



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



Université Echahid HAMMA LAKHDAR d'EL-OUED

Faculté de technologies

département d'Hydraulique et de génie civil

MEMOIRE
présenté en vue de l'obtention Du diplôme du master Génie Civil

Option : matériaux en génie civil

**Analyse des structures par des éléments finis
de type solide-coque**

Dirigé par :

D. Bachir LABIODH

présenté par:

Medjouel badreddine

Bousbia salah el motaz billeh

Bousbia salah yakoub

Mohammed Nefouci

Année universitaire: 2021-2022

Remercier

Remerciements et gratitude Après la grâce de Dieu Tout-Puissant, le devoir exige, en guise de reconnaissance de la faveur, que nous adressions nos sincères remerciements à tous ceux qui nous ont aidés à compléter ce mémorandum Je tiens également à remercier tous les professeurs du Département de Génie Civil de l'Université D'El-OUED Nous remercions le personnel administratif et ceux qui nous ont aidés Et à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin

RESUME

Dans la formulation de ce mémoire traitant de l'analyse des structures par éléments finis de type coque dure, l'utilisation des structures coques en ingénierie est très courante. Du fait de la complexité géométrique et du comportement de ces structures, elles sont introduites par modélisation numérique, en particulier la méthode des éléments finis utilisant des éléments coques solides bidimensionnels, il existe d'autres types d'éléments structuraux volumétriques (la fondation, les jambes de force, etc.) .

L'utilisation d'éléments finis à volume de croûte est devenue une solution efficace pour représenter le comportement de ces structures avec une bonne approche, malgré les recherches menées pour surmonter les différents problèmes d'arrêt numérique auxquels sont confrontés les éléments finis à volume de croûte, mais certains d'entre eux existent toujours.

Dans cet mémoire , nous proposons comme contribution à l'étude numérique des structures corticales de développer un élément fini de type volume cortical applicable dans l'étude de ce type de structure et de comportement linéaire et linéaire géométriquement. dans la recherche terminée.

Mots clés: Modélisation numérique, élément solide, jonction, élément solide-coque.

ABSTRACT

In the formulation of this mémoire dealing with the analysis of finite element structures of the hard shell type, the use of shell structures in engineering is very common. Due to the geometric complexity and the behavior of these structures, they are introduced by digital modelling, in particular the finite element method using two-dimensional solid shell elements, there are other types of volumetric structural elements (the foundation, the struts, etc.).

The use of crust-volume finite elements has become an effective solution to represent the behavior of these structures with a good approach, despite the research carried out to overcome the various numerical stopping problems faced by crust-volume finite elements. crust, but some of them still exist.

In this mémoire, we propose as a contribution to the numerical study of cortical structures to develop a finite element of cortical volume type applicable in the study of this type of structure and geometrically linear and linear behavior. in finished mémoire.

Keywords: Numerical modelling, solid element, junction, solidshell element.

ملخص

في صياغ هذه المذكرة التطرق لمحة عن تحليل الهياكل بواسطة عناصر محدودة من نوع الغلاف الصلب, يعد استخدام هياكل القشرة في الهندسة شائعًا جدًا. نظرًا للتعقيد الهندسي وسلوك هذه الهياكل ، يتم الاطراق اليها باستخدام النمذجة العددية ، ولا سيما طريقة العناصر المحدودة باستعمال عناصر قشرية صلبة ثنائية الابعاد ، هناك انواع اخرى من العناصر النشائية الحجمية (والأساس ، والدعامات ، وما إلى ذلك).

لقد اصبح استخدام العناصر المحدودة من نوع قشر-حجمية من الحلول الفعالة لتمثيل سلوك هذه الهياكل بمقاربة جيدة, على الرغم من البحوث التي اجريت لتجاوز مشكلات التوقف العددي المختلفة والتي تواجه العناصر المحدودة من نوع قشرية-حجمية الا ان بعضا منها لا يزال قائما .

في هذذ المذكرة نقترح كمساهمة في الدراسة العددية للهياكل القشرية لتطوير عنصر محدود من نوع قشري-حجمي قابل للتطبيق في دراسة هذا النوع من الهياكل والسلوك الخطي والخطي هندسيا لقد تم تقديم اختبارات للتحقق من فعالية العنصر المطور والنتائج المتحصل عليها تتم مقارنتها بالنتائج المرجعية وتلك النتائج المتحصل عليها من عناصر محدودة اخرى و الموجودة في المذكرة المنجزة

الكلمات المفتاحية :

النمذجة العددية ،العنصر الحجمي ، الربط ، عنصر قشري-حجمي

Remercier	i
Résumé	ii
Table des matières	v
List de Figure	vii
List de tableaux	xii
Introduction	1
Chapiter I : Recherche bibliographique	
I.1.Études de la MMC et de la MEF :	4
I.1.1.1Cinématique des milieux continus :	4
I.1.1.2.Contraintes, équations d'équilibre et déformations :	6
I.1.1.3.Relation de comportement :	8
I.1.1.4.Principe des travaux virtuels :	9
I.1.1.5.Principe variationnel :	11
I.1.1.6. Discrétisation par éléments finis :	12
I.1.2.Modélisations de coques existantes :	15
I.1.2.1Modélisation de coque tridimensionnelle dégénérée :	15
I.1.2.2 Modélisations de coque en formulation mixte:	17
I.1.2.3.Méthode de contraintes postulées « Assumed Stress Method » :	23
I.1.2.4 . Eléments volumiques d'ordre supérieur :	25
I.1.3.Autres formulations existantes d'éléments volumiques :	28
I.1.3.1. Formulation basée sur les fonctions Papcovitch-Neuber :	28
I.1.3.2.Méthode des coordonnées volumiques :	29
I.1. 3.3. Eléments volumiques non-conformes:	30
I.1.3.4. Fonctions surfaciques et volumiques de type « bulle » :	31

I.1.3.5. Approche des moindres carrées pondérée	33
I.1.3.6. Eléments volumiques non linéaires :	33
I.1.3.7. Techniques d'intégration réduite avec contrôle des modes parasites :	38

Chapiter II : Présentation d'un élément finis de type solide-coque

II.2.1 Introduction :	42
II.2.2.1. Formulation de l'élément SB6-18 :	42
II.2.2.2. Variables cinématiques et interpolation	42
II.2.2.3. Déformation de membrane :	43
II.2.2.4. Déformation de flexion :	44
II.2.2.5. Forme discrétisée de Weint :	46
II.2.2.6. Matrice de masse :	47
II.2.2.7. Expression de We dans le repère global :	48

Chapitre III : Mise en œuvre numérique de l'élément SB6-1850

III.3.1. Introduction :	51
III.3.2. Définition de Matlab :	52
III.3.2.1 Définition de Matlab :	52
III.3.3. Présentation du programme élément fini SB6-18:	54
III.3.4. Description du programme :	55
III.3.5. Validation de l'élément SB618 :	57

Chabiter IV : Côté pratique

IV.4.1. Poutre console de Macneal :	58
IV.4.3. Poutre en flexion simple.....	64
IV.4.3. Poutre en flexion simple :	64
IV.4.4. Plaque en flexion et cisaillement dans son plan :	66
Conclusion	69
Références Bibliographie.....	71
Annexe.....	I

List de Figure

Figure I.1.1. Cinématique des milieux continus.....	4
Figure I.1.2. Facette de normale n	6
Figure I.1.3. Modèles coques 3D d’Ahmad	15
Figure I.1.4. Modèles coques 3D de Kim Y.H.	17
Figure I.1.5. Hypothèse cinématique de Reissner–Mindlin.....	17
Figure I.1.6. Élément de référence de coque triangulaire à 3 nœuds	19
Figure I.1.7. Élément hexaédrique hybride à 12 nœuds HS12	25
Figure I.1.8. Élément HS18 [87].....	25
Figure I.1.9. Modes parasites de Hourglass dans une poutre encastree dû à l’intégration réduite $2 \times 2 \times 2$	26
Figure I.1.10. Élément hexaédrique à 20 nœuds avec 14 points d’intégration].....	26
Figure I.1.11. Éléments hexaédriques avec 9 et 21 points d’intégration [35].....	27
Figure I.1. 12. Élément solide de transition avec des nœuds variables de 8 à 27 [55].....	30
Figure I.1.13. Fonction « bulle » volumique dans un élément tétraédrique [58].....	31
Figure I.1.14. Illustration de la fonction « bulle » surfacique N 4 et les points P i fonctions sont maximales [61].....	32
Figure I.1.15. Éléments hexaédriques de transition à 21 nœuds [175] et à 28 nœuds [176]...	37
Figure I.1. 16. Éléments d’interface à 18 et à 32 nœuds [93, 94].....	38
Figure I.1. 17. Modes de Hourglass selon la direction x avec un point d’intégration [69].....	40
Figure II.2.1. Élément de référence SB6-18 et ses points d’intégration.....	42
Figure II.2.2. Élément SB6–18 : les nœuds d’interpolations pour les deux faces supérieure et inférieure du prisme.....	44
Figure III.3.1. Blocs fonctionnels caractéristiques d’un programme éléments finis [SB6-18]	53
Figure III.3.2. Description du programme élément fini SB6-18.....	54
Figure IV.4.1. Poutre console sollicitée à son extrémité par:	59

Figure IV.4.2. Courbe de convergence de déplacement au point A : cas (1)	61
Figure IV.4.3. Courbe de convergence de déplacement au point A : cas (2)	61
Figure IV.4.4. Panneau fuselé soumis à un effort de cisaillement ;	62
Figure IV.4.5. courbe montrant les valeurs de déplacement vertical mesurées au point C.....	63
Figure IV.4.6. Géométrie, chargement et conditions aux limites pour le test de la poutre enflexion simple ; un exemple de maillage (12x2x1)x2	65
Figure IV.4.7. Déplacement normalisé du point A de la poutre en flexion simple	66
Figure IV.4.8. Géométrie, chargement et déformée de la plaque en flexion et cisaillement dans.....	67
Figure IV.4.9. . Déplacement normalisé du point A de la plaque en flexion	68

List de Tableaux

Tableaux IV.4.1. de convergence des déplacements au point A : cas (1)	60
Tableaux IV.4.2. de convergence des déplacements au point A : cas (2)	60
Tableau IV.4.3. Valeur de déplacement vertical normalisé au point C :.....	63
Tableau IV.4.4. Données géométriques, matériau et de chargement pour le test de la poutre en flexion simple.....	64
Tableau IV.4.5. Déplacement du point A suivant Oz de la poutre en flexion simple :.....	65
Tableau IV.4.6. Données de géométrie, matériau et de chargement du cas test de la plaque en flexion et cisaillement dans son plan	67

Introduction

Dans la nouvelle génération, de nombreux travaux de recherche ont été consacrés au développement d'éléments finis capables de modéliser des structures complexes constituées d'un ensemble d'éléments solides ainsi que d'éléments minces. Cette connexion nécessite des procédures de communication entre deux types différents d'éléments finis.

Éléments solides tridimensionnels de structures tridimensionnelles, sachant que les éléments finis volumétriques ne contiennent que le degré de liberté de translation, qui les rendent très attrayants, peuvent être résumées comme suit:

- L'utilisation des lois constitutives tridimensionnelles sans l'hypothèse des contraintes planes.
- Connexion facile avec des éléments solides conventionnels puisque les déplacements sont les seuls degrés de liberté considérés.
- Considération naturelle du contact sur les deux faces de l'élément.
- Aptitude à modéliser avec précision des structures minces avec une seule couche d'élément fini et peu de points d'intégration dans la direction de l'épaisseur.

Chapitre I:

Recherche bibliographique

I.1.Études de la MMC et de la MEF :

Le contenu de ce paragraphe résulte d'une petite synthèse des références consultées suivantes: Batoz et Dhatt [1] , Dhatt et Touzot [2] , Zienkiewicz et Taylor [3]. Nous commençons d'abord par un rappel des théories de base de la mécanique des milieux continus.

I.1.1.1 Cinématique des milieux continus :

Considérons un corps solide quelconque à l'état initial appelé configuration initiale Ω_O . Ce corps qui est soumis à différentes sollicitations statiques et/ou dynamiques, se transforme au cours du temps t . À un instant t quelconque, il arrive à un nouvel état appelé configuration actuelle Ω_t (voir Figure 1).

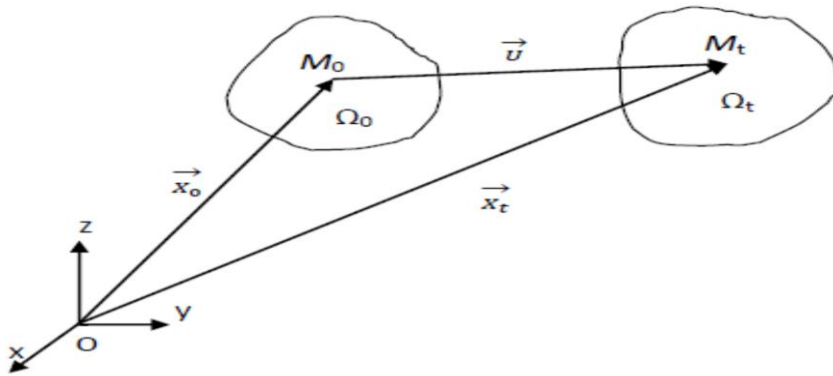


Figure I.1.1. Cinématique des milieux continus

Afin de décrire cette transformation, nous utilisons un repère cartésien global $O(x, y, z)$. Donc, un point M_O matériel quelconque appartenant à Ω_O est repéré par le vecteur des coordonnées $X_O(x_o, y_o, z_o)$. À l'instant t , le point M_O devient un nouveau point M_t appartenant à Ω_t qui est maintenant repéré par le vecteur des coordonnées $X_t(x_t, y_t, z_t)$.

Dans le cadre d'une description lagrangienne, nous pouvons écrire :

$$\vec{X}_t = \vec{X}_O + \vec{M}_O M = \vec{X}_O + \vec{U} \quad (1.1)$$

L'équation (1) peut se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{x}_o + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_o} \right] \cdot d\mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_o} & \frac{\partial x}{\partial y_o} & \frac{\partial x}{\partial z_o} \\ \frac{\partial y}{\partial x_o} & \frac{\partial y}{\partial y_o} & \frac{\partial y}{\partial z_o} \\ \frac{\partial z}{\partial x_o} & \frac{\partial z}{\partial y_o} & \frac{\partial z}{\partial z_o} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_o \\ dy_o \\ dz_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + u_{,x_o} & u_{,y_o} & u_{,z_o} \\ v_{,x_o} & 1 + v_{,y_o} & v_{,z_o} \\ w_{,x_o} & w_{,y_o} & 1 + w_{,z_o} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_o \\ dy_o \\ dz_o \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}_o \end{aligned} \quad (1.3)$$

La matrice $\mathbf{F}$ est appelée le tenseur gradient de transformation. Nous écrivons Egalement :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{L}_0; \mathbf{L}_0 = \mathbf{D}_0 + \mathbf{W}_0$$

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} u_{,x_o} & u_{,y_o} & u_{,z_o} \\ v_{,x_o} & v_{,y_o} & v_{,z_o} \\ w_{,x_o} & w_{,y_o} & w_{,z_o} \end{bmatrix}; \mathbf{D}_0 = \frac{1}{2} [\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_0^T] = \begin{bmatrix} u_{,x_o} & \frac{1}{2}(u_{,y_o} + v_{,x_o}) & \frac{1}{2}(u_{,z_o} + w_{,x_o}) \\ & v_{,y_o} & \frac{1}{2}(v_{,z_o} + w_{,y_o}) \\ sym & & w_{,z_o} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_0 = \frac{1}{2} [\mathbf{L}_0 - \mathbf{L}_0^T] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\text{Avec } \theta_x = \frac{1}{2}(w_{,y_o} - v_{,z_o}); \theta_y = \frac{1}{2}(u_{,z_o} - w_{,x_o}); \theta_z = \frac{1}{2}(v_{,x_o} - u_{,y_o})$$

où $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ représentent des rotations infinitésimales autour des axes x, y, z , ne produisant aucune déformation. $\mathbf{D}_0$ est le tenseur des déformations linéarisées, ou petites déformations

I.1.1.2. Contraintes, équations d'équilibre et déformations :

Considérons la force $\Delta \mathbf{f}$ qui s'exerce sur un élément de surface ΔS de normale $\mathbf{n}$ au point M dans la configuration Δ_t (voir Figure 2).

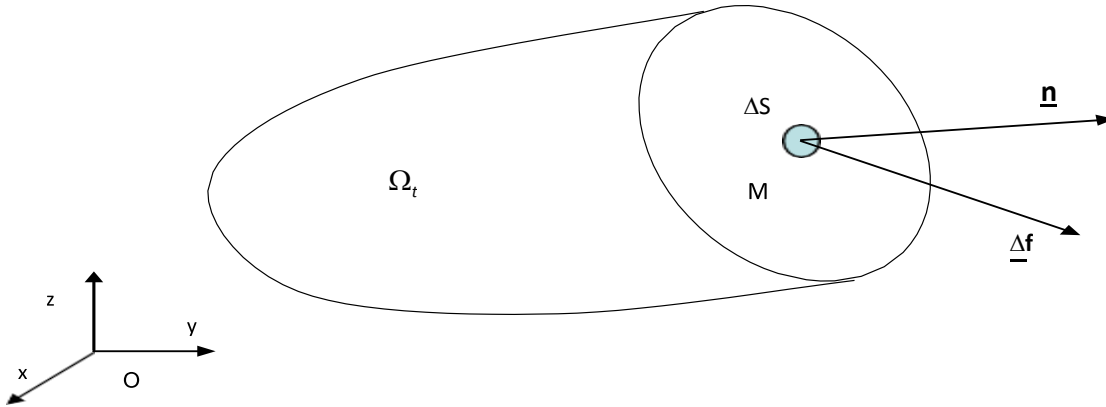


Figure I.1.2. Facette de normale $\mathbf{n}$

Le vecteur des contraintes au point M est défini par le postulat de Cauchy :

$$\sigma(M, \mathbf{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S} \right)$$

Il existe ainsi une infinité de vecteurs des contraintes au point M dépendant de l'orientation du vecteur $\mathbf{n}$. Soient $\sigma(\mathbf{i})$, $\sigma(\mathbf{j})$, $\sigma(\mathbf{k})$ les vecteurs des contraintes agissant, respectivement, sur les facettes de normales $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ du repère cartésien $O(x, y, z)$.

composantes sont définies de la manière suivante en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{i}) &= \sigma_{xx}\mathbf{i} + \sigma_{yx}\mathbf{j} + \sigma_{zx}\mathbf{k} \\ \sigma(\mathbf{j}) &= \sigma_{xy}\mathbf{i} + \sigma_{yy}\mathbf{j} + \sigma_{zy}\mathbf{k} \\ \sigma(\mathbf{k}) &= \sigma_{xz}\mathbf{i} + \sigma_{yz}\mathbf{j} + \sigma_{zz}\mathbf{k}\end{aligned}\tag{1.5}$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy au point M est défini par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}\tag{1.6}$$

L'équilibre des moments autour des axes passant par M, en l'absence de couples répartis à l'intérieur et à la surface du solide conduit à :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}; \sigma_{xz} = \sigma_{zx}; \sigma_{yz} = \sigma_{zy}\tag{1.7}$$

Nous définissons ainsi le vecteur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ à six composantes :

$$\sigma = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{zy}]\tag{1.8}$$

guration actuelle Ω_t est soumis à des sollicitations comme des forces surfaciques $\mathbf{f}_s$ appliquées sur une partie de la frontière $\partial_1\Omega_t$,, des déplacements. imposés $\mathbf{u}_d$

appliqués sur une partie de la frontière $\partial_2\Omega_t$,, et des forces volumiques $\mathbf{f}_v$ (qui peuvent contenir des termes d'inertie). La somme des parties de la frontière

$$\begin{cases} \text{div}(\sigma) + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} & \forall M \in \Omega_t \\ \mathbf{u}(M) = \mathbf{u}_d & \forall M \in \partial_2\Omega_t \\ \sigma(M) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_s & \forall M \in \partial_1\Omega_t \end{cases}\tag{1.9}$$

$$\text{ou } \text{div} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

Dans notre étude des structures minces, subissant des transformations élastiques caractérisées par de grands déplacements et de petites déformations, on utilise la mesure des déformations de Green–Lagrange linéarisé :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} u_{,x} & \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) & \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}) \\ & v_{,y} & \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y}) \\ sym & & w_{,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$\text{ou encore : } \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ u_{,z} + w_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Les déformations ε_{xx} ε_{yy} ε_{zz} (parfois notées ε_x , ε_y , ε_z) sont les déformations dites normales ; ε_{xy} ε_{xz} ε_{yz} (ou ε_{xy} ε_{xz} ε_{yz}) sont les déformations de cisaillement.

I.1.1.3. Relation de comportement :

Pour un matériau donné, sa relation de comportement ou sa loi constitutive permet de déterminer les contraintes en fonction des déformations, des variables internes ... Pour les matériaux dits élastiques linéaires, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations. Ces relations se traduisent sous la forme simple générale :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (1.12)$$

où $\mathbf{C}$ est un tenseur de comportement d'ordre 4 dont les composantes font intervenir les caractéristiques physiques du matériau, $\boldsymbol{\sigma}_0$ est le tenseur de contrainte à l'état initial (pour simplifier l'écriture du problème, nous supposons que $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0}$ dans la suite).

Les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ étant symétriques, nous avons :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \text{ et } C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (1.13)$$

En notation de Voigt, nous écrivons ainsi :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.14)$$

où $\mathbf{C}$ est une matrice de comportement 6x6. $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont donnés en (8) et (11).

