الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمه لخضر – الوادي –
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية

محاضرات في مقياس السلاسل الزمنية

لطلبة السنة أولى ماستر إقتصاد كمي

إعداد :
د . عطاالله عمر
أستاذ محاضر صنف أ

الموسم الجامعي 2022 / 2023

الفهرس

الفصل التمهدي :مراجعة حول معادلات الفرق:

تعتبر معادلات الفرق من الأولى حيث X_t وY_t يشيران إلى اتجاه المبيعات اليومية للمثلجات الخاصة باليوم t وصدمة المبيعات الغير متوقعة في نفس اليوم على التوالي أو التسلسل.

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

حيث ε_t تمثل الصدمة.

بعد K يوم يمكن أن يصبح حجم المبيعات كالتالي :

$$\mathrm{Y}_{t+1} = \varphi Y_t + \varepsilon_{t+1} = \varphi(\varphi \mathrm{Y}_{t-1} + \varepsilon_t) + \varepsilon_t = \varphi^2 \mathrm{Y}_{t-1} + \varphi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t.$$

$$\mathrm{Y}_{t+2} = \varphi Y_{t+1} + \varepsilon_{t+2} = \varphi(\varphi \mathrm{Y}_t + \varepsilon_{t+1}) + \varepsilon_{t+2}$$

$$= \varphi^2 \mathrm{Y}_t + \varphi\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}$$

$$= \varphi^2(\varphi \mathrm{Y}_{t-1} + \varepsilon_t) + \varphi\varepsilon_{t+1}\varepsilon_{t+2}$$

$$= \varphi^3 \mathrm{Y}_{t-1} + \varphi^2\varepsilon_t + \varphi\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}.$$

$$Y_{t+k} = \varphi^{k+1}\mathrm{Y}_{t-1} + (\varphi^k\varepsilon_t + \varphi^{k-1}\varepsilon_{t-1} + \varphi^{k-2}\varepsilon_{t-2} \dots\dots\dots + \varepsilon_{t+k}.$$

نعتبر الكمية التالية الخاصة بالمعادلة التالية: $\frac{dY_{t+k}}{d\varepsilon_t}$.

نسمي φ^k كمضاعف دينامكي ،بعبارة أخرى ،أي تغيير وحدة واحدة يوميا لصدمة المبيعات يؤثر على مبيعات المثلجات بعد k يوم بقدر φ^k.

نلاحظ أن حجم المبيعات φ^k لا يعتمد على تاريخ معين (محدد) والمضاعف الديناميكي يخبرنا مدى تأثير $d\varepsilon_t$ لمساهمة الإستجابة في المستقبل لـ dY_{t+k} ويسمى كذالك دالة الاستجابة النبضية $\frac{dY_{t+k}}{d\varepsilon_t} = \varphi^k$.

إعتمادا على القيم المختلفة للقاعدة φ للمضاعف الديناميكي φ^k نستنتج السلوك التالي للسلسة المعطاة:

- يعنى السلسلة المستقرة ،تأثير الماضي البعيد على الوضع الحالي $|\varphi| < 1$.
- يكون المعامل أكثر تأثير على المستقبل ،حيث يحدث إنفجار $|\varphi| > 1$.
- يعنى أن الماضي البعيد مهم للتنبؤ بالمستقبل $|\varphi| = 1$.

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{t+k}} = \varphi Y_{\mathrm{t-1}} + \varepsilon_{\mathrm{t}} + \varepsilon_{\mathrm{t+1}} + \varepsilon_{\mathrm{t+2}} + \cdots \dots \dots . + \varepsilon_{\mathrm{t+k}}.$$

معادلة الفرق من الدرجة p يكون شكلها كما يلى:

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{t}} = \varphi_1 Y_{\mathrm{t-1}} + \varphi_2 \mathrm{Y}_{\mathrm{t-2}} + \cdots + \varphi_{\mathrm{p}} \mathrm{Y}_{\mathrm{t-P}} + \varepsilon_{\mathrm{t}}.$$

هذه معادلة خطية بدرجة فرق p ،ويمكن كتابة هذه المعادلة على شكل شعاع Y_{t} معرف بـ $\langle \mathrm{p} \times 1 \rangle$ $Y_{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} \mathrm{y}_{\mathrm{t}} \\ \mathrm{y}_{\mathrm{t-1}} \\ \vdots \\ \mathrm{y}_{\mathrm{t-p+1}} \end{pmatrix}$.

أو عنصر في هذا الشعاع هو y_{t} أي في الفترة t وثاني عنصر هو $\mathrm{y}_{\mathrm{t-1}}$ في الفترة $\mathrm{t} - 1$ وكذالك المصفوفة F ذو الدرجة $\langle p \times p \rangle$ والتي هي:

$$F = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \cdots & \varphi_{p-1} & \varphi_p \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

على سبيل المثال $\mathrm{p} = 4$ تشير الى مصفوفة ذو درجة $\langle 4 \times 4 \rangle$

$$F = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

وكذالك إذا كان $p = 1$ فإن قيمة $F = \emptyset$.

كذالك نعرف الشعاع W_{t} ذو درجة $(p \times 1)$ كما يلي:

$$W_{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

لنعتبر معادة الفرق لشعاع بدرجة فرق أولى :

$$Y_t = FY_{t-1} + W_t$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \cdots & \varphi_{p-1} & \varphi_p \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ y_{t-3} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

هذا النظام يتكون من p ،وأول هذه المعادلة هي :

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \cdots + \varphi_p y_{t-P} + \varepsilon_t.$$

والمعادلة الثانية هي :

$$y_{t-1} = y_{t-1}$$

والمعادلة رقم p هي :

$$y_{t-p+1} = y_{t-p+1}$$

ولهذا يمكن كتابة Y_t بدلالة Y_{t-p} ومجموع حدود الخطأ العشوائي

$$Y_t = FY_{t-1} + W_t$$

وكذالك :

$$Y_{t-1} = FY_{t-2} + W_2$$

ومنه :

$$\begin{aligned} Y_t &= F(FY_{t-2} + W_{t-1}) + W_t \\ &= F^2 Y_{t-2} + FW_{t-1} + W_t \\ &= F^2(FY_{t-3} + W_{t-2}) + FW_{t-1} + W_t \\ &= F^3 Y_{t-3} + F^2 W_{t-2} + FW_{t-1} + W_t = F^p Y_{t-p} + \sum_{i=0}^{p-1} F^i W_{t-i} \end{aligned}$$

معاملة التأخير (lag operator):

ليكن Y_t سلسلة غير منتهية من الأحداث ونقسم المشاهدات إلي $\{y_0, y_1, \dots \dots . y_t\}$ ونسميها سلسلة زمنية.

بالنسبة لسلسة زمنية ،يمكننا تطبيق معامل التأخير B الذي يكتب على الصيغة التالية :

* $BY_t = Y_{t-1}$.

* $B(BY_t) = B^2Y_t = BY_{t-1} = BY_{t-2}$.

* $B^4\mathrm{Y_t} = \mathrm{Y_{t-4}}$.

* $B^KY_t = Y_{t-k}$.

* $B^{-2}Y_t = Y_{t+2} \quad (lead\ operator)$.

* $B^0Y_t = Y_t$.

* $B^iB^jY_t = B^{i+j}Y_t = Y_{t-(i+j)}$.

* $(B^i + B^j)Y_t = B^iY_t + B^jY_t = Y_{t-i} + Y_{t-j}$.

* $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = Y_t - BY_t = (1-B)Y_t$.

* $\Delta Y_t = \Delta\Delta Y_t = \Delta(\Delta Y_t) = \Delta(Y_t - Y_{t-1}) = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$

$$= Y_t - Y_{t-1} - (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

$$= Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}.$$

يمكن تطبيق معامل التأخير B على معادلات مختلفة :

$.\mathrm{B^2Y_t = B(BY_t) = Y_{t-2}}$

* $\mathrm{(a + bB)BY_t = aY_t + bB^2Y_t = aY_t + bY_{t-2}}$.

* $(1-aB)(1-bB)Y_t = (1 - \mathrm{aB} - \mathrm{bB} + \mathrm{abB^2})$

$$= \mathrm{Y_t - aBY_t - bBY_t + abB^2Y_t}$$

$$= \mathrm{Y_t} - (\mathrm{a} + b)\mathrm{Y_{t-1}} + \mathrm{abB^2Y_t}$$

$$= \mathrm{Y_t} - (\mathrm{a} + b)\mathrm{Y_{t-1}} + a\mathrm{bBY_{t-2}}$$.

حيث a و b .

إستخدام معامل التأخير B نستطيع كتابة معادلة الفرق من الدرجة الأولى :

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t \implies Y_t = \varphi B Y_t + \varepsilon_t$$

$$\implies Y_t - \varphi B Y_t = \varepsilon_t \quad .$$

$$\implies (1 - \varphi B) Y_t = \varepsilon_t$$

نقوم بضرب هذه المعادلة بالطرف التالي لتصبح كما يلي :

$$(1 + \varphi B + \varphi^2 B^2 + \cdots + \varphi^t B^t)(1 - \varphi B) Y_t = (1 + \varphi B + \varphi^2 B^2 + \cdots + \varphi^t B^t)\varepsilon_t \quad .$$

$$(1 + \varphi B + \varphi^2 B^2 + \cdots + \varphi^t B^t)(1 - \varphi B)$$

$$= (1 + \varphi B + \varphi^2 B^2 + \cdots + \varphi^t B^t) - (1 + \varphi B + \varphi^2 B^2 + \cdots + \varphi^t B^t)\varphi B$$

$$= (1 + \varphi B + \varphi^2 B^2 + \cdots + \varphi^t B^t) - (\varphi B + \varphi^3 B^3 + \cdots + \varphi^{t+1} B^{t+1})$$

$$.= 1 - \varphi^{t+1} B^{t+1}$$

ومنه :

$$(1 - \varphi^{t+1} B^{t+1}) Y_t = (1 + \varphi B + \varphi^2 B^2 + \cdots + \varphi^t B^t)\varepsilon_t$$

$$\implies Y_t = \varphi^{t+1} B^{t+1} Y_t = \varepsilon_t + \varphi B \varepsilon_t + \varphi^2 B^2 \varepsilon_t + \cdots + \varphi^t B^t \varepsilon_t$$

$$\implies Y_t - \varphi^{t+1} Y_{t-(t+1)} = \varepsilon_t + \varphi B \varepsilon_t + \varphi^2 B^2 \varepsilon_t + \cdots + \varphi^t B^t \varepsilon_t$$

من المعادلة السابقة لدينا :

$$(1 + \varphi B + \varphi^2 B^2 + \cdots + \varphi^t B^t)(1 - \varphi B) = (1 - \varphi^{t+1} B^{t+1})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(1 + \varphi B + \varphi^2 B^2 + \cdots + \varphi^t B^t)(1 - \varphi B) Y_t = (1 - \varphi^{t+1} B^{t+1}) Y_t$$

$$\Leftrightarrow$$

$$.Y_t = Y_t - \varphi^{t+1} Y_{-1}$$

إذا كان $|\varphi| < 1$ فإن : $\lim_{t \to \infty} \varphi^{t+1} Y_{-1}$ ومنه :

$$.(1 + \varphi B + \varphi^2 B^2 + \cdots + \varphi^t B^t)(1 - \varphi B) Y_t = (1 - \varphi^{t+1} B^{t+1}) \cong Y_t$$

من المعادلة السابقة .لكي نتحصل على :

$$.(1-\varphi B)^{-1}=\lim_{t\to\infty}(1+\varphi B+\varphi^2B^2+\cdots+\varphi^tB^t)$$

ولدينا خاصية

$$.(1-\varphi B)^{-1}(1-\varphi B)=1$$

$$(1+\varphi B+\varphi^2B^2+\cdots+\varphi^tB^t)(1-\varphi B)Y_t\cong Y_t$$

$$\Longrightarrow(1+\varphi B+\varphi^2B^2+\cdots+\varphi^tB^t)(1-\varphi B)^{-1}(1-\varphi B)Y_t \cong Y_t(1-\varphi B)^{-1}$$

$$.(1+\varphi B+\varphi^2B^2+\cdots+\varphi^tB^t)Y_t\cong Y_t(1-\varphi B)^{-1}$$

$$.(1+\varphi B+\varphi^2B^2+\cdots+\varphi^tB^t)=(1-\varphi B)^{-1}$$

لدينا :

$$.(1-\varphi B)Y_t=\varepsilon_t\Longrightarrow(1-\varphi B)^{-1}(1-\varphi B)Y_t=(1-\varphi B)^{-1}\varepsilon_t$$

$$.\Longrightarrow Y_t=(1-\varphi B)^{-1}\varepsilon_t=\frac{1}{1-\varphi B}\varepsilon_t$$

لتكن لدينا معادلة فرق من الدرجة p ،بإستعمال معامل التأخير تصبح المعادلة كما يلي :

$$Y_t=\varphi_1Y_{t-1}+\varphi_2Y_{t-2}+\cdots+\varphi_PY_{t-p}+\varepsilon_t.$$

$$\Leftrightarrow Y_t-\varphi_1Y_{t-1}-\varphi_2Y_{t-2}-\cdots-\varphi_PY_{t-p}=\varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow Y_t-\varphi_1BY_t-\varphi_2B^2Y_t-\cdots-\varphi_PB^pY_t=\varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow(\varphi_1B-\varphi_2B^2-\cdots-\varphi_PB^p)Y_t=\varepsilon_t$$

مثلا لتكن معادلة الفرق من الدرجة الثانية :

$$(1-\varphi_1B-\varphi_2B^2)Y_t=\varepsilon_t$$

$$\begin{aligned}(1-\varphi_1B-\varphi_2B^2)&=(1-\lambda_1B)(1-\lambda_2B)\\&=(1-\lambda_1B-\lambda_2B+\lambda_1\lambda_2B^2)\\&=[1-(\lambda_1+\lambda_2)B+\lambda_1\lambda_2B^2]\end{aligned}$$

حيث : $\lambda_1+\lambda_2=\varphi_1$ و $\lambda_1\lambda_2=\varphi_2$.

ليكن المثال التالي :

$.\varphi_1 = 0.6 \;\; ; \; \varphi_2 = -0.08 \; ; \; \lambda_1 = 0.4 \; ; \; \lambda_2 = 0.2$

$(1 - 0.6\mathrm{B} + 0.08\mathrm{B}^2) = (1 - 0.4\mathrm{B})(1 - 0.6\mathrm{B})$

$$(1 - \varphi_1\mathrm{B} - \varphi_2\mathrm{B}^2) = 0 \quad \Longrightarrow B_1 = \frac{\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 - 4\varphi_2}}{-2\varphi_2}$$

$$B_2 = \frac{\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{-2\varphi_2}$$

$$\mathrm{B}_1 = \frac{0.6 - \sqrt{(0.6)^2 - 4(0.08)}}{-2(-0.08)} = 2.5$$

$$\mathrm{B}_2 = \frac{0.6 + \sqrt{(0.6)^2 + 4(-0.08)}}{-2(-0.08)} = 2.5$$

$\lambda_1 = \frac{1}{2.5}\; ; \; 0.2 = \frac{1}{5} = \lambda_2$ لأن $\lambda_1 = \frac{1}{\mathrm{B}_1}\; ; \; 0.2 = \frac{1}{\mathrm{B}_2} = \lambda_2$.

