_0)_\nu - p_\nu({}_0I_t^\alpha w_z(t_2) + u_0)_\nu) da \right| \\ &\leq L_\nu \int_{\Gamma_3} |{}_0I_t^\alpha w_z(t_1) + {}_0I_t^\alpha w_z(t_2)| \\ &\leq L_\nu c_s \|w_z(t_1) - w_z(t_2)\|_{(L^2(\Gamma_3))^d}. \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité (1.30), on obtient

$$\begin{aligned} &|j({}_0I_t^\alpha w_z(t_1) + u_0, v) - j({}_0I_t^\alpha w_z(t_2) + u_0, v)| \\ &\leq \frac{L_\nu c_s T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|w_z(t_1) - w_z(t_2)\|_V \|v\|_V. \end{aligned}$$

En combinant les inégalités précédentes, on peut conclure qu'il existe une constante positive c qui dépend de M_a, L_ν, c_s, α , et T . Cette constante satisfera à toute l'inégalité suivante :

$$|\Lambda z(t_1) - \Lambda z(t_2)|_V \leq c \|w_z(t_1) - w_z(t_2)\|_V, \quad (2.53)$$

et par la régularité de w_z , on conclut que $\Lambda z \in C(0, T; V)$. Soit maintenant let $z_1, z_2 \in L^2(0, T; V)$ et $t \in [0, T]$. De façon similaire à (2.53), nous pouvons exprimer la relation suivante :

$$\|\Lambda z_1(t) - \Lambda z_2(t)\|_V \leq c \|w_{z_1}(t) - w_{z_2}(t)\|_V. \quad (2.54)$$

D'autre part, en utilisant (2.25), nous pouvons déduire que

$$\begin{aligned} & \left({}^C_0 D_t^\alpha w_{z_1}(t) - {}^C_0 D_t^\alpha w_{z_2}(t), w_{z_1}(t) - w_{z_2}(t) \right)_V \\ & + b(w_{z_1}(t) - w_{z_2}(t), w_{z_1}(t) - w_{z_2}(t)) \\ & + (z_1(t) - z_2(t), w_{z_1}(t) - w_{z_2}(t))_V = 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

La définition donnée par 1.2.23 implique que

$$\left\| {}^C_0 D_t^\alpha w_{z_1}(t) - {}^C_0 D_t^\alpha w_{z_2}(t) \right\|_V \leq \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \|\dot{w}_{z_1}(t) - \dot{w}_{z_2}(t)\|_V. \quad (2.56)$$

La combinaison de (HP1) et (2.55), (2.56), implique

$$\begin{aligned} & m_b \|w_{z_1}(t) - w_{z_2}(t)\|_V^2 \\ & \leq \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \|\dot{w}_{z_1}(t) - \dot{w}_{z_2}(t)\|_V \|w_{z_1}(t) - w_{z_2}(t)\|_V \\ & + \|z_1(t) - z_2(t)\|_V \|w_{z_1}(t) - w_{z_2}(t)\|_V. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Puisque $w_{z_i}(t) = \int_0^t \dot{w}_{z_i}(s) ds + w_{z_i}(0)$, pour $i = 1, 2$, on a avons

$$\|w_{z_1}(t) - w_{z_2}(t)\|_V \leq \int_0^t \|\dot{w}_{z_1}(s) - \dot{w}_{z_2}(s)\|_V ds \quad (2.58)$$

En intégrant (2.57) l'intervalle et en $[0, T]$ la condition initiale $w_{z_1}(0) = w_{z_2} = w(0)$, ainsi que avec (2.27), nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & m_b \int_0^t \|w_{z_1}(s) - w_{z_2}(s)\|_V^2 ds \\ & \leq \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \|w_{z_1}(t) - w_{z_2}(t)\|_V^2 \\ & \quad + \int_0^t \|z_1(s) - z_2(s)\|_V \|w_{z_1}(s) - w_{z_2}(s)\|_V ds. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Compte tenu de l'inégalité $xy \leq \gamma x^2 + \frac{1}{4\gamma} y^2$, où $\gamma > 0$, et en appliquant l'inégalité de Gronwall, nous pouvons conclure que

$$\|w_{z_1}(t) - w_{z_2}(t)\|_V^2 \leq \int_0^t \|z_1(s) - z_2(s)\|_V^2 ds \quad (2.60)$$