En élasticité tridimensionnelle, la matrice de comportement d'un matériau élastique

linéaire homogène et isotrope est de la forme suivante :

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \\ sym & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

où est le module d'Young et ν est le coefficient de Poisson

I.1.1.4.Principe des travaux virtuels :

Le principe des travaux virtuels consiste à satisfaire l'équation d'équilibre local sous forme intégrale, on dit aussi sous forme « faible » :

$$W = - \int_{\Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot (\text{div}(\sigma) + \mathbf{f}_v) dV = 0 \forall \mathbf{u}^* \quad (1.16)$$

où $\mathbf{u}^*$ représente un ensemble de fonctions tests : les déplacements virtuels. On peut transformer le premier terme de cette équation en effectuant une intégration par parties :

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \text{div}(\sigma) dV = \int_{\Omega_t} u_i^* \sigma_{ij,j} dV = \int_{\partial\Omega_t} u_i^* \sigma_{ij} n_j dS - \int_{\Omega_t} u_{i,j}^* \sigma_{ij} dV \quad (1.17)$$

Afin de réduire le nombre d'inconnues du problème, on choisit un champ des déplacements virtuels nul sur $\partial_2 \Omega_t$

(i.e. cinématiquement admissible). Nous avons ainsi :

$$\int_{\partial\Omega_t} u_i^* \sigma_{ij} n_j dS = \sigma_{ij} n_j \int_{\partial_1 \Omega_t} u_i^* dS + \int_{\partial_2 \Omega_t} u_i^* \sigma_{ij} n_j dS = \int_{\partial_1 \Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_s dS \quad (1.18)$$

On obtient finalement la forme faible de l'équilibre du système dans la configuration actuelle Ω_t :

$$\begin{cases} W = \int_{\Omega_t} \nabla \mathbf{u}^* : \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_v dV - \int_{\partial_1 \Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_s dS = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} = 0 \forall \mathbf{u}^* \\ W_{\text{int}} = \int_{\Omega_t} \nabla \mathbf{u}^* : \boldsymbol{\sigma} dV; W_{\text{ext}} = \int_{\Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_v dV + \int_{\partial_1 \Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_s dS / \mathbf{u}^* = 0 \text{ sur } \partial_2 \Omega_t \end{cases} \quad (1.19)$$

On définit les déformations virtuelles :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = [\varepsilon_{xx}^* \quad \varepsilon_{yy}^* \quad \varepsilon_{zz}^* \quad 2\varepsilon_{xy}^* \quad 2\varepsilon_{xz}^* \quad 2\varepsilon_{yz}^*]^T = \quad (1.20)$$

$$= [u_{,x}^* \quad v_{,y}^* \quad w_{,z}^* \quad u_{,y}^* + v_{,x}^* \quad u_{,z}^* + w_{,x}^* \quad v_{,z}^* + w_{,y}^*]^T$$

En introduisant les équations (1.14) et (1.20) dans (1.19), on obtient l'expression du principe des travaux virtuels sous forme intégrale en fonction de $\mathbf{u}^*$ et $\mathbf{u}$:

$$\begin{cases} W(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) = \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{\Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_v dV - \int_{\partial_1 \Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_s dS = 0 \forall \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \text{ sur } \partial_2 \Omega_t \text{ et } \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_2 \Omega_t \end{cases} \quad (1.21)$$

Un problème d'élasticité consiste ainsi à trouver $\mathbf{u}$ satisfaisant l'expression (1.21). Cette forme variationnelle sert de base pour construire les modèles déplacements en éléments finis.

I.1.1.5.Principe variationnel :

Nous pouvons définir un modèle général où toutes les relations du problème d'élasticité sont représentées sous forme variationnelle comme la forme intégrale suivante :

$$W = - \int_{\Omega_t} \left(\mathbf{u}^{*T} \cdot (\text{div}(\sigma) + \mathbf{f}_v) + \sigma^{*T} \cdot \left(\varepsilon - \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right) + \varepsilon^{*T} \cdot (\sigma - \mathbf{C} \cdot \varepsilon) \right) dV \\ - \int_{\partial_1 \Omega_t} \mathbf{u}^{*T} \cdot (\mathbf{f}_s - \sigma \cdot \mathbf{n}) dS - \int_{\partial_2 \Omega_t} [\sigma^* \cdot \mathbf{n}]^T \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_d) dS = 0 \forall \mathbf{u}^*, \sigma^*, \varepsilon^* \quad (1.22)$$

près intégration par parties du premier terme de l'équation (22), on obtient :

$$W = \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}^* + \nabla \mathbf{u}^{*T}]^T \cdot \sigma - \sigma^{*T} \cdot \left(\varepsilon - \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right) - \varepsilon^{*T} \cdot (\sigma - \mathbf{C} \cdot \varepsilon) - \mathbf{u}^{*T} \cdot \mathbf{f}_v \right) dV \\ - \int_{\partial_1 \Omega_t} \mathbf{u}^{*T} \cdot (\mathbf{f}_s - \sigma \cdot \mathbf{n}) dS - \int_{\partial_2 \Omega_t} ([\sigma^* \cdot \mathbf{n}]^T \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_d) + \mathbf{u}^{*T} \cdot (\sigma \cdot \mathbf{n})) dS = 0 \forall \mathbf{u}^*, \sigma^*, \varepsilon^* \quad (1.23)$$

L'expression (1.23) est un principe variationnel de type mixte (faisant intervenir les variables mixtes : déplacements, déformations, contraintes).

Il existe une fonctionnelle Π telle que sa variation en $\mathbf{u}, \sigma, \varepsilon$ corresponde à W de l'équation (23). En identifiant $\delta \mathbf{u} \delta \mathbf{u}^*$, $\delta \sigma \delta \sigma^*$, $\delta \varepsilon \delta \varepsilon^*$, on a alors :

$$\Pi(\mathbf{u}, \sigma, \varepsilon) = \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon^T \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon - \sigma^T \cdot \left(\varepsilon - \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right) - \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_v \right) dV \\ - \int_{\partial_1 \Omega_t} \mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{f}_s - \sigma \cdot \mathbf{n}) dS - \int_{\partial_2 \Omega_t} ([\sigma \cdot \mathbf{n}]^T \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_d)) dS \text{ avec } \delta \Pi = W = 0 \quad (1.24)$$

L'expression (1.24) est parfois appelée fonctionnelle mixte à 3 champs de Hu–Washizu .

I.1.1.6. Discrétisation par éléments finis :

La méthode des éléments finis est une technique particulière d'approximation des fonctions solutions par sous-domaines (éléments). Les inconnues notées $\mathbf{U}$ sont des valeurs de ces fonctions en certains points ou nœuds de chaque élément. La forme variationnelle définie sur le milieu continu est ainsi représentée par une forme variationnelle discrétisée qui fait intervenir les inconnues nodales $\mathbf{U}$. Nous pouvons résumer les démarches de la MEF comme suit :

Représenter le domaine de volume V par un ensemble d'éléments de volume V_e :

$$V = \sum V_e \quad (1.25)$$

Représenter la géométrie de chaque élément par une relation d'interpolation :

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_I N_I(\xi, \eta, \zeta) x_I = N_I(\xi, \eta, \zeta) x_I \quad (1.26)$$

où x est la position d'un point quelconque ; x_I sont des coordonnées des nœuds I définissant

V_e ; (ξ, η, ζ) sont des coordonnées paramétriques ; N_I sont des fonctions d'interpolation (fonctions de forme) dépendant des variables paramétriques.

Représenter la fonction solution u sur chaque élément :

$$u(\xi, \eta, \zeta) = N_I^*(\xi, \eta, \zeta) u_I ; u^*(\xi, \eta, \zeta) = N_I^*(\xi, \eta, \zeta) u_I^*$$

où u sont fonctions solutions ; u^* sont fonctions virtuelles ; u sont des variables nodales caractérisant la fonction solution ; u^* sont des variables nodales virtuelles

N^* sont des fonctions de forme dépendant des variables paramétriques.

Si $N_I^* = N_I$ nous avons des éléments iso- paramétriques.

Représenter la forme variationnelle discrétisée sur chaque élément en fonction de

$\mathbf{U}$ et $\mathbf{U}^{*e}$:

$$W_e = \mathbf{U}_e^{*T} \cdot (\mathbf{K}_e \cdot \mathbf{U}_e - \mathbf{f}_e) \quad (1.27)$$

où $\mathbf{K}_e$ est la matrice de rigidité élémentaire ; $\mathbf{f}_e$ est le vecteur élémentaire des sollicitations.

Assembler la forme variationnelle :

$$W = \sum_{\theta} W_e = \sum_{\theta} \mathbf{U}_e^{*T} \cdot (\mathbf{K}_e \cdot \mathbf{U}_e - \mathbf{f}_e) = \mathbf{U}^{*T} \cdot (\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{F}) = 0 \forall \mathbf{U}^* \quad (1.28)$$

Soit : $\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$

où $\mathbf{K}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^*$ sont successivement la matrice de rigidité globale, le vecteur global des sollicitations, l'ensemble des variables nodales, l'ensemble des variables nodales virtuelles obtenus par assemblage des matrices élémentaires.

Résoudre les relations $\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$ en tenant compte des conditions aux limites. Pour un problème linéaire : $\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F}$.

Évaluer des quantités relatives à chaque élément :

extraire $\mathbf{U}_e$ de $\mathbf{U}$ calculer des déformations, des contraintes ...

Pour des problèmes non-linéaires, l'état de la configuration à l'instant $t + 1$ dépend de celui à l'instant t . Donc, la matrice de rigidité dépend également des variables que l'on cherche. Le problème ne peut donc pas être résolu explicitement. On va donc le résoudre de façon itérative par l'intermédiaire d'une suite de problèmes linéaires. Nous présentons ici le principe de la méthode de Newton–Raphson par exemple :

Supposons que l'on ait $\mathbf{U}_t$ à l'instant t tel que :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U}_t)] \cdot \mathbf{U}_t - \mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{U}_t) \neq \mathbf{0} \quad (1.29)$$

On cherche $\mathbf{U}_{t+1} = \mathbf{U}_t + \Delta \mathbf{U}$ vérifiant :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U}_{t+1})] \cdot \mathbf{U}_{t+1} - \mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{U}_{t+1}) = \mathbf{0} \quad (1.30)$$

En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre, on obtient :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_{t+1}) = \mathbf{R}(\mathbf{U}_t + \Delta \mathbf{U}) = \mathbf{R}(\mathbf{U}_t) + \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{\mathbf{U}_t} \cdot \Delta \mathbf{U} + o^2 \quad (1.31)$$

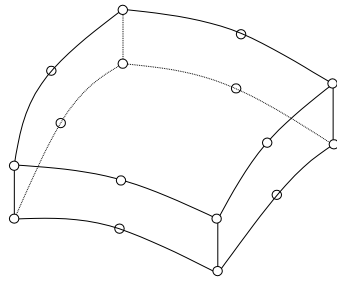
$$\approx \mathbf{R}(\mathbf{U}_t) - [\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_t)] \cdot \Delta \mathbf{U}$$

- On a alors le problème linéaire $[\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_t)] \cdot \Delta \mathbf{U} = \mathbf{R}(\mathbf{U}_t)$ à résoudre. Une fois trouvé $\Delta \mathbf{U}$, on remet à jour $\mathbf{U}_{t+1} = \mathbf{U}_t + \Delta \mathbf{U}$ et ainsi de suite.

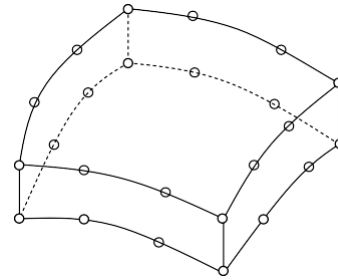
I.1.2. Modélisations de coques existantes :

I.1.2.1 Modélisation de coque tridimensionnelle dégénérée :

Parmi les premiers à avoir tenté de fournir une réponse au problème de coque, on peut citer Ahmad [4] dans les années 70. Ces modèles, nommés éléments finis tridimensionnels dégénérés, se basent sur des éléments iso-paramétriques volumiques n'ayant que deux nœuds suivant la direction de l'épaisseur. Ainsi, ces éléments respectent l'hypothèse de sections droites classiquement admise pour les coques. À cela est ajoutée une modification du principe des puissances virtuelles afin de négliger l'énergie engendrée par la déformation normale transverse. Cette modification impose, en particulier, l'utilisation d'une relation de comportement matériau prenant en compte l'hypothèse des contraintes planes ($\sigma_{zz} = 0$).



b) Modèle à 24 noeuds



a) Modèle à 16 noeuds

Figure I.1.3. Modèles coques 3D d'Ahmad

L'auteur définit les contraintes par la formule suivante :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \cdot \varepsilon = \mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

où $\mathbf{C}$ est une matrice de comportement du matériau (5x5) anisotrope en général. Dans le cas d'un matériau isotrope, cette matrice s'écrit :

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-\nu}{2k} & 0 \\ sym. & & & & \frac{1-\nu}{2k} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

où E est le module d'Young, ν est le coefficient de Poisson, et une constante k introduite dans les deux derniers termes de cisaillement vaut $6/5 = 1,2$. Le rôle de k est d'améliorer

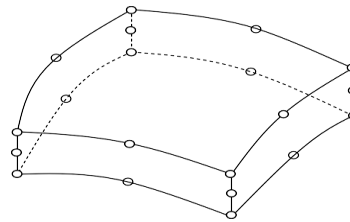
l'approximation de déplacement en cisaillement. Selon la définition des déplacements de cette modélisation, la distribution des déformations de cisaillement est constante à travers l'épaisseur de l'élément, mais en réalité cette distribution est approximativement parabolique. La valeur $k = 1,2$ est le rapport des énergies de déformation de ces deux approches.

Il reste ensuite à choisir un degré d'interpolation suffisant dans les directions du plan moyen pour éviter les phénomènes de blocage en cisaillement transverse. La qualité principale de cette modélisation, outre son aspect volumique, est qu'elle s'appuie seulement sur des degrés de liberté de déplacement. Aucun degré de liberté de rotation n'étant introduit, le passage de l'analyse linéaire à non-linéaire et la connexion aux éléments volumiques 3D deviennent des opérations simples. Son inconvénient est la modification du principe de puissances virtuelles, ce qui revient à modifier la relation de comportement de matériau.

Basés sur cette modélisation, un ensemble d'éléments ont été développés par plusieurs auteurs. Nous pouvons mentionner ici les travaux de Brendel et Ramm [5], Parisch [6], Hughes et Liu [7].

Afin d'éviter de modifier le comportement du matériau, Kim et al. [8] ont proposé un élément iso-paramétrique hexaédrique à 20 nœuds

. La cinématique, interpolée par l'intermédiaire des degrés de liberté de déplacement (DDL) aux nœuds, est associée à une loi matériau tridimensionnelle classique pour le calcul des contraintes. Afin de réduire les blocages en cisaillement transverse, l'évaluation du principe de puissances virtuelles est effectuée par une intégration numérique réduite 2x2x3 points de Gauss. Pourtant, cette modélisation reste chère en temps de calcul par rapport aux éléments coques car elle fait intervenir 9 DDL le long d'une fibre épaisseur, alors que les éléments coques n'en font intervenir que 6. Cela incite à plutôt s'orienter vers des éléments



de faible degré.

Figure I.1.4. Modèles coques 3D de Kim Y.H.

I.1.2.2 Modélisations de coque en formulation mixte:

Avant d'aborder les modélisations de coque en formulation mixte, nous rappelons ci-après les hypothèses cinématiques de Reissner–Mindlin. Afin de rester le plus généraliste possible, on se limitera à la modélisation capable de prendre en compte le cisaillement transverse. Cette théorie s'appuie sur l'hypothèse des sections droites qui consiste à supposer qu'une droite normale à la surface moyenne de la coque reste droite au cours de la transformation. Cette droite subit donc seulement une rotation sans élongation

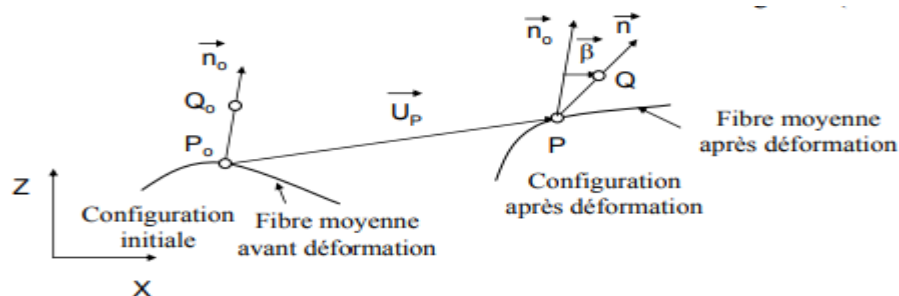


Figure I.1.5. Hypothèse cinématique de Reissner–Mindlin

Ainsi, la cinématique peut s'écrire :

$$\vec{U}_Q = \vec{U}_P + z\vec{\beta} \quad (1.35)$$

Où $\vec{\beta}$ est un vecteur de rotation de la fibre droite, P_o représente la projection d'un point Q_o sur la surface moyenne de la configuration initiale, P représente la projection du point Q sur la surface moyenne de la configuration déformée et z est la distance du point Q_o par rapport à la surface moyenne

Donc, le déplacement d'un point quelconque de la coque est identifié par le déplacement de sa projection sur la surface moyenne et par la rotation de la fibre droite associée à ce point. Les modélisations de coques basées sur cette hypothèse sont nommées

« Mixte » car elles possèdent non seulement des inconnues en déplacement, mais aussi des inconnues en rotation à chaque nœud.

À notre connaissance, la première modélisation de plaque de type mixte fût celle d'Hermann [9]. Mais ce n'est qu'à la fin des années 70 qu'ils ont été introduits pour tenter de surmonter les difficultés liées au blocage en cisaillement transverse, quand le rapport entre largeur et épaisseur de la plaque L/h devient grand, ainsi qu'aux modes parasites. L'apport de Malkus et Hughes [10] sur la notion d'équivalence entre les modèles mixtes et ceux en déplacements avec intégration sélective fût d'une grande utilité, en permettant une justification des techniques d'intégration réduite ou sélective. En général, les variables cinématiques w , β_x , β_y sont interpolées par les relations suivantes :

$$w = \sum_{I=1}^n N_I w_I \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^n N_I \begin{Bmatrix} \beta_{xI} \\ \beta_{yI} \end{Bmatrix} \quad (1.36)$$

où w_I , β_{xI} et β_{yI} sont successivement des déplacements et des rotations aux nœuds ; N_I sont des fonctions de forme (fonctions d'interpolation), et n est le nombre total de nœuds de l'élément. Pour

un élément triangulaire à trois nœuds et à l'interpolation linéaire (voir Figure 6), par

exemple, nous avons :

$$N_1 = 1 - \xi - \eta; N_2 = \xi; N_3 = \eta \text{ où } \xi \in [0,1]; \eta \in [0,1 - \xi] \text{ et } n = 3$$

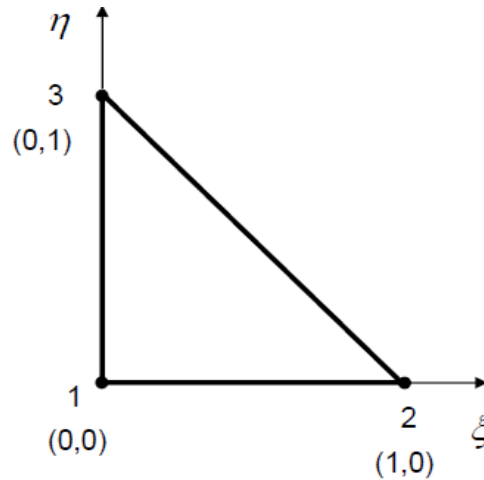


Figure I.1.6. Éléments de référence de coque triangulaire à 3 nœuds

Batoz et al. [11], Batoz et Ben Tahar [12] ont montré qu'un élément mixte simple, triangulaire à 3 nœuds avec approximations linéaires en déplacement w et β_x, β_y et rotations efforts tranchants T_x, T_y constants, conduit à un blocage sévère en cisaillement transverse (CT).

Afin d'éliminer ce blocage, plusieurs auteurs ont utilisé la technique nommée des fonctions « bulle ». Le principe de cette technique est d'enrichir l'interpolation de la formule (1.37) en introduisant des variables généralisées. Par exemple, l'approximation de l'élément coque triangulaire à 3 nœuds ci-dessus peut être enrichie en introduisant une variable α de la façon suivante :

$$w = \sum_{I=1}^3 N_I w_I + \sum_{J=1}^3 N_J \alpha_J \text{ et } \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^n N_I \begin{Bmatrix} \beta_{xI} \\ \beta_{yI} \end{Bmatrix} \quad (1.37)$$

où α_J sont les déplacements des points sur les trois côtés du triangle et $N_J = (1 - \xi - \eta)\xi\eta$

Le terme N_J représente une fonction « bulle » qui est nulle sur les trois côtés du triangle.

Plus généralement, ces variables généralisées peuvent être introduites dans l'interpolation

des déplacements ou des rotations et l'ordre des fonctions « bulle » peut être quadratique, cubique ou d'ordre 4. En se basant sur cette technique, une famille d'éléments finis de plaque ou coque a vu le jour. Nous citons en particulier :

- L'élément de Pinsky et Jasti [13] basé sur un modèle mixte général dans lequel l'approche des variables cinématiques est associée à un ensemble de fonctions
- « bulle » indépendantes exprimées en fonction des paramètres généralisés que les auteurs éliminent par condensation statique au niveau local.
- L'élément « 4-node bubble » est défini par une interpolation bilinéaire des variables cinématiques w, β_x, β_y et par une approximation cubique des fonctions « bulle » internes. Il y a 29 paramètres, au total, à statique, ce qui est élevé pour un élément de plaque.
- La famille d'éléments mixtes-hybrides de Saleeb et Chang [14] , Saleeb et al. [15] :
- l'élément quadrilatéral HMPL5 est associé à 3 fonctions « bulle » w, β_x, β_y représentées par le 5^{ème} nœud interne. Les fonctions d'interpolation des variables cinématiques sont biquadratiques, celles des variables mécaniques comme moments M et efforts de cisaillement $\{T\}$ étant linéaires. L'élément triangulaire HMPL3 est plus simple à formuler (w, β_x, β_y : linéaires, $\{M\}$: constant et $\{T\}$: linéaire).
- L'élément T63B3 de Zienkiewicz et Lefebvre [3] est un triangle à 6 nœuds avec
- fonctions « bulle » d'ordre 4 pour β_x, β_y . Il possède 12 variables internes (3 pour chacune des variables T_x, T_y, β_x et β_y qui sont éliminées au niveau local par condensation statique. Cet élément est considéré par plusieurs auteurs comme robuste. De bons résultats ont été obtenus pour les problèmes standards de plaques minces et épaisses
- Onate et Castro [16] , Onate et al. [17] , Papadopoulos et Taylor [18] ont proposé une famille d'éléments DRM (Discrete Reissner Mindlin) triangulaires et quadrilatéraux avec des degrés de liberté additionnels au milieu des côtés. Ces éléments, basés sur le modèle de déplacement avec déformations de CT indépendantes, généralisent ceux de Kirchhoff discrets DKT et DKQ de Batoz et Ben Tahar [12] , Batoz et Dhatt [1] .