ومنه نستخلص المبرهنة لحل كثير الحدود من الدرجة p كما يلي :

$$\left(1 - \varphi_1\mathrm{B} - \varphi_2\mathrm{B}^2 + \cdots + \varphi_p B^p\right) = (1 - \lambda_1\mathrm{B})(1 - \lambda_2\mathrm{B}) \cdots \left(1 - \lambda_\mathrm{p}\mathrm{B}\right)$$

ومنه :

$$(1 - \lambda_1\mathrm{B})(1 - \lambda_2\mathrm{B}) \cdots \left(1 - \lambda_\mathrm{p}\mathrm{B}\right)Y_t = \varepsilon_t$$

$$.\Longrightarrow Y_\mathrm{t} = (1 - \lambda_1\mathrm{B})^{-1}(1 - \lambda_2\mathrm{B})^{-2} \cdots \left(1 - \lambda_\mathrm{p}\mathrm{B}\right)^{-1}\varepsilon_\mathrm{t}$$

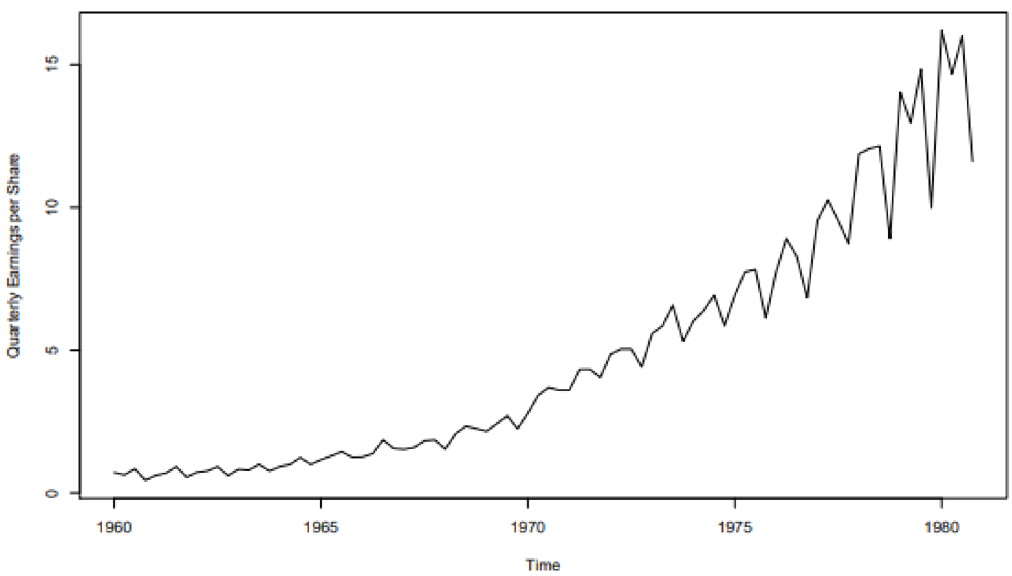
الفصل الثاني :مفاهيم عامة حول السلاسل الزمنية :

1- مفهوم السلسلة الزمنية :

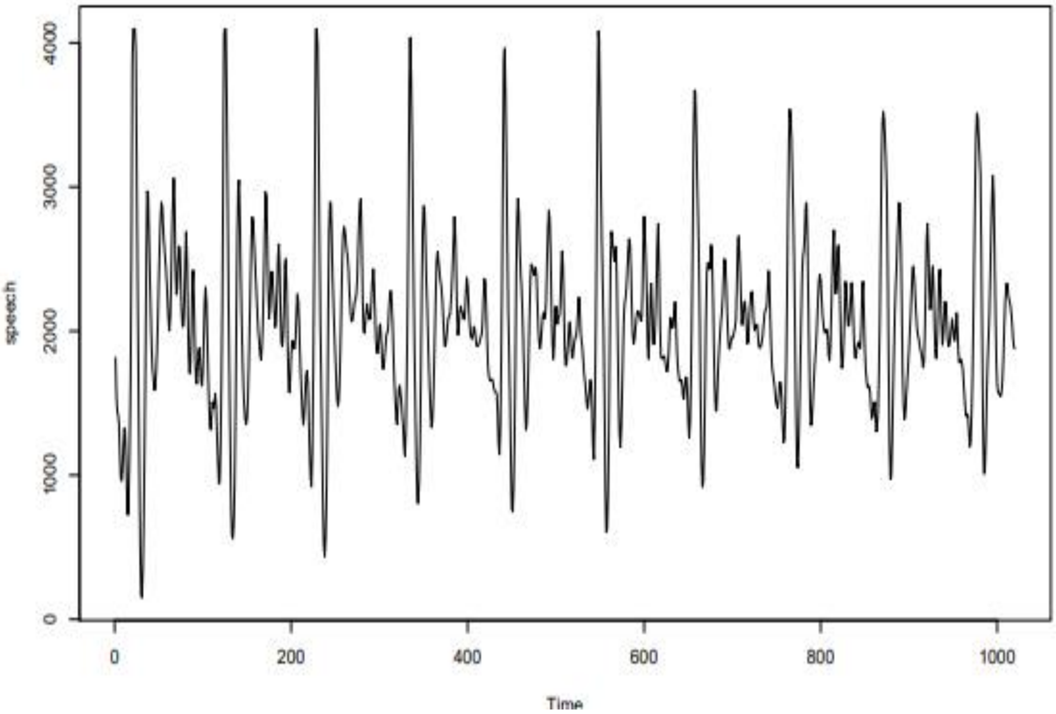
السلسلة الزمنية هي سلسلة لمجموعة المشاهدات المتتالية لمتغير (قد يكون متغير إقتصادي ،أو متغير مالي أو نوع آخر) لفترات مختلفة t لكن هذه المشاهدات يمكن أن تكون ساعة ،يوم ،أسبوع ،شهر سنة....الخ ،وهذه المشاهدات تحلل بهدف فهم الماضي ،بهدف التنبؤ بالمستقبل لمساعدة المسيرين ،والسياسات التسويقية ،وسياسات إتخاذ القرارات.

السلسة يمكن أن تكون لها مشاهدات متقطعة ... ... $t = 1,2,3$ أو مستمرة $t > 0$.

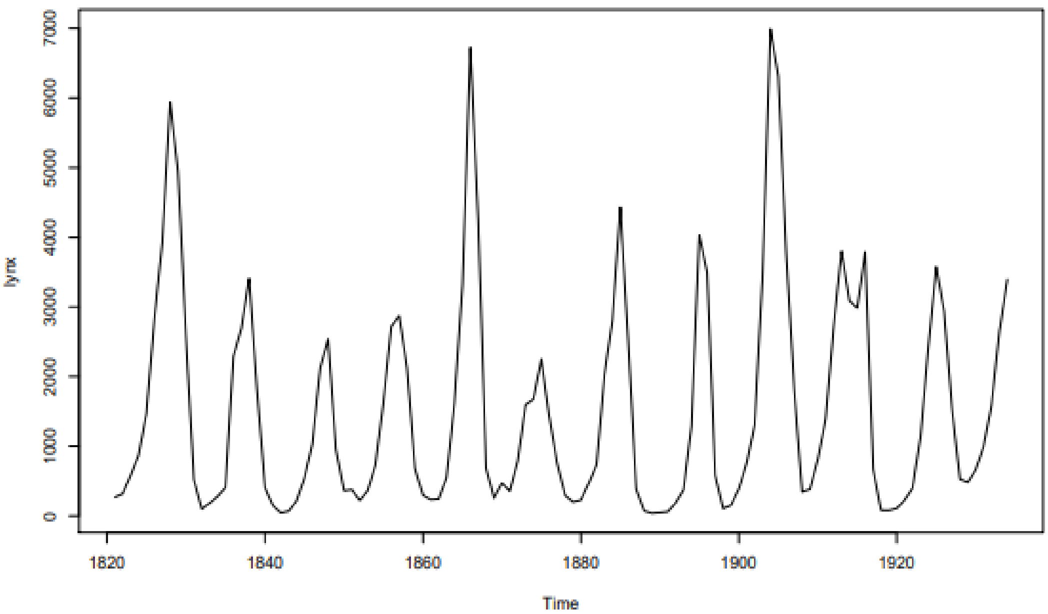
مثال رقم 1: بيانات فصلية ف1 1960 الى ف4 1980 لشركة أمريكية (إتجاة تصاعدي)



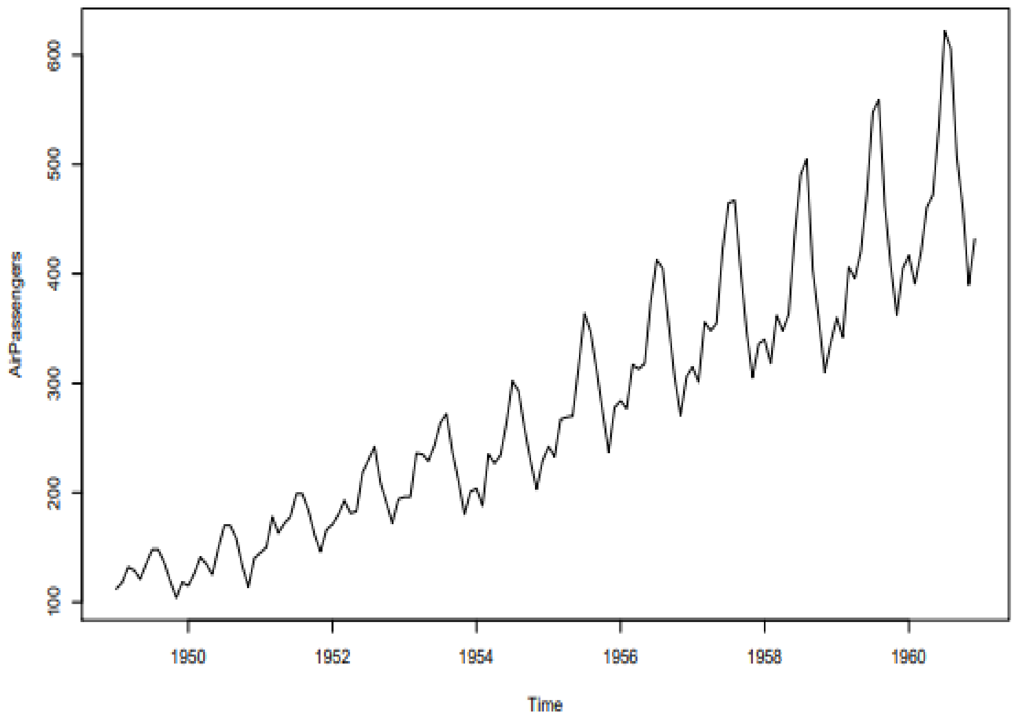
مثال رقم 2: الكلام المسجل لـ عبارة "aaa ... hhh".



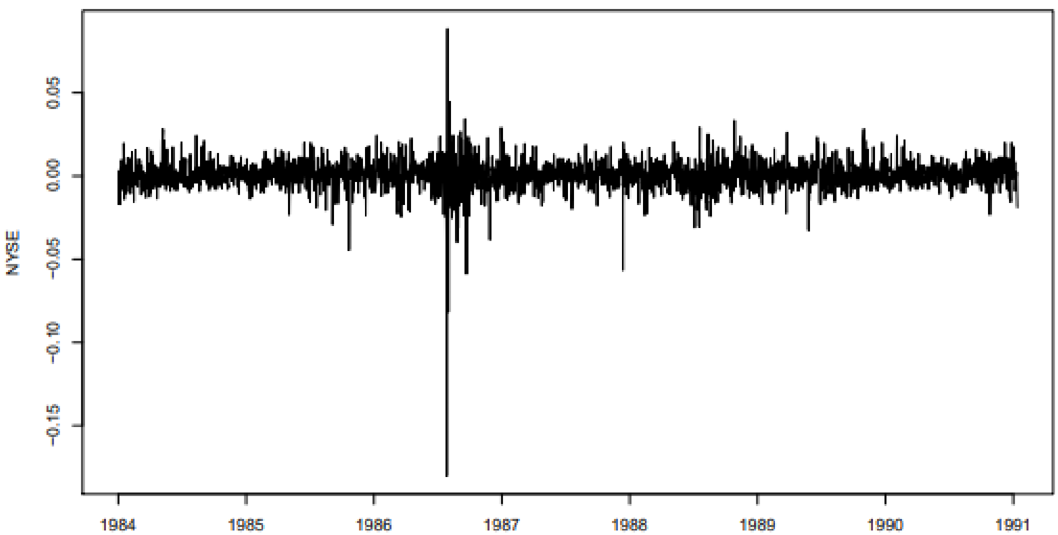
مثال رقم 3: أرقام سنوية من 1821- 1934 (دورات غير دورية حوالي 10 سنوات) .



مثال رقم 4: أرقام شهرية للخطوط الجوية للمسافرين من 1949- 1960 (موسمية مع إتجاه عام) .



مثال رقم 4: عوائد بورصة نيويورك من 1984/02/02- 1991/12/31 (متوسط العائد تقريبا صفر ، ومع ذلك ، يتغير تقلب (أو تقلب) البيانات بمرور الوقت).



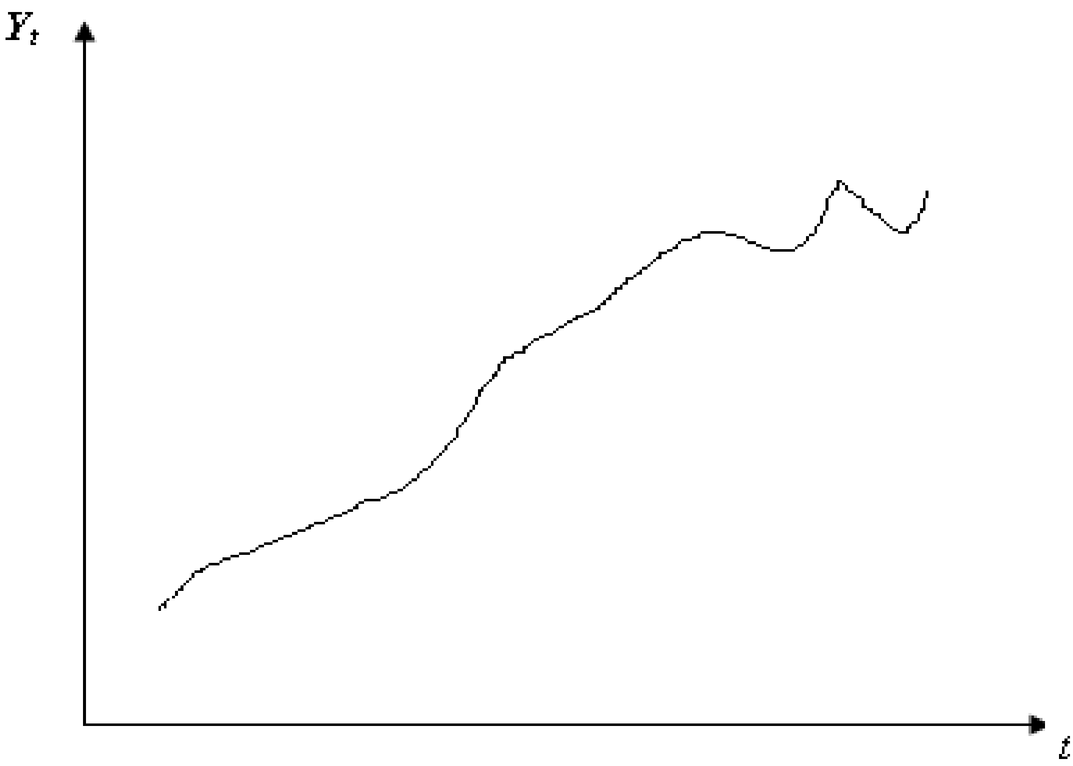
من المفيد أن نقوم برسم السلسلة الزمنية على معلم وتكون علي محور (Y) قيمة السلسلة الزمنية وعلى محور (X) الزمن وذالك لمعرفة سلوك وأهم مركبات السلسلة الزمنية.

2- مركبات السلسلة الزمنية :

في العموم السلاسل الزمنية تجزأ إلي أربع مركبات:

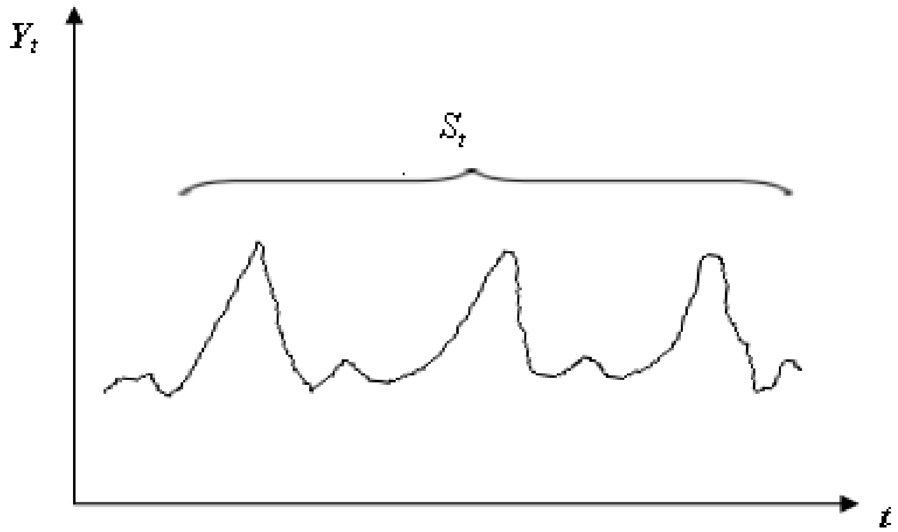
- الإتجاه العام seculer trend.
- المركبة الموسمية seasonal variation.
- المركبة الدورية cyclical variation.
- المركبة العشوائية Irreguler variation.

2-1 الاتجاه العام : هو النمو الطبيعي للظاهرة، حيث يعبر عن تطور متغير ما عبر الزمن، سواء أكان هذا التطور بميل موجب أو سالب، إلا أن هذا التطور لا يُلاحظ في الفترات القصيرة، بينما يكون واضحا في الفترات الطويلة ويرمز له بالرمز T_t ويعبر عنها رياضيا بــ $Y_t = f(t)$.

