



**République Algérienne Démocratique et
Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique**



**UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
EL-OUED**

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Comportement asymptotique des polynômes
polaires primitives des polynômes
orthogonaux sur le contour**

**Présenté par: Ichrak Rehouma
Safa Ben Ali**

Soutenu publiquement le: 29-05-2025, devant le jury composé de:

Nadjet Douadi	MCA	Univ. d'El-Oued	Président
Abdelhamid Rehouma	Pr	Univ. d' El-Oued	Rapporteur
Madjda Miloudi	MCA	Univ. d' El-Oued	Examineur

Année universitaire 2023 - 2024.

❖ شكر وتقدير

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على أشرف الخلق وسيد المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم انطلاقاً من قول الله تعالى "ومن يشكر فإنما يشكر لنفسه" صدق الله العظيم، فإننا نسبح لله عز وجل شاكرين له جل جلاله على أن ألهمنا نعمه الصبر والمثابرة على ما صدفنا من صعبات في إنجاز هذا العمل المتواضع على هذه الصورة، فالحمد لله الحمد حمداً كثيراً لا يمل منه لساني ولا يعيقه قلبياً ولا عقلياً.

وفي هذا المقام العظيم، نفضل الإعراف بالجميل وتقديم الشكر والإمتنان لأصحاب الفضل والمعروف، فإننا نتقدم بأسمى آيات الشكر والتقدير والعرفان وعظيم الإمتنان إلى أستاذنا الفاضل و دكتورنا المميز **البروفيسور: رحومة عبد الحميد** المحترم، على ما بذله من علم، وكذلك وقوفه بجانبنا بكل ما يملكه من وقت وجهد ومتابعة وإخلاص، إذ طالما حسناً منا ووجهنا، فكان نعم الداعم والمشرف. فلولاه بعد الله، لما استطعنا إنجاز هذا العمل الذي نأمل أن ينال رضاكم، ولم نكن لنبلغ هذا المقام من التميز والنجاح لولا إشرافه الكريم، واهتمامه المباشر، ونصائحه الثمينة التي كانت لنا نبراساً في رحلتنا البحثية. و الله يجزيك عنا خير جزاء، و أنزلك الله منزلة العلماء.

RÉSUMÉ

Soit $\{L_n(z)\}_{n=0,1,2,3,\dots}$ le système de polynômes orthogonaux sur le cercle unité i.e. $L_n(z)$ vérifie les relations d'orthogonalité suivantes

$$L_n(z) = z^n + \dots, \int_E L_n(\xi) \bar{\xi}^p d\mu = 0 \quad ; \quad p = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

On prend dans ce cas $\mu = \beta$; β est une mesure positive absolument continue sur E , (contour de Jordan rectifiable), telle que : $d\mu = \rho(\xi)|d\xi|$

$\forall \beta \in B(C)$, on ait

$$\beta(B) = \int_{B \cap E} \rho(\xi) |d\xi|.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ fixé, que nous appellerons pôle, définissons la suite des polynômes polaires notés $P_{n,\alpha}(z)$ associés aux polynômes orthogonaux $L_n(z)$, comme suit. $P_{n,\alpha}(z) = z^n + \dots$, ($P_{n,\alpha}(z)$ est un polynôme unitaire (monique)) est solution de l'équation différentielle suivante

$$(n+1) L_n(z) = ((z-\alpha) P_{n,\alpha}(z))' = P_{n,\alpha}(z) + (z-\alpha) P'_{n,\alpha}(z).$$

On étudie dans ce mémoire les propriétés asymptotique des polynômes polaires $P_{n,\alpha}(z)$.

Mots clés : Polynômes orthogonaux, Contour de Jordan, Comportement asymptotique, Polynômes polaires, Fonction de Szegő, Transformation de conforme.

ABSTRACT

Let μ be a finite positive measure defined on the Borelian σ - algebra of $\mathbb{C}$, μ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure $|d\xi|$ on contour E . i.e : $d\mu = \rho(\xi)|d\xi|$,

$$\forall \beta \in B(C) : \beta(B) = \int_{B \cap E} \rho(\xi)|d\xi|$$

Let us consider $\{L_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$, the system of monic orthogonal polynomial with respect to μ .

$$L_n(z) = z^n + \dots, \int_E L_n(\xi) \bar{\xi}^p d\mu = 0 \quad ; \quad p = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

We introduce a new class of polynomials $\{P_{n,\alpha}\}$, that we call polar polynomials associated to $\{L_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$. For a fixed complex number α , $P_{n,\alpha}(z)$ is solution of the following differential equation

$$(n+1) L_n(z) = P_{n,\alpha}(z) + (z - \alpha) P'_{n,\alpha}(z).$$

We study algebraic and asymptotic properties of the polar polynomials.

Key words : Orthobonal polynomials, Curve of jordan, Asymptotic behaviour, Polair polynomials, Szego function, Conformal mapping.

Table des matières

Introduction générale	3
1 Construction d'un système de polynômes orthogonaux relativement à une mesure α	6
1.1 Espaces euclidiens et espaces préhilbertiens et orthogonalité hermitienne	6
1.1.1 Espace euclidien	6
1.1.2 Espace préhilbertien	7
1.1.3 Inégalité de Bessel	8
1.1.4 Orthogonalisation de Gram-Schmidt	9
1.1.5 Espaces euclidiens complets	9
1.1.6 Construction d'un système de polynômes orthogonaux relativement à la mesure α	9
1.2 Propriétés fondamentales	10
1.2.1 Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux	11
1.3 Résumé des principaux cas traités	12
2 Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le contour avec une fonction poids	15
2.1 Propriétés fondamentales	15
2.2 L'espace $H(\mathbb{C})$	16
2.2.1 Transformations conformes	16
2.2.2 Prolongement à la frontière (Th. de Carathéodory)	18
2.2.3 Espace de Hardy à l'intérieur et à l'extérieur d'un contour de Jordan rectifiable	18
2.3 Propriétés fondamentales de $H^2(\Omega)$	19
2.3.1 Fonction de Szego à l'intérieur et à l'extérieur d'un contour de Jordan rectifiable	20

2.4	L'espace $H^2(\Omega, \rho)$	21
2.4.1	Définitions et propriétés fondamentales	21
2.4.2	Lien entre la convergence dans $H^2(\Omega, \rho)$ et $H(\Omega)$	24
2.5	Formule asymptotique des polynômes orthogonaux dans le cas d'une mesure concentrée sur un contour de Jordan rectifiable	24
2.5.1	Position du problème	24
2.5.1.1	Problème de comportement asymptotique	25
2.5.2	Quelques problèmes extrémaux dans $H^2(\Omega, \rho)$	25
2.6	Conclusion	29
3	Comportement asymptotique des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le contour	31
3.1	Polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le contour	31
3.2	Comportement asymptotique des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le contour	34
	Conclusion générale	38
	Bibliographie	39

Introduction générale

Soit α une mesure positive, finie, définie sur la tribu borélienne de $\mathbb{C}$. Si $F = \text{support } \alpha$ (fini ou infini) et si tous les moments de α existent, alors les polynômes orthogonaux associés à la mesure α sont définie par les relations

$$L_n(z) = z^n + \dots, \int_F L_n(z) \bar{z}^p d\alpha = 0; \quad p = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (1)$$

Si la mesure α n'est pas discrete, alors pour tout n , le polynôme L_n vérifiant (1) existe et il est unique. Un des problèmes fondamentaux de la théorie des polynômes orthogonaux est celui de leur comportement asymptotique lorsque $n \rightarrow \infty$. La formule asymptotique de L_n dépend en général du support F .

Le problème du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux a été étudié par beaucoup de mathématiciens. On peut citer

a) **Szego** : (1928 ; [21], [22], [23])

$F = \text{cercle ou segment}$; α absolument continue. Szego a appliqué ses résultats au développement de fonctions en série de polynômes orthogonaux.

b) **Smirnov** : (1928, 1932 [63])

Korovkine (1941 ; [38]) ; Gueronimus (1952 ; [25]) ; dans le cas où $F = \text{contour}$; α absolument continue par rapport à la mesure longueur d'arc. Ce problème a été appliqué dans l'étude de la fermeture du système $\{L_n\}$ dans des espaces fonctionnels. Ce problème a été appliqué aussi dans l'étude du développement de fonctions en série de polynômes orthogonaux.

c) **Krein et Kolmogoroff** : (1941 ; [39])

Dans le cas où $F = \text{cercle}$ et α non absolument continue. On a utilisé des outils de probabilités pour résoudre ce problème.

d) **Gontchar** : (1975 ; [36])

Dans le cas où $F = [-1, 1] \cup \{z_k\}$; $k = 1, 2, \dots, r$; r fini. Ce problème a été appliqué de la convergence d'approximants de Padé.

e) **Nikichine** : (1983 ; [44])

Ce problème a été appliqué dans l'étude de l'opérateur discret de Sturm Liouville.

f) **Kaliaguine et Benzine** : (1989 ; [54])

Dans le cas où $F = E \cup \{z_k\}; k = 1, 2, \dots, r; r$ fini; E contour de Jordan rectifiable. La mesure α concentrée sur F est absolument continue par rapport à la mesure longueur d'arc. Ce problème a été appliqué dans l'étude de la fermétude du système $\{L_n\}$ dans des espaces fonctionnels. Ce problème a été appliqué aussi dans l'étude du développement de fonctions en série de polynômes orthogonaux.

L'étude du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux et le comportement asymptotique des polynômes polaires des polynômes orthogonaux intervient de façon significative dans la résolution de quelques problèmes mathématiques suivants :

1. Analyse de la distribution des zéros des polynômes polaires et leur resultats, ([7], [8]).
2. Etude de la convergence des approximants de Padé, et son acc élération, ([33], [55]).
3. Théorie de la représentation des fractions partielles. (Partial Fraction Representation).
4. Théorie spectrale, et les spectres orthogonaux, ([58]).
5. Algorithme parallèle.

Le chapitre 1 est divisé en deux parties. On donne dans la première partie de ce chapitre la définition d'espace euclidien et d'espace prehilertien ; le système orthogonal et des théorèmes de Reisz Ficher, l'inégalité de Bessel de l'égalité de Parseval, dans la deuxième partie, on explique comment peut on construire un système des polynômes orthogonaux relativement à une mesure α , concentrée sur un support F de $\mathbb{C}$, on donne aussi les propriétés fondamentales de ces polynômes orthogonaux surtout la propriété dite extrémale qui nous sera très utile par la suite, puis on expose un résumé des principaux cas traités de comportement asymptotique des polynômes orthogonaux de plusieurs cas selon le support de la mesure α (ensemble énumérable, segment, cercle unité, contour, contour plus une partie discrète finie ...).

Le chapitre 2 est divisé en 3 parties. La première partie met en lumière les outils fonctionnels nécessaires pour l'étude du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le contour. Les deux outils fonctionnels fondamentaux sont les deux espaces de Hardy $H^2(\Omega)$, $H^2(\Omega, \rho)$. On met l'accent sur l'existence d'une limite non radiale pour toute $f \in H^2(\Omega)$. Enfin on construit une fonction dite de Szego dans le paragraphe 2.2. Les notions de fonctions limites tangentes, et la fonction de Szego sont des outils intermédiaires pour définir l' espace $H^2(\Omega, \rho)$. On donne quelques théorèmes les caractérisations et les propriétés fondamentales de $H^2(\Omega, \rho)$.

La partie 2 de ce chapitre s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le contour avec la présence d'une fonction poids.

Bien sûr ce chapitre 3 utilise les résultats de la partie 2 pour aboutir à une telle formule asymptotique.

On se base essentiellement sur l'article de Szego et Gueronimus, [22] [25], pour démontrer la formule asymptotique.