Sans passer par l'utilisation des fonctions « bulle », une autre famille d'éléments de plaque

ou coque de type mixte-hybride a été développée. Nous citons ici l'élément quadrilatéral MiQ4 présenté par Ayad et al. [19]. Cet élément utilise la même interpolation de l'équation (25) pour les variables cinématiques. En revanche, les variables mécaniques $\{M\}$

et $\{T\}$ sont définis par :

$$\{M\} = [P_M]\{\alpha_M\}; \langle \mathbf{M} \rangle^T = \langle M_x M_y M_{xy} \rangle$$

$$[P_M] = \begin{bmatrix} \langle p \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle p \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle p \rangle \end{bmatrix}; \langle p \rangle = \langle 1 \xi \eta \xi \eta \rangle \langle M_x M_y M_{xy} \rangle \quad (1.38)$$

Et par :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{x,x} + M_{xy,y} \\ M_{xy,x} + M_{y,y} \end{Bmatrix} = [P_T]\{\alpha_M\}; [P_T] = \begin{bmatrix} \langle p_1 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle p_2 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle p_2 \rangle & \langle p_1 \rangle \end{bmatrix}$$

$$\langle p_1 \rangle = \langle 0 \quad j_{11} \quad j_{12} \quad \eta j_{11} + \xi j_{12} \rangle \quad ; \quad \langle p_2 \rangle = \langle 0 \quad j_{21} \quad j_{22} \quad \eta j_{21} + \xi j_{22} \rangle$$

où j_{mn} sont des termes de la matrice Jacobienne inverse et $\{\alpha_M\}$ représentent des paramètres indéterminés.

Ainsi, les variables mécaniques $\{M\}$ et liées à $\{T\}$ ne sont plus indépendantes, comme c'est le cas dans les modèles mixtes classiques. La condensation statique permet d'éliminer les paramètres $\{M\}$ et d'obtenir des éléments mixtes-hybrides à variables nodales de type déplacement et rotation. L'utilisation des équations d'équilibre pour définir $\{T\}$ en fonction de $\{M\}$ diminue le nombre d'inconnues du problème, ce qui facilite les opérations matricielles lors du processus de condensation statique. Malheureusement, l'élément MiQ4 est bloqué en CT. Afin d'éliminer ce blocage, Ayad et al. [19] ont développé le « Modèle Mixte Projeté en Cisaillement » (Mixed Shear Projected Model). Deux modèles de plaque appelés MiSP3 (triangulaire à 3 nœuds) et MiSP4 (quadrilatéral à 4 nœuds) ont vu le jour.

Ces derniers considèrent le vecteur des déformations de CT $\{\gamma\}$ indépendamment de l'interpolation des variables w, β_x, β_y , tout en gardant le nombre de paramètres généralisés $\{\alpha_M\}$ de départ. Le vecteur $\{\gamma\}$ sur les côtés d'un élément :

est choisi en fonction des déformations tangentielles $\{\gamma_k\}$ sur les côtés d'un élément :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = [j][A]\{\gamma_k\} \quad (1.39)$$

Ensuite, les quantités $\{\gamma_k\}$ sont projetées sur les deux axes locaux ξ, η de l'élément en utilisant les hypothèses de Mindlin sous forme discrète :

À partir des relations (27), les quantités $\{\gamma_k\}$ peuvent être déterminées en fonction des variables cinématiques w, β_x, v_y aux nœuds. Les paramètres $\{\alpha_M\}$, éliminés au niveau local par condensation statique, sont aussi donnés en fonctions des variables w, β_x, β_y au nœuds .

I.1.2.3.Méthode de contraintes postulées « Assumed Stress Method » :

Les éléments finis hybrides sont la classe la plus précise des éléments finis. En particulier, ils sont relativement insensibles aux distorsions des maillages par rapport aux éléments finis standards basés sur la formulation en déplacement. Un autre avantage de ces éléments c'est qu'ils se comportent bien dans les cas des matériaux presque incompressibles.

Depuis les travaux de Pian pour les éléments hybrides, des grands efforts ont été consacrés à l'élaboration des hypothèses de contraintes de capacités hautes performances. Les principaux objectifs ont été la satisfaction des conditions d'équilibre et l'insensibilité à la distorsion du maillage. Dans les premiers développements, les éléments hybrides ont été basés sur le principe de minimisation de l'énergie complémentaire et les contraintes ont été définies dans le système des coordonnées cartésiennes pour satisfaire les conditions d'équilibre. Même si cette approche est rationnelle, la performance des éléments obtenus par la méthode de contraintes postulées est liée aux distorsions du maillage et il n'est pas facile de satisfaire à la fois les conditions d'équilibre et l'invariance des coordonnées. Pour remédier à ces faiblesses, Pian et Sumihara [20] ont proposé plus tard une nouvelle approche pour les éléments hybrides qui repose sur le principe de Hellinger-Reissner où les contraintes postulées sont définies dans le système des coordonnées naturelles.

Parmi les premiers modèles d'éléments finis hybride-contrainte « *hybrid-stress* » tridimensionnels basés sur le principe de Hellinger-Reissner, on distingue l'élément hexaédrique PT18 développé par Pian et Tong [21] qui est un élément volumique à 8 nœuds avec 18 modes de contraintes. La rigidité associée à chacun des modes des contraintes non-constantes peut également être réduite de telle sorte que l'élément peut être utilisé pour l'analyse des plaques et des coques minces. Cette démarche est proposée aussi dans la référence pour formuler l'élément hexaédrique à 8 nœuds baptisé HS8. Yuan *et al.* [22] ont proposé un système des coordonnées inclinées pour les problèmes 2D. L'utilisation de ce système de coordonnées permet d'obtenir un champ des contraintes postulées qui satisfait les équations d'équilibre dans les coordonnées physiques (normales). Plus tard, Yuan *et al.* [22] ont généralisé cette technique en 3D pour formuler des éléments iso-paramétriques hexaédriques à 8 nœuds.

Après le succès des éléments hybride-contrainte volumiques de type hexaédriques

HS8[23] et PT18 [24] ainsi que l'avancement dans la sélection des modes hybride-contrainte, des éléments volumiques hybride-contrainte efficaces ont été formulés pour des géométries et des applications spécifiques. Une nouvelle hypothèse de contrainte pour les éléments hybride-contrainte est présentée par Yeo et Lee [25]. Cette hypothèse de contrainte est adaptée pour l'élément hexaédrique hybride à 8 nœuds PT18 ce qui entraîne un élément hexaédrique M18. En général, la base variationnelle du modèle hybride-contrainte est un principe de Hellinger-Reissner (HR) avec des contraintes postulées. Ce dernier est représenté par la relation suivante :

$$\Pi_{HR}^e = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{D}\mathbf{u}) d\Omega - W^e(\mathbf{u})$$

est le volume de l'élément considéré, $\mathbf{S}$ est la matrice de souplesse du matériau, $\mathbf{D}\mathbf{u}$ est le gradient symétrique des déplacements compatibles, $\boldsymbol{\sigma}$ est le vecteur des contraintes postulées et W^e est le travail du chargement externe. Les approximations élément fini des déplacements et des contraintes postulées pour un élément sont :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (1.40)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta} \quad (1.41)$$

où $\boldsymbol{\beta}$ est le vecteur des paramètres de contraintes postulées, $\mathbf{N}$ est la matrice des fonctions de forme standards iso-paramétriques définies dans le système des coordonnées naturelles et $\mathbf{P}$ est la matrice des fonctions de base pour les contraintes postulées.

Plus tard, Sze et Lo [26] ont présenté un élément hexaédrique hybride-contrainte à 12 nœuds HS12 (figure 1.7) pour modéliser les structures allongées, telles que les poutres et les piliers, où le champ des déplacements et le champ des contraintes sont quadratiques le long de la dimension la plus longue. Cet élément peut être considéré comme un complémentaire de l'élément volumique hexaédrique à 18 nœuds HS18 (figure 1.7) développé dans la référence [27] pour modéliser les structures de type plaque et coque. L'interpolation des déplacements de cet élément est donnée par [27]:

$$\mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{Bmatrix} U(\xi, \eta, \zeta) \\ V(\xi, \eta, \zeta) \\ W(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \left(\frac{1+\zeta}{2} \mathbf{q}_i + \frac{1-\zeta}{2} \mathbf{q}_{i+9} \right) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{q}_0 + \zeta \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{q}_n \quad (1.42)$$

Avec :

$$\mathbf{q}_i = [U_i \quad V_i \quad W_i]; \mathbf{q}_0 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_{10} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_9 + \mathbf{q}_{18} \end{Bmatrix}; \mathbf{q}_n = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_{10} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_9 - \mathbf{q}_{18} \end{Bmatrix} \quad (1.43)$$

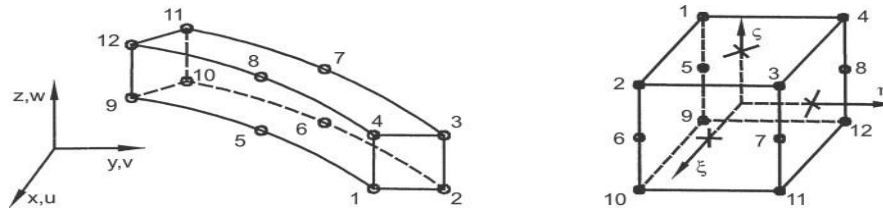


Figure I.1.7. Élément hexaédrique hybride à 12 nœuds HS12 [26]

Ces éléments peuvent ainsi être utilisés efficacement pour modéliser les structures renforcées par des poutres uniformes et des piliers. a utilisé les éléments finis volumiques hexaédriques HS8 et HS12 où les joints sont modélisés avec les éléments HS8 à 8 nœuds et les poutres et les piliers sont modélisés avec les éléments HS12 à 12 nœuds.

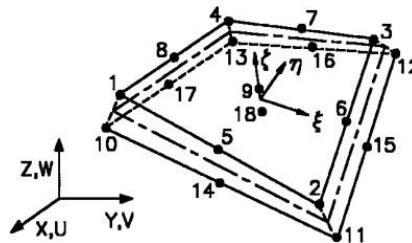


Figure I.1.8. Élément HS18[27]

I.1.1.4 . Éléments volumiques d'ordre supérieur :

Les éléments volumiques hybrides de premier ordre basés sur le principe de Hellinger- Reissner et les éléments basés sur la méthode de déformations postulées améliorées« *enhanced assumed strain* » avec le principe de Hu-Washizu donnent en générales des bons résultats spécialement pour des maillages réguliers. Cependant, la performance de ces éléments se dégrade généralement lorsque le maillage est distordu. A cet égard, des éléments tridimensionnels d'ordre supérieur ont été développés pour résoudre avec plus d'efficacité les problèmes de mécanique des solides et des structures complexes. Parmi ces développements, on peut citer ceux de Dhont [28] qui a utilisé des

éléments hexaédriques à 20 nœuds pour modéliser les structures à parois minces. En effet, pour obtenir une efficacité numérique et réduire l'effort de calcul, cet auteur a proposé une intégration réduite pour évaluer la matrice de rigidité élémentaire au lieu d'utiliser l'intégration exacte qui donne des résultats des fois erronés à cause de l'existence de certains verrouillages numériques. Cependant, un inconvénient majeur de ces éléments sous-intégrés est l'apparition des modes parasites de Hourglass (figure 1.9) spécialement dans les problèmes non linéaires. Nous pouvons également citer les travaux de Hoit et Krishnamurthy [29] et Sauer [30] qui ont utilisés différentes règles d'intégration de la matrice de rigidité des éléments hexaédriques à 20 nœuds afin d'éliminer les différents phénomènes de verrouillage. L'élément hexaédrique à 20 nœuds présenté dans [29] est intégré avec un schéma de 14 points d'intégration (figure 1.10) et l'élément hexaédrique à 20 nœuds proposé dans [30] est intégré avec 9 et 21 points (figure 1.11).

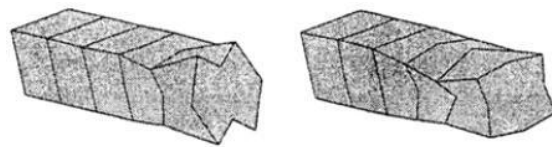


Figure I.1.9. Modes parasites de Hourglass dans une poutre encastree dû à l'intégration réduite $2 \times 2 \times 2$ [30]

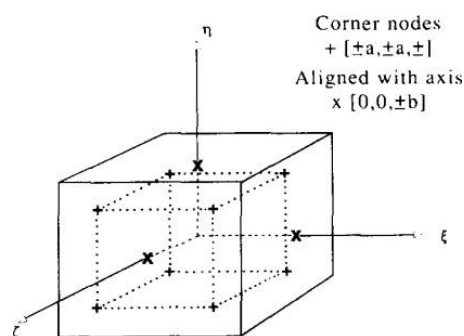


Figure I.1.10. Élément hexaédrique à 20 nœuds avec 14 points d'intégration [29]

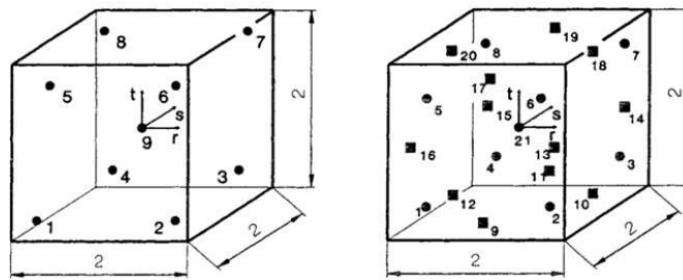


Figure I.1.11. Eléments hexaédriques avec 9 et 21 points d'intégration [29]

Beaucoup de recherches ont été consacrées aux développements des éléments de géométrie hexaédrique. Toutefois, dans le point de vue de la génération automatique de maillage, il est très difficile de réaliser un maillage automatique d'un domaine tridimensionnel arbitraire utilisant un seul type d'élément hexaédrique. Cependant, le plus simple élément volumique tridimensionnel est le tétraèdre à 4 et 10 nœuds. Comparant les deux éléments tétraédriques à 4 et à 10 nœuds, l'élément à 10 nœuds est beaucoup plus précis. De plus, l'élément tétraédrique à 10 nœuds possède certains avantages puisqu'il utilise une base polynomiale complète par rapport aux autres éléments tridimensionnels qui utilisent des polynômes incomplets. Parmi les travaux de recherche ayant trait à la formulation des éléments finis tridimensionnels d'ordre supérieur de type tétraèdre, on peut noter le travail de Lo et Ling [31] pour le développement d'un élément tétraédrique.

I.1.3. Autres formulations existantes d'éléments volumiques :

I .3.1. Formulation basée sur les fonctions Papcovitch-Neuber :

Parmi les nombreux travaux consacrés au développement des éléments volumiques robustes et précis pour des maillages distordus on distingue également les formulations basées sur les fonctions de Papcovitch-Neube (PN) [32-33] qui satisfont l'équation de Navier. La solution de Papcovitch-Neuber a été utilisée dans le contexte des éléments basés sur le modèle en déplacement comme une alternative aux techniques proposées dans la littérature pour combler les lacunes identifiées et trouvées dans le comportement des éléments volumiques tridimensionnels standards [34].

Dans leurs premiers travaux, Venkatesh et Shrinivasa [32,34] proposaient des éléments hexaédriques à 8 nœuds utilisant les fonctions de Papcovitch-Neuber. Ces éléments PN30 et PN34 sont obtenus par la solution de l'équation de Navier pour l'analyse des structures de type poutre. Le champ des contraintes d'ordre supérieur est représenté exactement pour des situations particulières de maillages extrêmement distordus. Cependant, la contrainte constante de cisaillement n'est pas représentée correctement et donc le patch-test de déformation constante est faiblement satisfait. Les auteurs ont également utilisé cette technique dans la référence [35] sous la forme d'un polynôme du troisième degré pour étendre les éléments hexaédriques à 8 nœuds PN30 et PN34 au cas des structures de type plaques et coques. Les auteurs de cet article ont conclu que ces éléments passent les patch-tests du moment de flexion constant et du moment de torsion constant mais ne permettent pas d'obtenir correctement le patch-test des contraintes et des déplacements pour un chargement de cisaillement hors plan. Dans le contexte des fonctions d'interpolation basées sur la solution PN de l'équation de Navier, Bassayya *et al.*

[36] ont proposé un élément volumique baptisé PN340. La performance de cet élément est exacte pour le champ des contraintes constantes mais il a besoin de raffinement de maillage pour le champ des contraintes d'ordre supérieur. Pour corriger les lacunes des éléments volumiques PN34 et PN340, Bassayya et Shrinivasa [33] ont présenté un élément hexaédrique à 14 nœuds PN5X1 utilisant le modèle en déplacement. Les auteurs ont considéré que les fonctions d'interpolation sont basées sur la solution PN de l'équation de Navier où seul le vecteur potentiel de cette équation est utilisé. Cet élément est aussi utilisé par ces auteurs dans la référence [37] pour les problèmes des structures de type plaque et coque. L'utilisation de la solution PN sous forme polynomiale et imposés des conditions sur les coefficients polynomiaux inconnus permettent d'obtenir une représentation linéaire correcte du champ des

contraintes dans l'élément.

I.3.2.Méthode des coordonnées volumiques :

Les éléments hexaédriques à 8 et à 20 nœuds de type Serendip basés sur le modèle en déplacement sont largement utilisés pour construire des modèles éléments finis volumiques qui puissent être utilisés efficacement dans des applications tridimensionnelles. Par exemple, Jiao et Li [38] ont présenté une nouvelle formulation de l'élément hexaédrique à 8 nœuds afin de réduire le temps du calcul de la matrice de rigidité élémentaire. Lors de l'utilisation des éléments Serendip, une exigence de base est que la distorsion violente de l'élément n'est pas autorisée. La bibliographie sur les formulations des éléments finis iso-

paramétriques utilisant la méthode des coordonnées iso-paramétriques est très importante. Ce type de formulation entre dans la catégorie des éléments finis utilisés la première fois par Taig [39] et Irons [40] dans leurs travaux. Selon les études systématiques effectuées par Lee et Bathe [41], lorsque la forme de l'élément n'est pas un parallélogramme ou parallélépipédique les coordonnées iso-paramétriques sont des fonctions irrationnelles des coordonnées cartésiennes.

Par conséquent, les éléments hexaédriques à 8 et 20 nœuds de type Serendip ne possèdent que la complétude de premier ordre dans les coordonnées cartésiennes et ils sont sensibles aux distorsions des maillages. Une variante de cette méthode a été présentée par Li *et al.* [42]. Les auteurs ont utilisé la méthode des coordonnées volumiques hexaédrique « *hexahedral volume coordinate method - HVCM* » pour formuler trois éléments hexaédriques à 8 nœuds. Très récemment, Li *et al.* [43] ont proposé un élément hexaédrique « *spline* » à 21 nœuds où le nœud interne assure la complétude du second ordre des coordonnées cartésiennes.

La méthode « *spline* » permet d'éviter la transformation des coordonnées et donc d'éviter le calcul de la matrice Jacobienne et son inverse. De plus, cet élément est moins sensible aux maillages distordus et améliore la précision de calcul par rapport à l'élément Serendip hexaédrique standard à 20 nœuds.

En utilisant une formulation similaire, Chen *et al.* [44] ont proposé un élément pyramide « *spline* » à 13 nœuds. Cet élément assure la complétude du second ordre dans les coordonnées cartésiennes et se comporte très bien pour les maillages distordus.

I.3.3. Éléments volumiques non-conformes:

L'utilisation des éléments non-conformes pour la modélisation des structures tridimensionnelles est motivée par le succès de ces éléments pour les structures bidimensionnelles. Une discussion plus détaillée sur les éléments non-conformes peut être trouvée dans les références [45.46]. La méthode classique des éléments finis non-conformes avec une continuité aux milieux des arêtes (l'élément de Crouzeix-Raviart) a été utilisée dans les références [47.48]. A ce sujet, un élément volumique non-conforme a été développé par Choi et Chung [49] spécialement pour simuler les problèmes de contact élasto-plastique sans frottement en trois dimensions d'une manière simple et efficace. Dans cette étude, les auteurs ont utilisé l'élément volumique non-conforme élasto-plastique avec des nœuds variables proposé la première fois dans la référence [50]. Cet élément a été créé par l'ajout d'un nombre variable de nœuds à l'élément non-conforme hexaédrique à huit nœuds. Cette technique permet d'obtenir une série d'éléments solides de transition qui ont jusqu'à 27 nœuds (figure 1.14). Le comportement de base de ces éléments a été amélioré par l'ajout des modes de déplacements non-conformes modifiés.

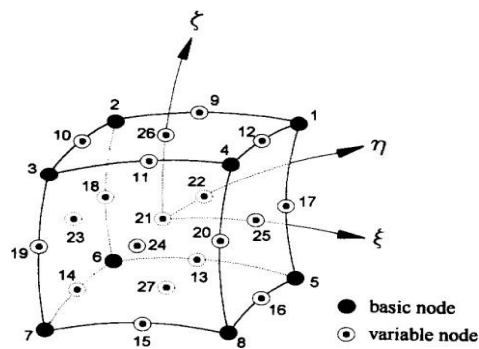


Figure I.1. 12. Élément solide de transition avec des nœuds variables de 8 à 27 [49]

I.3.4. Fonctions surfaciques et volumiques de type « bulle » :

Dans le travail de Taylor [51], les fonctions volumiques « bulle » sont utilisées pour la stabilisation des éléments volumiques tétraédriques dans les cas des problèmes des grandes déformations ou des petites déformations, où les inconnues supplémentaires des fonctions « bulle » sont éliminées par la méthode de condensation statique. Cette version a été optimisée par Cislou et al. [52] en utilisant des fonctions volumiques « bulle » résultant de la stabilité de mini-élément présenté premièrement par Arnold et al. [53] et par la suite utilisé dans des nombreux travaux, par exemple [54,55]. L'élément tétraédrique proposé par Cislou et al. [52] a un nœud dans chaque sommet avec des ddl externes de déplacements et de pression, et un nœud barycentrique qui possède des paramètres de déformations améliorées comme ddl internes (figure 1.15).

Ces paramètres de déformations améliorées sont obtenus à partir de la fonction « bulle » cubique suivante

$$N_b = (N + 1)^{N+1} \prod_{i=1}^{N+1} \xi_i \quad (1.44)$$

où $N = 3$ pour l'élément tétraédrique.