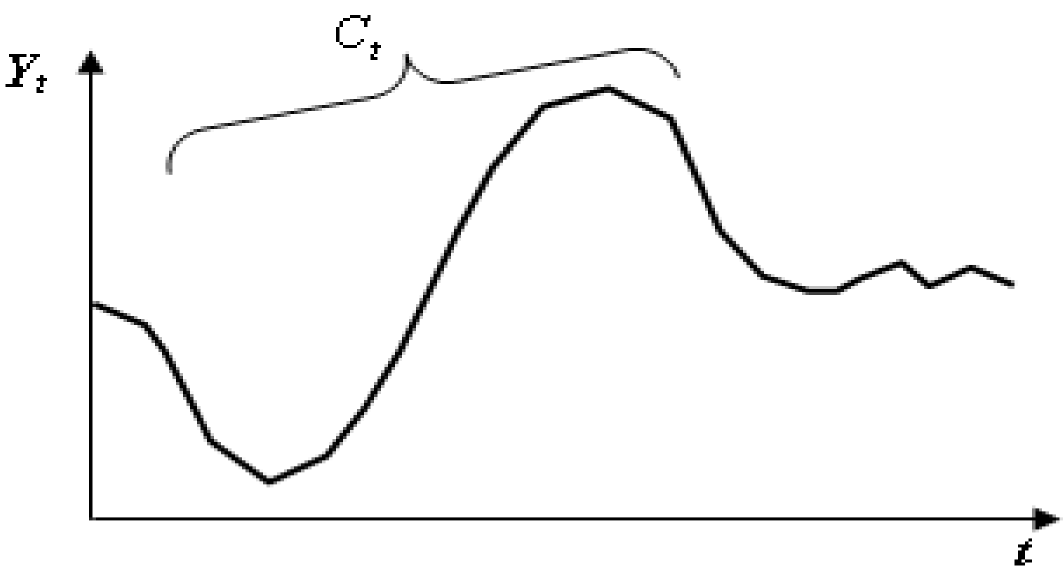


2-2 المركبة الموسمية : هي تعبر عن التغيرات والتذبذبات الموسمية أو الفصلية الناتجة عن التغيرات في الفصول بسب تأثير عوامل خارجية وهي تتم غالبا بطريقة منتظمة ،كما أنها تبين تغيير الظاهرة المدروسة في المدى القصير (خلال سنة) مثلا : الإستهلاك المنزلي

للكهرباء خلال 24 ساعة ،الإنتاج ،الإنتاج الزراعي ،إستهلاك نوعا معينا من المشروبات ،إنتاج الطاقة الكهربائية.....الخ ،ويرمز لها بـ S_t .

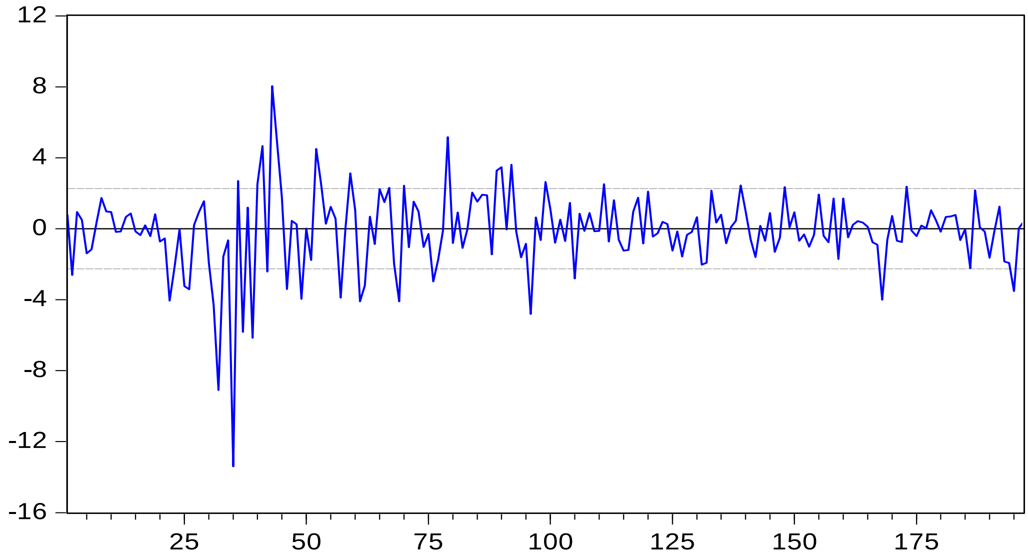


2-3 المركبة الدورية : : تبين هذه المركبة أثر تطورات النشاط الإقتصادي في المدى الطويل ،حيث تتناسب مراحل هذه المركبة مع مراحل الدورة الإقتصادية (ركود ،إنتعاش ،كساد ...الخ) يتراوح عادة بين ثلاث سنوات إلى عشر سنوات ،ويرمز لها بالرمز C_t .



4-2 المركبة العشوائية : وهي تعبر عن التغيرات التي يصعب التحكم فيها وضبطها وهي ناتجة عن عوامل غير منتظمة ،وبمعني آخر هي تلك التغيرات الشاذة التي تنجم عن ظروف

طارئة لا يمكن التنبؤ بوقوعها أو تحديد نطاق تأثيرها ،حيث تنشأ عن أسباب عارضة لم تكن في الحسبان مثل : الزلازل ،إضرابات العمال ،ونرمز لها بالرمز ε_t .



ملاحظة : تعتبر مركبتي الإتجاه العام والمركبة الموسمية الأكثر ظهورا في السلاسل المتعلقة بالدراسات الإقتصادية.

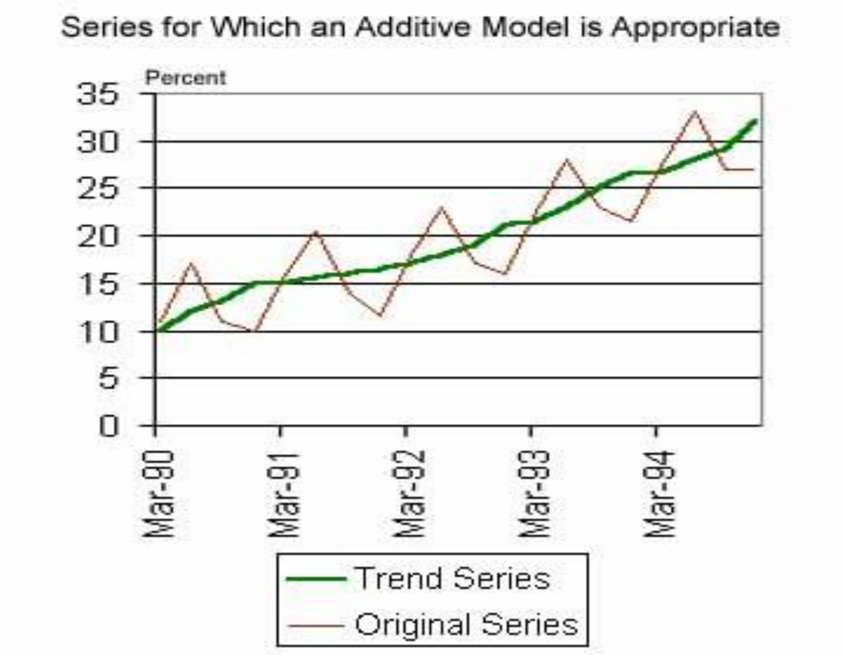
3- نماذج مركبات السلسلة الزمنية :

بغرض دراسة السلسلة الزمنية وتحليل مركباتها يجب أولا بناء نموذج يحدد الصيغة الرياضية للعلاقة بين مركبات السلسلة الزمنية ،وهناك ثلاثة أنواع :

1-3 النموذج التجميعي (The additive model):

$$Y_y = T_t + S_t + C_t + \varepsilon_t.$$

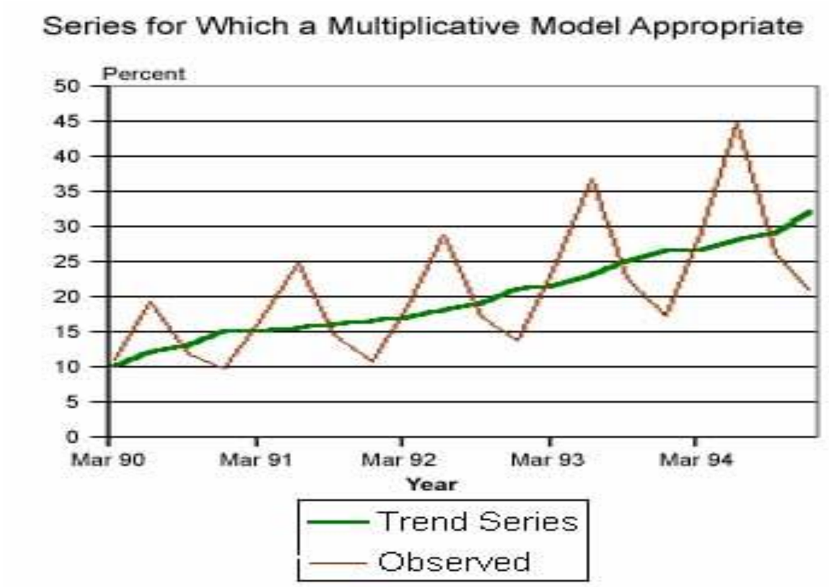
وهذا يعني أن قيمة الظاهرة Y عند الزمن t هي حاصل جمع المركبات الأربع التي تتكون منها السلسلة عند نفس الزمن ،ويكون هذا النموذج مناسبا إذا كانت التذبذبات الموسمية مستقلة عن مستوى الظاهرة مقاسا بالإتجاه العام ،ومن النادر أن تجد سلسلة زمنية فعلية تتبع هذا النموذج.



2-3 النموذخ الجدائي (The multiplicative model) :

$$\mathrm{Y}_t = T_t + S_t + C_t + \varepsilon_t.$$

يعني أن قيمة الظاهرة عند الزمن t هي حاصل ضرب المركبات الأربع التي تتكون منها السلسلة عند نفس الزمن ،ويكون هذا النموذج مناسبا إذا كانت التذبذبات الموسمية تتناسب مع مستوى السلسة مقاسا بالإتجاه ،ويعتبر أكثر النماذج المستخدمة في الإقتصاد ،لأن لوغاريتم هذا النموذج يؤدي النموذج التجميعي.



3-3 النموذج المختلط The mixed model:

وهذا يعني أن إذا كانت $\mathrm{T_t}$ و C_t مرتبطان ببعظهما ،ولكن مستقلان عن $\mathrm{S_t}$ و ε_t فإن النموذج سيكون كما يلي :

$$Y_t = T_t \times C_t + S_t + \varepsilon_t.$$

ملاحظة : القصد من تحديد مركبات السلسلة ونوع نموذج المركبات هو معرفة مدى تأثير كل منها على قيم الظاهرة المدروسة حتى يتنسي لنا عزل هذه الآثار الخارجية وتحديد القيم الحقيقية .

*** أشكال دالة الاتجاه العام :**

$$T_t = a_0 + a_1 t$$
$$T_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$
$$T_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$
$$T_t = a_0 e^{a_1 t}$$
$$T_t = \frac{1}{1 + a_0 e^{a_1 t}}$$

*** الصيغة الرياضية للمركبة الموسمية :**

$$S_t = s_0 + s_1 D_t^1 + s_2 D_t^2 + \dots + s_p D_t^p$$

p *هي الدورة الموسمية (سنوية* $p = 1$ *،شهرية* $p = 12$ *،سداسية* $p = 2$ *،فصلية* $p = 4$*،......).*

$$D_t^j = \begin{cases} 1 \text{ , periodicity } j \\ 0 \text{ , otherwise} \end{cases}$$

*** كتابة النموذج العام :**

$$Y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + s_1 D_t^1 + s_2 D_t^2 + \dots + s_p D_t^p + \varepsilon_t$$

**** النموذج المقدر :***

$$\widehat{Y_t} = \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 t + \widehat{a}_2 t^2 + \dots + \widehat{a}_n t^n + \widehat{s}_1 D_t^1 + \widehat{s}_2 D_t^2 + \dots + \widehat{s}_p D_t^p$$

يمكن التنبؤ بالقيم المستقبلية لـ Y_t من أجل $T+h$ حيث h هو أفق التنبؤ... :

$$\widehat{Y}_{T+h} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1(T+h) + \hat{a}_2(T+h)^2 + \ldots + \hat{a}_n(T+h)^n + \hat{s}_1 D^1_{T+h} + \hat{s}_2 D^2_{T+h} + \ldots + \hat{s}_p D^p_{T+h}$$

4- السيرورة العشوائية :

السلسلة الزمنية Y_t هي سلسلة المشاهدات مشار إليها بواسطة الزمن .

في كل لحظة t قيمة الكمية المدروسة Y_t تسمى متغير عشوائي .

مجموعة القيم لـ Y_t عندما t يختلف تسمى السيرورة العشوائية ويرمز لها بالرمز $\{Y_t t \in Z\}$.

السلسلة الزمنية هي إذن حقيقة أو إدراك لسلسلة عشوائية.

1-4 السيرورة العشوائية المستقرة :

يمكن التمييز بين نوعين من السيرورات من حيث الإستقرارية ،السيرورة المستقرة عند المستوى القوي والسيرورة المستقرة عند المستوى الضعيف.

1-1-4 السيرورة المستقرة عند المستوى القوي Strong Stationary :

نقول أن السيرورة Y مستقرة بصفة قوية إذا كان القانون الإحتمالي لـ $\{Y_{t1}, Y_{t2}, \ldots, Y_{tn}\}$ هو نفس القانون الإحتمالي لـ $Y_{t1+h}, Y_{t2+h}, \ldots, Y_{tn+h}$ لكل $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ و $t_{\mathrm{i}} \in \tau$ من أجل $i = 1,2, \ldots, n$ ولكل $h \in \tau$ من أجل $t_{\mathrm{i}i+h} \in \tau$ ،أيضا السيرورة العشوائية تكون مستقرة تماما إذا ظل توزيع قيمها كما هو مرور الزمن ،مما يعني أن إحتمال أن يقع Y فى مجال معين هو نفس الإحتمال كما فى أي وقت فى الماضى أو المستقبل.

2-1-4 السيرورة عند المستوى الضعيف Weak Stationary :

السيرورة Y_t حيث $t \in Z$ ،نقول عنها سيرورة مستقرة ذات مستوى ضعيف أو تباين مشترك مستقر أو درجة ثانية مستقرة إذا تحقق :

- المتوسط $\mu_t = E(Y_t) = E(Y_{t+h}) = \mu$ حيث $\forall\, t, h \in Z$.

- التباين $var(Y_t) = \sigma_Y^2 = \gamma_0 < \infty$.

- التباين المشترك $cov(Y_t, Y_{t+h}) = \gamma_{(h)} = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+h} - \mu)]$ لكل $\forall\, t, h \in Z$ حيث γ تمثل دالة التباين المشترك لـ Y_t .

- المعادلة الأولى تعنى أن المتوسط للسيرورة يكون ثابت ومستقل عبر الزمن .

- المعادلة الثانية تعنى أن التباين محدود ومستقل عن الزمن .

- المعادلة الثالثة أن التباين المشترك لا يعتمد على الزمن ،أي مستقل عن الزمن ،وهذا أن التباين المشترك يعتمد على h ويعتمد على الزمن الحالي t .

ملاحظات :

* إذا كانت Y_t مستقلة ولها نفس التوزيع الإحتمالي فإن :

$$\gamma_h = \rho_h \qquad \forall\, h \neq 0.$$

$$\gamma_h = cov(Y_t, Y_{t+h}) = 0 \quad \forall\, h \neq 0.$$

أي أن (Y_t, Y_{t+h}) مستقلان (أي لا يوجد بينهما إرتباط).

$$\gamma_0 = cov(Y_t, Y_t) = var(Y_t).$$

$$\rho_h = \frac{cov(Y_t, Y_{t+h})}{\sigma_{Y_t}\sigma_{Y_{t+h}}}.$$

إذا $h = 0$ فإن $\rho_h = 1$.

* إذا كانت Y_t تتبع التوزيع الطبيعي فإن السيرورة ذات المستوى الضعيف هي نفسها ذات المستوى القوى .

مثال رقم 5 :

إذا كانت $Y_t = \varepsilon_t$ حيث $\varepsilon_t \sim (0,1)$ من أجل $t \in Z$ ومنه :

$* \ E(Y_t) = E(\varepsilon_t) = 0.$

$* \ var(Y_t) = var(\varepsilon_t) = \sigma^2.$

$* \ \gamma_h = E\big[\big(\varepsilon_t - E(\varepsilon_t)\big)\big(\varepsilon_{t+h} - E(\varepsilon_{t+h})\big)\big]$

$$= (\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0 \quad \forall\, h \neq 0.$$

من أجل $h = 0$ فإن $\rho_h = 1$.

من خلال هذا المثال نلاحظ أن الشروط الثلاثة عن الزمن ،إذن السيرورة ذات مستوى الضعيف .

مثال رقم 6 :

$$\mathrm{Y_t = t + \varepsilon_t}.$$

حيث $\varepsilon_t \xrightarrow{\text{iid}} (0,1)$.

$$E(Y_t) = E(t + \varepsilon_t) = E(t) + E(\varepsilon_t) = t.$$

والذي هو مرتبط بالزمن وبالتالي السيرورة ليست مستقرة.

$$var(Y_t) = E(t + \varepsilon_t - t) = E(\varepsilon_t) = \sigma^2.$$

$$\gamma_h = E[(t + \varepsilon_t - t)(t + h + \varepsilon_{t+h} - t - h)] = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}) = 0 \ \ \forall\, h \neq 0.$$

3-1-4 سيروة التشويش الأبيض White noise process :

سيرورة التشويش الأبيض ε_t مستقرة ،أي ذات مستوى ضعيف إذا تحقق مايلى:

$* \ E(\varepsilon_t) = 0 \quad \forall \ t \in Z$ (غالبا ما يكون المتوسط مساويا للصفر)

$* \ var(\varepsilon_t) = 0 \ \ \forall\, t \in Z$ التباين متجانس

$* \ \ cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0 \ \ \forall\, t, h \ \in Z$ غياب الإرتباط

التشويش الأبيض إذن هو سيرورة عشوائية ذو متوسط معدوم ،وتباين ثابت ،ولا يوجد إرتباط والذي يشار إليه كما يلى :

$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

ملاحظات :

* إذا كان التشويش الأبيض ε_t يتبع التوزيع الطبيعي نقول أن التشويش الأبيض ذات مستوى قوي (ذو متوسط معدوم وتباين σ^2) ،أون نقول عنها سيرورة مستقلة ومتماثلة التوزيع (iid) . $\varepsilon_t \overset{iid}{\rightarrow} (0, \sigma_\varepsilon^2)$

* إذا كان X وY متغيران عشوائيان غير مرتبطان فإن التباين المشترك يساوي الصفر.