Le chapitre 3 est divisé en 2 parties. On donne dans la première partie de ce chapitre la définition des polynômes polaires primitives des polynômes orthogonaux sur le contour ,on donne les propriétés structurelles de ces polynômes polaires qui permettront nous aider à résoudre le problème de comportement asymptotique de ces polynômes polaires.On se base essentiellement sur l'article de **Pijeira** et **Fandora**, [8] [9]. La deuxième partie du chapitre 3 est consacrée est élaborer les formules asymptotiques des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le contour. On se base essentiellement sur l'article de **Rehouma** [15] qui traite la formule asymptotique des polynômes polaires primitives des polynômes orthogonaux sur le cercle unité.

Chapitre 1

Construction d'un système de polynômes orthogonaux relativement à une mesure α

Le chapitre 1 est divisé en deux parties. On donne dans la première partie de ce chapitre la définition d'espace euclidien et d'espace préhilbertien ; le système orthogonal et des théorèmes de Reisz Fischer, l'inégalité de Bessel de l'égalité de Parseval, dans la deuxième partie, on explique comment peut on construire un système des polynômes orthogonaux relativement à une mesure α , concentrée sur un support F de $\mathbb{C}$, on donne aussi les propriétés fondamentales de ces polynômes orthogonaux surtout la propriété dite extrémale qui nous sera très utile par la suite, puis on expose un résumé des principaux cas traités de comportement asymptotique des polynômes orthogonaux de plusieurs cas selon le support de la mesure α (ensemble énumérable, segment, cercle unité, contour, contour plus une partie discrète finie ...).

1.1 Espaces euclidiens et espaces préhilbertiens et orthogonalité hermitienne

1.1.1 Espace euclidien

Définition 1.1 Soit X un espace vectoriel réel. On dit que X est euclidien si X est muni d'un produit scalaire c.à.d une application de $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ notée $\langle ., . \rangle$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
2. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$.
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

4. $\langle x, w \rangle \geq 0$; $\langle x, w \rangle = 0$ a lieu seulement pour $x = 0$.

On pose

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle,$$

$(X, \|\cdot\|)$ devient un espace vectoriel normé.

Définition 1.2 x_α de X non nuls est dit orthogonal si

$$\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = 0 \text{ pour } \alpha \neq \beta. (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2.$$

Si de plus $\langle x_\alpha, x_\alpha \rangle = 1$, x_α est dit orthonormal.

Remarque 1.1 Tout système x_α orthogonal est libre.

Définition 1.3 Le système $\{x_i\}$ est dit complet si le plus petit sous espace fermé qui le contient coïncide avec X c-à-d explicitement.

$$\forall x \in X; \forall \varepsilon > 0, \exists y = c_0x_0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \text{ t.q. } \|x - y\| < \varepsilon.$$

Si le système $\{x_i\}$ est orthogonal et est complet, on dit que $\{x_i\}$ est une base orthogonale.

1.1.2 Espace préhilbertien

Définition 1.4 Un espace vectoriel H sur le corps complexe est appelé espace préhilbertien si à tout couple $(x, y) \in H^2$ on associe un nombre complexe notée $\langle x, y \rangle$, appelé produit scalaire de x et y , et vérifiant les axiomes

a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$

b) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle.$

c) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$

d) $\langle x, x \rangle \geq 0.$

e) $\langle x, x \rangle = 0$ seulement pour $x = 0$.

Remarque 1.2 La notion de système orthogonal, de base orthogonale sont les mêmes que celles pour un espace euclidien.

Définition 1.5 Soit H un espace préhilbertien et $\{\varphi_\alpha\}$ un système orthogonal et $f \in H$.

Les nombres complexes $C_\alpha = \langle f, \varphi_\alpha \rangle$ s'appellent les coefficients de Fourier de f relativement à $\{\varphi_\alpha\}$. La série $\sum_{\alpha \in I} \langle f, \varphi_\alpha \rangle \varphi_\alpha$ s'appelle série de Fourier de f relativement au système $\{\varphi_\alpha\}$.

1.1.3 Inégalité de Bessel

Soit $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un système orthonormal de l'espace euclidien X et $f \in X$ quelconque, et

$$\sum c_k \varphi_k,$$

la série de Fourier associée à f et à $\{\varphi_k\}$; $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$.

La série $\sum c_k \varphi_k$ converge-t-elle (c-à-d. la suite $\{S_n\}$ définie par : $S_n = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k$ converge-t-elle vers une limite au sens de la métrique de X) ?.

Si la série de Fourier est convergente, sa somme coïncide-t-elle avec f ?.

Pour répondre à cette question, on doit résoudre le problème suivant :

À l'instant donné n , comment choisir α_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$ pour que la distance entre f et

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \text{ soit minimale.} \quad (1.1)$$

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle f, \varphi_k \rangle + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2.$$

Donc, $\|f - S_n\|^2$ est minimale si et seulement si $\alpha_k = c_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Dans ce cas

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2, \quad (1.2)$$

$$\|f - S_n\| \geq 0, \quad (1.3)$$

donc

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

On obtient alors :

Théorème 1.1 (Smirnov, [63]). Soit $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un système orthonormé de l'espace euclidien X et $f \in X$ quelconque et $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ le coefficient de Fourier de f relativement à $\{\varphi_k\}_{k=1, \dots}$. Alors la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \text{ est convergente et de plus } \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Définition 1.6 Le système orthonormé $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est dit fermé si pour tout $f \in X$ (X est euclidien), on a l'égalité suivante

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 \quad (1.5)$$

appelée formule de Parseval.

Remarque 1.3 Dans un espace euclidien séparable X , tout système orthonormé complet est fermé et réciproquement.

1.1.4 Orthogonalisation de Gram-Schmidt

Théorème 1.2 Soient $\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots\}$ un système linéairement indépendant d'un espace euclidien X . Alors il existe dans X un système d'éléments $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots\}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. $\{\varphi_n\}_n$ est orthonormé.
2. Chaque élément φ_n est une combinaison linéaire des éléments $f_1, f_2, \dots, f_n$:

$$\varphi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \dots + a_{nn}f_n \quad ; \quad a_{nn} \neq 0.$$

3. Chaque élément f_n peut être mis sous la forme :

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + b_{n2}\varphi_2 + \dots + b_{nn}\varphi_n \quad ; \quad b_{nn} \neq 0.$$

1.1.5 Espaces euclidiens complets

Si encore l'espace euclidien est complet on obtient le théorème très utile pour la suite dit théorème de **Riesz-Fischer**.

Théorème 1.3 (Riesz-Fischer) [63]. Soit $\{\varphi_n\}$ un système orthonormé quelconque dans un espace euclidien complet X et soient $\{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots\}$ t.q. la série $\sum_n |c_k|^2$, soit convergente. Alors il existe $f \in X$ unique, tel que

$$c_n = \langle f, \varphi_n \rangle \quad \text{et} \quad \sum_n |c_k|^2 = \|f\|^2 \quad (\text{formule de Parseval}).$$

1.1.6 Construction d'un système de polynômes orthogonaux relativement à la mesure α

Définition 1.7 (Notations) [29].

On note par $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ la tribu borélienne de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire la plus petite σ -algèbre engendrée par la topologie de $\mathbb{C}$ (la topologie de $\mathbb{C}$ étant prise au sens usuel).

Soit α une mesure positive finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ non discrète, on note par $L^2(\mathbb{C}, \alpha)$ l'espace vectoriel suivant

$$L^2(\mathbb{C}, \alpha) = \left\{ f \text{ mesurables t.q. } \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 d\alpha(z) < +\infty \right\} \quad (1.4)$$

telque $\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 d\alpha(z)$ est bien sûr l'intégrale de Lebesgue relativement à la mesure α et l'espace mesurable $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$. Soient $f \in L^2(\mathbb{C}, \alpha)$ et $g \in L^2(\mathbb{C}, \alpha)$. Notons par

$$\langle f, g \rangle_{\alpha} = \int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{g(z)} d\alpha(z).$$

Alors $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ est un produit scalaire complexe et $(L^2(\mathbb{C}, \alpha), \langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha)$ est un espace de Hilbert complexe [18, chapitre IV section 4.1 page 53].

Définition 1.8 Soit $(X, \mathcal{W}, \alpha)$ un espace mesuré ($\mathcal{W}$ α -algèbre; μ mesure positive) et $A_0 \in \mathcal{W}$ (ensemble mesurable). On dit que μ est concentrée sur A_0 si et seulement si

$$\mu(E) = 0 \quad \text{pour tout } E \subset X \setminus A_0.$$

A_0 s'appelle le support de μ .

Si F est le support de α et si f est une fonction mesurable, alors

$$\int_{\mathbb{C}} f(z) d\alpha(z) = \int_F f(z) d\alpha(z) \quad (1.5)$$

Appliquons le procédé d'orthogonalisation (décrit au théorème 1.2) au système linéairement indépendant $\{1, z, z^2, \dots, z^n, \dots\}$, on obtient le :

Théorème 1.4 Soit α une mesure positive, finie et non discrète définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{C})$. Supposons en outre que pour $n = 0, 1, 2, \dots$ on ait $z^n \in L^2(\mathbb{C}, \alpha)$, si on applique le procédé d'orthogonalisation au système linéairement indépendant $\{1, z, z^2, \dots, z^n, \dots\}$, on obtient le système de polynômes $L_n(z)$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $L_n(z)$ est un polynôme de degré n , normalisé (i.e. le coefficient de z^n est égal à 1).
2. Le système $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonal dans $L^2(\mathbb{C}, \alpha)$, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{C}} L_n(z) \overline{L_m(z)} d\alpha(z) = 0 \quad \text{si } n \neq m. \quad (1.6)$$

Définition 1.9 Le système de polynômes $\{L_n\}$ vérifiant les conditions 1 et 2, s'appelle système de polynômes orthogonaux relativement à la mesure α .

1.2 Propriétés fondamentales

Théorème 1.5 (Propriété extrême). Soit $\{L_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ le système de polynômes orthogonaux relativement à la mesure α . Notons par $\mathcal{P}_{n,1}$ l'ensemble des polynômes de degré n dont le coefficient de z^n est égal à +1.

Alors $L_n(z)$ est la solution du problème extrême suivant

$$\int_{\mathbb{C}} |L_n(z)|^2 d\alpha(z) = \min \left\{ \int_{\mathbb{C}} |Q(z)|^2 d\alpha(z) : Q \in \mathcal{P}_{n,1} \right\}.$$

Démonstration. Soit $Q(Z) = a_0 + a_1Z + \cdots + Z^n$. Alors

$$Q(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(z) \Rightarrow \alpha_n = 1,$$

par suite,

$$\int_{\mathbb{C}} |Q(z)|^2 d\alpha(z) = \langle Q, Q \rangle_{\alpha} = \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|_{\alpha}^2 \|L_k\|^2 + \|L_n\|_{\alpha}^2. \quad (1.7)$$

Cette expression est minimale si et seulement si : $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. Dans ce cas : $Q(z) = L_n(z)$, et le minimum est

$$|L_n|_{\alpha}^2 = \int_{\mathbb{C}} |L_n(z)|^2 d\alpha(z).$$

■

1.2.1 Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux

Définition 1.10 [3], [4]. On appelle problème du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux relativement à la mesure α l'un des trois problèmes suivants : déterminer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(z), z \in \mathbb{K},$$

où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)}, z \in \mathbb{K} \quad (\text{Ratio asymptotic behaviour}),$$

ou bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|L_n(z)|}, z \in \mathbb{K} \quad (n\text{-th roots asymptotic behaviour}),$$

telle que $z \in \mathbb{F}; \mathbb{F} = \text{supp}(\alpha); \mathbb{K} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{F}$. La solution de ce problème dépend en général de α et de $\mathbb{F}$.

Définition 1.11 Soient α et μ deux mesures positives définies sur $\mathcal{B}(\mathbb{C})$. On dit que α est absolument continue par rapport à μ et on note $\alpha \ll \mu$ si et seulement si

$$\alpha(E) = 0 \text{ pour tout } E \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) \text{ tel que } \mu(E) = 0. \quad (1.8)$$

Théorème 1.6 (Radon-Nyodim). Soient α une mesure définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ et μ une mesure positive finie (définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{C})$), tel que : α est absolument continue par rapport à μ . Alors, il existe une fonction et une seule $f \in L^1(\mu)$, tel que

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) : \quad \alpha(A) = \int_A f d\mu. \quad (1.9)$$

Définition 1.12 La fonction f associée à α absolument continue par rapport à μ est dite la dérivée de Radon-Nycodim par rapport à μ . On la note $\frac{d\alpha}{d\mu}$ ou encore $d\alpha = f \cdot d\mu$.