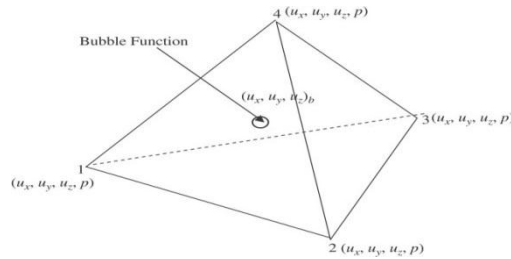


Figure I.1.13. Fonction « bulle » volumique dans un élément tétraédrique [52]

Mahnken et al. [55] ont ajouté aux fonctions de forme standards de l'élément tétraédrique iso-paramétrique, les fonctions « bulle » surfaciques suivantes :

$$N^1(\xi) = 27 \left(\eta \zeta \varphi + \frac{\xi^2}{10} \right) \quad (1.45\alpha)$$

$$\begin{aligned}
 N^2(\xi) &= 27 \left(\xi \zeta \varphi + \frac{\eta^2}{10} \right) \\
 N^3(\xi) &= 27 \left(\xi \eta \varphi + \frac{\zeta^2}{10} \right) \\
 N^4(\xi) &= 27 \left(\xi \eta \zeta + \frac{\varphi^2}{10} \right)
 \end{aligned} \tag{1.45c}$$

Une illustration de la fonction « bulle » surfacique N^4 est donnée dans la figure 1.14.

La valeur de la fonction est égale 0 le long des trois segments de la face considérée avec $\varphi = 0$, et égale 1 au niveau du centre de la face défini par les coordonnées (1/3, 1/3, 1/3).

Ces travaux ont été étendus très récemment par Caylak et Mahnken [56] aux problèmes de grandes déformations. Les fonctions « bulle » utilisées par ces auteurs sont des fonctions surfaciques (équations 1.53) et une fonction volumique écrite comme suit :

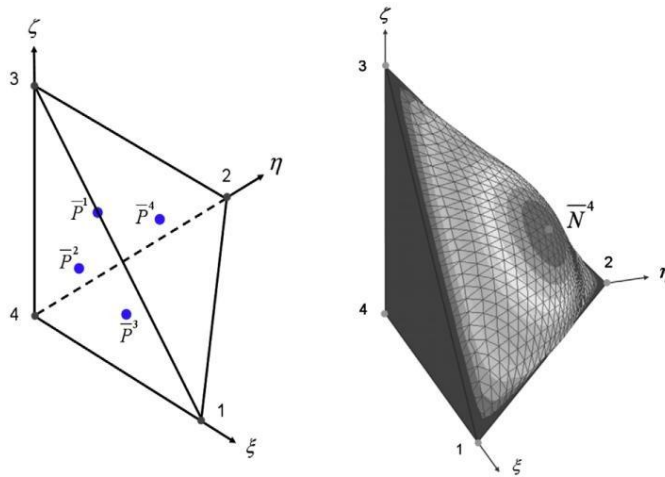


Figure I.1.14. Illustration de la fonction « bulle » surfacique N^4 et les points P^i fonctions sont maximales [55].

I.3.5. Approche des moindres carrées pondérée :

L'élément tétraédrique à 4 nœuds est souvent utilisé pour débiter les procédures de la méthode des éléments finis tridimensionnels. La raison est que l'élément tétraédrique à 4 nœuds peut être formulé et implémenté très facilement utilisant une approximation linéaire par morceaux. De plus, la plupart des codes éléments finis tridimensionnels utilisent des éléments tétraédriques en raison de la simplicité d'utilisation dans la génération automatique des maillages ainsi que dans le raffinement du maillage même pour des domaines complexes. Cependant, cet élément possède des lacunes importantes pour les problèmes de mécanique des solides. Deux de ces lacunes sont le comportement trop rigide et le verrouillage volumétrique dans les cas des matériaux incompressibles ou presque incompressibles. Afin de remédier à ces inconvénients, certains nouveaux éléments finis ont été proposés. Par exemple, Dohrmann *et al.* [57] ont présenté l'approche des moindres carrés pondérée dans laquelle un champ linéaire de déplacements est monté sur les déplacements nodaux de l'élément. La méthode est prétendue d'être efficace et permet d'éviter les problèmes de verrouillage volumétrique. Cependant, les nœuds doivent être à la frontière de l'élément pour définir le champ linéaire de déplacements. Plus tard, Dohrmann *et al.* [58] ont aussi proposé un élément tétraédrique à 4 nœuds. Cet élément utilise les fonctions d'interpolation linéaire du maillage original, mais chaque élément est associé à un seul nœud. Cette méthode permet d'éviter les problèmes de verrouillage volumétrique et donne une performance mieux que celle de l'élément tétraédrique classique à 4 nœuds en termes de la solution des contraintes pour les problèmes statiques. Cependant, pour les problèmes dynamiques, cette méthode n'est pas stable en raison de l'apparition des modes parasites aux niveaux de l'énergie et un schéma de stabilisation tel que celui proposé par Puso et Solberg [59] est nécessaire.

I.3.6. Éléments volumiques non linéaires :

La formulation des éléments finis volumiques a été présentée dans le cadre des problèmes élastique linéaire. Il convient maintenant de discuter sur l'application de ces modèles aux problèmes matériellement non linéaires, géométriquement non linéaires et dynamiques. Généralement, l'utilisation des éléments volumiques d'ordre supérieur dans les problèmes non linéaires, par exemple le problème de contact, conduit à une difficulté d'inversion de la matrice Jacobienne pour les éléments distordus, et exige un temps du calcul élevé. A cet égard, les éléments finis hexaédriques et tétraédriques de premier ordre sont généralement les

plus utilisés dans l'analyse non linéaire des structures tridimensionnelles, en raison de leur efficacité de calcul, robustesse et facilité d'utilisation.

L'approche EAS fournit une grande flexibilité pour la formulation des différents éléments finis volumiques en non linéaire. En raison de la formulation en déformation des éléments basés sur l'approche EAS, l'implémentation des matériaux inélastiques devient simple. Dans la référence [60] le bon comportement des éléments volumiques hexaédriques à 8 nœuds en non linéaire a été démontré. Plus tard, Klinkel et Wagner [61] ont présenté un élément hexaédrique tridimensionnel Q1E30 avec l'utilisation des fonctions de forme améliorées pour définir le champ des déformations. Cet élément volumique est formulé avec 30 paramètres de EAS pour l'analyse des problèmes non linéaires géométriques utilisant le tenseur de déformations de Green-Lagrange. Il est montré que cet élément volumique peut être utilisé pour l'analyse des structures minces 2D, poutres 3D et coques. Les résultats obtenus par cet élément sont satisfaisants et comparables aux résultats obtenus par les éléments de type poutre et coque.

Les deux inconvénients majeurs des éléments basés sur la méthode EAS sont liés à des instabilités d'Hourglass et l'inefficacité numérique en raison du nombre élevé des modes

postulés. L'utilisation des polynômes d'ordre supérieur pour approximer les modes postulés peut réduire la convergence de la procédure itérative de Newton-Raphson. L'effet des modes de Hourglass survient dans les problèmes de grandes déformations où les instabilités sont observées. Ces modes sont examinés pour la première fois par Wriggers et Reese [62] et plus tard par Glaser et Armero [63]. Les modes parasites de Hourglass peuvent être supprimés par l'ajout d'un terme artificiel de stabilisation à la fonctionnelle EAS. De nombreuses approches concernant les problèmes des modes parasites de déformation ont été développées [64, 65] mais aucune explication physique complète des modes de Hourglass n'est donnée. Une autre technique de stabilisation consiste à utiliser une matrice de stabilisation calculée d'une manière semblable à celle calculée pour les éléments sous-intégrés. Cette approche a été suggérée par Reese et Wriggers [66] et développée dans [67] pour les problèmes élasto-plastique et dans [68] pour les problèmes de déformations finies. Il y a eu plusieurs approches dont la formulation originale EAS est combinée avec d'autres approches éprouvées afin d'améliorer la stabilité des éléments basés sur le modèle EAS. Dans la plupart des cas, la stabilisation des éléments est obtenue par l'exploitation de blocage en cisaillement ce qui rend l'élément obtenu moins efficace dans les problèmes de flexion dominante. Weissman [69] a utilisé cette approche pour formuler un élément hexaédrique à 8 nœuds pour

les problèmes 3D élasto-plastique.

Récemment, Cao *et al.* [70] ont présenté un élément brique à 8 nœuds basé sur le principe variationnel modifié à trois champs de Hu-Washizu pour l'analyse élasto-plastique, qui est une extension de l'analyse élastique de référence [71]. Pour augmenter la précision de l'élément pour les maillages irréguliers, un terme de pénalité est employé dans le fonctionnel modifié de Hu-washizu. Il est également utilisé pour avoir des contraintes qui satisfont les équations d'équilibre. Ces auteurs indiquent que cet élément basé sur le principe variationnel à trois champs est préférable que les éléments hybride-contrainte pour l'analyse non linéaire matérielle. Un autre élément volumique basé sur l'approche EAS pour les problèmes de dynamique non linéaire a été introduit par Armero [72]. Dans cet élément, l'opérateur associé à des déformations linéarisées permet d'obtenir une formulation capable d'assurer les lois de conservation des moments linéaire et angulaire ainsi que la loi de conservation de l'énergie pour les problèmes d'élasticité et d'inélasticité.

Compte tenu de l'intérêt croissant pour la modélisation des problèmes multi-physiques, une certaine attention a été concentrée sur l'élaboration d'éléments simplex pour la simulation des matériaux presque incompressibles. Des étapes importantes dans ce sens ont été reportées dans les travaux de Zienkiewicz *et al.* [73], Bonet et Burton [74] et Bonet *et al.* [75] pour la dynamique explicite, et de Taylor [76] pour les problèmes de déformations finies. Des idées similaires ont été exploitées dans [77] pour traiter les problèmes d'élasticité non linéaire et les matériaux presque incompressibles.

Aussi, les éléments volumiques sont nécessaires pour la simulation numérique par éléments finis de retour élastique « *Spring-back* » lorsque le rapport entre le rayon de l'outil et l'épaisseur est inférieur à 5-6 (Li *et al.* [78]). Ces données ont motivé de nombreuses études récentes afin d'améliorer les éléments volumiques et de mieux simuler les problèmes de formages des tôles (par exemple : Areias *et al.* [79], Wang et Wagoner [80] et Reese [81]). Dans la référence [82] un élément hexaédrique classique à 8 nœuds tri-linéaire associé à un schéma d'intégration réduite sélective (SRI) est adopté, bien que le schéma SRI puisse présenter des modes parasites à énergie nulle dans les problèmes de torsion-dominante. Ce type d'éléments finis permet de calculer l'évolution de l'épaisseur [83, 84] et les gradients de contraintes à travers l'épaisseur [85] avec une grande efficacité, selon le type d'application et le nombre d'éléments à travers l'épaisseur et dans le plan de la tôle.

Très récemment, Korelc *et al.* [86] ont développé un élément volumique hexaédrique

TSCG12 basé sur la méthode EAS avec 12 modes pour les problèmes de déformations finies en élasticité et plasticité. Cet élément est basé sur une extension des dérivées de fonctions de forme utilisant les séries de Tylor et un ensemble étendu de conditions d'orthogonalité pour éliminer les modes de Hourglass due à la formulation EAS. Cette approche n'a pas été appliquée jusqu'à présent dans les problèmes 3D de grandes déformations. L'avantage majeur de cet élément est l'absence de verrouillage de cisaillement pour les structures très minces de type plaque et coque.

Parallèlement à ces travaux de recherche, un article de Nadler et Rubin [87], datant de 2003, va être le point de départ d'utilisation de la théorie du point de Cosserat « CP : *Cosserat point* » pour la formulation des éléments volumiques tridimensionnels en élasticité non linéaire. Cette approche permet d'éviter les modes parasites de type Hourglass qui l'on trouve dans les éléments finis volumiques en élasticité non linéaire et les différents types de blocage numérique. Cependant, comme il a été montré dans la référence [88], ce type d'élément ne présente pas une performance significative par rapport aux éléments finis tri-linéaires standards lorsque le maillage est distordu. Les éléments hexaédriques à 8 nœuds basés sur la théorie du point de Cosserat développés dans les références [88] peuvent être utilisés pour les simulations des problèmes dynamiques non linéaires des matériaux hyper-élastiques. La cinématique des éléments basés sur la théorie du point de Cosserat est caractérisée par huit vecteurs directeurs élémentaires et la cinétique repose sur huit lois d'équilibre de moment directeur pour déterminer la réponse dynamique de l'élément. Spécifiquement, les emplacements des nœuds dans la configuration déformée actuelle sont caractérisés par huit vecteurs directeurs nodaux et les éléments directeurs sont liés à des nœuds directeurs par les fonctions de forme standards tri-linéaires. Très récemment, un élément hexaédrique à 8

nœuds basé sur la théorie du point de Cosserat a été développé par Jabareen *et al.* [89] pour la simulation tridimensionnelle des problèmes non linéaires des matériaux hyper-élastiques orthotropes. Dans cet élément, la fonction de l'énergie de déformations est proposée d'une façon à satisfaire les restrictions dues à une forme de patch-test.

Finalement, certains auteurs démontrent que les éléments finis volumiques d'ordre supérieur sont efficaces pour le traitement des problèmes non linéaires géométriques lorsque les maillages sont distordus. Citons par exemple l'extension effectuée récemment par Ooi *et al.* [90] de l'élément hexaédrique à 20 nœuds asymétrique « *unsymmetric* » US-HEXA20 pour l'analyse non linéaire géométrique utilisant la description lagrangienne totale. Cette formulation présente une bonne performance spécialement pour les cas où les maillages sont distordus. Cependant, cet élément quadratique exige un effort de calcul très important due à

l'utilisation de deux ensembles de fonctions de forme et de la nécessité de résolution des équations asymétriques. Selon Buczkowski [91] l'élément hexaédrique à 20 nœuds de type Serendip ne répond pas correctement aux exigences physique du problème de contact à cause de l'existence de quelque forces nodales équivalentes négatives. A cet égard, cet auteur a proposé un élément hexaédrique à 21 nœuds de transition pour les problèmes non linéaire de type contact avec frottement. Cet élément est formulé par l'ajout d'un nœud à la face supérieure ou inférieure de l'élément hexaédrique standard à 20 nœuds (figure 1.5) pour assurer une liaison efficace entre la zone de contact (modélisée avec l'élément hexaédrique à 21 nœuds) et le reste de la structure qui est modélisée avec l'élément standard à 20 nœuds. Cependant, dans les problèmes de l'impact en dynamique explicite l'élément à 21 nœuds doit être utilisé avec une prudence en raison de la non-positivité des masses nodales sur la face du contact [92]. Pour résoudre ce problème, Buczkowski et Gabbert [92] ont proposé un élément hexaédrique iso- paramétrique de transition à 28 nœuds (figure 1.15). Notons que, dans la référence [91] la surface de contact est modélisée par l'élément d'interface quadratique iso-paramétrique à 18 nœuds et dans la référence [91] elle est modélisée avec l'élément d'interface cubique iso-paramétrique à 32 nœuds. Sachant que ces éléments d'interface (figure 1.16) ont une épaisseur égale à zéro.

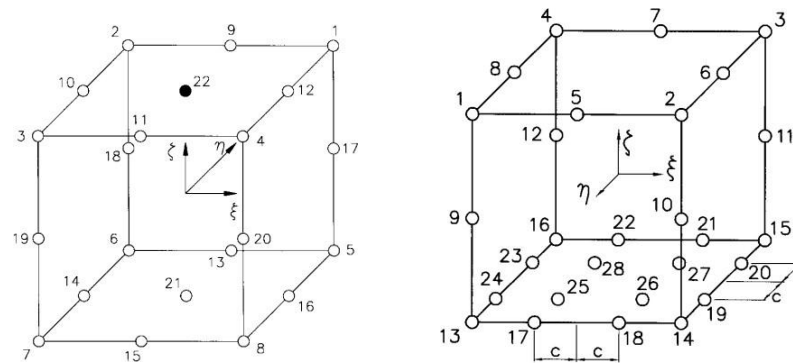


Figure I.1.15. Eléments hexaédriques de transition à 21 nœuds [91] et à 28 nœuds [92]

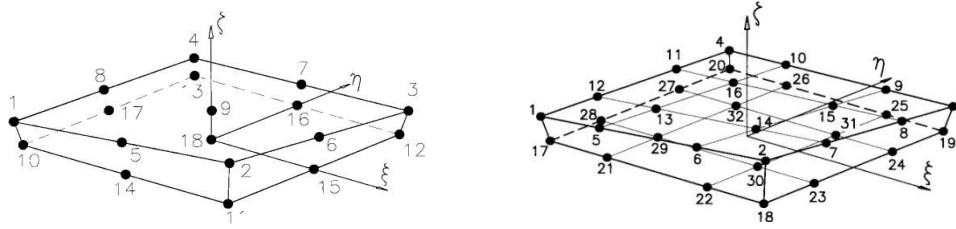


Figure I.1. 16. Eléments d'interface à 18 et à 32 nœuds [91, 92]

I.3.7. Techniques d'intégration réduite avec contrôle des modes parasites :

Dans les éléments finis volumiques standards l'intégration exacte (IE) de la matrice de rigidité entraînait une surévaluation de la raideur du système étudié. Cette surestimation, propre à toute méthode approchée de type déplacement, fournit une bonne stabilité et une convergence de la solution approximative à la solution exacte si le maillage est raffiné. Cependant, l'intégration exacte peut être particulièrement pénalisante et conduite à un véritable blocage (verrouillage) volumétrique pour les matériaux incompressibles ou presque incompressibles, et le verrouillage de cisaillement pour les problèmes de flexion- dominantes aux cas des structures minces avec un maillage grossier. L'intégration réduite (IR) est une alternative efficace pour évaluer la matrice de rigidité et permet d'éviter les différents phénomènes de verrouillage. A cet avantage s'ajoute encore celui de la diminution du coût de l'intégration numérique, puisque le nombre d'évaluations dans l'intégration réduite est plus faible qu'avec la règle normale [93].

Le premier inconvénient de la méthode d'intégration réduite est que la mono-tonicité de la convergence en énergie d'un modèle d'éléments finis n'est plus garantie, de sorte qu'il devient impossible de dire si le modèle est trop souple ou trop rigide par rapport à la solution exacte. Le second désavantage réside dans l'apparition éventuelle de modes parasites à énergie de déformation nulle, mais différents des modes classiques de mouvements d'un corps rigide. Ces modes parasites, appelés quelquefois mécanismes ou modes cinématiques (sont aussi appelés *hourglass modes* dans la littérature anglo- saxonne), proviennent des singularités introduites par la technique d'intégration réduite dans la matrice de rigidité et correspondent en fait à des configurations pour lesquelles les éléments infinitésimaux en chacun des points de Gauss ne subissent aucune déformation [93]. Une étude approfondie du problème révélerait que ces modes parasites ne se propagent pas nécessairement dans l'ensemble de la structure et que leur nombre dépend des conditions aux limites imposées et

de la densité du maillage [93]. Notons que la règle édictée pour la détermination de l'indice de singularité de la matrice de rigidité admet malheureusement des exceptions, de sorte qu'il est parfois préférable de s'assurer directement du rang de cette matrice par extraction de ses valeurs propres. Le nombre de valeurs nulles ne devant pas excéder le nombre de déplacements de corps rigide possibles (6 modes pour les éléments volumiques 3D). Un autre moyen de vérification consiste à factoriser la matrice de rigidité et à contrôler le nombre de termes ou pivots nuls dans la matrice diagonale issue de la décomposition.

Hughes [94] a proposé l'intégration réduite sélective (IRS) pour diminuer et souvent supprimer les instabilités numériques (modes parasites de Hourglass) provoquées par l'intégration réduite. Ce type d'intégration ne permet pas d'améliorer l'efficacité de calcul puisque l'intégration exacte et réduite doivent être appliquées à des termes différents de la matrice de rigidité. De plus, dans le schéma IRS, l'intégration réduite des termes de cisaillement pourrait activer les modes de Hourglass (de torsion) pour les problèmes dominés par la torsion [95]. Koh et Kikuchi [95] ont proposé l'intégration réduite directionnelle (IRD) où IR est appliqué sur certaines directions dépendant de la géométrie de l'élément. Bien que l'IRD fonctionne bien dans les problèmes 2D, elle souffre encore des modes de Hourglass dans certains cas de problèmes 3D.

Belytschko et Bindeman [96] ont proposé un élément qui ne nécessite pas l'utilisation des paramètres artificiels spécifiés par l'utilisateur. Dans cet élément la matrice ajoutée (pénalité) est construite à partir des propriétés de matériau, tel que le coefficient de Poisson et la géométrie de l'élément. Belytschko *et al.* [97] ont suggéré que la construction de la matrice ajoutée devra conserver la condition d'orthogonalité qui exige que les déformations de Hourglass généralisées ne peuvent pas activer un mouvement d'un corps rigide. Comme discuté auparavant, l'élément stabilisé présenté par Fredriksson et Ottosen [98] basé sur la méthode EAS utilisant l'énergie de flexion pour construire les modes améliorés est intégré avec un schéma d'intégration réduite. Cela conduit à des modes de Hourglass représentés dans la figure 1.19. Cette figure illustre les quatre modes parasites de Hourglass suivant la direction x pour les quatre déplacements nodaux dans cette direction dans le cas d'un seul point d'intégration situé à l'origine du repère de référence. Les autres modes selon y et z , pour arriver à un total de 12, sont obtenus par permutation des axes. Une analyse très détaillée des modes de Hourglass avec une démonstration complète se trouvent dans la référence [98].