* إذا كان X وY متغيران عشوائيان مستقلان فإن $P_{X,Y}(x,y) = P_X(X)P_Y(y)$

2-4 دوال المتوسط والتباين :

تعريف : دالة المتوسط لسلسلة زمنية Y_t يرمز له بالرمز $\mu_t = E(Y_t)$.

الدالة μ_t تحدد أو تعرف بخاصية الدرجة الأولى للسلاسل الزمنية .

تعريف : دالة التباين لسلسلة زمنية Y_t والذي يرمز لها بالرمز:

$var(Y_t) = \gamma_0 = E(Y_t - \mu_t)^2$ ومنه فإن :

$\gamma_0 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2}{n}$ تمثل التباين و $\bar{Y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t}{n}$ تمثل المتوسط.

3-4 دوال التباين المشترك (التغاير) والإرتباط الذاتي :

تعريف : دالة التباين المشترك لسلسلة زمنية Y_t والذي يرمز لها بالرمز:

$$\gamma_Y(t,s) = \mathrm{cov}(Y_t, Y_s) = E(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s).$$

لكل من الفترتين من الزمن t وs حيث أن $s = t - h$ أو $s = t + h$ ،الدالة الزمنية $\gamma_h(t,s)$ تحدد أو تعرف بخاصية الدرجة الثانية لسلسلة زمنية .

تعريف : دالة الإرتباط لسلسلة زمنية Y_t والذي يرمز لها بالرمز:

$$\rho_{Y}(t,s)=\frac{\text{cov}(Y_t,Y_s)}{\sqrt{\text{var}(Y_t)var(Y_s)}}=\frac{\gamma_{Y}(t,s)}{\sqrt{\gamma_{Y_t}(0)\gamma_{Y_s}(0)}}.$$

ملاحظات :

* إذا كانت $h=t-s$ المعلمة $\gamma_{Y}(\text{h})$ تسمى التباين المشترك ذو درجة h لـ Y_t وكذالك $\gamma_{Y}(0)=\text{var}(Y_t)=\gamma_{Y}(t,t)$ ومنه $\gamma_{Y}(t,s)=\gamma_{Y}(h)$ حيث $h=t-s$.

* الفرق بين لحظتين من الزمن نسميهما درجة التأخير lag .

* $\forall\ h\ \gamma_Y(h)=cov(Y_t,Y_{t+h})=cov(Y_t,Y_{t+h})=\gamma_Y(-h)$

* $\gamma_Y(h)=\gamma_Y(-h)$ دالة الإرتباط الذاتي من أجل كل h .

* إذا كانت a_i ثوابت، X_i و Y_i متغيرات عشوائية حيث $i=1,2\ldots n$ و $j=1,2\ldots m$ فإن:

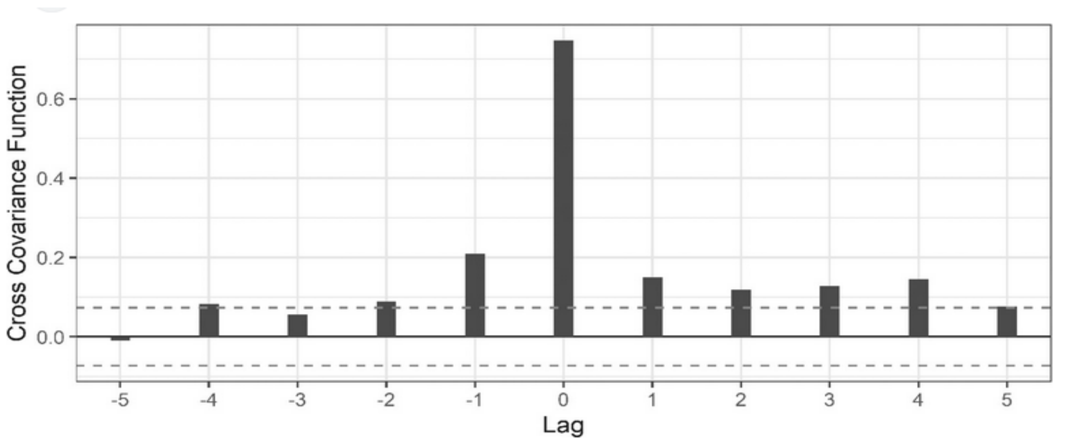
- $cov(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2var(X_i)+2\sum\sum_{i<j}a_ia_jcov(X_i,X_j).$

- $cov\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}cov(X_i,Y_j).$

* $\rho_{(0)}$ و $-1\le\rho_{(h)}\le 1$ من أجل كل h .

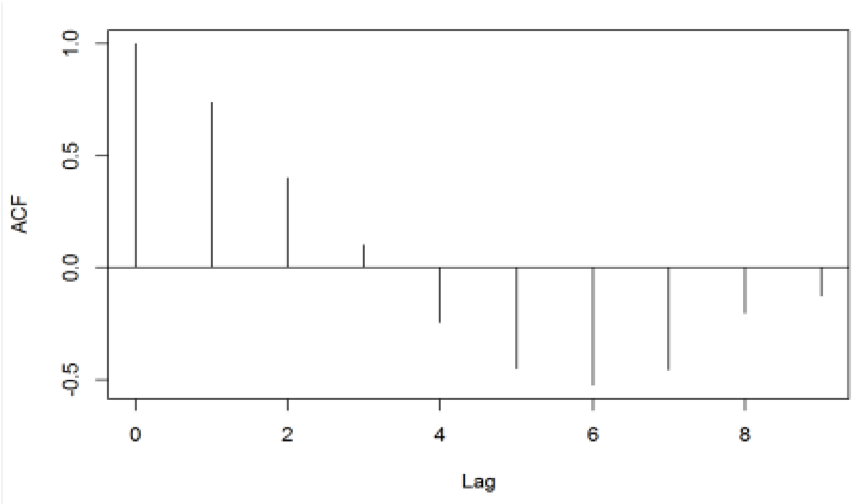
4-4 التمثيل البياني لدالة التباين المشترك :

الشكل يوضح الرسم البياني لدالة التباين المشترك :



5-4 دالة الإرتباط الذاتي :

الشكل يوضح الرسم البياني لدالة الإرتباط الذاتي :



$$\rho_Y(t,s)=\frac{\operatorname{cov}(Y_t,Y_s)}{\sqrt{\operatorname{var}(Y_t)var(Y_s)}}=\frac{\gamma_Y(t,s)}{\sqrt{\gamma_{Y_t}(0)\gamma_{Y_s}(0)}}$$

$$=\frac{\sum_{t=1}^{n-h}(Y_t-\overline{Y})(Y_{t+h}-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n-h}(Y_t-\overline{Y})}\sqrt{\sum_{t=1}^{n-h}(Y_{t+h}-\overline{Y})}}.$$

يصعب التعامل هذه الصيغة لأنه يتطلب إعادة حساب ρ_h لكل المتوسطات والتباينات ،ولهذا السبب فإن يفضل دالة الإرتباط اذاتي للعينة .

6-4 دالة الإرتباط الذاتي للعينة:

* إذا كانت درجة التأخير h لعينة التباين التباين المشترك تعرف كما يلي :

$$\hat{\gamma}_Y(h)=\frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}(Y_t-\overline{Y})(Y_{t-h}-\overline{Y})$$

أو

$$\hat{\gamma}_Y(h)=\frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}(Y_t-\overline{Y})(Y_{t+h}-\overline{Y})$$

وكذالك حيث $\overline{Y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t}{n}$ تسمى متوسط العينة.

* إذا كانت درجة التأخير h لعينة دالة الإرتباط الذاتي فإن :

$$-1 \leq \hat{\rho}_Y(h) = \frac{\hat{\gamma}_Y(h)}{\hat{\gamma}_Y(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{n-h}(Y_t - \overline{Y})(Y_{t+h} - \overline{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2} \leq 1.$$

مثال رقم 7:

أوجد $\widehat{\rho_h}$ حيث $h = 1,2,3$.

t	Z_t	Z_{t+1}	Z_{t+2}	Z_{t+3}	$\cdots;$	Z_{t-1}	Z_{t-2}
1	13	8	15	4			
2	8	15	4	4		13	
3	15	4	4	12		8	13
4	4	4	12	11		15	8
5	4	12	11	7		4	15
6	12	11	7	14		4	4
7	11	7	14	12		12	4
8	7	14	12			11	12
9	14	12				7	11
10	12					14	7

الحل :

متوسط العينة لهذه العشر قيم هو : $\bar{Z} = 10$

$$\hat{\rho}_1 = \frac{(13-10)(8-10) + (8-10)(15-10) + \cdots + (7-10)(14-10) + (14-10)(12-10)}{(13-10)^2 + (8-10)^2 + \cdots + (14-10)^2 + (12-10)^2}$$
$$= \frac{-27}{144} = -.188$$

$$\hat{\rho}_2 = \frac{(13-10)(15-10) + (8-10)(4-10) + \cdots + (11-10)(14-10) + (7-10)(12-10)}{144}$$
$$= \frac{-29}{144} = -.201$$

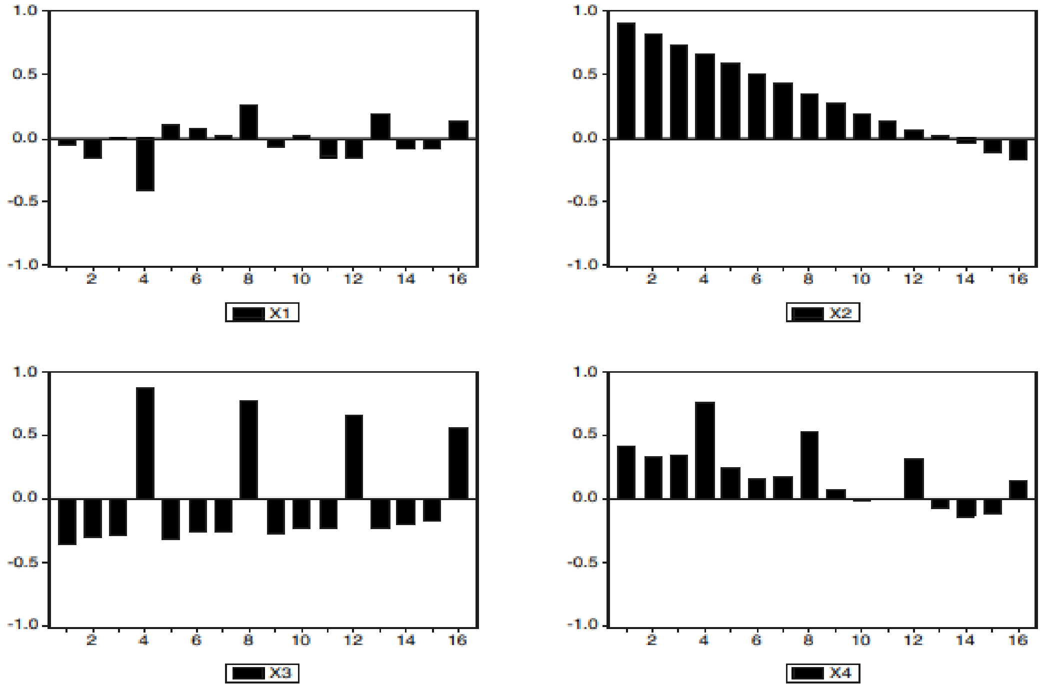
$$\hat{\rho}_3 = \frac{(13-10)(4-10) + (8-10)(4-10) + \cdots + (12-10)(14-10) + (11-10)(12-10)}{144}$$
$$= \frac{26}{144} = .181$$

ملاحظة :

نقول عن سلسلة أنها مستقرة ،إذا كان معامل دالة الإرتباط الذاتي يساوي الصفر أو قريب منه.

لتكن دوال الإرتباط الذاي لكل سلسلة ممثلة في الأشكال التالية :

رسم بياني لأربع سلاسل



* الرسم البياني رقم 01 لقيم دالة الارتباط الذاتي لـ x_1 ،كلها قيم قريبة من الصفر وهذه هي خصائص متغير عشوائي من النوع التشويش الأبيض (white noise) .

* الرسم البياني رقم 02 لقيم دالة الارتباط الذاتي لـ x_2 تتميز بقيم كبيرة مع تناقص لهذه القيم ،وهذا ما تتميز به سلسلة زمنية لهل اتجاه عام .

* الرسم البياني رقم 03 لقيم دالة الارتباط الذاتي لـ x_3 ،تكشف عن وجود مركبة موسمية .

* الرسم البياني رقم 01 لقيم دالة الارتباط الذاتي لـ x_4 ،هي مزيج للدوال الثلاث السابقة .

7-4 دالة الإرتباط الذاتي الجزئي :

تعريف : يعرف معامل الإرتباط الذاتي الجزئي للسيرورة الساكنة $\{Y_t\}$ عند الفجوة الزمنية h ،بأنه يقيس العلاقة بين متغيرين عشوائيين Y_t و Y_{t+h} (في مختلف الفترات h) بعد حذه تأثير المتغيرات التي تقع بينهما وهي $Y_{t+1}\ldots\ldots Y_{t+h-1}$.

نرمز عادة لمعامل الإرتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة h بالرمز $\varphi_{k,k}$ ويستعمل فى تحديد سيرورة $AR(\mathrm{p})$ (نتكلم عنها لاحقا) .وبالتالي دالة الإرتباط الذاتي تمثل تسلسل للإرتباطات الشرطية كما يلي :

$$\varphi_{k,k} = corr(Y_t, Y_{t+h}|Y_{t+1} \dots Y_{t+h-1}) \quad ; h = 1,2, \dots \dots$$

$$= \frac{cov[(Y_t|Y_{t+1} \dots Y_{t+h-1})(Y_{t+h}|Y_{t+1} \dots Y_{t+h-1})]}{\sqrt{var(Y_t|Y_{t+1} \dots Y_{t+h-1})}\sqrt{var(Y_{t+h}|Y_{t+1} \dots Y_{t+h-1})}}$$

$$= \frac{cov[(Y_t - \hat{Y}_t)(Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h})]}{\sqrt{var(Y_t - \hat{Y}_t)}\sqrt{var(Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h})}}$$

حيث

$$\hat{Y}_t = \alpha_1 Y_{t+1} + \alpha_2 Y_{t+2} + \dots + \alpha_{n-2} Y_{t+h-1}.$$

$$\hat{Y}_{t+h} = \beta_1 Y_{t+1} + \beta_2 Y_{t+2} + \dots + \beta_{n-1} Y_{t+h-1}.$$

حيث $\alpha_i, \beta_i (1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{h} - 1)$ ،يمثلان معاملات متوسط مربعات الإنحدار الخطي المتحصل عليه من تدنئة $E\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2$ و $E\left(Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h}\right)^2$.

8-4 تقدير دالة الإرتباط الذاتي الجزئي :

هناك أساليب عديدة لتقدير دالة الإرتباط الذاتي الجزئي ،ويعتبر أسلوب يوول- ولكر (the yule-walka) من أهم الأساليب هذه التقنيات التي تساعد في الحصول على معاملات الإرتباط الجزئية لدرجات التأخير h ... 1,2, كما يلي :

* ضبط نموذج الإنحدار حيث Y_t متغير تابع وسيروة مستقرة وهذه بالنسبة لـ h متغيرات مستقلة $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots Y_{t-h}$. ومنه :

$$Y_t = \varphi_{h,1} Y_{t-1} + \varphi_{h,2} Y_{t-2} + \dots + \varphi_{h,h} Y_{t-h} + \varepsilon_t.$$

حيث $\varphi_{h,h}$ تشير إلى أن h يمثل عدد معاملات الإنحدار و ε_t الحد العشوائي مع متوسط مساوي للصفر ،وغير مرتبط بـ Y_{t-h} لكل $h \neq 0$.

* ضرب هذه المعادلة بـ Y_{t-1} ،ثم ندخل عليها التوقع ،ثم نقوم بقسمتها على التباين لـ Y_t ،نقوم بنفس العملية مع $Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots Y_{t-h}$ للحصول على مجموعة من معادلات يوول- ولكر .