Théorème 1.7 [21]. Soient α une mesure positive définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ et μ une mesure positive finie (infinie). De plus on suppose que α est absolument continue par rapport à μ ($d\alpha = f d\mu$). Pour toute fonction $g \in L^1(\alpha)$, on a

$$\int_E g d\alpha = \int_E f g d\mu. \quad (1.10)$$

Remarque 1.4 Certains auteurs utilisent comme définition de l'absolue continuité l'assertion suivante : α est dite absolument continue par rapport à μ si et seulement s'il existe $f \in L^1(\mu)$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) \quad \alpha(A) = \int_A f d\mu; \quad f \in L^1(\mu); A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}), \quad d\alpha = f d\mu. \quad (1.11)$$

1.3 Résumé des principaux cas traités

Formule asymptotique de Szego pour les polynômes orthogonaux sur le cercle unité :

$\mathbb{F} = [-\pi, \pi]$, α est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, c.à.d

$$[-\pi, \pi], \quad d\alpha = p(\theta)d\theta; \quad p \in L^1([-\pi, \pi], d\theta); \quad p \geq 0. \quad (1.12)$$

L'étude du comportement asymptotique de $L_n(z)$ orthogonaux sur le cercle avec la fonction poids p , c-à-d vérifiant

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{F}} L_n(z) \overline{L_m(z)} p(\theta) d\theta = \delta_{nm}, \quad (z = e^{i\theta}), \quad (1.13)$$

δ_{nm} désigne le symbole **Kronecker** a été étudié profondément par **Szego** en 1920 [21, chapitre IV section 4.1 page 53]. Sa méthode a été reprise et utilisée pour l'étude de comportement asymptotique d'autres types de polynômes orthogonaux. La forme générale de cette formule est

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(z) \approx \frac{z^n}{D_\rho(1/z)}; \quad |z| > 1, \quad (1.14)$$

où $D_\rho(\cdot)$ est une fonction holomorphe dans le disque ouvert et construite par **Szego** et porte son nom. **Kolmogorov**, **Krein** et **Geronimus** ont généralisé cette formule dans le cas où α n'est pas absolument continue. Pour plus de détails, [22, chapitre IV section 4.1 page 53], [25, chapitre IV section 4.1 page 53], [39, chapitre IV section 4.1 page 53].

Formule asymptotique des polynômes orthogonaux sur le segment (cas général) :

Le cas général d'une fonction poids ρ vérifiant certaines conditions assez générales a été étudié dans [22, chapitre IV section 4.1 page 53], dans ce cas

$$\mathbb{F} = [-1, 1], \quad d\alpha = \rho(x)dx; \quad \rho > 0 \text{ et } \rho \in L^1([-1, 1], dx).$$

Szego a établi une relation entre les polynômes orthogonaux sur le cercle décrits dans [21, chapitre IV section 4.1 page 53] et ceux du segment $[-1, 1]$.

Utilisant cette relation il a déduit la formule asymptotique des polynômes orthogonaux sur le segment de celle du cercle. D'ailleurs cette formule a la même forme que celle de [21, chapitre IV section 4.1 page 53].

Formule asymptotique des polynômes orthogonaux sur le segment (cas classique) :

Ces polynômes et leur comportement asymptotique ont été étudiés avant Szego par Legendre, Tchebychev, Jacobi, Hermite, Laguerre.

Ces polynômes constituent des cas particuliers de notre définition en considérant :

1. $F = [-1, 1]$; $\rho(x) = 1$; les polynômes orthogonaux $L_n(x)$ sont les polynômes de Legendre.
2. $F = [-1, 1]$, $\rho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, les polynômes orthogonaux $L_n(x)$ sont les polynômes de Tchebitchef de première espèce.
3. $F = [-1, 1]$, $\rho(x) = (1 - x^2)^{1/2}$, les polynômes orthogonaux $L_n(x)$ sont de la forme

$$\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}, \quad (x = \cos \theta).$$

4. $F = [-1, 1]$, $\rho(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, les polynômes orthogonaux $L_n(x)$ sont les polynômes de Jacobi. Pour plus de détails voir [11, chapitre IV section 4.1 page 53].
5. $F = [0, +\infty[$; $\rho(x) = e^{-x}x^\alpha$, $\alpha > -1$; dans ce cas $L_n(x)$ sont les polynômes de Laguerre.
6. $F =]-\infty, +\infty[$; $\rho(x) = e^{-x^2}$; dans ce cas $L_n(x)$ sont les polynômes d'Hermite.

Pour plus de détails voir [11, chapitre V section 5.1 et 5.5], [21, chapitre V section 5.1 et 5.5].

Formule asymptotique des polynômes orthogonaux sur le contour avec fonction poids :

$F = E$; E est un contour de Jordan rectifiable; α est absolument continue par rapport à la mesure longueur d'arc sur E ; $d\alpha = \rho(\xi) |d\xi|$, $\xi \in E$.

La formule asymptotique a toujours la forme suivante

$$L_n(z) = [C(E)\Phi(z)]^n \varphi^*(z)[1 + \epsilon_n(z)] \quad (1.15)$$

où $C(E)$ est la capacité de E , $C(E) = \text{constante}$, $\Phi(z)$ est l'application conforme du domaine $\Omega = \text{ext}(E)$ sur l'extérieur du cercle unitaire. $\varphi^*(\cdot)$ est une fonction holomorphe dans Ω , solution d'un problème extremal qu'on définira plus tard. $\epsilon_n(\cdot) \rightarrow 0$ uniformément sur les compacts de Ω . Ces formules ont été démontrées dans les travaux de Szego, en 1920 ou $\rho = 1$, [21, chapitre V section 5.1 et 5.5] et Gueronimus; E est un contour analytique. [25, chapitre V section 5.1 et 5.5], ont étudié le même problème en considérant n assez générale et E un contour de Jordan rectifiable présentant quelques spécificités (lisses, analytiques...).

Chapitre 2

Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le contour avec une fonction poids

Le but de ce chapitre est d'établir la formule asymptotique des polynômes orthogonaux dans la cas d'une mesure concentrée sur un contour de jordan rectifiable, c'est à dire dans les conditions suivantes

$F = E$ ou E est un contour de jordan rectifiable ; $\alpha = \beta$ ou β est une mesure concentrée sur E , absolument continue par rapport à la mesure de la longueur d'arc, c'est à dire $d\beta = \rho(\xi)|d\xi|$; le resultat obtenu est présenté dans le théorème 2.17.

La formule asymptotique a la forme 2.33, la méthode de la démonstration du théorème 2.17 sa base sur la propriété extrémale des polynômes $L_n(x_n)$ et les propriétés fonctionnelles de l'espace $H^2(\Omega, \rho)$. Le résultat présenté dans la théorème 2.17 est plus général possible connu. Il généralise les résultats de **Szego** et **Korovkine**, [21, chapitre V section 5.1 et 5.5], [38, chapitre V section 5.1 et 5.5].

2.1 Propriétés fondamentales

Définition 2.1 (*Contour de Jordan*) C'est l'image d'un chemin $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}; t \mapsto Z(t)$ de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$, tel que

$$z(a) = z(b); z(t_1) \neq z(t_2) \text{ si } a < t_1 \neq t_2 < b.$$

Définition 2.2 (*Contour de Jordan rectifiable*). Un contour de Jordan est rectifiable s'il pos-

sède encore la propriété : $z'(t)$ existe partout et

$$\int_a^b |z'(t)| dt < +\infty. \quad (2.1)$$

Soit E donc un contour de Jordan rectifiable et la mesure définie sur $B(\mathbb{C})$ dont le support est E , est absolument continue par rapport à la mesure image d'une $d\xi$, c-à-d : $\forall \beta \in B(\mathbb{C})$ Bordien

$$\alpha(B) = \int_{B \cap E} \rho(\xi) |d\xi|.$$

Théorème 2.1 Soit ρ une fonction définie sur E tq $\rho(\xi) \geq 0$ et $\int \rho(\xi) |d\xi| < +\infty$. Alors il existe un système unique de polynômes $\{L_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) L_n est polynôme de degré n exactement dont le coefficient de z^n est égal à 1.

2)

$$\int_E L_n(\xi) \overline{L_m(\xi)} \rho(\xi) |d\xi| = 0, \quad n \neq m. \quad (2.2)$$

Le système de polynômes $\{L_n(\cdot)\}$ vérifiant les conditions 1) et 2) s'appelle système de polynômes orthogonaux associés au contour E et à la fonction poids ρ .

Démonstration. C'est le cas particulier des polynômes orthogonaux associés à une mesure α (comme au Chapitre I) en remarquant que

$$z^n \in L^2(\mathbb{C}, \alpha) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

■

Théorème 2.2 (Propriétés extrémales). Soit $L_n \in \{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Alors L_n est la solution du problème extrémal suivant

$$\min_{Q(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\dots} \int_E |Q(\xi)|^2 \rho(\xi) |d\xi| = \|L_n\|_{L(C, \alpha)}^2. \quad (2.3)$$

Démonstration. C'est aussi le cas particulier de α est absolument continu par rapport à la mesure longueur d'arc. c-à-d $d\alpha = \rho(\xi) |d\xi|$, (voir chapitre 1). ■

2.2 L'espace $\mathbb{H}(\mathbb{C})$

2.2.1 Transformations conformes

Définition 2.3 Soient G_1, G_2 deux régions de $\mathbb{C}$, on dit que G_1 est conformement équivalent à G_2 , s'il existe $f : G_1 \longrightarrow G_2$ qui vérifie :

1. $f \in \mathbb{H}(G_1)$.
2. f est bijective.

Remarque 2.1 Cette relation est une relation d'équivalence sur la famille des domaines de $\mathbb{C}$.

Remarque 2.2 $\mathbb{C}$ n'est pas équivalent à aucun domaine borné de $\mathbb{C}$.

Remarque 2.3 Si G_1 est simplement connexe et si G_1 est conformement équivalent à G_2 . Alors G_2 est nécessairement simplement connexe.

Théorème 2.3 (Théorème de **Riemann**). Soit G un domaine simplement connexe ; $G \neq \mathbb{C}$ et $a \in G_1$. Alors il existe $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ unique, tel que

- a) $f \in \mathbb{H}(G)$.
- b) f est bijective.
- c) $f(G) = \{z, |z| < 1\}$.
- d) $f(a) = 0 ; f'(a) > 0$.

Remarque 2.4 Dans la famille des simplement connexes, il existe seulement deux classes d'équivalence. La classe contenant les simplement connexes autres que $\mathbb{C}$.

Cas important dans la suite :

Soit E un contour de Jordan. Alors E partage $\mathbb{C}$ en deux parties Ω_1 et Ω_2 possédant les propriétés suivantes :

- Ω_2 est simplement connexe, borné.
- Ω_1 est connexe non borné.
- E est la frontière commune de Ω_1 et Ω_2 .

Notons par $G_1 = \{z \mid |z| > 1\}$, $G_2 = \{z \mid |z| < 1\}$.

L'application directe du théorème de l'application conforme de Riemann donne :

Théorème 2.4 [63]. Soit E un contour de Jordan. Alors il existe φ unique $\Omega_2 \longrightarrow G_2$ possédant les propriétés suivantes :

- a) $\varphi \in \mathbb{H}(\Omega_2)$.
- b) φ est bijective.
- c) $\varphi(a) = 0, \varphi'(a) \Rightarrow 0, a \in \Omega_2$.

Si on effectue le changement de variable $\xi = 1/z$, on obtient en prenant :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \{\infty\} \text{ et } G = G_1 \cup \{\infty\}$$

.