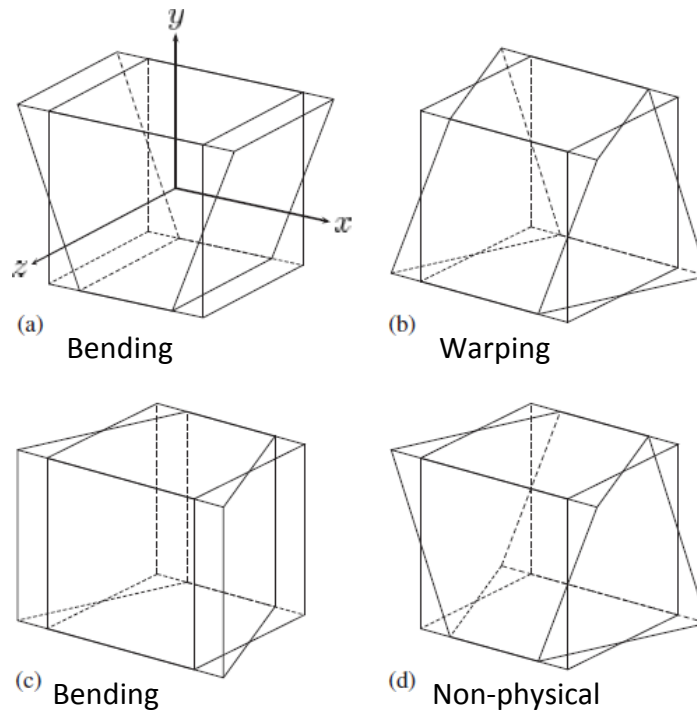


Figure I.1. 17. Modes de Hourglass selon la direction x avec un point d'intégration [98]

Un élément volumique JET3D a été développé par Li [99] et par la suite utilisé par Li et Cescotto [100]. Dans cet élément l'intégration réduite est également utilisée avec une technique de contrôle des modes de Hourglass. Cette technique consiste à utiliser une matrice de pénalité construite à l'aide de la méthode de déformations améliorées « *enhanced strain method* ». Les composantes de déformation comprennent des termes supplémentaires afin de supprimer les modes de Hourglass et aussi pour contrôler les verrouillages numériques dans l'élément. Cependant, ces composantes de déformation supplémentaires rendent particulièrement difficiles l'implémentation des relations constitutives.

Une approche alternative pour contrôler les modes de Hourglass est adoptée par Liu et co-auteurs [101, 102]. Dans cette approche, les déformations et les contraintes au centre de gravité de l'élément sont développées en série de Taylor dans les coordonnées locales. Quatre points d'intégration sont utilisés par Liu *et al.* [102] pour l'élément hexaédrique à 8 nœuds ce qui permet d'améliorer la solution lorsque le comportement du matériau est non linéaire en raison de l'interpolation plus précise des contraintes. Cette méthode implique des formulations extrêmement compliquées qui dépendent des coordonnées locales.

Chapitre II :

Présentation d'un élément finis de type solide-coque

II.2.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous allons présenter l'élément de type solide-coque développé par [103].

II.2.2.1. Formulation de l'élément SB6-18 :

L'élément SB6-18 est formulé dans les axes locaux du plan moyen. Les directions x , y , z sont respectivement parallèles aux axes ξ , η , ζ de l'espace de référence. La figure 2.1 représente la géométrie d'un élément de référence SB6-18 et ses points d'intégration.

Par souci de concision, seules les relations qui n'ont pas été mentionnées dans le chapitre précédent sont exposées.

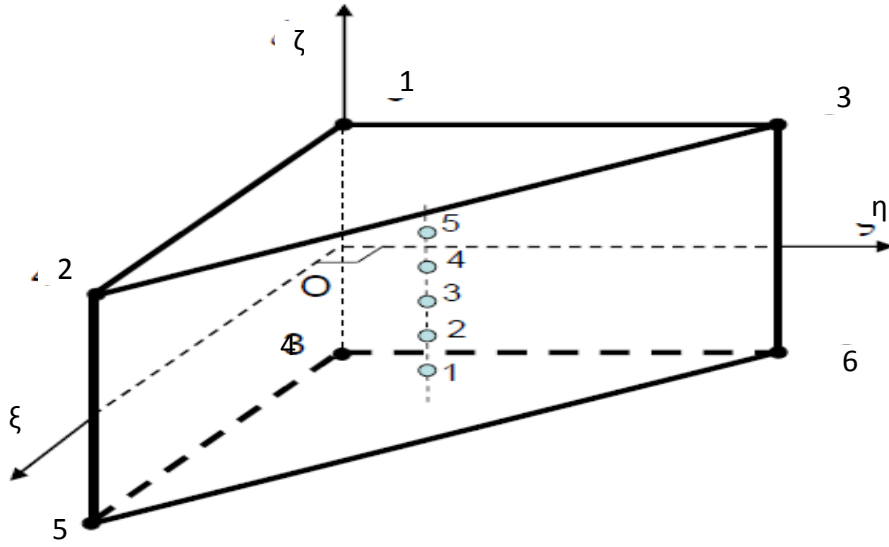


Figure II.2.1. Élément de référence SB6-18 et ses points d'intégration

II.2.2.2. Variables cinématiques et interpolation

L'élément SB6-18 est un élément linéaire iso-paramétrique. Les coordonnées spatiales (x, y, z) sont reliées aux coordonnées du nœud i (x_i, y_i, z_i) au moyen des fonctions de forme N_i par les formules :

$$x = \sum_{i=1}^6 x_i N_i(\xi, \eta, \zeta) \quad ; \quad y = \sum_{i=1}^6 y_i N_i(\xi, \eta, \zeta) \quad ; \quad z = \sum_{i=1}^6 z_i N_i(\xi, \eta, \zeta) \quad (2.1)$$

Les mêmes fonctions de forme sont utilisées pour définir le champ de déplacement de l'élément u en termes des déplacements nodaux u_i :

$$u = \sum_{i=1}^6 u_i N_i(\xi, \eta, \zeta) \quad (2.2)$$

Avec :

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad u_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Pour poursuivre les calculs, on se donne des fonctions de forme iso-paramétriques linéaires $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ associées à l'élément prismatique à six nœuds :

$$N(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - \xi)\eta \\ (1 - \xi)\zeta \\ (1 - \xi)(1 - \eta - \zeta) \\ (1 + \xi)\eta \\ (1 + \xi)\zeta \\ (1 + \xi)(1 - \eta - \zeta) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

L'origine du repère est confondue avec le coin droit du triangle du plan médian de l'élément (celui qui possède un angle droit, voir Figure 4.1). Ces fonctions de forme transforment un prisme régulier dans l'espace (ξ, η, ζ) en un prisme quelconque dans l'espace (x, y, z) .

Sous l'hypothèse de petits déplacements où le découplage des effets de membrane et de flexion est effectif, les déformations se caractérisent par l'opérateur de déformation discrétisé de membrane et de flexion.

II.2.2.3. Déformation de membrane :

Les déformations de membrane en fonction des déplacements nodaux sont données par :

$$\{e\} = [B_m]\{u_n\} \quad (2.5)$$

Avec :

$$[B_m] = [[B_{m1}], [B_{m2}]] \quad (2.6)$$

Les matrices B_{m1} et B_{m2} représentent l'opérateur de déformation de membrane qui relie le déplacement à la déformation pour les deux faces triangulaires supérieure et inférieure du prisme respectivement, et qui sont définies suivant la formulation de l'élément triangulaire CST.

$$\begin{aligned}
 [B_{m1}] &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -y_3 + y_2 & 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & -y_3 + y_2 & 0 & -x_3 & y_3 & 0 & x_2 & -y_2 & 0 \end{bmatrix} \\
 [B_{m2}] &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -y_6 + y_5 & 0 & 0 & y_6 & 0 & 0 & -y_5 & 0 & 0 \\ 0 & x_6 - x_5 & 0 & 0 & -x_6 & 0 & 0 & x_5 & 0 \\ x_6 - x_5 & -y_6 + y_5 & 0 & -x_6 & y_6 & 0 & x_5 & -y_5 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

II.2.2.4. Déformation de flexion :

$$\{\chi\} = [B_f]\{u_n\} \tag{2.8}$$

Avec :

$$[B_f] = [[B_{f1}], [B_{f2}]] \tag{2.9}$$

Les matrices B_{f1} et B_{f2} représentent l'opérateur de déformation de flexion qui relie le déplacement à la déformation pour les deux faces triangulaires supérieure et inférieure du prisme respectivement, et qui sont définies suivant la formulation de l'élément triangulaire DKT.

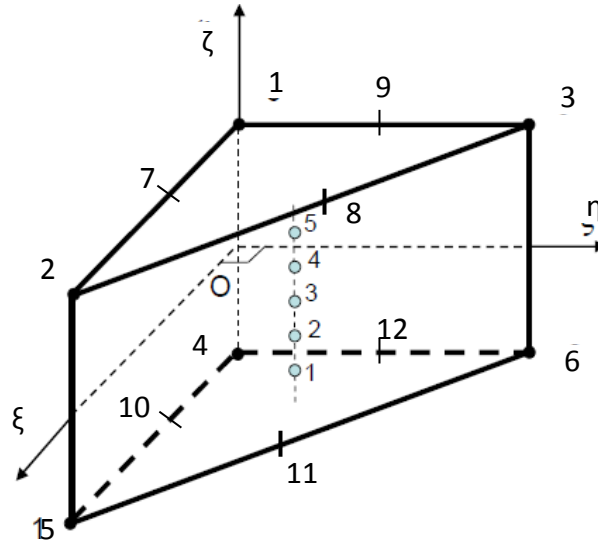


Figure II.2.2. Élément SB6-18 : les nœuds d'interpolations pour les deux faces supérieure et inférieure du prisme

Face supérieure :

$$[B_{f1}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 \langle N_{,\xi}^x \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^x \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^y \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^x \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^x \rangle + y_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^y \rangle \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Dans les vecteurs N seuls les termes de la flexion sont considérés :

$$N^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^x \rangle \quad (2.11)$$

$$N^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^y \rangle \quad (2.12)$$

N_{11}^x N_{21}^x N_{31}^x et N_{11}^y N_{21}^y N_{31}^y sont donnés par :

$$N_{i1}^x = \frac{3}{2L_k} P_k C_k - \frac{3}{2L_m} P_m C_m, N_{i1}^y = \frac{3}{2L_k} P_k S_k - \frac{3}{2L_m} P_m S_m \quad (2.13)$$

Face inférieure :

$$[B_{f2}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_6 \langle N_{,\xi}^x \rangle - y_5 \langle N_{,\eta}^x \rangle \\ -x_6 \langle N_{,\xi}^y \rangle + x_5 \langle N_{,\eta}^y \rangle \\ -x_6 \langle N_{,\xi}^x \rangle + x_5 \langle N_{,\eta}^x \rangle + y_6 \langle N_{,\xi}^y \rangle - y_5 \langle N_{,\eta}^y \rangle \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Dans les vecteurs N seuls les termes de la flexion sont considérés :

$$N^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{41}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{51}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{61}^x \rangle \quad (2.15)$$

$$N^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{41}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{51}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{61}^y \rangle \quad (2.16)$$

N_{51}^x N_{41}^x N_{61}^x et N_{51}^y N_{41}^y N_{61}^y sont donnés par :

$$N_{i1}^x = \frac{3}{2L_k} P_k C_k - \frac{3}{2L_m} P_m C_m, N_{i1}^y = \frac{3}{2L_k} P_k S_k - \frac{3}{2L_m} P_m S_m \quad (2.17)$$

II.2.2.5. Forme discrétisée de Weint :

$$W_{int}^e = \langle \mathbf{u}_n^* \rangle [K] \{ \mathbf{u}_n \} \quad (2.18)$$

La matrice de rigidité élémentaire est:

$$[K] = [K_m] + [K_f] \quad (2.19)$$

Les rigidités de membrane et de flexion sont obtenues par intégration numérique en utilisant 5 points d'intégration qui se trouvent sur la même droite suivant l'épaisseur.

Leurs coordonnées (ξ, η, ζ) et leurs poids d'intégration sont les racines du polynôme de Gauss–Legendre données :

Pour la membrane :

$$[K_m] = \int_V [B_m]^T [H_m] [B_m] dV \quad (2.20)$$

$$[K_m] = \int_{V_{\text{réf}}} ([B_m]^T [H_m] [B_m]) \det J d\xi d\eta d\zeta \quad (2.21)$$

$$[K_m] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \omega_i \omega_j \omega_k ([B_m]^T [H_m] [B_m] \det J) \quad (2.22)$$

Pour la flexion :

$$[K_f] = \int_V [B_f]^T [H_f] [B_f] dV \quad (2.23)$$

$$[K_f] = \int_{V_{\text{réf}}} ([B_f]^T [H_f] [B_f]) \det J d\xi d\eta d\zeta \quad (2.24)$$

$$[K_f] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \omega_i \omega_j \omega_k ([B_f]^T [H_f] [B_f] \det J) \quad (2.25)$$

$V_{\text{réf}}$: volume de l'élément de référence.

m : représente le nombre de points d'intégration (PI) dans les directions ζ .

Avec H_m et H_f : matrice de comportement homogénéisé de membrane et de flexion.

$$[H_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$[H_m] = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson. Les efforts résultants (effort normal et moment de flexion):

$$[N] = [H_m]\{e\}, [M] = [H_f]\{\chi\} \quad (2.28)$$

Suite aux nombreux tests numériques effectués, les matrices k_m et k_f ont été multipliées par les coefficients : $c_1 = 1.15\sqrt{h}$ et $c_2 = 0.60808h\sqrt{h/12}$ respectivement, le rôle de ces deux coefficients est d'améliorer l'approximation de déplacement en membrane et en flexion. Cette technique a été utilisée par Wang [104], Trinh [105], et Flanagan et Belytschko [106].

II.2.2.6. Matrice de masse :

La matrice de masse a la forme classique suivante :

$$m = \int_V [N_q]^T \rho [N_q] dV = \int_{V_{\text{réf}}} [N_q]^T \rho [N_q] \det J dV_r \quad (2.29)$$

Où ρ est la masse volumique du matériau

N_q : les fonctions de forme de l'élément SB6-18

$$N_q = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix}$$

En substituant la relation précédente dans l'équation (2.30), on obtient la matrice de masse de dimensions (18 x 18):

$$m = \int_{V_{ref}^e} \rho \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & \cdots & N_1 N_6 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_6 N_1 & \cdots & N_6 N_6 \end{bmatrix} & [0] & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} N_1 N_1 & \cdots & N_1 N_6 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_6 N_1 & \cdots & N_6 N_6 \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & [0] & \begin{bmatrix} N_1 N_1 & \cdots & N_1 N_6 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_6 N_1 & \cdots & N_6 N_6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} detJ dV_r \quad (2.30)$$

Pour déterminer la matrice de masse de l'élément SB6-18 on utilise un schéma d'intégration de 1×2 points de Gauss-Hammer .

$$m = \sum_{i=1}^{NPI} \omega_i \left([N_q]^T \rho [N_q] detJ \right) \quad (2.31)$$

II.2.2.7. Expression de We dans le repère global :

Les déplacements dans le repère global U, V, W sont reliés aux quantités locales par :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [Q_1]^T \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

$$[Q_1]^T = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1X} & t_{1Y} & t_{1Z} \\ t_{2X} & t_{2Y} & t_{2Z} \\ n_X & n_Y & n_Z \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Soit $\langle u_n \rangle_g$, les variables nodales de l'élément dans le repère global :

$$\langle u_n \rangle_{glob} = \langle \cdots : U_i V_i W_i ; i = \text{varie de 1 à 6} \cdots \rangle \quad (2.34)$$

ous avons donc :

$$\{u_n\} = [T] \{u_n\}_{glob} \quad (2.35)$$

Avec :

$$[T]_{(18 \times 18)} = \begin{bmatrix} [T_1] & [0] \\ [0] & [T_2] \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$[T_1]_{(9 \times 9)} = \begin{bmatrix} [Q_1]^T & [0] & [0] \\ [0] & [Q_1]^T & [0] \\ [0] & [0] & [Q_1]^T \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$[T_2]_{(9 \times 9)} = \begin{bmatrix} [Q_2]^T & [0] & [0] \\ [0] & [Q_2]^T & [0] \\ [0] & [0] & [Q_2]^T \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

La matrice de rigidité et la matrice de masse dans le repère global :

$$[K]_{glob} = [T]^T [K] [T] \quad (2.39)$$

$$[m]_{glob} = [T]^T [m] [T] \quad (2.40)$$

Chapitre III :

Mise en œuvre numérique de l'élément

SB6-18

III.3.1.Introduction :

Touts programmes basés sur la méthode des éléments finis incluent quelques blocs fonctionnels caractéristiques :

- Lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage (nœuds et éléments), les paramètres physiques (module d'élasticité...etc), les sollicitations et conditions aux limites.
- Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice globale et le vecteur global des sollicitations.
- Résolution du système d'équation après prise en compte des conditions aux limites.
- Impression des résultats après calcul éventuel de variables additionnelles (contrainte, réactions...etc).

III.3.2.Définition de Matlab :

Matlab est un langage avec un haut niveau de calcul et de programmation et se caractérise par la présence de programmes qui facilitent le processus de traitement de ce langage, et les programmes comprennent: e Calculs mathématiques e Développement d'algorithmes traitement de données pour eux Modélisation , simulation et conception des schémas initiaux pour les projets e Analyse et présentation des données Réalisation de dessins techniques et scientifiques e Développement d'applications Dans les interfaces de type (GUI) et Matlab dépend du format des données sous forme de tableaux et le programme est comme la plupart des langages de programmation. Matlab comprend un ensemble de programmes appelés (boîte à outils), qui vous permet de traiter des applications spécialisées.Ces outils sont des programmes sous la forme de (M - fichiers)

III.3.2.1Définition de Matlab :

Applications MATLAB dans le milieu universitaire : E Travail sur les détails et l'intégration E Résoudre des équations algébriques E Résoudre des équations différentielles E Travail sur la différenciation partielle et les opérations sur les fractions fractionnaires Domaines appliqués : E Systèmes de contrôle dans tous les domaines domaine de l'industrie automobile le domaine de l'aviation et de la défense aérienne e le domaine de la robotique et il existe de très nombreuses applications d'ingénierie.



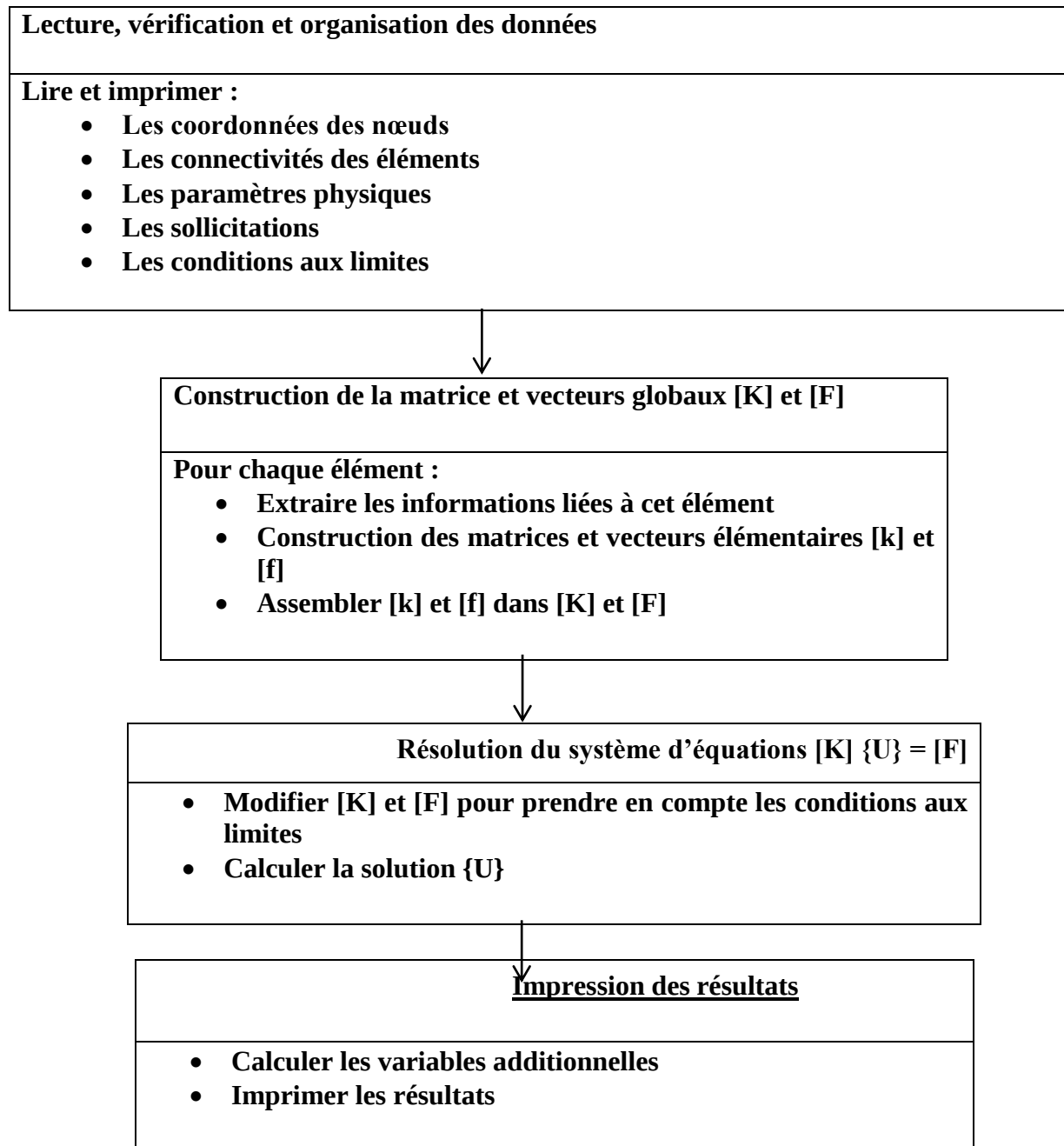


Figure III.3.1. Blocs fonctionnels caractéristiques d'un programme éléments finis [SB6-18]

Ces programmes sont écrits sous le langage MATLAB, chaque programme est constitué d'une fonction (function) principale qui représente le programme principal et un ensemble des fonctions (functions) secondaires (qui jouent le même rôle des sous-routines).