- معادلات يوول - ولكر هي تقنية التي يمكن أن تساعد فى تقدير معاملات نماذج الإنحدار $AR(h)$ التي سوف نتطرق إليها لاحقا .

$$Y_t = \sum_{i=1}^{h} \varphi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t.$$

ومنه يمكن الإعتماد على نظام يوول – ولكر لتحديد معاملات دالة الإرتباط الذاتي $\varphi_{h,h}$ للفجوة الزمنية h بأنه معامل Y_{t-h} لنموذج الإنحدار الذاتي :

$Y_t = \varphi_{h,1} Y_{t-1} + \varphi_{h,2} Y_{t-2} + \cdots + \varphi_{h,h} Y_{t-h} + \varepsilon_t.$ حيث $h = 1,2, \dots \dots$.

ومن ثم تصبح دالة التباين المشترك الذاتي لهذا النموذج هى :

$$\gamma_Y(i) = cov(Y_{t-i}, Y_t) = E(Y_{t-i} - Y_t).$$

$$\gamma_Y(i) = E\left[Y_{t-i}\left(\varphi_{h,1} Y_{t-1} + \varphi_{h,2} Y_{t-2} + \cdots + \varphi_{h,h} Y_{t-h} + \varepsilon_t\right)\right]; i = 1,2 \dots h$$

بقسمة $\gamma_Y(i)$ على التباين $\gamma_Y(0)$ نصل إلى دالة الإرتباط على الصورة :

$$\rho_{(1)} = \varphi_{h,1}\rho_{(i-1)} + \varphi_{h,2}\rho_{(i-2)} + \cdots + \varphi_{h,h}\rho_{(i-h)} \;\; ; i = 1,2, \dots h.$$

ويعرف هذا النظام من المعادلات بنظام يوول – ولكر ويتكون من h معادلة خطية فى المجاهيل $\varphi_{h,1}, \varphi_{h,2}, \dots, \varphi_{h,h}$ ولتوضيح ذالك نكتب نظام المعادلات السابقة على الشكل التفصيلي :

$$\rho_{(1)} = \varphi_{h,1}\rho_{(0)} + \varphi_{h,2}\rho_{(1)} + \cdots + \varphi_{h,h}\rho_{(h-1)}$$

$$\rho_{(2)} = \varphi_{h,1}\rho_{(1)} + \varphi_{h,2}\rho_{(0)} + \cdots + \varphi_{h,h}\rho_{(h-2)}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\rho_{(h)} = \varphi_{h,1}\rho_{(h-1)} + \varphi_{h,2}\rho_{(h-2)} + \cdots + \varphi_{h,h}\rho_{(0)}$$

ومنه يمكن كتابة نظام يوول – ولكر على شكل مصفوفات كما يلى : $AX = b$.

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{(1)} & \rho_{(2)} & \cdots & \rho_{(h-1)} \\ \rho_{(1)} & 1 & \rho_{(2)} & \cdots & \rho_{(h-2)} \\ \rho_{(2)} & \rho_{(1)} & 1 & \cdots & \rho_{(h-3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{(h-1)} & \rho_{(h-2)} & \cdots & \rho_{(1)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{h,1} \\ \varphi_{h,2} \\ \varphi_{h,3} \\ \vdots \\ \varphi_{h,h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{(1)} \\ \rho_{(2)} \\ \rho_{(3)} \\ \vdots \\ \rho_{(h)} \end{bmatrix}$$

X هو شعاع المتغيرات $\left(\varphi_{h,1}, \varphi_{h,2}, \cdots \varphi_{h,h}\right)^T$ و b هو عمود شعاع $(\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_h)^T$.

ويمكن حل هذا النظام من المصفوفات $AX = b$ بإستعمال قاعدة كرامر ويمكن حل هذا النظام لايجاد $\varphi_{h,h}$ بدلالة ρ_h كما يلى :

$$\varphi_{h,h} = \frac{\det(A_h)}{\det(A)} \,; h = 1,2,3 \cdots$$

حيث $\det(A)$ يمثل المصفوفة A و $\det(A_h)$ تمثل محدد المصفوفة بعد إحلال العمود الأخير بالمتجه ρ_h أي أن :

$$\det(A_h) = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{(1)} & \rho_{(2)} & \cdots & \rho_{(1)} \\ \rho_{(1)} & 1 & \rho_{(2)} & \cdots & \rho_{(2)} \\ \rho_{(2)} & \rho_{(1)} & 1 & \cdots & \rho_{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{(h-1)} & \rho_{(h-2)} & \cdots & \cdots & \rho_{(h)} \end{vmatrix}$$

حل نظام يوول – ولكر للمعادلات يمثل العلاقة بين دالة الإرتباط الذاتى الجزئي $\varphi_{h,h}$ ودالة الإرتباط ρ_h ومن يمكن إستغلال هذه العلاقة لتقدير دالة الإرتباط الذاتى الجزئي ،والأمثلة التالية كيفية تقدير دالة الإرتباط الذاتى الجزئي بشكل مباشر.

مثال رقم 8:

إستخدام نظام يوول – ولكر فى التعبير عن $\varphi_{1,1}$ بدلالة ρ_1 .

الحل :

بوضع $h = 1$ في نظام يوول – ولكر نحصل على مايلي :

$$Y_t = \varphi_{1,1} Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$\rho_0 = 1 \ ; \rho_1 = \varphi_{1,1} \Rightarrow \quad \varphi_{1,1} = \rho_1.$

مثال رقم 9:

إستخدام نظام يوول – ولكر فى التعبير عن $\varphi_{2,2}$ بدلالة ρ_2, ρ_1 بشكل مباشر .

الحل :

بوضع $h = 2$ حيث $Y_t = \varphi_{2,1}Y_{t-1} + \varphi_{2,2}Y_{t-2} + \varepsilon_t$.

$$\rho_1 = \varphi_{2,1}\rho_0 + \varphi_{2,2}\rho_1$$

$$\rho_2 = \varphi_{2,1}\rho_1 + \varphi_{2,2}\rho_0$$

وبالتالي فإن :

$$det\left|A_2\right| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}$$

$$det\left|A\right| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}$$

ومنه :

$$\varphi_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

مثال رقم 10:

إستخدام نظام يوول – ولكر فى التعبير عن $\varphi_{3,3}$ بدلالة $\rho_3, \rho_{2,}\rho_1$ بشكل مباشر . **الحل :**

بوضع $h = 3$ حيث $Y_t = \varphi_{3,1}Y_{t-1} + \varphi_{3,2}Y_{t-2} + \varphi_{3,3}Y_{t-3}\varepsilon_t$.

$$\rho_1 = \varphi_{3,1}\rho_0 + \varphi_{3,2}\rho_1 + \varphi_{3,3}\rho_2$$

$$\rho_2 = \varphi_{3,1}\rho_1 + \varphi_{3,2}\rho_0 + \varphi_{3,3}\rho_1$$

$\rho_3 = \varphi_{3,1}\rho_2 + \varphi_{3,2}\rho_1 + \varphi_{3,3}\rho_0$

$$det\left|A_3\right| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}$$

$$det\left|A\right| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}$$

ومنه :

$$\varphi_{3,3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_3(1-\rho_1^2) + \rho_1\rho_2(\rho_2 - 2) + \rho_1^3}{1 - 2\rho_1^2 + 2\rho_1^2 - \rho_2^2}$$

ومنه لما $h = h$ فإن حل نظام يوول – ولكر لهذه المعادلات يكون كمايلى :

$$det\left|A_h\right| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{(1)} & \rho_2 & \cdots \rho_{h-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_{(2)} & \cdots \rho_{h-3} & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_{(1)} & 1 & \cdots & \rho_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdots & \cdots \rho_1 & \rho_h \end{vmatrix}.$$

$$det\left|A_h\right| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{(1)} & \rho_2 & \cdots \rho_{h-2} & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_{(2)} & \cdots \rho_{h-3} & \rho_{h-2} \\ \rho_2 & \rho_{(1)} & 1 & \cdots & \rho_{h-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \rho_{h-3} & \cdots \rho_1 & 1 \end{vmatrix}$$

ومنه :

$$\varphi_{h,h} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_{(1)} & \rho_2 & \cdots \rho_{h-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_{(2)} & \cdots \rho_{h-3} & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_{(1)} & 1 & \cdots & \rho_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdots & \cdots \rho_1 & \rho_h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_{(1)} & \rho_2 & \cdots \rho_{h-2} & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_{(2)} & \cdots \rho_{h-3} & \rho_{h-2} \\ \rho_2 & \rho_{(1)} & 1 & \cdots & \rho_{h-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \rho_{h-3} & \cdots \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}.$$

مثال رقم 11:

$\rho_3 = 0.2, \rho_2 = 0.5, \rho_1 = 0.7$ أوجد معادلات دالة الارتباط الذاتي الجزئي.

الحل :

$\varphi_{1,1} = \rho_1 = 0.7.$

$$\varphi_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 0.5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{vmatrix}} = 0.0196.$$

$$\varphi_{3,3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0.7 & 0.5 \\ 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0.5 & 0.7 & 1 \end{vmatrix}} = -0.392.$$

ملاحظات :

* دالة الإرتباط الذاتي الجزئى $\varphi_{h,h}$ حيث $1 \le \varphi_{h,h} \le 1-$; $\forall\, h > 0$.

* إذا كانت ε_t تمثل سيرورة التشويش الأبيض فإن دالة الإرتباط الذاتى الجزئي $\varphi_{h,h} = 0$ لكل $h \neq 0$ و $\varphi_{0,0} = \rho_0 = 1$.

* يساعد فى تحديد درجة السيرورة $AR(p)$ (نتكلم عنها لاحقا) بمعنى أن $\varphi_{h,h} = 0$ $h >$ p أي أن الرسم الخاص بدلالة الإرتباط الذاتى الجزئي يقترب من الصفر بعد الدرجة p.

4-9 تحليل دالة الإرتباط الذاتي :

عند دراسة دالة الإرتباط الذاتى لسلسلة زمنية $\mathrm{Y_t}$ ،فإن السؤال الذي يطرح هوتحديد قيم ρ_{h} التى تكون معنويا تختلف عن الصفر .

في الحقيقة ،إذا كان على سبيل عنصر من ρ_{h} يختلف معنويا عن الصفر وبالتالي فإن السلسلة الزمنية بدون داكرة ،وهي يالتالي لا تتأثر لا بإتجاه عام ولا بموسمية ،كذالك سلسلة زمنية شهرية تظهر قيمة عالية أي أنها تقع خارج مجال الثقة من أجل ρ_{12} (الإرتباط بين Y_{t} و$Y_{\mathrm{t}-12}$) ،السلسلة الزمنية قيد الدراسة هي بالتأكيد متأثر بتغيرات أو تذبذبات موسمية .

إختبار الفرضيات من أجل المعامل ρ_{h} يكون كما يلى :

$$H_0 : \rho_{(\mathrm{h})} = 0$$

$$H_1 : \rho_{(\mathrm{h})} \neq 0$$

نستطيع إستعمال معامل الإرتباط الذي يرتكز على إحصائية ستودنت ،ومن جهة أخرى برهن Qunennouille(1949) من أجل حجم عينة حيث $n > 30$ ،فإن معامل الإرتباط ρ_{h} ينتهى تقاربيا الى القانون الطبيعي ذو منوسط معدوم وإنحراف معياري $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}}$ ،ومنه يعطى مجال الثقة للمعامل ρ_{h} ،ومنه يعطى مجال الثقة لـ ρ_{h} بـ $\rho_h = 0 \pm \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$.حيث n يمثل عددد المشاهدات .إذا كان المعامل المحسوب $\hat{\rho}_{\mathrm{h}}$ خارج مجال الثقة ،فهو يختلف معنويا عن الصفر عند مستوى معنوية α .(فى العموم $\alpha = 0.05$ و $t_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$) معظم البرامج توفر مخطط للرسم ،ومجال للثقة ،الذي يسمح بالتفسير الفوري .يجدر بنا التنبيه الى أن أحد المساوئ للإختبار عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ وهي ،أن دالة الإرتباط الذاتى المحسوبة من أجل عدد كبير لدرجات التأخير ،فإننا ننتظر أحد معاملات الإرتباط الذاتي أو بطريقة غير متوقعة ،معنويا يختلف غن الصفر ،إذا كان h عدد درجات التأخير العدد الممكن للرفض الزائف (الخاطئ أو الكاذب) هو $005 \times h$ ،من أجل مستوى *معنوية* $\alpha = 0.05$.

ملاحظة :

فى الحالة التى لا تظهر فيها المخطط البيانى $(correlogram)$ ،أي إنخفاض فى معاملات (غياب بـ cut off) ،يمكننا أن نستنتج أن السلسلة غير مستقرة فى الإتجاه العام .

10-4 إختبار $\mathbf{Box-Ling}$ و $\mathbf{Box-Piere}$:

إختبار Box-Piere يسمح بتحديد السيرورة بدون ذاكرة (متتالية من المتغيرات العشوائية مستقلة فيما بينها) لذالك نحن بحاجة لتحديد $cov(Y_t, Y_{t+h}) = 0$ أو أيضا $\rho_h = 0\,; \forall\, h$.

السيرورات ذات التشويش الأبيض يتضمن أن $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_h = 0$ ،أو بعبارة أخرى لإجراء إختبار مشترك لمعنوية معاملات الإرتباط الذاتى كمجموعة ،نستخدم إختبار $Box-Piere$ ومنه الفرضية التى يجب إختبارها :

$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_h = 0$

H_1 : يوجد على الأقل ρ_i معنويا يختلف عن الصفر

هذا الإختبار يسمى عند anglo – saxons بإختبار $(Test\ Portmanteau)$.

مثال رقم 12:

ليكن الجدول التالى يمثل التباين المشترك للعينة مع درجات التأخير $h = 0,1,\cdots 4$ مع عدد المشاهدات السلسلة الزمنية $n = 50$.

h	0	1	2	3	4
$\hat{\gamma}(h)$	0.93673	-0.05292	-0.00140	0.06516	-0.01058

عند مستوى معنوية α ،إستخدام إختبار Ling – Box Portmanteau لإثبات أو عدم إثبات أن السلسلة تمثل تشويش أبيض .

الحل :

نلاحظ أن $m = 4\,; p = q = 0$ والقيمة الحرجة لـ $\alpha = 5\%$ هي

$\mathcal{X}^2_{(0.05;4)} = 0.711$.

h	0	1	2	3	4
$\hat{\gamma}(h)$	0.93673	-0.05292	-0.00140	0.06516	-0.01058
$\hat{\rho}(h)$	1.000	-0.056	-0.001	0.070	-0.011
$\hat{\rho}^2(h)$	1.000000	0.003136	0.000001	0.004900	0.000121

إختبار إحصائية : Ling-Box Portmanteau ومنه :

$$\tilde{Q}_4 = 50(52)\sum_{h=1}^{4}\frac{\hat{\rho}^2(h)}{50-h} = 0.44436,$$

نلاحظ أن $0.44436 < \mathcal{X}^{2}_{(0.05;4)} = 0.711$ ،نرفض H_0 ونقبل H_1 ومنه السلسلة من نوع التشويش الأبيض ،للقيام بهذا الإختبار ،نلجأ إلى إحصائية Q (التى ترجع إلى Box-Piere) والتى يمكن أعطائها كما يلى :

$$Q_{\mathrm{m}} = \mathrm{n}\sum_{\mathrm{h}=1}^{\mathrm{m}}\hat{\rho}^2_{(\mathrm{h})} \sim \mathcal{X}^2_{(\mathrm{m-p-q})}$$

حيث n يمثل حجم العينة و $\hat{\rho}_{(h)}$ معامل الإرتباط للعينة بدرجة تأخير h لـــــــــــــــ

$(p+q) < m < n$ و m هو عدد فترات التأخير التى يتم إختبارها

- إذا كان Q_{m} أو $\hat{Q}_{\mathrm{m}} \leq \mathcal{X}^2_{\alpha,(\mathrm{m-p-q})}$ نرفض H_1 الفرضية البديلة ونقبل فرضية العدم ،وهذا يعنى أن السلسلة مستقرة (ساكنة) ،حيث Q_{m} تتبع توزيع كاي مربع $\mathcal{X}^2_{\alpha,(\mathrm{m-p-q})}$ وذو $(\mathrm{m-p-q})$ درجة حرية عند مستوى معنوية α .

كما أنه توجد إحصائية أخرى بديلة تستخدم في نفس الإختبار السابق تسمى بإحصائية Ling-Box وهي إحصائية Box-Piere المعدلة والتى تعطى بالعلاقة التالية :

$$\hat{Q}_{\mathrm{m}} = \mathrm{n(n+2)}\sum_{\mathrm{h}=1}^{\mathrm{m}}\frac{\hat{\rho}^2_{(\mathrm{h})}}{\mathrm{n-h}} \sim \mathcal{X}^2_{(\mathrm{m-p-q})}$$

والتي تتوزع توزيع $\mathcal{X}^2$ كاي مربع بدرجة حرية $(\mathrm{m-p-q})$ عند مستوى معنوية α والذي لع قاعدة قرار مماثلة للسابق.

الفصل الثالث : السيرورات الخطية للسلاسل الزمنية المستقرة ARMA :

1- خصائص معامل التأخير :

تعد معاملات التأخير والتقدم والفرق طريقة ملائمة لكتابة نماذج السلاسل الخطية ووصف خصائصها .