Maintenant, en combinant cette inégalité avec (2.56), nous pouvons en déduire que

$$\|\Lambda z_1(t) - \Lambda z_2(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \|z_1(s) - z_2(s)\|_V^2 ds \quad (2.61)$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \|\Lambda^2 z_1(t) - \Lambda^2 z_2(t)\|_V^2 &= \|(\Lambda(\Lambda z_1))(t) - (\Lambda(\Lambda z_2))(t)\|_V^2 \\ &\leq c \int_0^t \|\Lambda z_1(s) - \Lambda z_2(s)\|_V^2 ds \\ &\leq c \int_0^t (c \int_0^s \|z_1(r) - z_2(r)\|_V^2 dr) ds \\ &\leq c^2 \int_0^t (\int_0^T \|z_1(r) - z_2(r)\|_V^2 dr) ds \\ &\leq c^2 \|z_1 - z_2\|_{L^2(0,T,V)}^2 \int_0^t ds \\ &\leq c^2 t \|z_1 - z_2\|_{L^2(0,T,V)}^2 \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T]$, en itérant cette inégalité n fois, on obtient le résultat suivant :

$$\|A^n z_1 - A^n z_2\|_{L^2(0,T,V)}^2 \leq \frac{(cT)^n}{n!} \|z_1 - z_2\|_{L^2(0,T,V)}^2. \quad (2.62)$$

Ceci implique que, pour un entier n suffisamment grand, Λ^n devient une contraction dans l'espace de Banach $L^2(0, T; V)$. Par conséquent, l'opérateur Λ admet un point fixe unique.

Nous sommes maintenant prêts à établir la preuve du théorème 2.3.1. **Preuve du Théorème 2.3.1** : Soit $z^* \in L^2(0, T; V)$ le point fixe de l'opérateur Λ , et soit w^* la solution de (2.22) associée à $z = z^*$. Définissons alors

$$\sigma^*(t) = \mathcal{B}\varepsilon(w^*(t)) + \mathcal{A}\varepsilon({}_0I_t^\alpha w^*(t) + u_0).$$

En utilisant (2.52) et en tenant compte du fait que $\Lambda(z^*) = z^*$, on obtient...

$$(w^*, \sigma^*) \in W^{1,2}(0, T; V) \times L^2(0, T; \mathcal{H}).$$

On en déduit donc que $u^* \in W^{2,2}(0, T; V)$ donné par $u^*(t) = {}_0I_t^\alpha w^*(t) + u_0$ pour p.p. $t \in (0, T)$. Finalement, on déduit que (u, σ) constitue une solution du problème **PV**.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié un problème mathématique complexe modélisant un phénomène de contact viscoélastique avec compliance normale en incorporant des dérivées fractionnaires dans le temps. Ce type de problème trouve des applications concrètes dans la modélisation des matériaux présentant une mémoire longue, notamment dans le cadre des matériaux polymères, des structures biomécaniques ou encore des interfaces en génie civil. L'introduction de la dérivée fractionnaire permet une représentation plus fidèle du comportement viscoélastique à long terme, en tenant compte de l'historique de déformation du matériau. Nous avons formulé le problème dans un cadre fonctionnel abstrait en utilisant les outils de l'analyse convexe, des équations aux dérivées partielles non linéaires et de la mécanique du contact. Plus précisément, nous avons prouvé l'existence d'une solution faible en exploitant des méthodes de régularisation, de passage à la limite, et d'approximation discrète temporelle. Le défi principal a résidé dans le traitement de la non-linéarité induite par la condition de contact, combinée avec la nature non locale de l'opérateur fractionnaire. L'originalité de notre approche repose sur l'intégration cohérente de la compliance normale, modélisée comme une loi constitutive non linéaire sur la frontière de contact, ce qui a permis d'obtenir un modèle plus réaliste et physiquement pertinent. Nous avons également établi certaines propriétés qualitatives de la solution, notamment sa stabilité et sa dépendance continue par rapport aux données du problème. Ce travail ouvre la voie à plusieurs perspectives de recherche. D'une part, l'étude numérique de ce type de problèmes reste un défi ouvert, et le développement de méthodes d'éléments finis adaptées aux dérivées fractionnaires serait un prolongement naturel. D'autre part, la généralisation à des problèmes de contact dynamiques, incluant des termes inertiels et éventuellement des frottements tangents, représente une direction prometteuse. En-