III.3.3. Présentation du programme élément fini SB6-18:

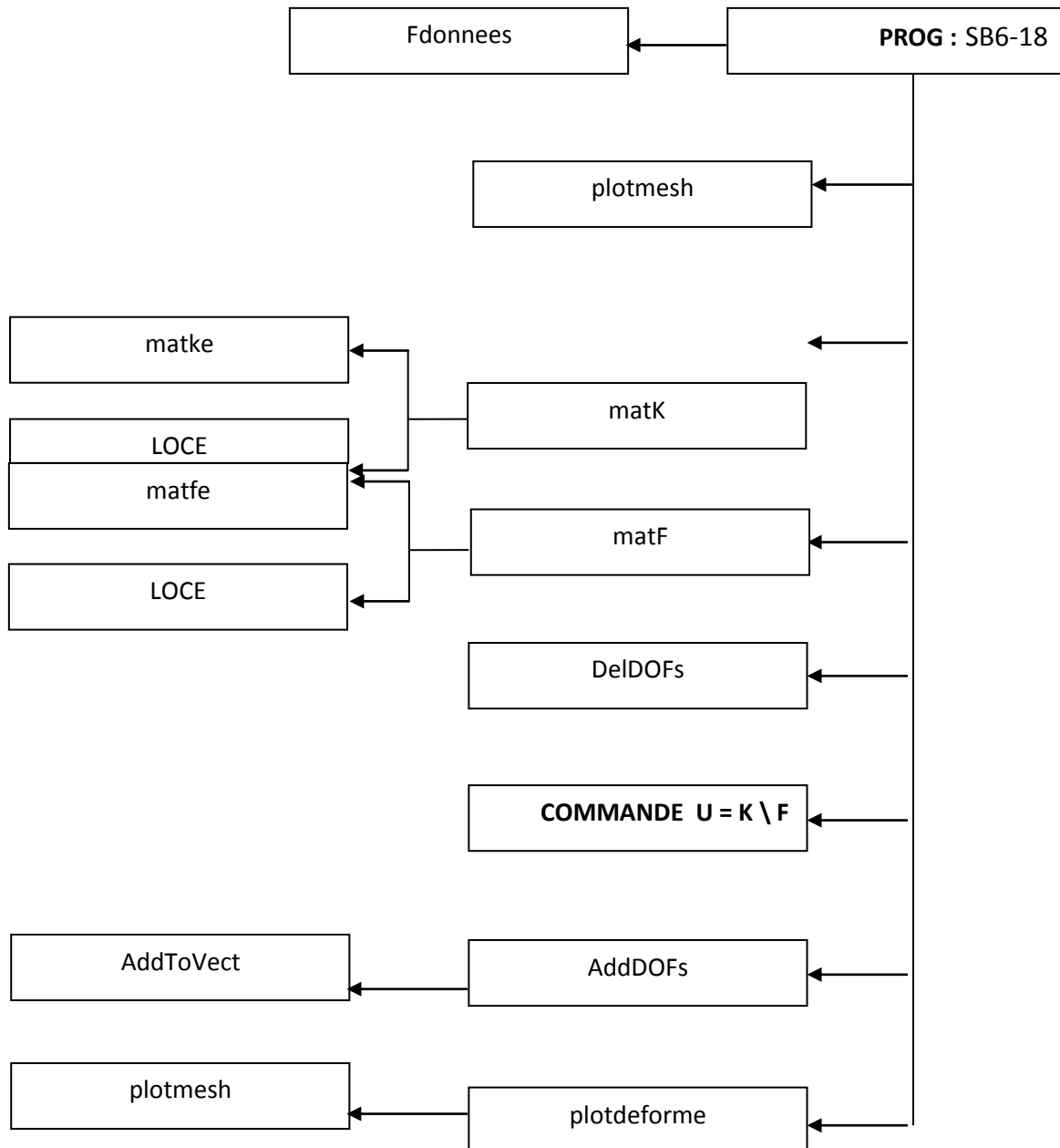


Figure III.3.2. Description du programme élément fini SB6-18

III.3.4.Description du programme :

- **Programme principal SB6-18 :**

Il fait appel aux différentes fonctions secondaires nécessaires aux calculs d'une structure en utilisant la formulation décrite dans ce chapitre.

- **Fonction donnees :**

C'est un fichier fonction qui permet d'introduit toutes les données relatives au problème :

- tableau des coordonnées des nœuds
- tableau de connectivité des éléments
- épaisseur des éléments
- module d'élasticité
- coefficient de poisson
- conditions aux limites (numéros des degrés de liberté bloquées)
- vecteurs sollicitations

La commande Matlab : [les données] = feval(str2func(Nom du fichier des données)); ouvre le fichier des données et permet aux différentes fonction existant dans le programme principal de lire les données.

- **Fonction plotmesh :**

Cette fonction nous donne un affichage graphique du maillage, les coordonnées et la numérotation des nœuds, ce qui permet, avec le tracer la structure saisie, une vérification visuelle des données (tableaux des coordonnées et connectivité).

- **Fonction matK :**

C'est la fonction qui comporte le processus d'assemblage des matrices de rigidité élémentaires K_e fournit par la fonction matke, la boucle se fait sur les éléments en utilisant la fonction LOCE qui nous donne les degrés de liberté de chaque élément qui sont nécessaires pour le stockage des termes de la matrice élémentaire dans la matrice de rigidité globale.

- **Fonction LOCE :**

A partir de la table de connectivité des éléments existant dans le fichier des données, cette fonction Fournit la table de localisation (numéros) des degrés de liberté pour chaque élément.

- **Fonction matke:**

Permet le calcul de la matrice de rigidité pour chaque élément.

- **Fonction matF :**

C'est la fonction qui comporte le processus d'assemblage des vecteurs des sollicitations élémentaires fe fournit par la fonction matfe, la boucle se fait sur les éléments en utilisant la fonction LOCE qui nous donne les degrés de liberté de chaque élément qui sont

pour le stockage des termes des vecteurs de forces élémentaire dans le vecteur global

- **Fonction matfe:**

Permet d'introduire le vecteur des forces pour chaque élément.

- **Fonction DelDOFs :**

Les conditions aux limites sont l'ensemble des déplacements nuls aux niveaux des appuis, un vecteur e dans le fichier de données est utilisé pour spécifier les degrés de liberté à bloquer. Pour appliquer cette condition on élimine les lignes et les colonnes correspondantes au vecteur e de la matrice K et du vecteur des sollicitations F (puisque le chargement est saisi pour tous les noeuds y compris ceux d'appuis).

- **Commande $U = K \setminus F$:**

Une fois les conditions aux limites sont appliquées, il nous reste qu'à résoudre le système discret, La solution en déplacement (aux nœuds) s'obtient avec la commande MATLAB U

$= K \setminus F$, qui remplace les méthodes classiques pour résoudre les systèmes d'équations linéaires (méthode de factorisation de cholesky Pour une matrice symétrique définie positive).

- **Fonction AddDOFs :**

Avec cette fonction on ajoute au vecteur déplacement les degrés de liberté des nœuds bloqués qui ont été supprimés par la fonction DelDOFs, la boucle se fait sur les numéros des degrés de liberté à ajouter en utilisant la fonction AddToVect.

- **Fonction AddToVect:**

Permet d'obtenir le vecteur de déplacement résultant pour chaque degré de liberté ajouté.

- **Fonction plotdeforme:**

Cette fonction dessine la structure déformée, elle trace les solutions obtenues sur le schéma déjà obtenu par la fonction plotmesh.

III.3.5.Validation de l'élément SB618 :

Pour valider l'élément développé SB6-18, nous utilisons un ensemble de tests bien connus dans la littérature. Pour chaque cas test, le résultat obtenu est comparé, d'une part, à la solution de référence, et d'autre part, avec la solution donnée par des éléments finis existants dans la littérature.

Chapitre IV :

Côté pratique

IV.4.1. Poutre console de Macneal :

Une poutre console est encastree à une extrémité et chargée à l'autre extrémité libre comme le montre la figure 4.1, les valeurs de la charge, le module de young, le coefficient de poisson et l'épaisseur sont mentionnées sur la même figure, Ce cas test est un problème standard pour tester la fiabilité des éléments finis (Macneal et Harder [107]). On considère deux cas de chargement : un effort de cisaillement $P = 1$ et un moment de flexion $M = 10$.

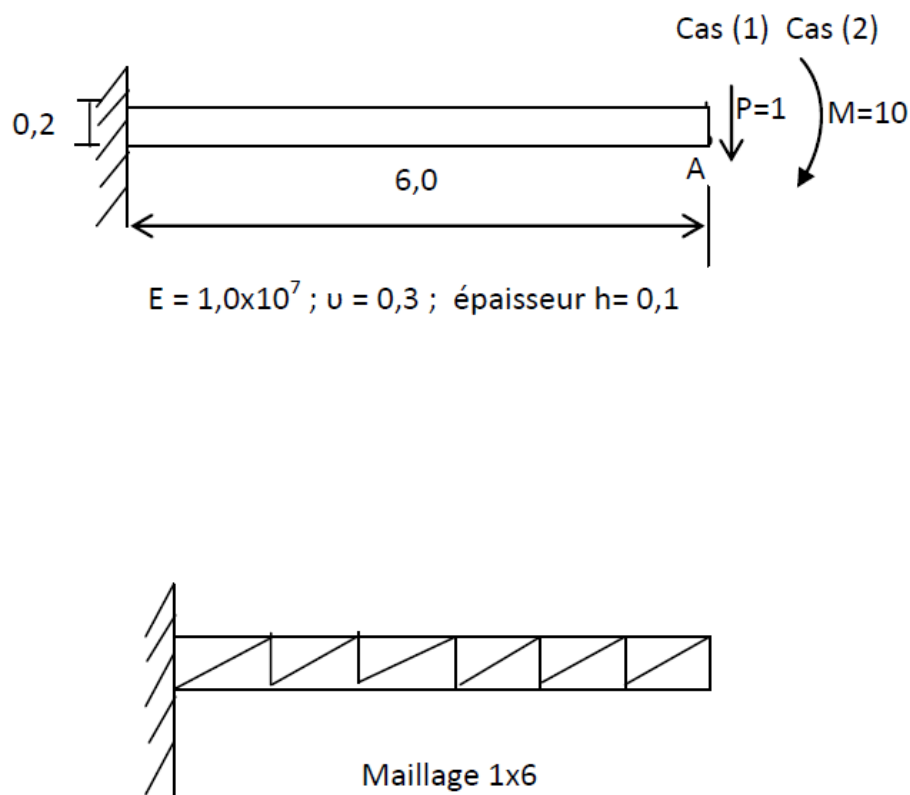


Figure IV.4.1. Poutre console sollicitée à son extrémité par:

(1) un effort de cisaillement (2) moment de flexion

Dans les tableaux 4.1 et 4.2, nous avons présenté les résultats obtenus à partir de la flèche au point A, ce Les valeurs sont calculées à l'aide de différents types de réseaux par élément SB6–18 ans.

M	Q4	SBRIE2	Sol(R)	SB6-18
1x2	-	-	0.1081	0.00263
1x3	0.002	0.07	0.1081	0.0075
1x4	-	-	0.1081	0.014361
1x5	-	-	0.1081	0.023026
1x6	0.015	0.078	0.1081	0.033191
1x7	-	-	0.1081	0.044551
1x10	-	-	0.1081	0.08286
1x11	-	-	0.1081	0.096178

Tableaux IV.4.1. de convergence des déplacements au point A : cas (1)

Tableaux IV.4.2. de convergence des déplacements au point A : cas (2)

M	Q4	SBRIE2	Sol(R)	SB6-18
1x2	-	-	0,27	0.004383
1x3	0,006	0,17	0,27	0.012466
1x4	-	-	0,27	0.023934
1x5	-	-	0,27	0.038377
1x6	0,025	0,18	0,27	0.055318
1x7	-	-	0,27	0.074251
1x10	-	-	0,27	0.138099
1x11	-	-	0,27	0.160296

Dans les figures 4.1 et 4.2 on a présenté les résultats obtenus de la flèche au point A, ces valeurs sont calculées par l'utilisation de différents types de maillage par l'élément SB6-18, la comparaison se fait avec la solution de référence donnée par Macneal et Harder[107], ainsi que d'autres éléments finis :

L'élément isoparamétrique à quatre noeuds Q4.

L'élément SBRIE2 proposé par Sabir et Sfindji [108].

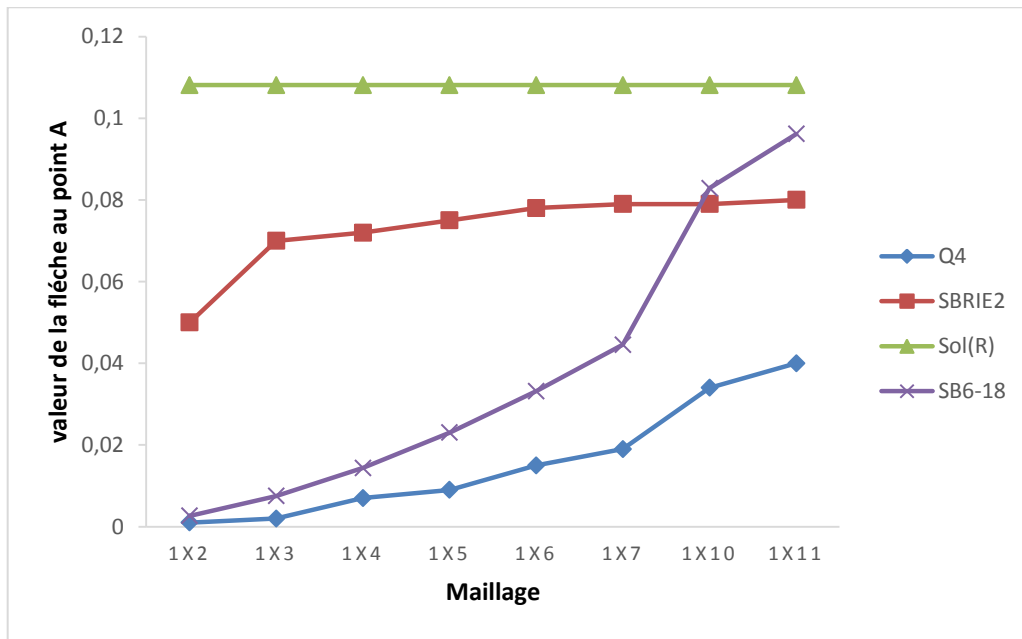


Figure IV.4.2. Courbe de convergence de déplacement au point A : cas (1)

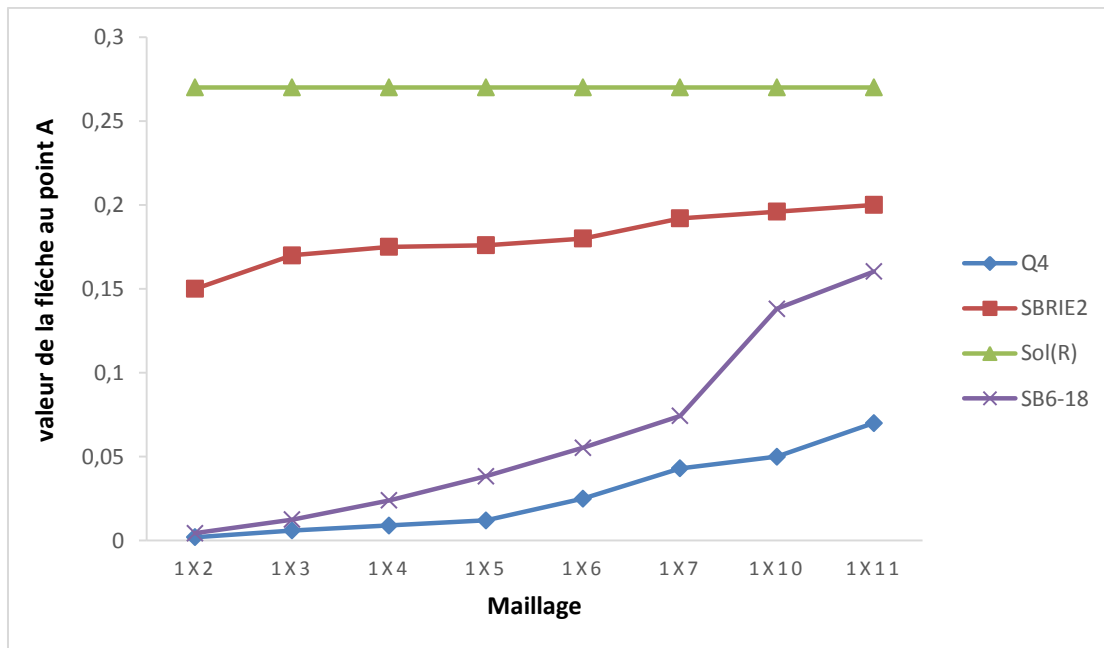
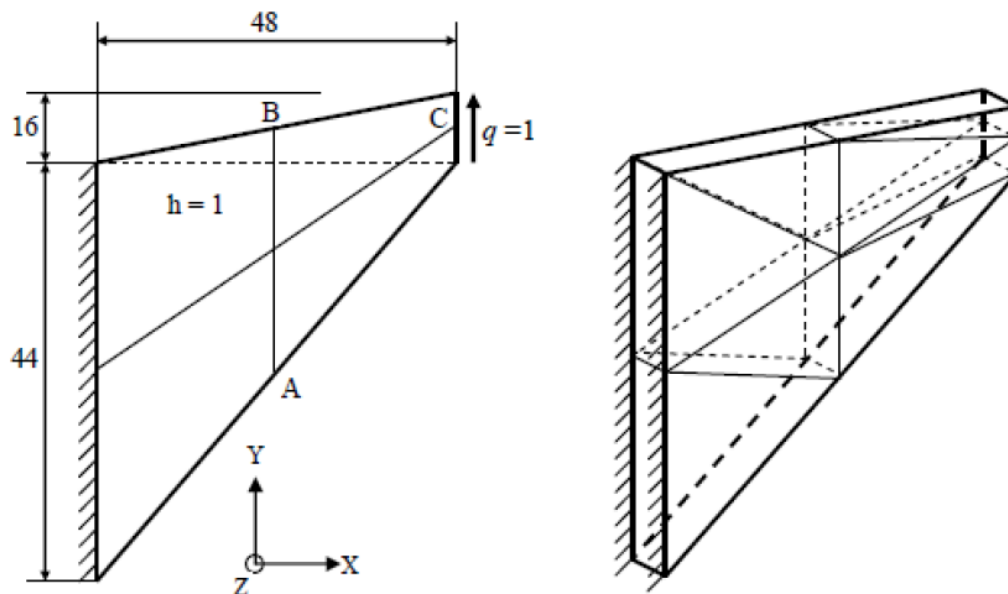


Figure IV.4.3. Courbe de convergence de déplacement au point A : cas (2)

Les courbes des figures 4.2 et 4.3 représentent les déplacements du point A du problème sous forme graphique. Nous remarquons que l'élément SB6-18 converge vers la solution de référence mieux que les éléments Q4 et SBRIE2

IV.4.2. Panneau fuselé :

Le panneau fuselé proposé par Cook et al. et Bergan et Felippa. [109] (voir figure 4.4), est fixé sur le bord gauche et soumis à un chargement de cisaillement distribué uniformément le long du bord droit. Il s'agit de calculer le déplacement vertical au point C. Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en maillage distordu et aussi dans les problèmes de cisaillement-dominant. Deux maillages ont été particulièrement étudiés (un des cas de ces maillages est illustré dans la figure 4.4). Les résultats obtenus avec l'élément SB6-18, présentés dans le tableau 4.3, sont comparés avec la solution de référence de Bergan et Felippa [109] pour un maillage 32 x 32, et les résultats obtenus avec l'élément membranaire CST et l'élément volumique W6 ainsi que l'élément proposé par Bergan et Felippa. [109].

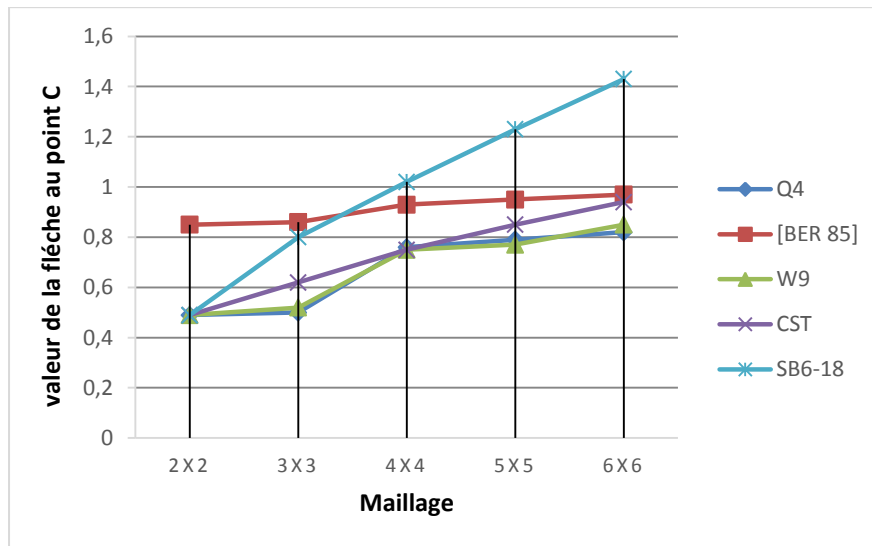


$E = 1$; $\nu = 1/3$; $h = 1$
 Conditions aux limites : $U = V = 0$ (à l'encastrement).

Figure IV.4.4. Panneau fuselé soumis à un effort de cisaillement ;
 maillage (2 X 2 X 1) X2

Tableau IV.4.3. Valeur de déplacement vertical normalisé au point C :

Eléments	Valeur de V_c				
	Maillage 2X2	Maillage 3X3	Maillage 4X4	Maillage 5X5	Maillage 6X6
Q4	0.49	-	0.76	-	-
[BER 85]	0.85	-	0.93	-	-
W9	0.49	-	0.75	-	-
CST	0.49	-	0.75	-	-
SB6-18	0.54	0.8	1.02	1.23	1.43
Référence [BER 85] maillage (32x32) ; V_c =23,90	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

**Figure IV.4.5.** courbe montrant les valeurs de déplacement vertical mesurées au point C

Les résultats du déplacement vertical normalisé au point C, présentés dans le tableau 4.3, montrent que la performance de notre élément est très satisfaisante comparée avec

l'élément prismatique standard W6, et aussi par rapport aux éléments membranaire Q4 et CST, ainsi que l'élément développé par Bergan et Felippa. [109].

IV.4.3. Poutre en flexion simple :

Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en flexion simple. En effet dans ce cas test, la flexion est dominante devant le cisaillement.

A l'extrémité droite, la poutre est soumise à un effort tranchant de $\|P\| = 4\text{ N}$

dans la direction verticale Oz. Ce chargement est réparti de façon adéquate aux noeuds de l'extrémité droite. On simule un encastrement parfait à l'extrémité gauche de la poutre (voir Figure 4.6).