تعريف 1 :

معامل التأخير(lag operator) يتم إستخدام مؤشر الوقت إلى الخلف ويرمز له بالرمزB أو L .

تعريف 2 :

معامل التقدم (lend operator)يتم إستخدام مؤشر الوقت إلى الأمام ويرمز له بالرمز F أو$L^{-\mathrm{i}}$.

تعريف 3 :

معامل الفرق (difference operator) يعبر عن الفرق بين متغيرين عشوائيين متتالين ،ويرمز له بالرمز Δ .

* $BY_t = Y_{t-1}$

* $B^2Y_t = B(BY_t) = BY_{t-1} = Y_{t-2}$

* $B^4Y_t = Y_{t-4}$

$B^hY_t = Y_{t-h}$ *

* $FY_t = Y_{t*1}$

* $F^2Y_t = F(FY_t) = FY_{t+1} = Y_{t+2}$

* $F^4Y_t = Y_{t+4}$

* $F^hY_t = Y_{t+h}$

* $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = Y_t - BY_t = (1-B)Y_t$

* $\Delta^2 Y_t = \Delta(\Delta Y_t) = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} = (1-B)\Delta Y_t$

$$= (1-B)^2Y_t = (1-2B+B^2)Y_t = Y_t - 2BY_t + B^2Y_t$$

$$= Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

* $\Delta^d Y_t = (1-B)^2 Y_t$

القيم الموجبة لـ h تعرف بدرجات التأخير إلى الخلف بينما القيم السالبة تعرف بالقيم إلى الأمام أي :

* $B^{-h}Y_t = F^hY_t = Y_{t+h}$

* $B^{-2}Y_t = Y_{t+2}$

* $B^0Y_t = F^0Y_t = \Delta^0Y_t = Y_t$

* $B^iB^jY_t = B^{i+j}Y_t = Y_{(i+j)}$

* $(B^i+B^j)Y_t = B^iY_t + B^jY_t = Y_{t-i} + Y_{t-j}$

إذا كان $|\varphi B| < 1$ فإن :

حسب سلسلة تايلور $(1+\varphi B+\varphi^2B+\cdots) = \frac{1}{1-\varphi B}$

2- السيرورة الخطية :

بالنسبة للسلاسل الزمنية المستقرة بدون تأثير إتجاه عام أو موسمية ،إذا لزم الأمر لوجود إتجاه عام أو تأثيرات موسمية أو دورية ،وقد تمت إزالتهم من السلسلة الزمنية .فقد نبنى نموذج خطى للسلسة الزمنية مع الإرتباط الذاتى ،ومن أهم السيرورات الخطية هم :

* نموذج الإنحدار الذاتى((Autoregressive model(AR) .

* نموذج المتوسط المتحرك ((Moving Average(MA).

* نموذج المتوسط المتحرك (ARMA).

1-2 نموذج الإنحدار الذاتى ((Autoregressive model(AR)):

السلسلة الزمنية Y_t مع متوسط معدوم يعنى :

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t.$$

(حيث ε_t هو التشويش الأبيض φ_i معلمات $i = 1,2,\cdots p$)، تسمى سيرورة الإنحدار الذاتى ذو درجة p يرمز لها بالرمز $AR(p)$.

*مع معامل التأخير B، السيرورة $\Phi_p(B)Y_t = \varepsilon_t$ حيث

$\Phi_p(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \cdots - \varphi_p B^p$ كثير حدود من الدرجة p .

* نموذج $AR(p)$; $\forall p \geq 1$ يكون مستقرا ،إذا كانت مجموعة الحلول لـ

$$1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \cdots - \varphi_p B^p = 0 > 1$$

* إذا كان المتوسط μ لـ Y_t لا يساوى الصفر ،نعوض Y_t بـ $(Y_t - \mu)$ لنتحصل على :

$$Y_t = \varphi_1 (Y_{t-1} - \mu) + \varphi_2 (Y_{t-2} - \mu) + \cdots + \varphi_h \left(Y_{t-p} - \mu\right) + \varepsilon_t$$

أو

$$Y_t = \alpha + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \cdots + \varphi_h Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

حيث $\alpha = \mu\left(1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \cdots - \varphi_p\right)$.

مثال رقم 13:

ليكن النموذج $AR(2)$ حيث : $Y_t = 1.5 + 1.2Y_{t-1} - 0.5Y_{t-2} + \varepsilon_t$ ومنه

$Y_t - \mu = 1.2(Y_{t-1} - \mu) - 0.5(Y_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t$ حيث :

$1.5 = \mu\left(1 - 1.2 - (0.5)\right)$ ومنه هذا النموذج نستنتج أن $\mu = 5$ ومنه النموذج كما يلى: $Y_t - 5 = 1.2(Y_{t-1} - 5) - 0.5(Y_{t-2} - 5) + \varepsilon_t$.

2-2 نموذج المتوسط المتحرك((Moving Average (MA)):

السلسلة الزمنية Y_t مع متوسط معدوم يعنى :

$$Y_t = \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

(حيث ε_t هو التشويش الأبيض θ_j معلمات ،$j = 1,2,\cdots q$) ،تسمى سيرورة المتوسط المتحرك ذو درجة q يرمز لها بالرمز $MA(q)$.

* مع معامل التأخير أو الأبطاء B ،السيرورة $Y_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t$ حيث

$\Theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$ كثير حدود من الدرجة q .

* نموذج $\forall q \geq 1$; $MA(q)$ دائما مستقرا ،بغض النظر عن قيم θ_j حيث $j = 1,2,\cdots q$.

* إذا كانت المجموعة $1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q = 0 > 1$ السيرورة $MA(q)$ يقال عنها قابلة للعكس (invertible) وبالتالي فإنه يمكن صياغتها كنموذج $AR(\infty)$.

مثال رقم 14:

$MA(1)$: $Y_t = -0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$.

$MA(2)$: $Y_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$.

3-2 النموذج المختلط (ARMA):

السلسلة الزمنية Y_t مع متوسط معدوم تسمى نماذج الإنحدار الذاتى – المتوسط المتحرك $ARMA(p,q)$ ونتحصل عليها بدمج $AR(p)$ و$MA(q)$ ،يشير مثل هذا النموذج إلى القيمة الحالية للسلسة Y_t تعتمد خطيا على قيمها السابقة ،إضافة إلى توليفة من القيم الحالية والسابقة لحد التشويش الأبيض .ويمكن صياغة النموذج كالتالى :

$$Y_t = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \varphi_i Y_{t-i}}_{Autoregressive\ part} + \underbrace{\sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}}_{Moving\ Average\ part}.$$

حيث ε_t يمث التشويش الأبيض ،حيث φ_i وθ_j من أجل $i = 1,2,\cdots p$; $j = 0,1,2,\cdots q$

يمثلان معلمات جزء الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك تسلسليا حيث $\theta_0 = 1$.

* عند إستعمال معامل التأخير أو الأبطاء يمكن كتابة السيرورة $ARMA(p,q)$ كمايلى :

$$\underbrace{\Phi_p(B)Y_t}_{Autoregressive\ part} = \underbrace{\Theta_q(B)\varepsilon_t}_{Moving\ Average\ part}$$

حيث $\Phi_p(B) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i B^i$ و $\Theta_q(B) = 1 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j B^j$.

* إذا كان المتوسط μ لـ Y_t لا يساوى الصفر ،نعوض Y_t بـ $(Y_t - \mu)$ لنتحصل على :

$$\Phi_p(B)(Y_t - \mu) = \Theta_q(B)\varepsilon_t$$

يمكن أيضا كتابتها كما يلى :

$$Y_t = \alpha + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \cdots + \varphi_h Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

حيث $\alpha = \mu(1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \cdots - \varphi_p)$

ملاحظة :

هناك ثلاث شروط للنموذج الخطى $ARMA(p,q)$ وهى الإستقرارية (stationarity) ،قابلية العكس (invertible) ،التحديد أو التعرف (identinble) :

* شرط الإستقرارية هو نفس الشرط الخاص بالسيرورة $AR(p)$ ،والذي يتمثل في أن جذر المعادلة المميزة $1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \cdots - \varphi_p B^p$ تقع خارج دائرة الوحدة أو أكبر تماما من العدد 1 .

* شرط قابلية العكس ،هو نفس الشرط الخاص بالسيرورة $MA(q)$ ،والذي يتمثل في جذر المعادلة المميزة $1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$ تقع كلها خارج دائرة الوحدة أو أكبر دائما من الواحد.

* شرط التحديد أو التعرف ،يعنى أن النموذج لا يقبل التكرار والذي يتمثل في أن :

$\Phi_p(B) = 0$ و $\Theta_q(B) = 0$ ليس لديهم حلول مشتركة .

مثال رقم 15:

النموذج قابل للتكرار (وجود حلول مشتركة في النموذج $ARMA(p,q)$) ،ليكن النموذج التالي $ARMA(1,2)$ ومعادلة النموذخ تكون كالتالي :

$$Y_t = 0.2Y_{t-1} + \varepsilon_t - 1.1\varepsilon_{t-1} + 0.18\varepsilon_{t-2} \iff$$

$$Y_t - 0.2Y_{t-1} = \varepsilon_t - 1.1\varepsilon_{t-1} + 0.18\varepsilon_{t-2}$$

والذي يمكن كتابته على الشكل التالي :

$$Y_t - 0.2BY_t = \varepsilon_t - 1.1B\varepsilon_t + 0.18B^2\varepsilon_t \iff$$

$$(1-0.2B)Y_t = (1 - 1.1B + 0.18B^2)\varepsilon_t \iff$$

$$(1-0.2B)Y_t = (1-0.2B)(1-0.9B)\varepsilon_t \iff$$

$$Y_t = (1-0.9B)\varepsilon_t$$

وبالتالي السيرورة ليست في الواقع $ARMA(1,2)$ ولكن $MA(1) \equiv ARMA(1,2)$.

نعطى بعض الأمثلة عن السيرورة $ARMA(p,q)$:

- $AR(1) \equiv ARMA(1,0)$ السيرورة يمكن كتابتها كالتالي : $(1-\varphi B)Y_t = \varepsilon_t$ أو $Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$.

- $AR(2) \equiv ARMA(2,0)$ السيرورة يمكن كتابتها كالتالي:

$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$ أو $(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2)Y_t = \varepsilon_t$

- $MA(2) \equiv ARMA(0,2)$ السيرورة يمكن كتابتها كالتالي:

$Y_t = \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$ أو $Y_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2)\varepsilon_t$

- السيرورة $ARMA(1,1)$ السيرورة يمكن كتابتها كالتالي :

$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varphi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ أو $(1-\varphi B)Y_t = (1+\theta B)\varepsilon_t$

- السيرورة $ARMA(2,1)$ السيرورة يمكن كتابتها كالتالي :

$(1-\varphi_1 B-\varphi_2 B^2)Y_t=(1+\theta B)\varepsilon_t$ أو

$Y_t=\varphi_1 Y_{t-1}+\varphi_2 Y_{t-2}+\varphi\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t$.

- السيرورة $ARMA(1,2)$ السيرورة يمكن كتابتها كالتالي :

$(1-\varphi_1 B)Y_t=(1+\theta B+\theta_2 B^2)\varepsilon_t$ أو

$Y_t=\varphi_1 Y_{t-1}+\varphi_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2}+\varepsilon_t$.

- السيرورة $ARMA(2,2)$ السيرورة يمكن كتابتها كالتالي :

$Y_t=\varphi_1 Y_{t-1}+\varphi_2 Y_{t-2}+\varphi_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2}+\varepsilon_t$

أو $\Phi_2(B)Y_t=\Theta_2(B)\varepsilon_t$ حيث :

$\Phi_2(B)=1-\varphi_1 B-\varphi_2 B^2$ و $\Theta_2(B)=1+\theta_1 B+\theta_2 B$.

* التباين المشترك لنماذج لـ $MA(1)$:

لتكن السيرورة $MA(1)$ $Y_t=\varepsilon_t+\theta\varepsilon_{t-1}$ حيث $\varepsilon_t\curvearrowright WN(0,\sigma^2)$.

* المتوسط لـ Y_t الذي هو مستقل عن الزمن t $E(Y_t)=0$.

* التباين $\gamma_Y(0)=E(\varepsilon_t^2+2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}+\theta^2\varepsilon_{t-1}^2)=(1+\theta^2)\sigma^2$.

* التباين المشترك والإرتباط الذاتي مستقلان عبر الزمن بدون قيود على المعلمة θ كما هو موضح كما يلي :

$$* \gamma_y(h)=E\left[\left(Y_t-E(Y_t)\right)\left(Y_{t+h}-E(Y_{t+h})\right)\right]$$

$$=E[(\varepsilon_t+\theta\varepsilon_{t-1}-0)(\varepsilon_{t+h}+\varepsilon_{t+h-1}-0)]$$

$$=E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+h})+\theta E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t+h})+\theta E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+h-1})+\theta^2 E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t+h-1})$$

$$=\begin{cases} 1; & h=0 \\ \frac{\theta}{1+\theta^2} & h=\pm 1 \\ 0 & h=\pm 2,\pm 3\cdots \end{cases}$$

من أجل السيروة $MA(q)$ $Y_t = \sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$ حيث $\theta_0 = 1$ و $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$:

* المتوسط لـ Y_t الذي هو مستقل عن الزمن t $E(Y_t) = 0$.

* التباين $\gamma_Y(0) = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2 = \sigma^2 \sum_{i=0}^{q} \theta_i^2$.

* التباين المشترك والإرتباط الذاتي مستقلان عبر الزمن t .بدون قيود على المعلمة θ كما هو موضح كما يلى :

$$\gamma_Y(h) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{i=h}^{q} \theta_i \theta_{i-h} & ; h = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm q \\ 0, & h > q \end{cases}$$

$$\rho_Y(h) = \frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(0)} = \begin{cases} \frac{\sum_{i=h}^{q} \theta_i \theta_{i-h}}{\sum_{i=0}^{q} \theta_i^2} & ;\ h = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm q \\ 0\ , & h > q \end{cases}$$

مثال رقم 16:

أوجد التوقع والتباين ثم أوجد التباين المشترك ومعاملات دالة الإرتباط الذاتى لما : $h = 1,2 \cdots$ للنموذج التالي: $Y_t = \varepsilon_t + 0.6\varepsilon_{t-1} - 0.3\varepsilon_{t-2}$ حيث:

$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

الحل :

***** $E(Y_t) = 0.$

* $var(Y_t) = \gamma_Y(0) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2 = 1.45\sigma^2.$

* $cov(Y_t, Y_{t-1}) = \gamma_Y(1) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{2} \theta_i \theta_{i-1} = (\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1)\sigma^2 = 0.42\sigma^2$

* $\gamma_Y(2) = \sigma^2 \sum_{h=2}^{2} \theta_i\theta_{i-2} = \theta_2\theta_0\sigma^2 = -0.3\sigma^2.$

* $\rho_Y(1) = \frac{\gamma_Y(1)}{\gamma_Y(2)} = \frac{0.42\sigma^2}{1.45\sigma^2} = 0.27.$

* $\rho_Y(2) = \frac{\gamma_Y(1)}{\gamma_Y(2)} = \frac{0.3\sigma^2}{1.45\sigma^2} = 019.$

* $\rho_Y(h) = 0. \quad \forall\, h > 2.$

3- قابلية العكس للسيرورة $MA(q)$:

* لو عوضنا θ بـ $\frac{1}{\theta}$ ،دالة الإرتباط الذاتى لـ $MA(q)$ ومنه $\rho_Y(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$ ،لن تتغير في كلتا الحالتين وبالتالي يوجد سيرورتان $Y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$. و $Y_t = \varepsilon_t + \frac{1}{\theta}\varepsilon_{t-1}$ ،وهنا لم يتم تحديد المعامل بشكل وحيد (أي لا يوجد حل وحيد لمعامل الإرتباط الذاتي).

* بالنسبة للحالة العامة للسيرورة $MA(q)$ ،كذالك لا يوجد حل وحيد لمعامل الإرتباط الذاتي وهنا يكون لدينا مشكلة .

* يمكن حل هذه المشكلة بإفتراض أن المعامل $1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$ تكون قابلة للعكس ،إذا كانت القيمة المطلقة للجذور لـ :

$\Theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q = 0$ تكون خارج دائرة الوحدة .

تعريف :

السيرورة $MA(q)$ قابلة للعكس إذا كانت درجة التأخير لـ AR تؤول إلى مالانهاية $AR(\infty)$ ،المتوسط المتحرك $MA(q)$ ، $Y_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t$ حيث :

$\Theta_q(B) = 1 + \sum_{j=}^{q} \theta_j B^q$ و $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ في ما لانهاية AR يمثل بـ $AR(\infty)$.

نضرب طرفي المعادلة $Y_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t$ بـ $\Theta_q(B)^{-1}$ تصبح المعادلة كما يلى :

$$\Theta_q(B)^{-1} Y_t = \Theta_q(B)^{-1}\Theta_q(B)\varepsilon_t = \varepsilon_t$$

$$\Longrightarrow \prod_\infty(B) Y_t = \varepsilon_t$$

حيث

$\prod_{\infty}(B) = \Theta_q(B)^{-1} = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i B_i = -\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i B^i$ و $\pi_0 = -1$ و π_i تكون مقبولة $\sum_{i=0}^{\infty} |\pi_i| < \infty$.