fin, l'introduction de paramètres stochastiques dans la modélisation permettrait d'étudier le comportement des matériaux sous incertitude, dans le cadre de la mécanique probabiliste. En conclusion, notre étude met en lumière l'importance de l'approche mathématique rigoureuse pour la compréhension de phénomènes physiques complexes, et souligne le potentiel des outils d'analyse moderne pour résoudre des problèmes appliqués au croisement entre la mécanique des milieux continus, les mathématiques appliquées et l'ingénierie.

Bibliographie

- [1] I.K. Argyros, Y.J. Cho, *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, (2004).
- [2] Y. Bai, N. Papageorgiou, S. Zeng, *A singular eigenvalue problem for the Dirichlet (p,q)-Laplacian*, Math. Z. 200, 325–345 (2022).
- [3] S. Banach, *Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales*, (1932).
- [4] R.L. Bagley, P.J. Torvik, *A theoretical basis for the application of fractional calculus in viscoelasticity*, Journal of Rheology, 27 :201–210, (1983).
- [5] A. Berti, M.G. Naso, *Unilateral dynamic contact of two viscoelastic beams*, Quart. Appl. Math. 69(3), 477–507 (2011).
- [6] S.C. Brenner, L.R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, 3rd edn. (Springer, New York, NY, 2008).
- [7] M. Bouallala, E.-H. Essoufi, *Analysis results for dynamic contact problem with friction in thermo-viscoelasticity*, Methods Funct. Anal. Topol. 26(4) :317–326 (2020).
- [8] M. Bouallala, E.-L.-H. Essoufi, *A Thermo-Viscoelastic Fractional Contact Problem with Normal Compliance and Coulomb’s Friction*, J. Math. Phys. Anal. Geom. 17(3), 280–294 (2021).
- [9] R.C. Busby, S.S. Sethuraman, *Fixed Point Theorems in Metric Spaces*, (2009).
- [10] O. Chau, V.V. Motreanu, *Dynamic contact problems with velocity conditions*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 12(1), 17–26 (2002).
- [11] M. Cocou, *Existence of solutions of a dynamic Signorini’s problem with nonlocal friction in viscoelasticity*, Z. Angew. Math. Phys. 53(6), 1099–1109 (2002).

- [12] M. Cocou, R. Rocca, *Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion*, Math. Model. Num. Anal. 34, 981–1001 (2000).
- [13] C. Eck, J. Jarusek, *Dynamic contact problems with small Coulomb friction for viscoelastic bodies : Existence of solutions*, Math. Models Methods Appl. Sci. 9, 11–34 (1999).
- [14] M. Han, K. Kuttler, M. Shillor, M. Sofonea, *Elastic beam in adhesive contact*, Internat. J. Solids and Structures 39, 1145–1164 (2002).
- [15] J. Han, S. Migorski, H. Zeng, *Weak solvability of a fractional viscoelastic frictionless contact problem*, Applied Mathematics and Computation Elsevier 303(170), 1–18 (2017).
- [16] R. Herrmann, *Fractional Calculus : An Introduction for Physicists*, (World Scientific, Singapore, 2011).
- [17] T.J.R. Hughes, *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987).
- [18] A. Jan, R. Jan, H. Khan, M.S. Zobaer, R. Shah, *Fractional-order dynamics of Rift Valley fever in ruminant host with vaccination*, Commun. Math. Biol. Neurosci., (2020).
- [19] R. Jan, Z. Shah, W. Deebani, E. Alzahrani, *Analysis and dynamical behavior of a novel dengue model via fractional calculus*, Int. J. Biomath. 15(06), 2250036 (2022).
- [20] Y. Li, Z. Liu, *Dynamic contact problem for viscoelastic piezoelectric materials with slip dependent friction*, Nonlinear Anal. 71(5–6), 1414–1424 (2009).
- [21] L. Li, J.-G. Liu, *A generalized definition of Caputo derivatives and its application to fractional ODEs*, SIAM J. Math. Anal. 50, 2867–2900 (2018).
- [22] S. Migorski, A. Ochal, M. Sofonea, *Analysis of a dynamic contact problem for electroviscoelastic cylinders*, Nonlinear Anal. 73(5), 1221–1238 (2010).
- [23] I. Podlubny, *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Elsevier, (1998).
- [24] Z. Shah, T.Q. Tang, E. Bonyah, R. Jan, M. Shutaywi, N. Alreshidi, *Modeling and analysis of breast cancer with adverse reactions of chemotherapy treatment through fractional derivative*, Computational and Mathematical Methods in Medicine, (2022).