Théorème 2.5 [63]. Soit E un contour de Jordan. Alors il existe $\Phi : \Omega \longrightarrow G$ unique possédant les propriétés suivantes :

- a) Φ est bijective.
- b) $\Phi_{\Omega_1 - \{\infty\}}$, est holomorphe.
- c) $\lim_{z \rightarrow a} \Phi(z) = \infty$.
- c) $\lim_{z \rightarrow a} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$, et egal $\Phi'(\infty)$.

Définition 2.4 On pose

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = \frac{1}{C(E)} \quad (2.4)$$

$C(E)$ s'appelle **capacité de E** .

Théorème 2.6 (Carathéodory), [29]. Soit E un contour de Jordan rectifiable et Φ , l'application conforme $\Phi : \Omega \longrightarrow G$ définie dans le théorème 2.5.

Alors, il existe un prolongement $\tilde{\Phi}$ sur E tel que Φ est une bijection de E sur $\{z \mid |z| = 1\}$, c-à-d.

$$|\tilde{\Phi}(\xi)| = 1; \xi \in E. \quad (2.5)$$

2.2.2 Prolongement à la frontière (Th. de Carathéodory)

Si encore E est rectifiable, on obtient :

Théorème 2.7 (Carathéodory), [29]. Soit E un contour de Jordan rectifiable et φ l'application conforme $\varphi : \Omega \longrightarrow G$, dans le théorème 2.5. Alors il existe un prolongement φ unique continu sur $\bar{\Omega}$ tel que φ est une bijection de E sur $\{z \mid |z| = 1\}$, c-à-d

$$|\varphi(\xi)| = 1; \xi \in E. \quad (2.6)$$

2.2.3 Espace de Hardy à l'intérieur et à l'extérieur d'un contour de Jordan rectifiable

Définition 2.5 Soit $f \in \mathbb{H}(\Omega_1)$ et $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n Z^n$ son développement de Laurent au voisinage de l'infini. On dit que f est holomorphe à l'infini si on a $a_n = 0$ pour tout $n < 0$,

c-à-d

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (2.7)$$

On note par $\mathbb{H}(\Omega)$ la classe des fonctions holomorphes dans Ω , $l \infty$ y compris.

Notation : On note par : $E_r = \{\xi \in E, |\Phi(\xi)| = r\}; r > 1$ et $E'_r = \{\xi, \xi \in E, |\Phi(\xi)| = r\}; r < 1$ et par : $\Psi = \Phi^{-1}$, $\Psi = \Psi^{-1}$.

Définition 2.6 (Espace $\mathbb{H}^2(\Omega_1)$), [63], [38]. Soit $f \in \mathbb{H}(\Omega_1)$, on dit que $f \in \mathbb{H}^2(\Omega_1)$ si et seulement si : $\exists C > 0$, C' indépendant de r tel que

$$\int_{E_r} |f(z)|^2 |dZ| \leq C', \quad \text{pour } 0 < r < 1. \quad (2.5)$$

L'ensemble de ces fonctions s'appelle espace de Hardy à l'intérieur.

Proposition 2.1 [63]. $f \in \mathbb{H}^2(\Omega_2)$ si et seulement si

$$f[\Psi'(\omega)]\sqrt{\Psi'(\omega)} \in \mathbb{H}^2(\mathbb{G}). \quad (2.6)$$

Démonstration. En effet

$$\int_{E_r} |f(z)|^2 |dz| = \int_{C_r} |f[\Psi(\omega)]|^2 |\Psi'(\omega)| |d\omega|,$$

avec $\Psi = \varphi^{-1}$, et $C_r = \varphi(E_r) = \{\omega, |\omega| = r; r < 1\}$ ■

2.3 Propriétés fondamentales de $H^2(\Omega)$

On donnera quelques propriétés de $H^2(\Omega)$ sans démonstration qui nous seront utiles pour la suite.

Théorème 2.8 [63]. Soit E contour de Jordan rectifiable et $f \in H^2(\Omega)$. Alors il existe presque partout sur E une limite non tangente de f notée f^* et définie par

$$f^*(\xi) = \lim_{z \rightarrow \xi} f(z), \quad (2.7)$$

f^* vérifie :

Théorème 2.9 $f^* \in L^2(E, |d\xi|)$ et

$$\int_E |f^*(\xi)|^2 |d\xi| = \lim_{r \rightarrow 1^+} \int_{E_r} |f(z)|^2 |dz|.$$

1. Si on pose

$$\|f\|_{H^2(\Omega)} = \|f^*\|_{L^2(E, |d\xi|)}, \quad (2.8)$$

où

$$\|f^*\|_{L^2(E, |d\xi|)} = \left\{ \int_E |f^*(\xi)|^2 |d\xi| \right\}^{1/2}.$$

Alors : $(H^2(\Omega), \|\cdot\|_{H^2(\Omega)})$ est complet. C'est aussi un espace de Hilbert en posant

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\Omega)} = \int_E f^*(\xi) \overline{g^*(\xi)} |d\xi|. \quad (2.9)$$

2. $\forall z \in \Omega - \{\infty\}$

$$f(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_E \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} \frac{d\xi}{z}. \quad (2.10)$$

Démonstration. Voir les deux livres de **Smirnov**, **Szego** et **Korovkine**, [63], [12, chapitre IV section 4.1 page 53], [13, chapitre IV section 4.1 page 53], [14, chapitre IV section 4.1 page 53]. ■

2.3.1 Fonction de Szego à l'intérieur et à l'extérieur d'un contour de Jordan rectifiable

Théorème 2.10 [63], [21], [38]. Soit ρ une fonction définie sur E tq :

- 1) $\rho(\xi) \geq 0$ et $\rho \in L^1(E, |d\xi|)$.
- 2) $|\Phi(\xi)| \log \rho(\xi) \in L^1(E, |d\xi|)$, (Condition de Szego).

Alors il existe une fonction notée D_ρ^{int} et appelée fonction de Szego à l'intérieur du contour vérifiant les conditions suivantes :

- 1) $D_\rho^{int} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $D_\rho^{int} \in H^2(\Omega_1)$.
- 2) $D_\rho^{int}(Z) \neq 0; \forall Z \in \Omega_1$.
- 3) $D_\rho^{int}(a) > 0$.
- 4) $|D_\rho^{int}(\xi)|^2 = \rho(\xi)$, où $\bar{D}_\rho^{int}(z) = \lim_{x \rightarrow \xi} D_\rho^{int}(z)$.

Théorème 2.11 [63], [21], [38]. Soit ρ une fonction poids définie sur E telle que :

- 1) $\rho(\xi) \geq 0; (\xi \in E); \rho(\cdot) \in L^1(E, |d\xi|)$.
- 2) $|\Phi(\xi)| \log \rho(\xi) \in L^1(E, |d\xi|)$.

Alors. Il existe une fonction notée D_ρ et appelée fonction de Szego à l'extérieur du contour vérifiant les conditions suivantes :

- 1) $D_\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \quad D_\rho \in H^2(\Omega).$
- 2) $D_\rho(z) \neq 0, \forall z \in \Omega.$
- 3) $D_\rho(\infty) > 0.$
- 4) $|D_\rho(\xi)|^2 = \rho(\xi).$

2.4 L'espace $H^2(\Omega, \rho)$

2.4.1 Définitions et propriétés fondamentales

Définition 2.7 [63], [38]. Soit E un contour de Jordan rectifiable et ρ une fonction définie sur E et vérifiant :

- 1) $\rho(\cdot) > 0$, et $\rho(\cdot) \in L^1(E, |d\xi|).$
- 2) $|\Phi(\xi)| \log \rho(\xi) \in L^1(E, |d\xi|).$

$D_\rho(\cdot)$ la fonction de Szego associée à la fonction de poids $\rho(\cdot)$ et au contour E .

Soit $f \in H(\Omega)$. On dit que $f \in H^2(\Omega, \rho)$ si et seulement si

$$f(z) D_\rho(z) \in H^2(\Omega). \quad (2.11)$$

Théorème 2.12 [63], [38]. Soit $f \in H^2(\Omega, \rho)$. Alors f admet les propriétés :

- 1) f admet un prolongement non tangent sur E noté $\hat{f}$ et défini par $f(\xi) = \lim_{z \rightarrow \xi} f(z)$. De plus $\hat{f} \in L^2(E, \rho|d\xi|).$
- 2) Si on pose

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\Omega, \rho)} = \int_E f(\xi) \overline{g(\xi)} \rho(\xi) |d\xi|, \quad (2.12)$$

alors l'espace $H^2(\Omega, \rho)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. La preuve de la propriété (1) vient immédiatement des propriétés de l'espace $H^2(\Omega)$.

En effet $F(\cdot) = f(\cdot) D_\rho(\cdot) \Rightarrow f = \frac{F}{D_\rho}$ et $F \in H^2(\Omega) \Rightarrow F$ admet un prolongement $\tilde{F}$ non tangent vérifiant la propriété

$$\|\tilde{F}\|_{L^2(E, |d\xi|)} = \lim_{r \rightarrow 1} \int_E |F(z)|^2 |dz|. \quad (2.13)$$

D'autre part $D_\rho(\cdot)$ admet un prolongement sommable $\tilde{D}_\rho(\cdot)$ qui ne s'annule jamais sur E car

$$|\tilde{D}_\rho(\xi)|^2 = \rho(\xi) \text{ et } \rho(\cdot) > 0 \text{ p.p., } (|\Phi(\xi)| \log \rho(\xi) \in L^1(E, |d\xi|)),$$

et finalement $f(z) = \frac{F(z)}{D_\rho(z)}$ admet un prolongement non tangent presque partout sur E qu'on note $\tilde{f}$.

$\tilde{f} \in L^2(E, \rho(\xi)|d\xi|)$. En effet

$$\int_E |\tilde{f}(\xi)|^2 \rho(\xi) |d\xi| = \int_E \frac{|\tilde{F}(\xi)|^2}{\rho(\xi)} \rho(\xi) |d\xi| = \int_E |F(\xi)|^2 |d\xi| < +\infty, \quad (2.14)$$

car $F \in H^2(\Omega)$. ■

Un lemme important

On va maintenant annoncer un lemme important dont la démonstration n'est pas difficile, mais son application est la base du passage de la formule asymptotique faible à la formule asymptotique forte.

Lemme 2.1 [63]. $\forall f \in H^2(\Omega, \rho) ; \forall z_0 \in \Omega, z_0 \neq \infty$, on a

$$|f(z_0)| \leq \left(\frac{\sqrt{l}}{2\pi d(z_0, E) |z_0| |D_\rho(z_0)|} \right) \cdot \|f\|_{H^2(\Omega, \rho)}, \quad (2.15)$$

où

$$\|f\|_\rho = \|f\|_{H^2(\Omega, \rho)}, \quad (2.16)$$

$$d(z_0, E) = \min_{\xi \in E} |z_0 - \xi|, \quad (2.17)$$

$$l = \int_E |d\xi|. \quad (2.18)$$

Démonstration. On a pour tout $f \in H^2(\Omega, \rho)$

$$f(z)D_\rho(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{\tilde{f}(\xi)\tilde{D}_\rho(\xi)}{\xi - z} d\xi \frac{d\xi}{z},$$

d'où

$$f(z)D_\rho(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{D_\rho(z)} \int_E \frac{\tilde{f}(\xi)\tilde{D}_\rho(\xi)}{\xi - z} d\xi \frac{d\xi}{z}.$$

On obtient (2.15) en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation : $\forall \xi \in E : |D_\rho(\xi)|^2 = \rho(\xi)$. ■

Corollaire 2.1 Pour tout compact K de Ω il existe une constante dépendant seulement de K tel que : $\forall f \in H^2(\Omega, \rho) ; \forall z \in K$

$$\max_{z \in K} |f(z)| \leq C(K) \cdot \|f\|_\rho, \quad (2.19)$$

où

$$\|f\|_\rho = \left\{ \int_E |f(\xi)|^2 \rho(\xi) |d\xi| \right\}^{1/2}.$$

Démonstration. Posons

$$d(K, E) = \min_{z \in K, k \in K} |z - K|, \text{ et } d(k, 0) = \min |z|,$$

en plus on a

$$\forall z \in \Omega, D_\rho(z) \neq 0.$$

Posons

$$C(K) = \frac{\sqrt{l}}{2\pi d(K, E) \cdot d(k, 0)} \frac{1}{\min_{z \in K} |D_\rho(z)|}, \quad (2.20)$$

et appliquons le lemme 2.1, on obtient le résultat voulu. ■

Corollaire 2.2 Soit $z_0 \in \Omega$, l'application : $F(z_0) : H^2(\Omega, \rho) \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \longmapsto F(z_0)(f) = f(z_0)$ est une fonctionnelle continue sur $H^2(\Omega, \rho)$.