Tableau IV.4.4. Données géométriques, matériau et de chargement pour le test de la poutre en flexion simple

Longueur	$L = 50\text{ m}$
Largeur	$l = 4\text{ m}$
Épaisseur	$e = 1\text{ m}$
Module d'Young	$E = 6,825 \times 10^7\text{ Pa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,3$
Chargement	$\ P\ = 4\text{ N}$

La solution est trouvée analytiquement et provient de la RDM car on s'attend à ce que les déplacements soient faibles devant la longueur de la poutre (hypothèse des petites perturbations et comportement élastique linéaire).

$$\text{flèche} = u_z = \frac{PL^3}{3EI} \quad \text{avec} \quad I = \frac{1h^3}{12} = \frac{1e^3}{12}$$

$$\text{flèche} = u_z = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{4 \times 4 \times 50^3}{6,825 \times 10^7 \times 4 \times 1^3} = 7,326 \times 10^{-3}\text{ m}$$

Les résultats de simulation du déplacement du noeud A suivant la direction Oz sont donnés dans le Tableau 4.5

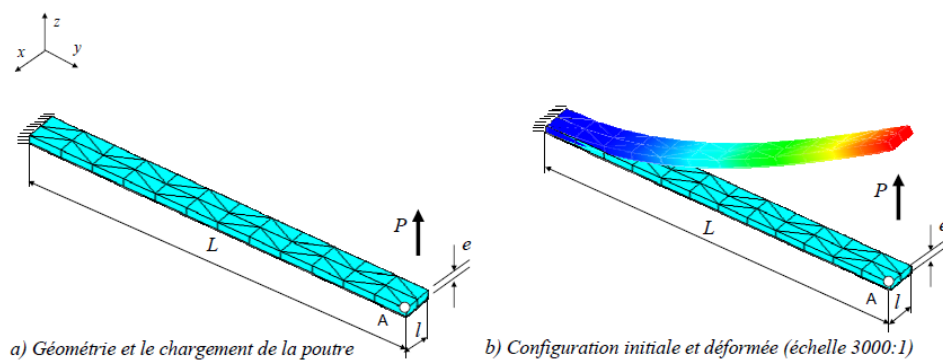


Figure IV.4.6. Géométrie, chargement et conditions aux limites pour le test de la poutre en flexion simple ; un exemple de maillage (12x2x1)x2

Tableau IV.4.5. Déplacement du point A suivant Oz de la poutre en flexion simple :

Maillages	PRI6		SHB6 initial		SB6-18	
	W	w/wref	W	w/wref	W	w/wref
(6x2x1)x2 ; 24	2,678E-04	0.037	8,826E-04	0.121	-7.69E-5	-0.010
(12x2x1)x2 ; 48	9,687E-04	0.132	2,852E-03	0.390	-1.60E-4	-0.021
(24x4x1)x2 ; 192	2,606E-03	0.356	4,849E-03	0.662	-2.54E-4	-0.034
(40x4x1)x2 ; 320	4,175E-03	0.570	6,145E-03	0.840	-4.00E-4	-0.054
(50x4x1)x2 ; 400	4,752E-03	0.649	6,493E-03	0.887	-4.32E-4	-0.059

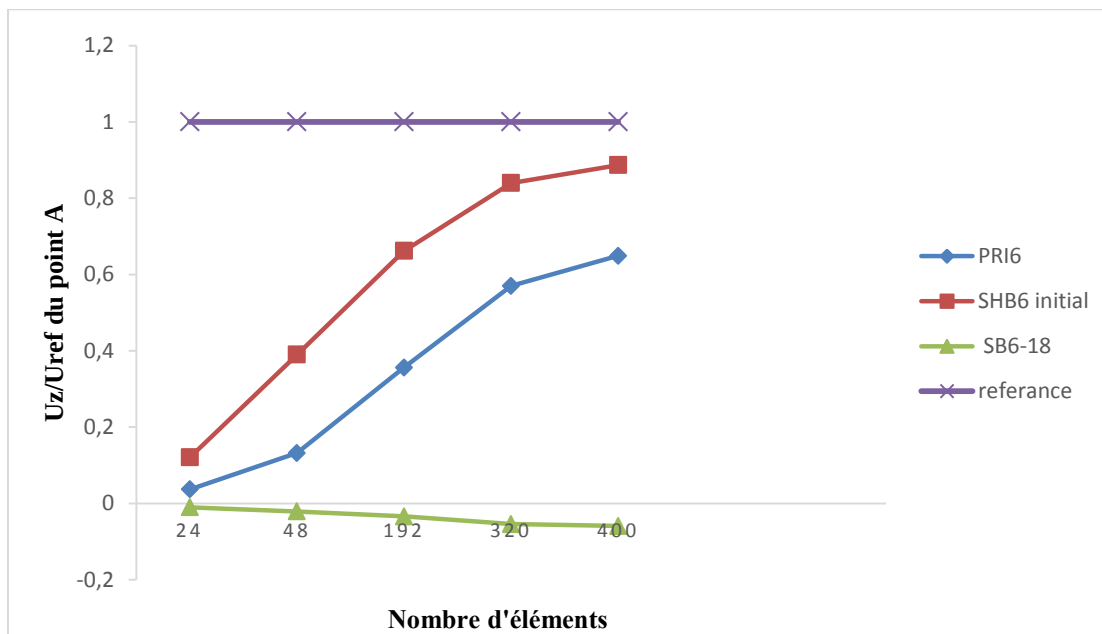


Figure IV.4.7. Déplacement normalisé du point A de la poutre en flexion simple

Le graphique représente les déplacements normaux du point A du problème ci-dessous forme graphique. On constate que tous les éléments testés convergent vers une solution référence. On constate que l'élément SB6-18 descend en dessous de zéro et s'écarte de la solution de référence.

IV.4.4. Plaque en flexion et cisaillement dans son plan :

Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en cisaillement. En effet dans ce cas test, le cisaillement est dominant. Par ailleurs ce cas test a été repris par de nombreux auteurs de la littérature et notamment.

La plaque est encastree parfaitement à l'extrémité gauche. Le chargement est une force P appliquée à l'extrémité droite de la poutre ce qui entraîne une répartition de contraintes parabolique sur la hauteur et constante sur l'épaisseur. Le problème est un cas de contraintes planes. Par ailleurs, on s'attend à ce que les déplacements ne soient pas « infiniment petits » devant les dimensions de la structure (voir Figure 4.8).

Tableau IV.4.6. Données de géométrie, matériau et de chargement du cas test de la plaque en flexion et cisaillement dans son plan

Longueur	$L = 48 \text{ mm}$
Hauteur	$H = 12 \text{ mm}$
Épaisseur	$h = 1 \text{ mm}$
Module d'Young	$E = 3 \times 10^{10} \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,25$
Chargement	$\ P\ = 40 \text{ N}$

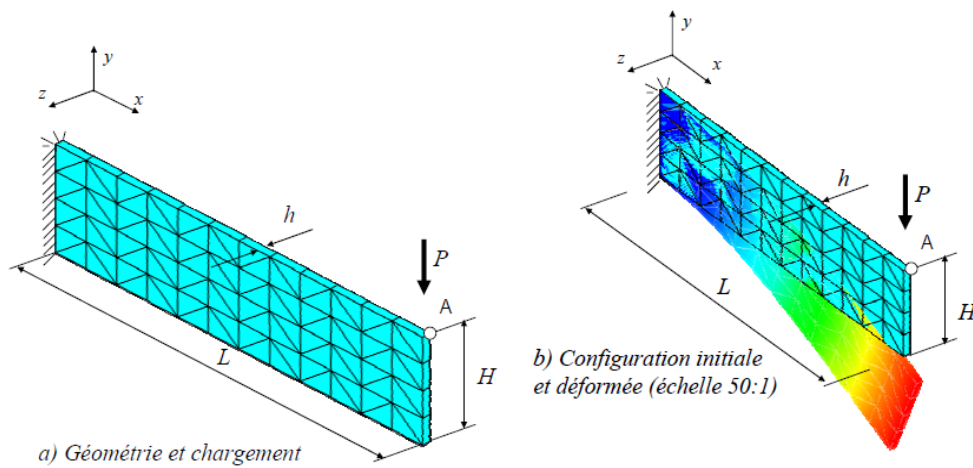


Figure IV.4.8. Géométrie, chargement et déformée de la plaque en flexion et cisaillement dans son plan ; un exemple de maillage $(12 \times 4 \times 1) \times 2$

En utilisant le fait que $\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma u}{\sigma x}$ et $\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma v}{\sigma y}$, on obtient les résultats de référence suivants:

$$\|v\| = 0,3573 \text{ mm (déplacement suivant Oy du point A)}$$

Les résultats de simulation pour le déplacement du noeud A suivant la direction Oy sont donnés dans le Tableau 4.7.

Tableau IV.4.7. Résultats du déplacement du point A suivant O_y de la plaque en flexion et cisaillement dans son plan :

Maillages	PRI6		SHB6 initial		SB6-18	
	U_y	U_y/U_{ref}	U_y	U_y/U_{ref}	U_y	U_y/U_{ref}
(6x4x1)x2 ; 48	-2,124E-04	0,594	-2,162E-04	0,605	0.04546331	0.127
(12x4x1)x2 ; 96	-2,767E-04	0,775	-2,819E-04	0,789	0.17824621	0.498
(24x4x1)x2 ; 192	-3,001E-04	0,840	-3,053E-04	0,854	0.27904372	0.780
(16x16x1)x2 ; 512	-3,262E-04	0,913	-3,283E-04	0,919	0.43654515	1.221
(32x16x1)x2 ; 1024	-3,453E-04	0,966	-3,466E-04	0,970	0.37528676	1.050

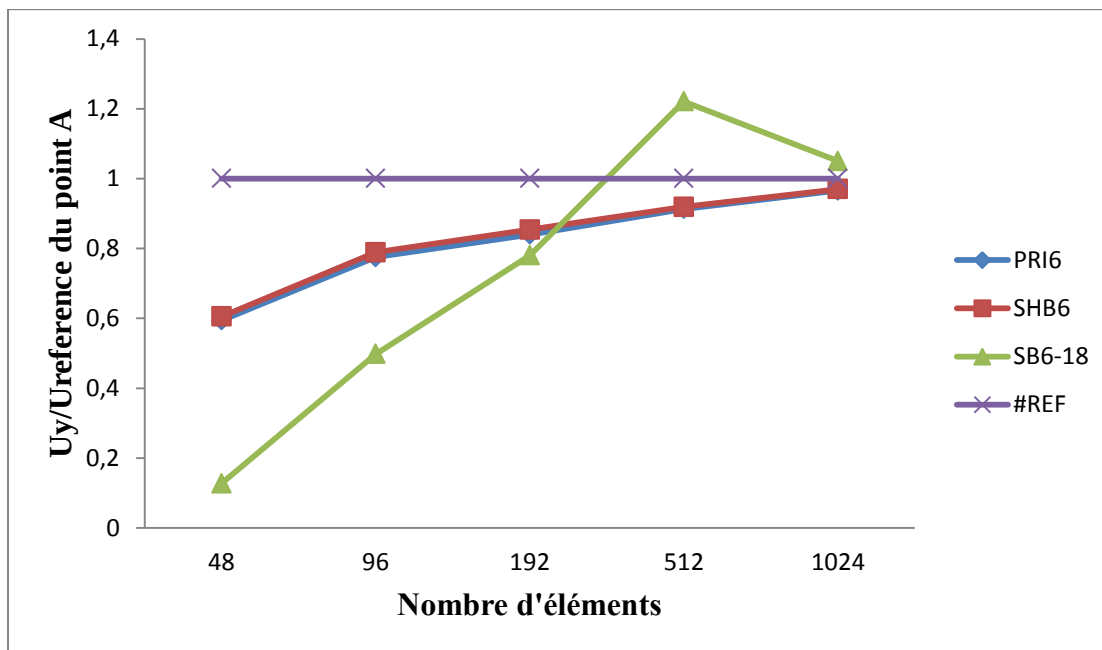


Figure IV.4.9. . Déplacement normalisé du point A de la plaque en flexion et cisaillement dans son plan

La figure 4.9 représente les déplacements normaux du point A du problème ci-dessous forme graphique. Nous constatons que les trois éléments SHB6 et PRI6 se comportent De la même manière. Ils convergent bien vers la solution de référence et l'élément SB6-18 était en hausse et était loin des autres éléments.

Conclusion

Conclusion

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une contribution à l'étude numérique des coques par éléments finis de type coque dure. Sachant que les structures crustales sont souvent associées à d'autres structures épaisses formées par des éléments finis 3D, la difficulté de modéliser ce type de structures complexes est actuellement un sujet de recherche très attractif, et cela nous a poussé à rechercher de nouveaux éléments finis pouvant répondre à cette problématique. Ce travail de recherche nous a permis de développer un mémoire :

L'élément présenté dans ce travail, est un nouvel élément fini appartenant aux éléments de type coque dure, et ces éléments représentent maintenant une alternative intéressante aux éléments de coque solides et finis traditionnels. En effet, l'élément fini de la coque dure cumule les avantages des combinaisons d'éléments massifs et d'éléments de la coque. L'élément évolutif est un élément prismatique à six nœuds, appelé SB6-18, cet élément a 3 translations par nœud donc le nombre total de degrés de liberté est égal à 18, valable pour les composants supérieur et inférieur du prisme,

La composante spécifique développée dans ce travail a été mise en œuvre sous la Programmation MATLAB, validée par une série de tests reconnus. Sur le terrain, les résultats obtenus ont montré de bonnes propriétés de convergence d'un composant pour calculer les déplacements, les contraintes et les moments.

La dernière partie de cette thèse est consacrée à une extension de l'élément SB6-18 en comportement géométrique non linéaire. La formule lagrangienne complète prend comme configuration de référence, La formulation nous a conduit à identifier les efforts internes ainsi qu'une matrice Dureté de l'ombre. La méthode itérative de Newton Raphson a été utilisée pour la décision pour un système non linéaire. Les cas tests étudiés dans cette section ont montré de bons Comportement et programmation appropriée du composant développé.

Références Bibliographie

Références Bibliographie

- [1] Batoz J.L, Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis. Vol 1, Solides élastiques, Editions Hermès, 1990.
- [3] Zienkiewicz O.C, Taylor R.L, Too J.M. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3:275–290, 1971.
- [2] Dhatt G, Touzot G. Une présentation de la méthode des éléments finis. Edition des Universités de Laval, Québec, 1986.
- [4] Ahmad S. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2:419–451, 1970.
- [5] Brendel B, Ramm E. Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells. *Internat. Conf. on Engineering Application of Finite Element Method*, Hovik, Norway, May 9-11, 1979.
- [6] Parisch H. Geometrical nonlinear analysis of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 14:159–178, 1978.
- [7] Hughes T.J.R, Liu W.K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. Threedimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 26:331–362, 1981.
- [8] Kim Y.H, Jones R.F, Lee S.W. Study of 20-node solid element. *Communication in Applied Numerical Methods in Engineering*, 6:197–205, 1990.
- [9] Hermann L.R. A bending analysis for plates. *Proc. 1st Conf. on Matrix Meth. in structural Mech.* Ohio, page 577–602, October 1965.
- [10] Malkus D.S, Hughes T.J.R. Mixed finite element methods – reduced and selective integration techniques: a unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15:63–81, 1978.
- [11] Batoz J.L, Bathe K.J, Ho L.W. A study of three node triangular plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15:1771–1812, 1980.
- [12] Batoz J.L, Ben Tahar M. Evaluation of a new thin plate quadrilateral element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:1655–1678, 1982.

Références Bibliographie

- [13] Pinsky P.M, Jasti R.V. A mixed finite element formulation for Reissner–Mindlin plates based on the use of bubble functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:1677–1702, 1989.
- [14] Saleeb A.F, Chang T.Y. An efficient quadrilateral element for plate bending analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:1123–1155, 1987.
- [15] Saleeb A.F, Chang T.Y, Yingyeunyong S. A mixed formulation of C^0 - linear triangular plate–shell element – the role of edge shear constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:1101–1128, 1988.
- [16] Onate E, Castro J. Derivation of plate based on assumed shear strain fields. In *New Advances in Computational Structural Mechanics*. Ladevèze & Zienkiewicz Eds, 237–288, Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [17] Onate E, Zienkiewicz O.C, Suarez B, Taylor R.L. A general methodology for deriving shear constrained Reissner–Mindlin plate elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:345–367, 1992.
- [18] Papadopoulos P, Taylor R.L. A triangular element based on Reissner–Mindlin plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:1029–1049, 1990.
- [19] Ayad R, Batoz J.L, Dhatt G. Un élément quadrangulaire de plaque basé sur une formulation mixte-hybride avec projection en cisaillement. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 4:415–440, 1995.
- [20] Pian THH, Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1984;20:1685-95.
- [21] Pian THH, Tong P. Relations between incompatible displacement model and hybrid stress model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1986;22:173-81.
- [22] Yuan K-Y, Huang Y-S, Pian THH. New strategy for assumed stresses for 4-node hybrid stress membrane element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1993;36:1747-63.
- [23] Sze KY, Ghali A. Hybrid hexahedral element for solids, plates, shells and beams by selective scaling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1993;36:1519-40.
- [24] Pian THH, Tong P. Relations between incompatible displacement model and hybrid stress model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1986;22:173-81.

Références Bibliographie

- [25] Yeo ST, Lee BC. New stress assumption for hybrid stress elements and refined four-node plane and eight-node brick elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1997;40:2933-52.
- [26] Sze K, Lo S. A 12-node hybrid stress brick element for beam/column analysis. *Engineering Computations*. 1999;16:752-66.
- [27] Sze KY, Yi S, Tay MH. An explicit hybrid stabilized eighteen-node solid element for thin shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1997;40:1839-56.
- [28] Dhondt G. The right solid element: a challenge to industry. *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Vienna, Austria; 2002.
- [29] Hoit M, Krishnamurthy K. A 14-Point reduced integration scheme for solid elements. *Computers & Structures*. 1995;54:725-30.
- [30] Sauer G. Alternative reduced integration avoiding spurious modes for 8-node quadrilateral and 20-node hexahedron finite elements. *Forschung im Ingenieurwesen*. 1999;65:131-5.
- [31] Lo SH, Ling C. Improvement on the 10-node tetrahedral element for three-dimensional problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000;189:961-74.
- [32] Venkatesh DN, Shrinivasa U. Hexahedral elements using PN functions—Applications to beams. *Computers & Structures*. 1996;60:305-13.
- [33] Bassayya K, Shrinivasa U. A 14-node brick element, PN5X1, exactly representing linear stress fields. *Computers & Structures*. 2000;74:147-65.
- [34] Venkatesh DN, Shrinivasa U. Generation of an eight node brick element using Papcovitch-Neuber functions. *Computers & Structures*. 1995;54:1077-84.
- [35] Venkatesh DN, Shrinivasa U. Plate bending with hexahedral PN elements. *Computers & Structures*. 1996;60:635-41.
- [36] Bassayya K, Bhattacharya K, Shrinivasa U. Eight-node brick, PN340, represents constant stress fields exactly. *Computers & Structures*. 2000;74:441-60.
- [37] Bassayya K, Shrinivasa U. A 14-node brick element, PN5X1, for plates and shells. *Computers & Structures*. 2000;74:167-78.
- [38] Jiao Z-P, Li C. A new formulation of eight-node hexagonal solid element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000;187:213-7.

Références Bibliographie

- [39] Taig I. Structural analysis by the matrix displacement method: English Electric Aviation Limited; 1962.
- [40] Irons B. Engineering applications of numerical integration in stiffness methods. AIAA journal. 1966;4:2035-7.
- [41] Lee N-S, Bathe K-J. Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1993;36:3553-76.
- [42] Li HG, Cen S, Cen ZZ. Hexahedral volume coordinate method (HVCN) and improvements on 3D Wilson hexahedral element. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2008;197:4531-48.
- [43] Li C-J, Chen J, Chen W-J. A 3D hexahedral spline element. Computers & Structures. 2011;89:2303-8.
- [44] Chen J, Li C-J, Chen W-J. A 3D pyramid spline element. Acta Mechanica Sinica. 2011;27:986-93.
- [45] Jim Douglas Jr. n, Santos JE, Sheen D, Ye X. Nonconforming Galerkin methods based on quadrilateral elements for second order elliptic problems. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 1999;33:747-70.
- [46] Jang G-W, Lee S, Kim YY, Sheen D. Topology optimization using non-conforming finite elements: three-dimensional case. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2005;63:859-75.
- [47] Gremaud P. Numerical Analysis of a Nonconvex Variational Problem Related to Solid-Solid Phase Transitions. SIAM Journal on Numerical Analysis. 1994;31:111-27.
- [48] Luskin M. On the computation of crystalline microstructure. Acta Numerica. 1996;5:191-257.
- [49] Ma L, Walkington N. On Algorithms for Nonconvex Optimization in the Calculus of Variations. SIAM Journal on Numerical Analysis. 1995;32:900-23.
- [50] Choi C-K, Chung GT. A gap element for three-dimensional elasto-plastic contact problems. Computers & Structures. 1996;61:1155-67.
- [51] Taylor RL. A mixed-enhanced formulation tetrahedral finite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2000;47:205-27.
- [52] Cisloiu R, Lovell M, Wang J. A stabilized mixed formulation for finite strain deformation for low-order tetrahedral solid elements. Finite elements in analysis and design. 2008;44:472-82.

Références Bibliographie

- [53] Arnold D, Brezzi F, Fortin M. A stable finite element for the stokes equations. *Calcolo*. 1984;21:337-44.
- [54] Lamichhane BP. From the Hu–Washizu formulation to the average nodal strain formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2009;198:3957-61.
- [55] Mahnken R, Caylak I, Laschet G. Two mixed finite element formulations with area bubble functions for tetrahedral elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2008;197:1147-65.
- [56] Caylak I, Mahnken R. Stabilization of mixed tetrahedral elements at large deformations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2012;90:218-42.
- [57] Dohrmann CR, Key SW, Heinstein MW, Jung J. A least-squares approach for uniform strain triangular and tetrahedral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1998;42:1181-97.
- [58] Dohrmann CR, Heinstein MW, Jung J, Key SW, Witkowski WR. Node-based uniform strain elements for three-node triangular and four-node tetrahedral meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000;47:1549-68.
- [59] Puso MA, Solberg J. A stabilized nodally integrated tetrahedral. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2006;67:841-67.
- [60] Slavković R, Ćivković M, Kojić M. Enhanced 8-node three-dimensional solid and 4-node shell elements with incompatible generalized displacements. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 1994;10:699-709.
- [61] Klinkel S, Wagner W. A geometrical non-linear brick element based on the EAS-method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1997;40:4529-45.
- [62] Wriggers P, Reese S. A note on enhanced strain methods for large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996;135:201-9.
- [63] Glaser S, Armero F. On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. *Engineering Computations*. 1997;14:759-91.
- [64] Pantuso D, Bathe K-J. On the stability of mixed finite elements in large strain analysis of incompressible solids. *Finite elements in analysis and design*. 1997;28:83-104.
- [65] Armero F. On the locking and stability of finite elements in finite deformation plane strain problems. *Computers & Structures*. 2000;75:261-90.
- [66] Reese S, Wriggers P. A stabilization technique to avoid hourglassing in finite elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000;48:79-109.