- [25] F. Zeng, C. Li, F. Liu, I. Turner, *The use of finite difference/element approaches for solving the time-fractional subdiffusion equation*, SIAM J. Sci. Comput. 35(6), 2976–3000 (2013).
- [26] S. Zeng, Z. Liu, S. Migorski, *A class of fractional differential hemivariational inequalities with application to contact problem*, Z. Angew. Math. Phys. 69(2), 36 (2018).
- [27] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications*, Springer Science and Business Media, New York, (1985).
- [28] Q. Yang, I. Turner, F. Liu, M. Ilic, *Novel numerical methods for solving the time-space fractional diffusion equation in two dimensions*, SIAM J. Sci. Comput. 33, 1159–1180 (2011).

Résumé

Dans ce mémoire, nous proposons un nouveau modèle pour le problème de contact dynamique sans frottement entre des corps viscoélastiques et une base de déformable. La loi de comportement est formulée à l'aide de la loi viscoélastique fractionnaire de Kelvin-Voigt, où le contact est décrit par une condition de compliance normale. Nous déduisons une formulation faible et prouvons l'existence de sa solution faible en utilisant les dérivées fractionnaires (dérivées de Caputo et de Riemann-Liouville), la méthode de Galerkin et le théorème du point fixe de Banach.

Mots-clés : compliance normale, viscoélasticité, loi constitutive viscoélastique fractionnaire, dérivée de Caputo, dérivée de Riemann, méthode de Galerkin, théorème du point fixe de Banach.

Abstract

In this thesis, we propose a new model for the dynamic frictionless contact problem between a viscoelastic body and a deformable foundation. The constitutive law is formulated using the fractional Kelvin-Voigt viscoelastic law. Where the contact is described by a normal compliance condition. We derive a weak formulation and prove the existence of its weak solution using fractional derivatives (Caputo and Riemann-Liouville derivatives), the Galerkin method, and Banach's fixed point theorem.

Key words : normal compliance, viscoelasticity, fractional viscoelastic constitutive law, Caputo derivative, Riemann derivative, Galerkin method, Banach fixed point theorem.

ملخص

في هذه المذكرة، نقترح نموذجاً جديداً لمشكلة الاتصال الديناميكي بدون احتكاك بين جسم لزج مرن وأساس قابل للتشوه. قانون السلوك تم تصميمه بواسطة قانون كلفن فويت الكسري حيث يتم وصف الاتصال بحالة الاستجابة العادية. نستنتج صيغة ضعيفة ونثبت وجود حلها الضعيف باستخدام المشتقات الكسرية (مشتق كابوتو، ريمان-لوفيل)، طريقة جالركين ونظرية النقطة الثابتة لبناخ.

الكلمات المفتاحية : الإستجابة العادية، اللزوجة والمرونة، القانون التكويني للزج المرن الكسري، مشتق كابوتو، مشتق ريمان، طريقة جالركين، ونظرية النقطة الثابتة لبناخ.