Démonstration. Si $z_0 \neq \infty$, le corollaire est une conséquence immédiate du formule (2.19).

Si $z_0 = \infty$, on établit pour ce point une formule de Cauchy semblable à la formule avec la modification convenable suivante

$$f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{D_\rho(\infty)} \int_E \frac{\tilde{f}(\xi) \tilde{D}_\rho(\xi)}{\xi} d\xi, \quad (2.21)$$

ensuite on applique le même type de raisonnement que pour le cas $z_0 \neq \infty$. ■

Définition 2.8 (Convergence uniforme sur les compacts). On dit qu'une suite de fonctions $\{f_n\}$ de $H(\Omega)$ converge vers f dans le sens de $H(\Omega)$ si pour tout compact $K \subset \Omega$ on a : $f_n \rightarrow f$ uniformément dans K , c'est-à-dire

$$\max_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \forall K \subset \Omega. \quad (2.22)$$

Si $f_n \rightarrow f$ dans le sens de $H(\Omega)$ alors $f \in H(\Omega)$. Pour plus de détails. Voyons maintenant une condition nécessaire pour que $f_n \rightarrow f$ dans le sens de $H(\Omega)$. Appelons $E_n = E$;

$$E_{1+1/k} = \left\{ \xi \in \Omega : |\Phi(\xi)| = 1 + \frac{1}{k} \right\} \quad (2.23)$$

$\Omega_{1+1/k}$ désigne l'extérieur de $E_{1+1/k}$ et

$$\overline{\Omega}_{1+1/k} = \Omega_{1+1/k} \cup E_{1+1/k}.$$

Avec ces notations on a la proposition suivante :

Proposition 2.2 Pour qu'une suite de fonctions $f_n \in H(\Omega)$ converge vers f dans le sens de $H(\Omega)$ il faut et il suffit que pour tout k naturel on ait

$$\max_{z \in E_{1+1/k}} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (2.24)$$

2.4.2 Lien entre la convergence dans $H^2(\Omega, \rho)$ et $H(\Omega)$

On arrive finalement au but de cette partie. C'est le :

Théorème 2.13 [63], [38]. Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $H^2(\Omega, \rho)$ vérifiant

$$\|f_n\|_{H^2(\Omega, \rho)} \leq C, \quad \forall n; \quad (C = \text{constante}). \quad (2.25)$$

Si $f_n \rightarrow f$ dans le sens de $H(\Omega)$, alors :

- a) $f \in H^2(\Omega, \rho)$.
- b) $\|f\|_{H^2(\Omega, \rho)} \leq C$.
- c) $\|f\|_{H^2(\Omega, \rho)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{H^2(\Omega, \rho)}$.

2.5 Formule asymptotique des polynômes orthogonaux dans le cas d'une mesure concentrée sur un contour de Jordan rectifiable

2.5.1 Position du problème

Soit E un contour de Jordan rectifiable et $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivantes

$$\int_E \rho(\xi) |d\xi| < +\infty, \quad (2.26)$$

et

$$\int_E |\Phi(\xi)| \log(\rho(\xi)) |d\xi| < +\infty. \quad (2.27)$$

Equation (2.27) est la condition de Szego.

On désigne par $\{L_n(z)\}$ le système des polynômes orthogonaux associés à $\rho(\xi)$.

On prend dans ce cas $\alpha = \beta$, β est une mesure absolument continue sur E , positive telle que : $\forall \beta \in B(C)$, on ait : $\beta(B) = \int_{B \cap E} f(\xi) |d\xi|$.

On a vu que dans ce cas, l'orthogonalité était définie comme suit

$$\langle L_n, L_m \rangle = \int_E L_n(\xi) \overline{L_m(\xi)} \rho(\xi) |d\xi| = 0 \text{ si } n \neq m, \quad (2.28)$$

et $\|L_n\|_\rho^2 = \langle L_n, L_n \rangle$, on pose comme condition de normalisation

$$L_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} \dots + a_n, \quad (2.29)$$

ce qui nous assure l'unicité des polynômes orthogonaux $\{L_n(z)\}$.

2.5.1.1 Problème de comportement asymptotique

Etudier le comportement asymptotique de $L_n(z)$ pour

$$n \rightarrow \infty, z \in \text{extérieur de } E.$$

Aussi on appelle problème du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux relativement à la mesure α l'un des trois problèmes suivants :
déterminer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(z), z \in \text{extérieur de } E \quad (2.30)$$

où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)}, z \in \text{extérieur de } E, \quad (\text{Ratio asymptotic behaviour}), \quad (2.31)$$

ou bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|L_n(z)|}, z \in \text{extérieur de } E, \quad (n\text{-th roots asymptotic behaviour}). \quad (2.32)$$

L'étude du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux et le comportement asymptotique des polynômes polaires des polynômes orthogonaux intervient de façon significative dans la résolution de quelques problèmes mathématiques suivants :

1. Analyse de la distribution des zéros des polynômes polaires et leur résultats, ([7], [8]).
2. Etude de la convergence des approximants de Padé, et son accélération, ([33], [55]).
3. Théorie de la représentation des fractions partielles, (Partial Fraction Representation).
4. Théorie spectrale, et les spectres orthogonaux, ([58]).
5. Algorithme parallèle.

2.5.2 Quelques problèmes extrémaux dans $H^2(\Omega, \rho)$

On prend dans ce cas $\alpha = \beta$, β est une mesure absolument continue sur E , positive telle que : $\forall \beta \in B(C)$ on ait : $\beta(B) = \int_{B \cap E} f(\xi) |d\xi|$. On a vu (2.3) que $L_n(\cdot)$ est la solution du problème extrémal suivant

$$\text{Min}_{Q=z^n+\dots+a_n} \|Q\|_p^2 = m_n(\rho) = \|L_n\|_\rho^2. \quad (2.33)$$

Théorème 2.14 [63], [38]. Posons

$$\varphi_n(z) = \frac{Q_n(z)}{(C(E)\Phi(z))^n}, \quad (2.34)$$

avec

$$Q_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n.$$

Alors :

1. $\varphi_n \in H^2(\Omega, p)$,
2. $\varphi_n(\infty) = 1$.

Démonstration. Posons

$$\varphi_n = \frac{Q_n(z)}{(C(E)\Phi(z))^n}.$$

On a alors

$$D_\rho \varphi_n \in H(Q); \varphi_n \in H^2(\Omega, p),$$

car :

- a) φ_n est prolongeable de façon continue sur $\overline{\Omega}$.
- b) $\exists \overline{B}$ (boule fermée) tq $E_r \subset \overline{B} (1 < r \leq 2)$.

Considérons maintenant $K = \overline{B} \cap \overline{\Omega}$; K est un compact et

$$\begin{aligned} \int_{E_r} |D_\rho(z)\varphi_n(z)|^2 |dz| &\leq \max_{z \in K} |\varphi_n(z)|^2 \cdot \int_{E_r} |D_z(z)|^2 |dz| \\ &\leq \max_{z \in K} |\varphi_n(z)|^2 \cdot C, \quad C \text{ indépendant de } r, \end{aligned}$$

car $D_\rho(\cdot) \in H^2(\Omega)$. Donc $D_\rho(\cdot)\varphi_n(\cdot) \in H^2(\Omega)$ ou encore $\varphi_n(\cdot) \in H^2(\Omega, \rho)$. Ce qui achève la démonstration. ■ On peut passer du problème extrémal, dans le théorème 2.2 au problème extrémal suivant

Notons par P_n l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On considère le problème extrémal suivant :

Trouver le minimum $u_n(p)$ d'infini par

$$\mu_n(\rho) = \min \left\{ \|\varphi_n(\cdot)\|_p^2 : \varphi_n = \frac{Q_n(\cdot)}{[C(E)\Phi(\cdot)]^n}, \varphi_n(\infty) = 1, Q_n \in P_n \right\}. \quad (2.35)$$

Proposition 2.3 *Le problème extrémal (2.35) admet une solution unique φ_n^* c-à-d*

$$\|\varphi_n^*\|_p^2 = u_n(p). \quad (2.36)$$

D'autre part $u_n(p)$ et $m_n(p)$; φ_n^* et L_n sont respectivement reliées par les relations

$$u_n(p) = \frac{m_n(p)}{[C(E)]^{2n}}, \quad (2.37)$$

$$\varphi_n^*(z) = \frac{L_n(z)}{[C(E)\Phi(z)]^n}. \quad (2.38)$$

Démonstration. Posons

$$T = \left\{ \varphi_n = \frac{Q_n}{[C(E)\Phi(z)]^n}, Q_n = z^n + \dots + a_n \right\}$$

Il est facile de voir que

$$\frac{L_n(z)}{[C(E)\Phi(z)]^n} \in T.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \int_E \frac{|Q_n(\xi)|^2}{[C(E)\Phi(\xi)]^{2n}} \rho(\xi) |d\xi| &= \frac{1}{C(E)^{2n}} \int_E |Q_n(\xi)|^2 \rho(\xi) |d\xi| \\ &\geq \frac{1}{[C(E)]^{2n}} \int_E |L_n(\xi)|^2 \rho(\xi) |dz|. \end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{L_n}{[C(E)\Phi]^n} \in T,$$

alors

$$\varphi_n \in T$$

et

$$\text{Min} \|\varphi_n\|_p^2 = \int_E \frac{|L_n(\xi)|}{[C(E)\Phi(z)]^n} \rho(\xi) |d\xi| = \frac{1}{[C(E)]^{2n}} \int_E |L_n(z)|^2 \rho(\xi) |d\xi| = \frac{m_n(p)}{[C(E)]^{2n}}.$$

Ce qui nous donne (2.37). Si φ_n^* est la solution du problème extrémal (2.35), alors

$$\varphi_n^*(z) = \frac{L_n(z)}{[C(E)\Phi(z)]^n}.$$

Le comportement asymptotique de L_n est donc lié à celui de φ_n^* par la relation (2.38). ■

On passe du problème fini dimensionnel (2.35) au problème extrémal de dimension infinie suivant :

Trouver l'infimum $u(p)$ défini par

$$u(p) = \inf \{ \|\varphi\|_p^2, \varphi \in H^2(\Omega, p), \varphi(\infty) = 1 \}. \quad (2.39)$$

Rappelons le théorème de la meilleure approximation :

Théorème 2.15 *Soit H un Espace de Hilbert et $X \subset H$ tel que X est convexe et fermé. Alors il existe un élément et un seul x^* tel que*

$$\|x^*\|_H = \min\{\|x\|_H : x \in X\}, \quad (2.40)$$

x^* s'appelle la meilleure approximation de 0.