Références Bibliographie

- [67] Reese S. On a physically stabilized one point finite element formulation for three-dimensional finite elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005;194:4685-715.
- [68] Mueller-Hoeppe DS, Loehnert S, Wriggers P. A finite deformation brick element with inhomogeneous mode enhancement. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2009;78:1164-87.
- [69] Weissman S. High-accuracy low-order three-dimensional brick elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1996;39:2337-61.
- [70] Cao YP, Hu N, Fukunaga H, Lu J, Yao ZH. A highly accurate brick element based on a three-field variational principle for elasto-plastic analysis. *Finite elements in analysis and design*. 2003;39:1155-71.
- [71] Cao YP, Hu N, Lu J, Fukunaga H, Yao ZH. A 3D brick element based on Hu–Washizu variational principle for mesh distortion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2002;53:2529-48.
- [72] Armero F. Assumed strain finite element methods for conserving temporal integrations in non-linear solid dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2008;74:1795-847.
- [73] Zienkiewicz OC, Rojek J, Taylor RL, Pastor M. Triangles and tetrahedra in explicit dynamic codes for solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1998;43:565-83.
- [74] Bonet J, Burton AJ. A simple average nodal pressure tetrahedral element for incompressible and nearly incompressible dynamic explicit applications. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 1998;14:437-49.
- [75] Bonet J, Marriott H, Hassan O. An averaged nodal deformation gradient linear tetrahedral element for large strain explicit dynamic applications. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2001;17:551-61.
- [76] Bonet J, Marriott H, Hassan O. An averaged nodal deformation gradient linear tetrahedral element for large strain explicit dynamic applications. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2001;17:551-61.
- [77] Taylor RL. A mixed-enhanced formulation tetrahedral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000;47:205-27.
- [78] Andrade Pires FM, de Souza Neto EA, de la Cuesta Padilla JL. An assessment of the average nodal volume formulation for the analysis of nearly incompressible solids under finite strains. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2004;20:569-83.

Références Bibliographie

- [79] Li KP, Carden WP, Wagoner RH. Simulation of springback. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2002;44:103-22.
- [80] Areias PMA, César de Sá JMA, António CAC, Fernandes AA. Analysis of 3D problems using a new enhanced strain hexahedral element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2003;58:1637-82.
- [81] Wang J, Wagoner RH. A practical large-strain solid finite element for sheet forming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2005;63:473-501.
- [82] Oliveira MC, Alves JL, Chaparro BM, Menezes LF. Study on the influence of work-hardening modeling in springback prediction. *International Journal of Plasticity*. 2007;23:516-43.
- [83] Menezes L, Teodosiu C, Makinouchi A. 3-D solid elasto-plastic elements for simulating sheet metal forming processes by the finite element method. FE-simulations of the 3D Sheet Forming Processes in Automotive Industry, VDI Berichte. 1991:381-403.
- [84] Alves J, Menezes L. Application of tri-linear and tri-quadratic 3-D solid FE in sheet metal forming process simulation. In: Mori, K-I (Ed), *Proceedings of the Numiform'01 on Simulation of materials processing: Theory, Methods and Applications* Balkema, Rotterdam ; 2001. p. 639-44.
- [85] Oliveira M, Alves J, Menezes L. Springback evaluation using 3-D finite elements. Huh H Yang D-Y, Oh SI, Kim YH, editors, *NUMISHEET*. 2002:189-94.
- [86] Korelc J, Šolinc U, Wriggers P. An improved EAS brick element for finite deformation. *Computational mechanics*. 2010;46:641-59.
- [87] Nadler B, Rubin MB. A new 3-D finite element for nonlinear elasticity using the theory of a Cosserat point. *International Journal of Solids and Structures*. 2003;40:4585-614.
- [88] Loehnert S, Boerner EFI, Rubin MB, Wriggers P. Response of a nonlinear elastic general Cosserat brick element in simulations typically exhibiting locking and hourglassing. *Computational mechanics*. 2005;36:255-65.
- [89] Jabareen M, Sharipova L, Rubin M. Cosserat point element (CPE) for finite deformation of orthotropic elastic materials. *Computational mechanics*. 2012;49:525-
- [90] Ooi ET, Rajendran S, Yeo JH. Extension of unsymmetric finite elements US-QUAD8 and US-HEXA20 for geometric nonlinear analyses. *Engineering Computations*. 2007;24:407-31.
- [91] Buczkowski R. 21-node hexahedral isoparametric element for analysis of contact problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 1998;14:681-92.

Références Bibliographie

- [92] Buczkowski R, Gabbert U. 28-noded hexahedral isoparametric element for analysis of contact problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2004;20:147-61.
- [93] Gmür T. *Dynamique des structures: analyse modale numérique*: PPUR; 1997.
- [94] Hughes TJR. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1980;15:1413-8.
- [95] Koh BC, Kikuchi N. New improved hourglass control for bilinear and trilinear elements in anisotropic linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1987;65:1-46.
- [96] Belytschko T, Bindeman LP. Assumed strain stabilization of the eight node hexahedral element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1993;105:225-60.
- [97] Belytschko T, Ong JS-J, Wing Kam L, Kennedy JM. Hourglass control in linear and nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1984;43:251-76.
- [98] Fredriksson M, Ottosen NS. Accurate eight-node hexahedral element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2007;72:631-57.
- [99] Li K. Contribution to the finite element simulation of three-dimensional sheet metal forming: Ph.D. Dissertation, MSM, Universite de Liege, Belgique; 1995.
- [100] Li KP, Cescotto S. An 8-node brick element with mixed formulation for large deformation analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1997;141:157-204.
- [101] Liu WK, Hu YK, Belytschko T. Multiple quadrature underintegrated finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994;37:3263-
- [102] Liu WK, Guo Y, Tang S, Belytschko T. A multiple-quadrature eight-node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1998;154:69-132.
- [103] THESE DOCTORAT LABIODH BACHIR.pdf
- [104] Wang P. Solid-shell finite element for quasi-static and dynamic analysis of 3D thin structures: Application to sheet metal forming processes. Thèse de doctorat de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers ParisTech - Campus de Metz, 2017.

Références Bibliographie

- [105] Trinh VD. Formulation, développement et validation d'éléments finis de type coques volumiques sous intégrés Stabilisés utilisables pour des problèmes a cinématique et comportement non linéaires. Thèse de doctorat de l'Ecole Doctorale, ENSAM-Paris, 2009.
- [106] Flanagan D, Belytschko T. A Uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 17, p. 679-706, 1981.
- [107] Macneal H, Harder L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. Finite elements in Analysis and Design, 1:3-20, 1985.
- [108] Sabir AB, Sfindji A. Triangular and Rectangular plane elasticity finite elements. Thin-walled Structures 21,pp 225-232, 1995.
- [109] Bergan PG and Fellipa CA. "A triangular membrane element with rotational

Annexe

Annex 01 :

Nous avons extrait les résultats cas1 : 1x4 de MATLAB comme le montre l'image :

The image shows a MATLAB script in the Editor window and its execution results in the Command Window.

Script (SB6_18.m):

```

15 % p : table des coordonnées
16 % i : numéro de l'element
17 % nu : coeff de poisson ; E : module de yong
18 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
19 clc
20 [t,p,e,E,nu,g] = feval(str2func( Fdonnees ));
21
22
23 K = matK(t,p,nu,E,g);
24 F = matF(t,p);
25 K = DelDOFs(K,e);
26 F = DelDOFs(F,e);
27 U = K \ F;
28 U = AddDOFs(U,e);
29 net = size(t,1);
30 nnt = size(p,1);
31 % impression des résultats
32 disp(' Résultats de calcul structure coque ')
33
34 disp([' Nombre des elements total : ',num2str(net)])
35 disp([' Nombre des noeuds total : ',num2str(nnt)])
36
37 disp(sprintf('\n Déplacements nodales :'))
38
39 for i=1:1
40     disp(sprintf(' %d\t\t%+5.8f\t\t%+5.4f',i,full(U(29))))
41 end
42
43

```

Command Window Output:

```

New to MATLAB? See resources for Getting Started.

Résultats de calcul structure coque
Nombre des elements total : 8
Nombre des noeuds total : 20

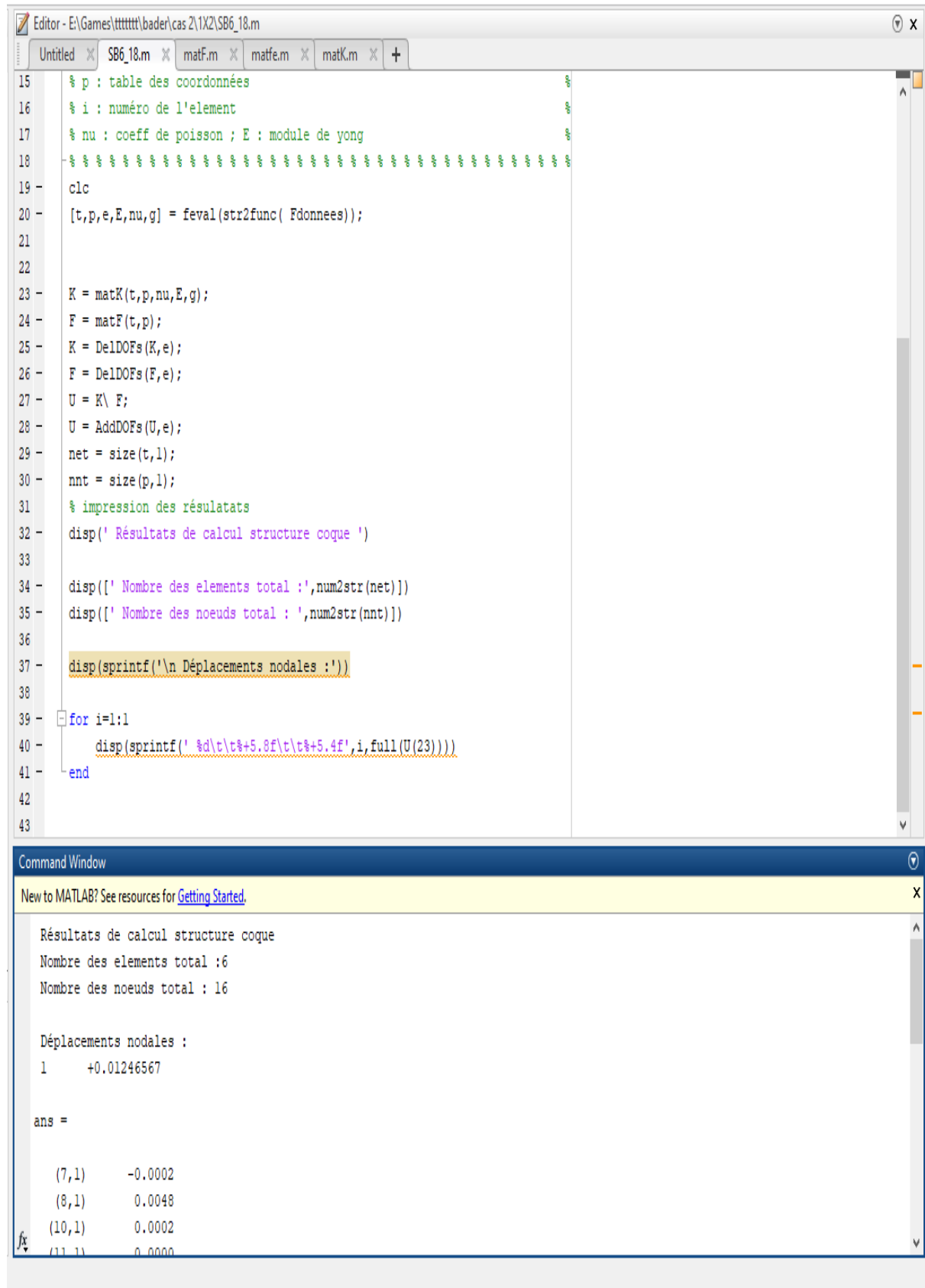
Déplacements nodales :
1      +0.01436070

ans =

(7,1)      -0.0002
(8,1)       0.0030
(10,1)      0.0002
(11,1)      0.0000

```

Nous avons extrait les résultats cas2 : 1x3



The image shows a MATLAB Editor window with a script named 'SB6_18.m' and a Command Window below it. The script performs a structural analysis of a shell structure. The Command Window displays the results of the calculations.

Script Code (SB6_18.m):

```

15 % p : table des coordonnées
16 % i : numéro de l'element
17 % nu : coeff de poisson ; E : module de yong
18 % =====
19 -
20 - clc
21 - [t,p,e,E,nu,g] = feval(str2func( Fdonnees));
22 -
23 - K = matK(t,p,nu,E,g);
24 - F = matF(t,p);
25 - K = DelDOFs(K,e);
26 - F = DelDOFs(F,e);
27 - U = K \ F;
28 - U = AddDOFs(U,e);
29 - net = size(t,1);
30 - nnt = size(p,1);
31 % impression des résultats
32 - disp(' Résultats de calcul structure coque ')
33 -
34 - disp([' Nombre des elements total : ',num2str(net)])
35 - disp([' Nombre des noeuds total : ',num2str(nnt)])
36 -
37 - disp(sprintf('\n Déplacements nodales :'))
38 -
39 - for i=1:1
40 -     disp(sprintf(' %d\t\t%+5.8f\t\t%+5.4f',i,full(U(23))))
41 - end
42 -
43 -

```

Command Window Output:

```

New to MATLAB? See resources for Getting Started.

Résultats de calcul structure coque
Nombre des elements total : 6
Nombre des noeuds total : 16

Déplacements nodales :
1      +0.01246567

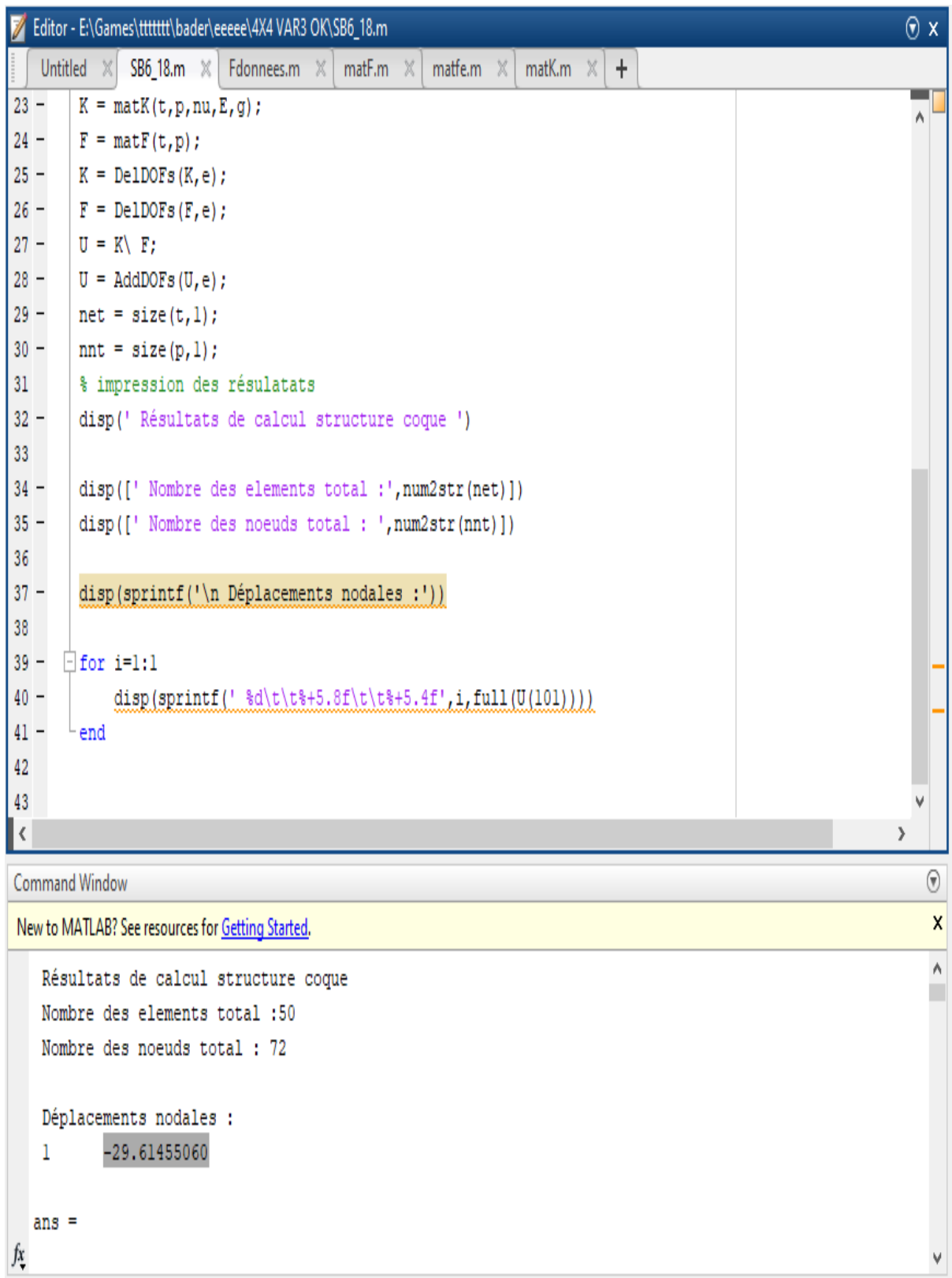
ans =

(7,1)    -0.0002
(8,1)     0.0048
(10,1)    0.0002
(11,1)    0.0000

```

Annex 02 :

Nous avons extrait les résultats 5x5 de MATLAB comme le montre l'image :



The image shows a MATLAB Editor window with a script named 'SB6_18.m' and a Command Window below it. The script calculates the results for a shell structure, including the number of elements and nodes, and displays the nodal displacements.

```
23 - K = matK(t,p,nu,E,g);
24 - F = matF(t,p);
25 - K = DelDOFs(K,e);
26 - F = DelDOFs(F,e);
27 - U = K \ F;
28 - U = AddDOFs(U,e);
29 - net = size(t,1);
30 - nnt = size(p,1);
31 % impression des résultats
32 - disp(' Résultats de calcul structure coque ')
33
34 - disp([' Nombre des elements total :',num2str(net)])
35 - disp([' Nombre des noeuds total : ',num2str(nnt)])
36
37 - disp(sprintf('\n Déplacements nodales :'))
38
39 - for i=1:1
40 -     disp(sprintf(' %d\t\t%+5.8f\t\t%+5.4f',i,full(U(101))))
41 - end
42
43
```

The Command Window displays the following output:

```
Résultats de calcul structure coque
Nombre des elements total :50
Nombre des noeuds total : 72

Déplacements nodales :
1      -29.61455060

ans =
```

Annex 03 :

Nous avons extrait les résultats 40x4x1 de MATLAB comme le montre l'image :

The image shows a MATLAB script in the Editor window and its execution results in the Command Window.

Script Code (Editor):

```

15 % p : table des coordonnées
16 % i : numéro de l'element
17 % nu : coeff de poisson ; E : module de yong
18 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
19 -
20 [t,p,e,E,nu,g] = feval(str2func( Fdonnees ));
21
22
23 - K = matK(t,p,nu,E,g);
24 - F = matF(t,p);
25 - K = DelDOFs(K,e);
26 - F = DelDOFs(F,e);
27 - U = K \ F;
28 - U = AddDOFs(U,e);
29 - net = size(t,1);
30 - nnt = size(p,1);
31 % impression des résultats
32 - disp(' Résultats de calcul structure coque ')
33
34 - disp([' Nombre des elements total : ',num2str(net)])
35 - disp([' Nombre des noeuds total : ',num2str(nnt)])
36
37 - disp(sprintf('\n Déplacements nodales :'))
38
39 - for i=1:1
40 -     disp(sprintf(' %d\t\t%+5.8f\t\t%+5.4f',i,full(U(605))))
41 - end
42
43

```

Command Window Output:

```

New to MATLAB? See resources for Getting Started.

Résultats de calcul structure coque
Nombre des elements total :320
Nombre des noeuds total : 410

Déplacements nodales :
1      -0.00040023

ans =

1.0e-03 *

(16,1)      0.0014
(17,1)      -0.0012

```

ANNEX 04 :

Nous avons extrait les résultats 6x4x1 de MATLAB comme le montre l'image :

The image shows a MATLAB Editor window with a script named 'SB6_18.m' and a Command Window below it. The script calculates structural analysis results for a shell structure. The Command Window displays the output of the script, including the number of elements and nodes, and the nodal displacements.

```

Editor - E:\Games\TTTTTT\bader\4444\6x4x1\SB6_18.m
Untitled X SB6_18.m X Fdonnees.m X matF.m X matfe.m X matK.m X +
23 - K = matK(t,p,nu,E,g);
24 - F = matF(t,p);
25 - K = DelDOFs(K,e);
26 - F = DelDOFs(F,e);
27 - U = K \ F;
28 - U = AddDOFs(U,e);
29 - net = size(t,1);
30 - nnt = size(p,1);
31 % impression des résultats
32 - disp(' Résultats de calcul structure coque ')
33
34 - disp([' Nombre des elements total : ',num2str(net)])
35 - disp([' Nombre des noeuds total : ',num2str(nnt)])
36
37 - disp(sprintf('\n Déplacements nodales :'))
38
39 - for i=1:1
40 -     disp(sprintf(' %d\t\t%+5.8f\t\t%+5.4f',i,full(U(104))))
41 - end
42
43
Command Window
New to MATLAB? See resources for Getting Started.
Résultats de calcul structure coque
Nombre des elements total :48
Nombre des noeuds total : 70

Déplacements nodales :
1      +0.04546331

ans =
fx
  
```