* نلاحظ أن الشرط $(\sum_{i=0}^{\infty} |\pi_i| < \infty)$ يضمن أن $AR(\infty)$ تكون متقاربة أو بمعنى أخر أن $MA(q)$ قابلة للعكس .

مثال رقم 17:

لتكن $MA(1)$ كالتالي $Y_t = (1+\theta B)\varepsilon_t$ حول $MA(1)$ الى تمثيل $AR(\infty)$.

الحل :

نضرب الطرفين بـ : $(1+\theta B)^{-1}$ نتحصل على : $\varepsilon_t = \frac{1}{1+\theta B} Y_t = \prod_{\infty}(B) Y_t$.

حيث $\prod_{\infty}(B) = (1+\theta B)^{-1} = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i B^i = -\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i B^i$ ونذكر أن سلاسل تايلور بـ $\frac{1}{1-x}$ ، $|X| < 1$ هي الشكل الهندسي للسلسلة : $1 + X + X^2 + X^3 \ldots.$

ومنه نستنتج أن :

$$\frac{1}{1-\theta B} = \frac{1}{1-(-\theta B)} = 1 - \theta B + \theta^2 B^2 - \theta^3 B^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-\theta)^i B^i$$

ومنه : $\sum_{i=0}^{\infty} (-\theta)^i B^i = -\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i B^i$.

ومنه : $\pi_i = (-1)^{i+1} (\theta)^i \; ; \; \forall\, i \geq 0$.

ومنه السيرورة $MA(1)$: $Y_t = (1+\theta B)\varepsilon_t$ في $AR(\infty)$ نمثل كما يلي :

$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i B^i Y_t$ حيث $\pi_i = (-1)^{i+1} (\theta)^i \; ; i = 1,2 \cdots$ نلاحظ أن القيمة المطلقة لحل $1 + \theta B = 0$ تسلزم أن $\left|\frac{1}{\theta}\right| > 1$ أو مكافئ $|\theta| < 1$ لتأكيد أن $MA(q)$ قابلة للعكس.

مثال رقم 18:

لتكن $MA(1)$ كالتالي $Y_t = \varepsilon_t + 0.4\varepsilon_t$ قابلة للعكس .

الحل :

$|\theta| = |0.4| < 1$ أو حل جذور:

$$(1+0.4B) = 0 \Longrightarrow |\mathrm{B}| = \left|\frac{1}{0.4}\right| = 02.5 > 1$$

السيرورة يمكن كتابتها في تمثيل $AR(\infty)$ كما يلي :

$\pi_{\mathrm{i}} = (-1)^{\mathrm{i}+1}(0.4)^{\mathrm{i}}\ ; \mathrm{i} = 1{,}2 \cdots$ حيث $Y_{\mathrm{t}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \pi_{\mathrm{i}} \mathrm{Y}_{\mathrm{t-i}} + \varepsilon_{\mathrm{t}}$.

$$Y_t = \varepsilon_t + 0.4Y_t - (0.4)^2 Y_{t-2} + (0.4)^3 Y_{t-3} \cdots\cdots$$

مثال رقم 19:

لتكن $MA(1)$ كالتالي $Y_t = \varepsilon_t + 1.8\varepsilon_t$ غيرقابلة للعكس .

الحل :

لأن جذور المعادلة $(1+1.8B) = 0$ القيمة المطلقة $|B| = \left|\frac{1}{1.8}\right| > 1$ ومنه لا يمكن تمثيل $AR(\infty)$.

تمثل $MA(q)$ على شكل $AR(\infty)$ (أي لما AR يؤول الى مالانهاية)

لدينا $\prod_\infty(B) = \Theta_q(B)^{-1}$ المعاملات π_{i} يمكن الحصول عليها عن طريق معادلة المعاملات للعلاقة :

$$\Theta_q(B)\prod_\infty(B) = 1.$$

$$\Theta_q(B)\prod_\infty(B) = \left(1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q\right)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 \cdots)$$

$$= 1 - (\pi_1 - \theta_1)B - (\pi_2 + \theta_1\pi_1 - \theta_2)B^2 - \cdots$$

$$= \left(\pi_j + \theta_1\pi_{j-1} + \cdots + \theta_{q-1}\pi_{j-q+1} + \theta_q\pi_{j-q}\right)B^j - \cdots$$

من خلال المعاملات B^j للعلاقة $\Theta_q(B)\prod_\infty(B) = 1\ ; j = 1{,}2 \cdots$.ولدينا :

$$\pi_j = -\theta_1\pi_{j-1} - \theta_2\pi_{j-1} - \cdots - \theta_{q-1}\pi_{j-q+1} - \theta_q\pi_{j-q}$$

حيث $\pi_0 = -1$ و $\pi_{\mathrm{j}} = 0$ من أجل $j < 0$.

مثال رقم 20:

لتكن $MA(2)$ كالتالي $Y_t = \varepsilon_t - 0.1\varepsilon_t + 0.4\varepsilon_{t-1}$ قابلة للعكس .

الحل :

الجذور بالقيمة المطلقة :

$$(1 - 0.1B + 0.4B^2) = (1 \pm 0.7B)(1 + 0.6B) = 0$$

$B_1 = \frac{1}{0.7} = 1.43 > 1$ و $|B_2| = \left|\frac{1}{-0.6}\right| = 1.67 > 1$ ومنه السيرورة قابلة للعكس.

الآن السيرورة تمثل $AR(\infty)$ تكتب كما يلي : $Y_{\mathrm{t}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \pi_{\mathrm{i}} \mathrm{Y}_{\mathrm{t-i}} + \varepsilon_{\mathrm{t}}$.

$$\pi_j = -\theta_1\pi_{j-1} - \theta_2\pi_{j-2} - \cdots - \theta_{q-1}\pi_{j-q+1} - \theta_q\pi_{j-q} \;\; ; q = 2$$

حيث $\theta_1 = -0.1$ و $\theta_2 = 0.42$ و $\forall\, j > q$ فإن $\theta_{\mathrm{j}} = 0$ و -1 = π_0 و $\forall\, j < 0$
فإن $\pi_0 = -1$.

$$\pi_1 = -\theta_1\pi_0 - 0 \cdots = -(-0.1)(-1) = -0.1$$

$$\pi_2 = -\theta_1\pi_1 - \theta_2\pi_0 \cdots = -(-0.1)(-1) - (0.42)(-1) = 0.41$$

$$\pi_3 = -\theta_1\pi_2 - \theta_2\pi_1 - 0 \cdots = -(-0.1)(0.41) - (0.42)(0.1) = 0.083$$

$$\pi_4 = -(-0.1)(0.083) - (0.42)(0.1) - 0 = -0.1639$$

التمثيل لـ $MA(2)$ لـ $AR(\infty)$ يكون كما يلي :

$$\mathrm{Y_t} = \varepsilon_{\mathrm{t}} - 0.1\mathrm{Y_{t-1}} + 0.41\mathrm{Y_{t-2}} + 0.083\mathrm{Y_{t-3}} - 0.1639\mathrm{Y_{t-4}} \cdots$$

مثال رقم 20:

لتكن السيرورة $MA(2)$ كالتالي $\mathrm{Y_t} = \varepsilon_{\mathrm{t}} - \varepsilon_{\mathrm{t}} + 0.5\varepsilon_{\mathrm{t-1}}$.

الحل :

لتكن المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ حلو المعادلة هو $X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

حلول المعادلة يالقيمة المطلقة $1 - B + 0.5B^2$ يكون كما يلى :

$$|B| = \left| \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(0.5)}}{2(0.5)} \right| = |1 \pm i|$$

حيث $i = \sqrt{-1}$

نتذكر القيمة المطلقة للأعداد المركبة حيث :

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \cong 1.41 > 1$$

التمثيل لـ $AR(\infty)$ حيث $Y_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$ و $\pi_j = -\theta_1 \pi_{j-1} - \theta_2 \pi_{j-2}$ و $\theta_1 = -1$ و $\theta_2 = 0.5$ و $\pi_0 = -1$ و $\pi_1 = 0$ ومنه :

$$\pi_1 = -\theta_1 \pi_0 = -(-1)(-1) = -1$$

$$\pi_2 = -\theta_1 \pi_1 - \theta_2 \pi_0 = -(-1)(-1) - (0.5)(-1) = -0.5$$

$$\pi_3 = -\theta_1 \pi_2 - \theta_2 \pi_1 = -(-1)(0.5) - (0.5)(-1) = 0$$

$$\pi_4 = -\theta_1 \pi_3 - \theta_2 \pi_2 = -(-1)(0) - (0.5)(-0.5) = 0.25$$

ومنه التمثيل هو :

$$Y_t = \varepsilon_t - Y_{t-1} - 0.5Y_{t-2} + 0.25Y_{t-4} \cdots$$

تمثيل $AR(1)$ على شكل $MA(\infty)$:

لتكن السلسلة Y_t الممثلة بـ $RA(1)$ سيرورة حيث $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ ومنه :

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$= \varphi(\varphi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$= \varepsilon_t + \varphi \varepsilon_{t-1} + \varphi^2 Y_{t-2}$$

$$= \varepsilon_t + \varphi\varepsilon_{t-1} + \varphi^2(\varphi Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2})$$

$$= \varepsilon_t + \varphi\varepsilon_{t-1} + \varphi^2\varepsilon_{t-2} + \varphi^3 Y_{t-3}$$

$$\vdots \cdots$$

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^i \varepsilon_{t-i}$$

الذى هو تمثيل $MA(\infty)$ ،نلاحظ أن الجزء (ε_{t-i}) قد ينظر الى هذا التمثيل على أنه سلسلة هندسية ،والتى تكون متقاربة إذا وفقط إذا كان $|\varphi| < 1$.

- السيرورة $RA(1)$ مع معامل التأثير B يمكن أن تكتب كما يلى : $(1-\varphi B)Y_t = \varepsilon_t$ حيث $\varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2)$ ومنه $Y_t = \frac{\varepsilon_t}{1-\varphi B}$. إذا كانت $|\varphi B| < 1$ فإن سلسلة تايلور لـ

$$\frac{1}{1-\varphi B} = 1 + \varphi B + \varphi^2 B^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow Y_t = (1 + \varphi B + \varphi^2 B^2 + \varphi^3 B^3 + \cdots)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^i \varepsilon_{t-i}$$

والذي هو تمثيل $MA(\infty)$.

*- خصائص التباين المشترك لـ AR :

لدينا التمثيل للسيرورة $RA(1)$ فى $MA(\infty)$ هو : $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^i \varepsilon_{t-i}$.

* المتوسط لـ Y_t ،(مستقل عبر الزمن) $E(Y_t) = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \varphi^i \varepsilon_{t-i}\right) = 0$.

* التباين $\gamma_Y(0) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{2i} {\varepsilon_{t-i}}^2\right) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{2i} = \frac{\sigma^2}{1-\varphi^2}$.

* التباين المشترك مستقل عبر الزمن كما يلى :

$$\gamma_Y(h) = E(Y_t Y_{t+h}) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=h}^{\infty} \varphi^i \varphi^j E(\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t+h-j}) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \varphi^j$$

$$= \varphi^h \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{2i} = \sigma^2 \frac{\varphi^h}{1-\varphi^2} .$$

* معامل الارتباط الذاتي : (مستقل عبر الزمن) $\rho_Y(h) = \frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(0)} = \varphi^h$.

مثال رقم 21:

معامل دالة الارتباط الذاتي للسيرورة المستقرة $AR(1)$ $\varepsilon_t \sim WN(0,4)$ و $Y_t = 0.6Y_{t-1} + \varepsilon_t$.

الحل :

$$\rho_Y(h) = \varphi^h = 0.6^h \quad \forall\, h > 0 .$$

$$\rho_Y(0) = 1 \;; \rho_Y(1) = 0.6 \;; \rho_Y(2) = 0.6^2 = 0.36 .$$

ليكن النموذج $AR(p)$: $Y_t = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$ حيث $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

* التوقع الرياضي لـ Y_t : $E(Y_t) = 0$

* التباين لـ Y_t يكون: $\mathrm{var}(Y_t) = \gamma_Y(0) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i^2 \gamma_Y(i) + \sigma^2$

حيث $\gamma_Y(i) = \mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-i})$

نلاحظ أن التباين لـ Y_t يتم الحصول عليه بضرب طرفي المعادلة أعلاه بـ Y_t وأخذ التوقع حيث : $E(Y_t \varepsilon_t) = \sigma^2$ ،بضرب طرفي المعادلة: $Y_t = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$ بـ Y_{t-h} وبعد أخذ التوقع نتحصل على ما يلي :

$$\gamma_Y(h) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \gamma_Y(h-i) \quad \forall\, h > 0$$

نقسم طرفي المعادلة على $\gamma_Y(0)$ نتحصل على معاملات دالة الارتباط الذاتي :

$$\rho_Y(h) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \rho_Y(i-h) .$$

و هذه معادلات يوول ولكر التى تكلمنا عليها سابقا .

تعريف :

الشرط بالنسبة للإنحدار الذاتي للسيرورة $AR(1)$ ،$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$ لكي تكون مستقرة ،يجب أن تكون القيمة المطلقة لجذور الوحدة $(1-\varphi B) = 0$ خارج دائرة الوحدة ،هذا يعني أن $AR(1)$ مستقرة إذا كان $|B| = \left|\frac{1}{\varphi}\right| > 1$ أو $|\varphi| < 1$.

* $(1-0.4B)Y_t = \varepsilon_t$ مستقرة لأن القيمة المطلقة للجذر :

$$(1-0.4B) = 0 \Longrightarrow |B| = \left|\frac{1}{0.4}\right| = 2.5 > 1$$

* $(1+1.8B)Y_t = \varepsilon_t$ ليست مستقرة لأن القيمة المطلقة للجذر :

$$(1+1.8B) = 0 \Longrightarrow |B| = \left|\frac{1}{-1.8}\right| = 0.56 < 1$$

* $Y_t = 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$ مستقرة لأن $|0.5| < 1$.

نظرية :

بالنسبة لنماذج $AR(2)$ ،الشروط الضرورية والكافية للإستقرار هي :

* $|\varphi_2| < 1$.

* $\varphi_1 + \varphi_2 < 1$.

* $\varphi_2 - \varphi_1 < 1$.

مثال رقم 22:

* $Y_t = 1.1Y_{t-1} - 0.4Y_{t-2} + \varepsilon_t$ مستقرة .

* $Y_t = 0.6Y_{t-1} - 1.3Y_{t-2} + \varepsilon_t$ ليست مستقرة لأن $(|\varphi_2| \nless 1)$.

* $Y_t = 0.6Y_{t-1} + 0.8Y_{t-2} + \varepsilon_t$ ليست مستقرة لأن $(|\varphi_1 + \varphi_2| \nless 1)$.

* $Y_t = -0.4Y_{t-1} + 0.7Y_{t-2} + \varepsilon_t$ ليست مستقرة لأن $(\varphi_2 - \varphi_1 \nless 1)$.

تعريف :

الشرط بالنسبة للإنحدار الذاتي للسيرورة $AR(p)$ من الدرجة p،

$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$ لكي تكون مستقرة ،يجب أن تكون القيمة المطلقة لجذور الوحدة $\left(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \cdots - \varphi_p B^p\right) = 0$ خارج دائرة الوحدة .

مثال رقم 23:

* $Y_t = -0.4Y_{t-1} + 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t$ سيرورة مستقرة لأن القيمة المطلقة الجذور :

$$(1 + 0.4B - 0.21B^2) = (1 - 0.3B)(1 + 0.7B) = 0$$

الحلول هي : $1 < 3.3 = \left|\frac{1}{0.3}\right| |B_1|$ و $1 < 1.4 = \left|\frac{1}{-0.7}\right| = |B_2|$.

* $Y_t = 1.7Y_{t-1} - 0.42Y_{t-2} + \varepsilon_t$ السيرورة ليست مستقرة لأن القيمة المطلقة الجذور :

$$(1 - 1.7.4B + 0.42B^2) = (1 - 0.3B)(1 - 1.4B) = 0$$

لأن $1 > 0.71 = \left|\frac{1}{1.14}\right| = |B_2|$.

* $Y_t = -0.25Y_{t-2} + \varepsilon_t$ السيرورة ليست مستقرة لأن القيمة المطلقة الجذور :

$$1 + 0.25B^2 = 0$$

لأن $1 < 2 = |\mp 2| = |B|$ حيث $i = -1$.

4- سببية $\mathbf{AR(p)}$ في ما لا نهاية لتمثيل $\mathbf{MA(q)}$:

* **السببية :** تشير السببية لسلسلة زمنية مستقرة إلى أن السلاسل تعتمد أن السلاسل الزمنية تعتمد على قيم الماضي بشكل أساسي .

* السيرورة $AR(p)$ **و** $\Phi_p(B)Y_t = \varepsilon_t$ حيث $\Phi_p(B) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i B^i$ و $\varepsilon_t \backsim WN(0, \sigma^2)$، سيرورة سبية ،إذا كان يمكن كتابتها بدلالة ما لا نهاية لتمثيل $MA(\infty)$ كما يلى :

$$\Phi_p(B)^{-1}\Phi_p(B)\mathrm{Y_t} = \Phi_p(B)^{-1}\varepsilon_t$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Y_t} = \Phi_p(B)^{-1}\varepsilon_t = \Psi_\infty(\mathrm{B})\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\varepsilon_{t-i}$$

حيث : $\Psi_\infty(\mathrm{B}) = \Phi_p(B)^{-1}$ و $\Psi_\infty(\mathrm{B}) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\psi_i\varepsilon_{t-i}$.