Proposition 2.4 *Le problème extrémal (2.39) admet une solution et une seule φ^* .*

Démonstration. Appliquons le théorème 2.16 en prenant

$$H = H^2(\Omega, p), \quad X = \{\varphi \in H^2(\Omega, p), \varphi(\infty) = 1\}. \quad (2.41)$$

L'ensemble X est convexe. En effet, si $\varphi_1, \varphi_2 \in X$, alors

$$t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2 \in H^2(\Omega, p), \quad \forall t \in [0, 1].$$

On a aussi

$$(t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2)(\infty) = t + 1 - t = 1 \Rightarrow t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2 \in X \quad (2.42)$$

D'autre part X est fermé dans $H^2(\Omega, p)$. En effet : Soit $\{f_n\}$ une suite dans X tq. $f_n \rightarrow f$ dans le sens de $H^2(\Omega, p)$. On sait que $F : H^2(\Omega, p) \rightarrow \mathbb{C} \ f \mapsto f(\infty)$ est une fonctionnelle continue dans $H^2(\Omega, p)$. Alors : $F_\infty(f_n) \rightarrow F_\infty(f)$ dans $\mathbb{C}$. Mais : $F_\infty(f_n) = f_n(\infty) = 1$. Ceci implique que $f(\infty) = 1$ et puisque $f \in H^2(\Omega, p)$, alors $f \in X$. ■

Proposition 2.5 Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\rho) = u(\rho), \quad (2.43)$$

alors : $\varphi_n \longrightarrow \varphi^*$ dans le sens de $H^2(\Omega, \rho)$, c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi^*\|_\rho^2 = 0. \quad (2.44)$$

Démonstration. Posons

$$\Psi_n = \frac{\varphi_n^* + \varphi^*}{2}. \quad (2.45)$$

On a : $\Psi_n(\infty) = 1$ et $\Psi_n \in H^2(\Omega, \rho)$

$$\|\Psi_n\|_\rho^2 \geq u(\rho). \quad (2.46)$$

D'où en utilisant l'égalité du parallélogramme dans $H^2(\Omega, \rho)$, on obtient

$$\left\| \frac{\varphi_n^* + \varphi^*}{2} \right\|_\rho^2 + \left\| \frac{\varphi_n^* - \varphi^*}{2} \right\|_\rho^2 = 2 \left(\left\| \frac{\varphi_n^*}{2} \right\|_\rho^2 + \left\| \frac{\varphi^*}{2} \right\|_\rho^2 \right). \quad (2.47)$$

Ou encore

$$\|\varphi_n^* - \varphi^*\|_\rho^2 = 2 (\|\varphi_n^*\|_\rho^2 + \|\varphi^*\|_\rho^2) - 4 \left(\left\| \frac{\varphi_n^* + \varphi^*}{2} \right\|_\rho^2 \right).$$

Ce qui nous donne

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n^* - \varphi^*\|_\rho^2 \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \|\varphi_n^* - \varphi^*\|_\rho^2 \leq 4u(\rho) + 4u(\rho) = 0 \quad (2.48)$$

C.Q.F.D. ■

Corollaire 2.3 Si $u_n(p) \rightarrow u(p)$, alors

$$L_n(z) = (C(E)\Phi(z)^n \varphi^*(z))(\{1 + \varepsilon_n(z)\}) \quad (2.49)$$

où

$$\varepsilon_n(z) \rightarrow 0 \quad (2.50)$$

uniformément sur les compacts de Q et φ^* est la solution du problème extremal (2.39).

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition (2.46) et du corollaire (2.37) et (2.38). ■

2.6 Conclusion

Le problème du comportement asymptotique (2.43) admet la solution (2.49), si on arrive à établir la formule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\rho) = u(\rho).$$

On a toujours

$$u(\rho) \leq u_n(\rho) \leq \|\varphi_n\|_\rho, \quad (2.51)$$

pour toute fonction

$$\varphi_n(z) = \frac{Q_n(z)}{[C(E)\Phi(z)]^n} \quad \text{où : } \varphi_n(\infty) = 1, \quad Q_n \in P_n. \quad (2.52)$$

Pour établir (2.43), il suffit d'exhiber une suite particulière de fonctions $\hat{\varphi}_n$ du type (2.52), telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{\varphi}_n\|_\rho^2 = u(\rho). \quad (2.53)$$

Dans ce cas (d'existence d'une telle suite) on a d'après (2.51)

$$u(\rho) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup u_n(\rho) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|\hat{\varphi}_n\|_\rho^2 = u(\rho).$$

Ce qui implique (2.43).

Construction de $\hat{\varphi}_n$:

On peut choisir

$$\hat{\varphi}_n(z) = \frac{F_n(z)}{[\Phi(z)\Phi(z)]^n}, \quad (2.54)$$

où $F_n(z)$ sont les polynômes de Faber généralisés associés à φ^* .

Plus précisément, on définit F_n comme partie polynomiale du développement en série de Laurent à l'infini du produit $\varphi^n(z)\Phi(z)^n$, φ^* vérifiant

$$\|\varphi^*\|_\rho^2 = \inf_{\varphi \in P_n, \varphi(\infty)=1} \|\varphi\|_\rho^2 \quad (2.55)$$

On considère dans ce mémoire la construction faite par **Ya. L. Geronimus** [12, chapitre IV section 4.1 page 53], [13, chapitre IV section 4.1 page 53], [14, chapitre IV section 4.1 page 53].

Plus précisément, si on note par $\Phi(z)$ la partie polynomiale du développement en série de Laurent de $\Phi^n(z)$ au voisinage de l'infini et $\lambda_n(z) = \Phi^n(z) - \Phi_n(z)$, **Ya. L. Geronimus** a démontré le théorème suivant :

Théorème 2.16 (**Ya. L. Geronimus**) (1956). *Soit E un contour de Jordan rectifiable et une fonction poids $\rho(z)$ définie sur E telle que*

$$\rho(\xi) \geq 0; \quad \xi \in E, \quad (2.56)$$

$$\rho \in L^1(E, |d\xi|) \quad \text{et} \quad \rho \in L^1(E, |d\xi|), \quad (\text{condition de Szego}), \quad (2.57)$$

et $u_n(\rho)$ et $u(\rho)$ définis respectivement par (2.35) et (2.39). Considérons aussi

$$\lambda_n(z) = \Phi^n(z) - \Phi_n(z). \quad (2.58)$$

Si $\lambda_n(E) \longrightarrow 0$ uniformément sur E , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\rho) = u(\rho). \quad (2.59)$$

Ce résultat de Guérouninus nous permet d'énoncer le résultat principal de ce chapitre 02.

Théorème 2.17 *Soit E un contour de Jordan rectifiable vérifiant la condition*

$$\lambda_n(\xi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ uniformément sur } E, \quad (\lambda_n = \Phi^n - \Phi_n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Soit ρ fonction poids définie sur E tq $\rho(\xi) \geq 0$ et $\rho \in L^1(E, |d\xi|)$ (condition de Szego). Alors

$$L_n(\varphi) = |(C(E) \Phi(z))^n \varphi^*(z) (\{1 + \varepsilon_n(z)\})|, \quad (2.60)$$

où $\varepsilon_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ uniformément sur les compacts de Ω .

Démonstration. C'est une conséquence directe de (2.52) et (du corollaire 2.58). ■

Chapitre 3

Comportement asymptotique des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le contour

Le chapitre 3 est divisé en 2 parties. On donne dans la première partie ce chapitre la définition des polynômes polaires primitives des polynômes orthogonaux sur le contour, on donne les propriétés structurelles de ces polynômes polaires qui permettront nous aider à résoudre le problème de comportement asymptotique de ces polynômes polaires. La deuxième partie de ce chapitre 3 est consacrée à élaborer les formules asymptotiques des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le contour. On se base essentiellement sur l'article de Szego [9], et de Smirnov [63], la formule asymptotique.

3.1 Polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le contour

Notons par $\{P_{n,\alpha}(z)\}_{n=0,1,2,\dots}$ la suite des polynômes polaires moniques associés à la suite des polynômes orthogonaux moniques $\{L_n(z)\}$ sur le contour. $P_{n,\alpha}(z)$ est par définition solution de l'équation différentielle

$$(n+1) L_n(z) = P_{n,\alpha}(z) + (z-\alpha) P'_{n,\alpha}(z) \quad (3.1)$$

et vérifie les relations suivantes

$$(n+1) \int_{\alpha}^z L_n(t) dt = (z-\alpha) P_{n,\alpha}(z), \quad n=1,2,\dots, (z \neq \alpha, \alpha \in \mathbb{C}) \quad (3.2)$$

et

$$((z - \alpha) P_{n,\alpha}(z))_{z=\alpha} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Les propriétés précédentes impliquent

$$\int_E [P_{n,\alpha}(\xi) + (\xi - \alpha) P'_{n,\alpha}(\xi)] \overline{\xi^\nu} \rho(\xi) |d\xi| = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.4)$$

ou encore

$$\int_E [P_{n,\alpha}(\xi) + (\xi - \alpha) P'_{n,\alpha}(\xi)] \overline{L_m(\xi)} \rho(\xi) |d\xi| = 0, \quad m \neq n. \quad (3.5)$$

Avec ces notations on obtient aussi

$$\int_E [P_{n,\alpha}(\xi) + (\xi - \alpha) P'_{n,\alpha}(\xi)] \overline{L_m(\xi)} \rho(\xi) |d\xi| = (n+1) \|L_n\|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Définition 3.1 [8],[9]. Soit Q_n polynôme de degré n . Notons par $z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n}$ les zéros simples de Q_n et par $\nu_n(Q_n)$ la mesure suivante dite mesure de masse supportée par les zéros de Q_n

$$\nu_n(Q_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{z_{n,k}}, \quad (3.7)$$

$\delta_{z_{n,k}}$ est la mesure de Dirac concentrée sur le point $z_{n,k}$.

Définition 3.2 Soit $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de mesures à support compact. On dit que $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ converge faiblement vers la mesure μ quand $n \rightarrow \infty$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu, \quad (3.8)$$

pour toute fonction f continue sur $\mathbb{C}$ à support compact. Dans ce cas on écrit $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ ou $d\mu_n \xrightarrow{*} d\mu$ ou $d\mu_n(x) \xrightarrow{*} \mu'(x)dx$ si μ est absolument continue.

Notons par $\|\cdot\|_\Delta$ la norm sup sur l'ensemble Δ et $\text{Cap}(\Delta)$ la capacité logarithmique de Δ ([8], [3], [9] sur la notion de capacité logarithmique). Ceci étant on a le résultat suivant :

Lemme 3.1 [8], [9]. Soit $\Delta \subset \mathbb{C}$ un ensemble compact tel que

$$\text{int}(\Delta) = \emptyset, \quad \mathbb{C} \setminus (\Delta) \text{ est connexe et } \text{Cap}(\Delta) > 0.$$

Soit $\{Q_n(z)\}_{n=0}^\infty$ une suite de polynômes moniques (i.e. $Q_n(z) = z^n + \dots$) tels que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Q_n\|_\Delta^{\frac{1}{n}} \leq \text{Cap}(\Delta).$$

Alors

$$\nu_n(Q_n) \xrightarrow{*} \omega_\Delta,$$

ω_Δ est la mesure équilibrée de Δ ([8], [9], pour plus de détails sur la mesure équilibrée).

Théorème 3.1 [8], [9].

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q'_n(z)}{nQ_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{d\nu_n(x)}{z-x} = \int \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} d\nu_n(x)}{z-x} = \int \frac{d\omega_\Delta(x)}{z-x}, \quad (3.9)$$

où $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(x) = \omega$ au sens de la convergence faible, ν_n est la mesure de masse supportée par les zéros de Q_n .

Lemme 3.2 Soit $\{Q_n(z)\}_{n=0}^\infty$ une suite de polynômes. Alors pour $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|Q_n^{(j)}\|_\Delta}{\|Q_n\|_\Delta} \right)^{\frac{1}{n}} \leq 1. \quad (3.10)$$

Les lemmes suivants nous seront utiles pour la suite :

Lemme 3.3 [6], (théorème de **Lucas**, [65]), (théorème de **Badkov**, [51]). Soit P_n un polyôme de degré n . On suppose que tous les zéros de P_n sont situés dans le disque unité. Alors tous les zéros des polynômes dérivés $P_n^{(m)}$, $m = 0, 1, 2, \dots, k$, sont situés dans le disque unité. D'autre part Si $|z| = 1$, alors

$$|P'_n(z)| \geq \frac{n}{2} |P_n(z)|. \quad (3.11)$$

Lemme 3.4 [43], (théorème de **Abdul Aziz**). Soit $P_n = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$ un polynôme de degré n . Posons $M = \max_{0 \leq j \leq n-1} |a_j|$. Alors tous les zéros de P_n sont contenus dans le cercle $|z| \leq 1 + M$.

Lemme 3.5 [43], (théorème de **Abdul Aziz**). Soit $P_n = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$ un polynôme de degré n . Posons $M = \max_{0 \leq j \leq n-1} |a_j|$, alors tous les zéros de P_n sont contenus dans la région

$$\frac{|a_0|}{2(1+M)^{n-1}(1+nM)} \leq |z| \leq 1 + \lambda_0 M, \quad (3.12)$$

où λ_0 est la solution unique de l'équation

$$x = 1 - \frac{1}{(1+Mx)^n},$$

dans l'intervalle $[0, 1]$.

Lemme 3.6 [34], (théorème de **Q.I.Rahman**). Soit $P_n(z)$ un polynôme de degré n tel que tous les zéros de $P_n(z)$ sont contenus dans le disque unité $|z| \leq 1$. Si $|a| > \frac{n+2}{n}$, alors $((z-a)P_n(z))'$ possède une seule racine dans le disque $|z-a| \leq \frac{|a|+1}{n+1}$.

Toutes les autre $n-1$ racines sont contenues dans le disque unité $|z| \leq 1$.

Remarque 3.1 *On va maintenant énoncer un lemme dont la démonstration est un peu compliquée mais son application est la base de la formule asymptotique à l'extérieur d'un contour. Ce résultat a été obtenu par **G.Szegô** en 1921.*

Lemme 3.7 [20], [22], [21]. *Soit Ω un domaine simplement connexe, $\Gamma = \partial\Omega$ est un contour de Jordan rectifiable. Soit φ la transformation conforme de Ω vers l'extérieur du cercle unité, vérifiant les conditions suivantes*

$$\varphi(\infty) = \infty \text{ et } \varphi'(\infty) = \tau.$$

Soient $z_k^{(n)} \in \text{ext}(\Gamma)$, $k = 1, 2, \dots, n$ et $P_n(z)$ le polynôme d'interpolation vérifiant

$$P_n(z_k^{(n)}) = f(z_k^{(n)}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (z \in \Omega). \quad (3.13)$$

Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=1}^n (z - z_k^{(n)})}{(\tau \cdot \varphi(z))^n} = 1. \quad (3.14)$$

Uniformément sur les compacts de Ω . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = f(z). \quad (3.14)$$

Uniformément sur les compacts de Ω .

3.2 Comportement asymptotique des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le contour

Ce paragraphe contient la deuxième partie des résultats originaux de cette thèse. (En remplaçant la transformation conforme Φ par φ). Il s'agit des formules asymptotiques des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le contour

Théorème 3.2 (1952, [25]) *Soit E un contour de **Jordan** rectifiable et ρ une fonction poids définie sur le contour E tel que*

$$\rho \geq 0 \text{ et } \int_E |\xi|^n \rho(\xi) |d\xi| < +\infty, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.15)$$

et la condition dite de Szego suivante

$$\int_E (\log \rho(\xi)) |\varphi'(\xi)| |d\xi| > -\infty. \quad (3.16)$$

Notons

$$m_n(\rho) = \min \left\{ \|Q_n(z)\|_{L^p(E,\rho)}, Q_n = z^n + \dots, Q_n(\infty) = 1 \right\}. \quad (3.17)$$

Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n(\rho)}{C(E)^n} = \mu(\rho)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.18)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{L_n(z)}{C(E)^n \varphi^n(z)} - \varphi^*(z) \right\|_{H^p(\Omega,\rho)} = 0, \quad (3.19)$$

et

$$L_n(z) = C(E)^n \varphi^n(z) \varphi^*(z) [1 + \varepsilon_n(z)], \quad (3.20)$$

uniformément sur les compacts de Ω . Dans ce cas, φ^* , la solution optimale est donnée par la relation suivante

$$\left\| \frac{D_{E,\rho}(z)}{D_{E,\rho}(\infty)} \right\|_{H^p(\Omega,\rho)}^p = \|\varphi^*\|_{H^p(\Omega,\rho)}^p = \inf \left\{ \|\varphi\|_{H^p(\Omega,\rho)}^p, \varphi(\infty) = 1 \right\} = \mu(\rho)$$

Théorème 3.3 Avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses que celles du théorème 3.2 de Ya. L. Geronimus, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} = C(E) \varphi(z), \quad (3.21)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L'_n(z)}{L_n(z)} - n \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\varphi^{*'}(z)}{\varphi^*(z)}, \quad (3.22)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L'_n(z)}{n L_n(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \quad (3.23)$$

uniformément sur les compacts de Ω .

Démonstration. C'est une conséquence directe de (3.20). ■

Théorème 3.4 Soit E un contour de **Jordan** rectifiable et ρ une fonction de poids définie sur le contour E telle que

$$\rho \geq 0, \quad \int_E |\xi|^n \rho(\xi) |d\xi| < +\infty \quad \text{et} \quad \int_E (\log \rho(\xi)) |\varphi'(\xi)| |d\xi| > -\infty. \quad (3.24)$$

Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(z)}{P_{n,\alpha}(z)} = (z - \alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_{n,\alpha}(z)}{n P_{n,\alpha}(z)}, \quad (3.25)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1,\alpha}(z)}{P_{n,\alpha}(z)} = C(E) \varphi(z), \quad (3.26)$$

uniformément sur les compacts de Ω .

Démonstration. Divisons les deux membres de l'égalité (3.1) par $nP_{n,\alpha}(z)$ on a

$$\frac{n+1}{n} \frac{L_n(z)}{P_{n,\alpha}(z)} = \frac{1}{n} + (z - \alpha) \frac{P'_{n,\alpha}(z)}{nP_{n,\alpha}(z)}.$$

D'où le point (3.25). Ainsi le point (3.26) provient du point (3.25) et du fait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1,\alpha}(z)}{P_{n,\alpha}(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)}.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Corollaire 3.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L'_n(z)}{nP_{n,\alpha}(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_{n,\alpha}(z)}{nP_{n,\alpha}(z)}, \quad (3.27)$$

uniformément sur les compacts de Ω .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L'_{n+1}(z)}{nL_n(z)} = C(E)\varphi'(z). \quad (3.28)$$

Démonstration. L'égalité (3.1) donne

$$\frac{L'_n(z)}{L_n(z)} = \frac{(z - \alpha) P''_{n,\alpha}(z) + 2P'_{n,\alpha}(z)}{(z - \alpha) P'_{n,\alpha}(z) + P_{n,\alpha}(z)}.$$

Alors

$$\frac{L'_n(z)}{nP_{n,\alpha}(z)} = \frac{P'_{n,\alpha}(z)}{nP_{n,\alpha}(z)} \frac{(z - \alpha) \frac{P''_{n,\alpha}(z)}{P'_{n,\alpha}(z)} + \frac{2}{n}}{(z - \alpha) \frac{P'_{n,\alpha}(z)}{nP_{n,\alpha}(z)} + \frac{1}{n}}.$$

D'où le point (3.27). D'une autre façon et en utilisant la décomposition

$$\frac{L'_{n+1}(z)}{nL_n(z)} = \frac{L'_{n+1}(z)}{nL_{n+1}(z)} \frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} \quad (3.29)$$

on obtient l'assertion (3.28) en appliquant (3.27) et (3.21). ■

Remarque 3.2 Remarquons que

$$\left(\frac{L_n}{P_{n,\alpha}} \right)' = \frac{L_n}{P_{n,\alpha}} \left(\frac{L'_n}{L_n} - \frac{P'_{n,\alpha}}{P_{n,\alpha}} \right),$$

on obtient donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_{n,\alpha}(z)}{nP_{n,\alpha}(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L'_n(z)}{nL_n(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}, \quad (3.30)$$

uniformément sur les compacts de Ω .

Corollaire 3.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L'_n(z)}{P'_{n,\alpha}(z)} = (z - \alpha) \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}, \quad (3.31)$$

uniformément sur les compacts de Ω .

Démonstration. Effectuons la décomposition suivante

$$\frac{L'_n(z)}{P'_{n,\alpha}(z)} = \frac{L'_n(z)}{nL_n(z)} \frac{L_n(z)}{P_{n,\alpha}(z)} \frac{nP_{n,\alpha}(z)}{P'_{n,\alpha}(z)}.$$

Appliquons (3.23) et (3.25) on obtient (3.31). ■

Théorème 3.5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_{n,\alpha}(z)}{nP_{n,\alpha}(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \quad (3.32)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_{n+1,\alpha}(z)}{nP'_{n,\alpha}(z)} = C(E) \varphi'(z) \quad (3.33)$$

uniformément sur les compacts de Ω .

Démonstration. Pour tout nombre complexe fixé α , les polynômes polaires $P_{n,\alpha}(z)$ vérifient

$$\lim_{z \rightarrow \alpha, \alpha \text{ est un pôle de } P_{n,\alpha}} P_{n,\alpha}(z) = (n+1) \lim_{z \rightarrow \alpha \alpha \in E} \frac{\int_{\alpha}^z L_n(t) dt}{z - \alpha} = (n+1) L_n(\alpha).$$

On sait que

$$(\log(z - \alpha) P_{n,\alpha}(z))' = \frac{((z - \alpha) P_{n,\alpha}(z))'}{(z - \alpha) P_{n,\alpha}(z)}$$

Avec l'aide de (3.1). On obtient

$$(\log(z - \alpha) P_{n,\alpha}(z))' = (n+1) \frac{L_n(z)}{(z - \alpha) P_{n,\alpha}(z)}$$

Intégration de a vers z , les deux membres de cette égalité, on obtient

$$\frac{(z - \alpha) P_{n,\alpha}(z)}{(a - \alpha) P_{n,\alpha}(a)} = \exp(n+1) \int_a^z \frac{L_n(t)}{(t - \alpha) P_{n,\alpha}(t)} dt. \quad (3.34)$$

Ceci montre que

$$P_{n,\alpha}(z) = \frac{a - \alpha}{z - \alpha} P_{n,\alpha}(a) \exp(n+1) \int_a^z \frac{L_n(t)}{(t - \alpha) P_{n,\alpha}(t)} dt$$

Avec (3.34), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1,\alpha}(z)}{P_{n,\alpha}(z)} \left(\frac{P_{n+1,\alpha}(a)}{P_{n,\alpha}(a)} \right)^{-1} = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^z \frac{L_n(t)}{(t - \alpha) P_{n,\alpha}(t)} dt.$$

Ce qui revient à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_{n,\alpha}(z)}{nP_{n,\alpha}(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

La preuve du point (3.32) est achevée. Le point (3.33) s'obtient en tenant en compte (3.32) et (3.26) et en remarquant que

$$\frac{P'_{n+1,\alpha}(z)}{nP_{n,\alpha}(z)} = \frac{P'_{n+1,\alpha}(z)}{nP_{n+1,\alpha}(z)} \frac{P_{n+1,\alpha}(z)}{P_{n,\alpha}(z)}.$$

Ce qui revient à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_{n+1,\alpha}(z)}{nP_{n,\alpha}(z)} = C(E) \varphi'(z)$$

Ce qui achève la preuve de théorème. ■

Conclusion générale

Dans ce travail nous avons apporté une contribution à un problème n'est facile dans le domaine de la théorie constructive des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux et leur comportement asymptotique. Le résultat principal porte sur l'étude du comportement asymptotique des polynômes polaires des polynômes orthogonaux sur un contour. Il est très possible que les formules asymptotiques obtenues trouveront leurs applications dans plusieurs domaines des physiques- mathématiques. Il est utile de dire que le projet des polynômes polaires avec tous les autres polynômes orthogonaux ou non orthogonaux associés aux polynômes orthogonaux relativement à n'importe qu'elle mesure, auront leur lieu privilège et joueront leur rôle dévolu dans le problème de comportement asymptotique des polynômes orthogonaux et autre problèmes d'approximation polynômiales en norme (les problèmes de la convergence uniforme par une meilleure approximation polynômiale).

**ALHAMDOU LILLAH OUA ASSALATOU OUA ASSALAMOU ALA SIDNA
RASSOULI ALLAH**

Bibliographie

- [1] **ABDUL AZIZ ,N.A.RATHER** ,On an inequality concerning the polar derivative of a polynomial,Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) Vol. 117, No. 3, August 2007, pp. 349–357.
- [2] **A. APTEKAREV, A. CACHAFEIRO, F. MARCELLAN**, A scalar Riemann boundary value problem approach to orthogonal polynomials on the circle, J. Approx. Theory 141 (2006),pp174-181.
- [3] **E.A. RAHMANOV**,On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials".Math. USSR Sbornik 32(2) (1977).pp199-213.
- [4] **P. NEVAI**, An Asymptotic Formula for the Derivatives of Orthogonal Polynomials,SIAM J. Math. Anal., 10(1979), pp 472–477.
- [5] **P.FERENC AND P.NEVAI**,Schur functions and orthogonal polynomials on the unit circle.Proceedings of AFS 95.Budapest.1997.
- [6] **D.S.LUBINSKY**,On Asymptotics of Derivatives of Orthogonal Polynomials on the Unit Circle.J-Approx.theory 145(2007),pp122-127.
- [7] —————.Universality Type Limits For Bergman Orthogonal Polynomials, Computational Methods and Functions Theory,10 (2010),pp135-154.
- [8] **A.FANDORA.A,PIJEIRA.M**.Asymptotics behavior of orthogonal polynomials primitives.Margarita mathematica en memoria de José Javier Guadalupe Hernández, Servicio de Publicacone de la Univ.de la Rioja,Logrño, Spain 2001 626-632.
- [9] **H.PIJEIRA.CABRERA,Y.JOSE.BELLO CRUZ,W.R.URBINA** .On Polar Legendre polynomials,Rocky Mountain Journal of Mathematics,RMJ (2008),vol 38,1-10.
- [10] **M. G. KREIN**, On a generalization of some investigations of G. Szegő, V. Smirnov and A. Kolmogorov. C. R. (Doklad) Acad. Sci. URSS 46 (1945), 91-94. MR7, 156.
- [11] **YA. L. GERONIMUS**, Polynomials orthogonal on the circle and on an interval. Fizmatgiz, Moscow, 1958. English transl. Consultants Bureau, New York, 1961

- [12] **R.BENZINE,YA.LASKRI**. L - p Extremal Polynomials. L - p Extremal Polynomials Results and Perspectives.Serdika Math.J.32 (2006) pp 218-270.
- [13] **PRITSKER.E.IGOR**.Derivatives of Faber polynomials and Markov inequalities Journal of Approximation Theory archive Volume 118 , Issue 2 (October 2002) table of contents Pages : 163 - 174 Year of Publication : 2002..
- [14] **YA.LASKRI,A.HAMID.REHOUMA**,Polar **Bergman** Polynomials Over Domains with Corners , IJOPCM.Vol. 4 No. 4 ,December 2011.pp 74-87.
- [15] **A. REHOUMA,YA.LASKRI,R.BENZINE**,Asymptotic Properties of Polar Polynomials,Applied Mathematical Sciences,(AMS) Vol. 8, 2014, no. 14.pp 685 - 691.
- [16] **R.BENZINE,YA.LASKRI,A.REHOUMA**.Asymptotics Properties for Polar L - p extremal polynomials on the contour.(submitted for consideration for publication).
- [17] **X. LI, K. PAN**, Asymptotics for L - p extremal polynomials on the unit circle, J. Approx. Theory 67 (1991), 270-283.
- [18] —————, Asymptotic behavior of orthogonal polynomials corresponding to measure with discrete part o the unit circle. J. Approx.Theory 79, (1994), 54-71.
- [19] **J.S. GERONIMO,KM. Case**, Scattering theory and polynomials orthogonal on the real line, Trans. Amer. Math. Soc. 258 (1980), 467-494.MR 82 :c :81138.
- [20] **G.SZEGŐ**.Bemerkungen zu einen Satz von J.H.Grace Über die Wurzeln algebraischer Gleichungen.Math Z.13(1922),pp 28-55.
- [21] —————.Orthogonal Polynomials,Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 23, 4th ed., American Math. Society, Providence, RI, 1975.
- [22] —————.Über orthogonale Polynome die zu einer gegebenen Kurve der Komplexen Ebene gehören.Math.Zeit.9 (1921),218-270.
- [23] ————— Über die entwicklung einer willkurlichen funktion nach den plynomen eines orthogonal systems. Mathematische Zeitschrift, vol 12 (1921),pp 61-94.
- [24] **U.GRENANDER AND G.SZEGO**,Toeplitz Forms and Their Applications, University of California Press,Berkeley, 1958; 2nd edition : Chelsea Publishing Company, New York,1984.
- [25] **Ya.L.GERONIMUS**.On some extremal problems in the space L^p_σ , *Mat. Sb. (N.S.)* 31(73) (1952), 3-26 (Russian).
- [26] **LI-CHIEN SHEN**.Orthogonal polynomials on the unit circle associated with Laguerre poynomials,Pro of Amer Math Soci Volume 129, Number 3, Pages 873-879.2000.

- [27] **H.T.KAPTANOĞLU,N.SADIK**.Bohr Radii of Elliptic Regions, Russian Journal of Mathematical Physics, 12, no 3,(2005) 363-368.
- [28] **W. RUDIN**, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [29] **P.KOOSIS**.Introduction to H_p Spaces.London Math.Soc.Lecture Notes,Series, Vol. 40, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [30] **P.L.DUREN**,Theory of H^p spaces ,Dover ,New York ,2000.
- [31] **B.SIMON**,Orthogonal polynomials on the unit circle,part 1 :Classical theory ,AMS Colloquium Series,American Mathematical Society,Providence,RI,2005.
- [32] **F.MARCELLAN,J.PETROLINHO** .Orthogonal polynomials and quadratic transformations,Portugaliae Mathematica,Vol.56 Fasc.1(1999).
- [33] **MOHAMMAD M.JAMEI,MEHDI DEGHAN**.On rational classical orthogonal polynomials and their applications for explicit computation of inverse Laplace transforms,Mathematical Problems in Engineering 2005 :2 (2005) pp 215–230.
- [34] **Q. I. RAHMAN**.On the zeros of polynomials and its derivative.Pacific Journal of MathematicsVol. 41, No. 2,pp 525-528 (1972).
- [35] **I.S.GRADSHTEYN,I.M.RYZHIK**.On derivatives of orthogonal polynomials II ,Bulletin of AMS ,vol.42 (1940),pp 261-264.
- [36] **A.A.GONCHĂR**.On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions. Mat. Sbornik. Tom 97 (139) (1975), N° 4.
- [37] **M. V.KELDYSH**. *Select papers*, Academic Press, 1985. [in Russian].
- [38] **P.P.KOROVKINE**.On orthogonal polynomials on a closed curve. Math. Sbornik 9 (1941) 469-484. [in Russian].
- [39] **A.KOLMOGOROV,S.FOMINE**.Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Edition Mir, Moscou, 1977.
- [40] **H.N.MHASKAR,E.B.SAFF**.On the distribution of zeros of polynomials orthogonal on the unit circle.Journal of approximation theory .Vol 63,N 1,1990.
- [41] **V.V.ANDRIEVSKI,I.E.PRITSKER**,Convergence of Bieberbach polynomials in domains with interiors cusps.J d'Analyse Math.82 (2000),209-225.
- [42] **G.SCHMISSER**.Majorization of the Critical Points of a Polynomial by Its Zeros.Computational Methods and Function Theory.Vol...,No...,pp
- [43] **A.AZIZ ,B.A.ZERGAR** ,On the Zeros of Polynomials .Proc.Indian .acad .Sci.[Math Sci] , vol 106,No 2 , May 1996,pp127-132.

- [44] **E.M. NIKISHI**, The discrete Sturm-liouville operator and some problems of function theory, Trudy Sem. Petrovsk. 10 (1984), 3-77 (Russian), English Transl. in Soviet Math., 35 (1987), 2679-2744.
- [45] **M. ALFARO, F. MARCELLAN** Recent trends in orthogonal polynomials on the unit circle and their applications, **C. Brezinski, L. Gori and A. Ronveaux** (editors), PP. 3-14, 1991.
- [46] **A. ZYGMOUND**, A remark on conjugate series, Proc. London Math. Soc. 34 (1932) 392-400
- [47] **A. AZIZ**, Inequalities for the polar derivative of a polynomial, J. Approx. Theory 55 (1988) pp 183-193
- [48] **A. AZIZ, N. A. RATHER**, Some Zygmund type L_q inequalities for polynomials, J. Math. Anal. Appl. 289 (2004) 14-29
- [49] **A. AZIZ, W. M. SHAH**, Inequalities for the polar derivative of a polynomial, Indian J. Pure Appl. Math. 29 (1998) 163-173
- [50] **N. G. DE-BRUJIN**, Inequalities concerning polynomials in the complex domain, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 50 (1947) 1265-1272; Indag. Math. 9 (1947) 591-598.
- [51] **V. M. BADKOV**, Pointwise Estimates from Below of the Moduli of the Derivatives of Orthogonal Polynomials on the Circle with a Weight Having Singularities, Mathematics USSR Sbornik, 186(1995), 771-781.
- [52] **I. S. GRADSHTEYN, I. M. RYZHIK**, Tables of Integrals, Series and Products, Academic Press, 1980.
- [53] **D. ALLINGHAM**, Conformal Mappings And The Area Of The Mandelbrot Set, Thesis, supervision under Professor **David Elliott**. 1995.
- [54] **V. KALYAGIN, R. BENZINE**, Sur la formule asymptotique des polynômes orthogonaux associés à une mesure concentrée sur un contour plus une partie discrète finie, [An asymptotic formula for orthogonal polynomials associated with a measure concentrated on a contour plus a finite discrete part], Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B 41, (1989), no1, 29-46 (French).
- [55] **V. KALYAGIN**, On Asymptotics of L^p extremal polynomials on a complex curve ($0 < p < \infty$), J. Approx. Theory, 74, (1993), 226-236.
- [56] **V. KALYAGIN**, A Note on the Asymptotics of Orthogonal Polynomials on a complex Arc : The case of a measure with a discrete Part, J. Approx. Theory 80 (1995), 138-145.

- [57] **H. CARTAN**, Théorie élémentaire des fonctions analytique d'une ou plusieurs variables complexes. Hermann, Paris 1967.
- [58] **P. L. CHEBYCHEV**, Complete collected works, vol 3. Izdat. Nauk SSSR, Moscow 1948. [Russian] MR 11, 150.
- [59] **J. B. CONWAY**, Functions of one complex variable. Springer Verlag. New-York, 1973.
- [60] **G. DARBOUX**, Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, Journal de Mathématiques, (3), vol. 4 (1878), 5-56, 377-416.
- [61] **V.J. SMIRNOV**, Sur la théorie des polynômes orthogonaux à une variable complexe, Journal de la Société Physico-Mathématique de Leningrad, Vol.2 (1928), 155-179.
- [62] **V.J. SMIRNOV**, Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent, Bulletin de l'académie des sciences de l'U.R.S.S., 1932, 337-372.
- [63] **V.J. SMIRNOV, N. A. LEBEDEV**, "The Constructive Theory of Functions of a Complex Variable," Nauka, Moscow, 1964 [in Russian]; M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1968 [Engl. transl.].
- [64] **P. SOUETINE**, Polynômes orthogonaux sur le contour, (en russe). Russian Math Surveys, t.21, (1966).
- [65] **C. SUÁREZ**, About the Orthogonality of derivatives of Orthogonal Polynomials on the unit circle, Advances in Difference Equations, Volume 2010, Article ID 406231, pp 1-18.
- [66] **P. BORWEIN, T. ERDELYI**, Polynomials and Polynomial Inequalities, Springer, New York, 1995.