حيث : $\Psi_\infty(\mathrm{B}) = \Phi_p(B)^{-1}$ و $\Psi_\infty(\mathrm{B}) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\psi_i\mathrm{B}^i$.

ψ_i تكون مقبولة إذا كانت $\sum_{i=0}^{\infty}|\psi_i| < \infty$ و $\psi_0 = 1$ لأن $\Psi_\infty(\mathrm{B}) = \Phi_p(B)^{-1}$
،معاملات ψ_i يمكن الحصول عليها من خلال العلاقة :

$$\Phi_p(B)\Psi_\infty(\mathrm{B}) = 1$$

$$\Phi_p(B)\Psi_\infty(\mathrm{B}) = \left(1 - \varphi_1\mathrm{B} - \cdots - \varphi_p\mathrm{B}^p\right)(1 + \psi_1\mathrm{B} + \psi_2\mathrm{B}^2 + \cdots)$$

$$= 1 + (\psi_1 - \varphi_1)\mathrm{B} + (\psi_2 - \psi_1\varphi_1 - \varphi_2)\mathrm{B}^2 + \cdots$$

$$+\left(\psi_i - \varphi_1\psi_{i-1} - \cdots - \varphi_p\psi_{i-p}\right)\mathrm{B}^i + \cdots$$

من خلال المعاملات B^i للعلاقة :

$\Phi_p(B)\Psi_\infty(\mathrm{B}) = 1$ من أجل $i = 1,2\cdots$.

$$\psi_i = \varphi_1\psi_{i-1} + \varphi_2\psi_2 + \cdots + \varphi_{p-1}\psi_{i-p+1} + \varphi_p\psi_{i-p}$$

حيث $\psi_0 = 1$ و $\psi_i = 0$ من أجل $i < 0$.

مثال رقم 24:

لتكن السيرورة $\mathrm{AR}(2)$ التالية :

$$\mathrm{Y_t} = 0.1\mathrm{Y_{t-1}} - 0.42\mathrm{Y_{t-2}} + \varepsilon_t$$

حيث $p = 2$ و $\varphi_1 = 0.1$ و $\varphi_2 = -0.42$ من أجل $\varphi_i = 0 \quad \forall\, i > p$.

الحل :

جذر كثير الحدود $(1 - 0.1B + 0.42B^2)$ ومنه $(1 - 0.7B)(1 + 0.6B)$ ومنه الحلول هي: $|B_1| \left|\frac{1}{0.7}\right| = 1.43 > 1$ و $|B_2| = \left|\frac{1}{-0.6}\right| = 1.67 > 1$ ومنه السيرورة مستقرة – سببية.

الآن السيرورة لـ $MA(\infty)$ يمكن تمثيلها كما يلى: $Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$.

حيث $\psi_i = \varphi_1\psi_{i-1} + \varphi_2\psi_2 + \cdots + \varphi_{p-1}\psi_{i-p+1} + \varphi_p\psi_{i-p}$ وكذالك $\psi_0 = 1$ و $\psi_i = 0$ من أجل $\forall\, i < 0$ و $\varphi_i = 0$ من أجل $\forall\, i > p$.

$$\psi_1 = \varphi_1\psi_0 = (0.1)(1) = 0.1$$

$$\psi_2 = \varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_0 = (0.1)(0.1) + (-0.42)(1) = -0.41$$

$$\psi_3 = \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 = (0.1)(-0.41) + (-0.42)(0.1) = 0 - 0.083$$

$$\psi_4 = \varphi_1\psi_3 - \varphi_2\psi_2 = (0.1)(0.083) + (-0.42)(-0.41) = 0.1639$$

السيرورة $AR(2)$ في $MA(\infty)$ كما يلي:

$$Y_t = \varepsilon_t + 0.1\varepsilon_{t-1} - 0.41\varepsilon_{t-2} - 0.083\varepsilon_{t-3} + 0.1639\varepsilon_{t-4} \cdots$$

نتذكر أن نماذج $ARMA(p,q)$ يمكن أن تمثل كما يلي :

$$\Phi_p(B)Y_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t .$$

$$\Phi_p(B) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i B^i .$$

$$\Theta_q(B) = 1 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j B^j .$$

تحت شروط الإستقرارية لدينا صيغة $MA(\infty)$:

$$Y_t = \Psi_\infty(B)\varepsilon_t .$$

حيث $\Psi_\infty(B) = \Phi_p(B)^{-1}\Theta_q(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i$.

علي غرار حالة نموذج AR ،معاملات ψ_i يمكن أن تشتق من معاملات العلاقة :

$$\Phi_p(B)\Psi_\infty(B) = \Theta_q(B) .$$

ψ_i مقبولة كانت :

$$\psi_i = \varphi_1\psi_{i-1} + \varphi_2\psi_2 + \cdots + \varphi_{p-1}\psi_{i-p+1} + \varphi_p\psi_{i-p} + \theta_i \quad ; i = 1,2 \cdots$$

حيث $\psi_0 = 1$ و $\psi_i = 0$ من أجل $\forall\, i < 0$ و $\theta_i = 0$ من أجل $\forall\, i > q$.

تحت شروط الإنعكاسية ،لدينا صيغة $AR(\infty)$:

$$\Psi_\infty(B)Y_t = \varepsilon_t .$$

حيث $\Psi_\infty(B) = \Phi_p(B)^{-1}\Theta_q(B) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty}\psi_i B^i$.

علي غرار حالة نموذج MA ،معاملات π_i يمكن أن تحدد من معاملات العلاقة :

$$\Theta_q(B)\Psi_\infty(B) = \Phi_p(B) .$$

π_i مقبولة إذا كانت :

$$\pi_i = -\theta_1\pi_{i-1} - \theta_2\pi_{i-1} - \cdots - \theta_{q-1}\pi_{i-q+1} - \theta_q\pi_{i-q} + \varphi_i \,; i = 1,2 \cdots$$

حيث $\pi_0 = -1$ و $\pi_i = 0$ من أجل $i < 0$ و $\varphi_i = 0$ من أجل $i < 0$.

5- السيرورة الخطية الموسمية :

1-5 السيرورة AR الموسمية :

سيرورة الإنحدار الذاتي الموسمية يرمز لها بالرمز $AR(P)_s$ حيث S تمثل الخطوة في الزمن ثابتة ومختلفة عن الواحد .نعطي لها إسم الفترة للسيرورة AR المستقرة من أجل S و P هو درجة السيرورة AR الموسمية.

لدينا : $\Phi_p(B) = 1 - \sum_{i=1}^{p}\varphi_i B^i$ و $\Theta_q(B) = 1 + \sum_{i=1}^{q}\theta_i B^i$.

$\Phi_P(B^s) = 1 - \sum_{i=1}^{P}\varphi_{is}B^{is}$ و $\Theta_Q(B^{\acute{s}}) = 1 + \sum_{i=1}^{Q}\theta_{is}B^{is}$.

والشكل العام للسيرورة AR الموسمية :

$$Y_t = \varphi_{1s}Y_{t-s} + \varphi_{2s}Y_{t-2s} \cdots + \varphi_{ps}Y_{t-Ps} + \varepsilon_t$$

وتسمي $SAR(p)_s$.حيث :

* (12 مشاهدة في السنة) مشاهدات شهرية $S = 12$.

* (4 مشاهدات في السنة) مشاهدات فصلية $S = 4$.

* (365 مشاهدة في السنة) مشاهدات يومية $S = 365$.

* (52مشاهدة في السنة) مشاهدات أسبوعية $S = 52$.

2-5 السيرورة MA الموسمية :

سيرورة المتوسط المتحرك ،يرمز لها بالرمز $MA(Q)_{\acute{s}}$ حيث $\acute{S}$ تمثل الخطوة في الزمن ثابتة .ومختلف عن الواحد .Q هو درجة السيرورة MA الموسمية .والشكل العام للسيرورة MA الموسمية :

$$Y_t = \theta_{\acute{s}}\varepsilon_{t-\acute{s}} + \theta_{2\acute{s}}\varepsilon_{t-2\acute{s}} + \cdots + \theta_{Q\acute{s}}\varepsilon_{t-Q\acute{s}} + \varepsilon_t$$

وتسمي كذالك $SMA(Q)_{\acute{s}}$.

3-5 السيرورة $ARMA$ الموسمية :

السيرورة المختلطة الموسمية ،يرمز لها بالرمز $ARMA(P,Q)_{s\acute{,}s}$ حيث $S,\acute{S}$ حيث الخطوة في الزمن ثابتة ومختلفة عن الواحد .والتي تأخذ الشكل التالي :

$$Y_t = \varphi_{1s}Y_{t-s} + \varphi_{2s}Y_{t-2s} \cdots + \varphi_{ps}Y_{t-Ps} + \theta_{\acute{s}}\varepsilon_{t-\acute{s}} + \theta_{2\acute{s}}\varepsilon_{t-2\acute{s}} + \cdots + \theta_{Q\acute{s}}\varepsilon_{t-Q\acute{s}} + \varepsilon_t$$

مثال رقم 25:

السيرورة $ARMA(1,2)_{12,6}$ تكتب كما يلي :

$$Y_t = \varphi_{12}Y_{t-12} + \theta_6\varepsilon_{t-6} + \varphi_{12}\varepsilon_{t-12} + \varepsilon_t$$

على شكل كثير حدود معاملات التأخير السيرورة ARMA الموسمية يمكن كتابتها كما يلي :

$$Y_t - \varphi_{1s}Y_{t-s} - \varphi_{2s}Y_{t-2s} \cdots - \varphi_{ps}Y_{t-Ps}$$
$$= \theta_{\acute{s}}\varepsilon_{t-\acute{s}} + \theta_{2\acute{s}}\varepsilon_{t-2\acute{s}} + \cdots + \theta_{Q\acute{s}}\varepsilon_{t-Q\acute{s}} + \varepsilon_t$$

$$Y_t - \varphi_{1s}B^sY_t - \varphi_{2s}B^{2s}Y_t \cdots - \varphi_{ps}B^{Ps}Y_t$$
$$= \theta_{\acute{s}}B^{\acute{s}}\varepsilon_t + \theta_{2\acute{s}}B^{2\acute{s}}\varepsilon_t + \cdots + \theta_{Q\acute{s}}B^{Q\acute{s}}\varepsilon_t + \varepsilon_t$$

$$(1 - \varphi_sB^s - \cdots - \varphi_{Ps}B^{Ps})Y_t = \left(1 + \theta_{\acute{s}}B^{\acute{s}} + \cdots + \theta_{Q\acute{s}}B^{Q\acute{s}}\right)\varepsilon_t \Leftrightarrow$$

$$\Phi_p(B^s)Y_t = \Theta_Q\left(B^{\acute{s}}\right)\varepsilon_t$$

يمكن إضافة ثابت للسيرورة $ARMA(P,Q)_{s\acute{,}s}$ في هذه الحالة السيرورة يمكن كتابتها كما يلي : $\Phi_p(B^s)Y_t = \mu + \Theta_Q\left(B^{\acute{s}}\right)\varepsilon_t$.

إن شروط إستقرارية وقابلية العكس للسيرورة ARMA الموسمية مماثلة لشروط إستقرارية وقابلية العكس للسيرورة ARMA الغير موسمية .

ملاحظة :

إن السيرورة ARMA الموسمية تسمي عند بعض الكتاب والباحثين بالسيرورة SARMA .

6- السيرورة الخطية الغير موسمية و الموسمية في نفس الوقت:

1-6 السيرورة AR التجميعية:

وتكتب كما يلي : $= AR(p) + AR(P)_s$ و $\left(\Phi_p(B) + \Phi_P(B^s) + 1\right)Y_t = \varepsilon_t$.

2-6 السيرورة MA التجميعية:

وتكتب كما يلي : $MA(q) + MA(Q)_{\acute{s}}$ و $Y_t = \left(\Theta_q(B) + \Theta_Q\left(B^{\acute{s}}\right) - 1\right)\varepsilon_t$.

3-6 السيرورة ARMA التجميعية:

وتكتب كما يلي : $ARMA(p,q) + ARMA(P,Q)_{s,\acute{s}}$ و :

$$\left(\Phi_p(B) + \Phi_P(B^s) + 1\right)Y_t = \left(\Theta_q(B) + \Theta_Q\left(B^{\acute{s}}\right) - 1\right)\varepsilon_t$$

4-6 السيرورة AR التضاعفية:

وتكتب كما يلي : $AR(p) \times AR(P)_s$ و $\Phi_p(B)\Phi_P(B^s)Y_t = \varepsilon_t$. حيث $p < S$

وهو مكافئ للسيرورة $AR(p + PS)$

5-6 السيرورة MA التضاعفية:

وتكتب كما يلي : $MA(q) \times MA(Q)_{\acute{s}}$ و $Y_t = \Theta_q(B)\Theta_Q\left(B^{\acute{s}}\right)\varepsilon_t$. حيث $q < \acute{s}$

وهو مكافئ للسيرورة $MA\left(q + Q\acute{S}\right)$.

6-6 السيرورة ARMA التضاعفية:

وتكتب كما يلي : $ARMA(p,q) \times ARMA(P,Q)_{s,\acute{s}}$ و :

$\Phi_p(B)\Phi_P(B^s)Y_t = \Theta_q(B)\Theta_Q\left(B^{\acute{s}}\right)\varepsilon_t$. حيث $p < s$ و $q < \acute{s}$ وهو مكافئ للسيرورة $ARMA\left(p + PS, q + Q\acute{S}\right)$. ومنه :

$$\left(1 - \varphi_1 B - \cdots - \varphi_p B^p\right)\left(1 - \varphi_s B^s - \cdots - \varphi_{Ps} B^{Ps}\right)Y_t = \left(1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q\right)\left(1 + \theta_{\acute{s}} B^{\acute{s}} + \cdots + \theta_{Q\acute{s}} B^{Q\acute{s}}\right)\varepsilon_t$$

هذه السيرورة السيرورة ARMA الغير موسمية والموسمية في نفس الوقت لها شروط تواجد دائما مماثلة للسيرورة ARMA الغير موسمية ،ويمكن أن تتواجد مع ثابت في الطرف الثاني من المعادلة.

مثال رقم 26:

أكتب هذه السيرورة علي شكل كثير حدود بدلالة معامل التأخير :

$ARMA(1,2) \times ARMA(1,1)_{6,12}$

الحل :

$$(1-\varphi_1 B)(1-\varphi_6 B^6)Y_t = (1+\theta_1 B+\theta_2 B^2)\,(1+\theta_{12}B^{12})\varepsilon_t \Leftrightarrow$$

$$(1-\varphi_1 B-\varphi_6 B^6+\varphi_1\varphi_6 B^7)Y_t$$
$$= (1+\theta_1 B+\theta_2 B^2+\theta_{12}B^{12}+\theta_1\theta_{12}B^{13}+\theta_2\theta_{12}B^{14})\varepsilon_t$$

ملاحظة :

السيرورة $ARMA(1,2)+ARMA(1,1)_{6,12}$ تكتب كما يلي:

$$[(1-\varphi_1 B)+(1-\varphi_6 B^6)+1]Y_t$$
$$= [(1+\theta_1 B+\theta_2 B^2)+\ (1+\theta_{12}B^{12})-1]\varepsilon_t\ \Leftrightarrow$$

$$[1-\varphi_1 B-\varphi_6 B^6]Y_t = [1+\theta_1 B+\theta_2 B^2+\theta_{12}B^{12}]\varepsilon_t.$$

الفصل الرابع : السيرورات الخطية للسلاسل الزمنية الغيرمستقرة ARIMA :

في حقيقة الأمر أن معظم السلاسل الزمنية الفعلية التي تنشأ في الإقتصاد ومجال الأعمال والبيئة وغيرها غالبا ما تكون غير مستقرة في المتوسط ولكنها تتميز بخاصية تعرف بالتجانس ،وبقصد بهذه الخاصية أنه بالرغم من أن المتوسط الحسابي لمثل هذه العمليات قد يتغير مع الزمن،إلا أن أجزاء من السلسلة تسلك سلوكا متشابها إلي حد كبير يمكن معه تحويل هذه السلاسل إلي سلاسل مستقرة ،ومن ناحية أخرى .ويغض النظر عن إستقرار المتوسط من عدمه .فإن كثير من السلاسل الفعلية التي تنشأ في فروع المعرفة المختلفة خاصة في الإقتصاد والبيئة يتغير تباينها بتغير الزمن (غالبا ما يتزايد) وهذا التغير عادة ما يأخذ نمط معين .مثل

هذه السيرورات (السلاسل) أيضا يمكن تحويلها إلي سلاسل مستقرة بإستخدام بعض التحويلات الرياضية البسيطة .

وتجدر الإشارة بالقول بأن التحويلات الرياضية التي تستخدم في إستقرار السلاسل لا يقتصرإستخدامها مع النماذج العشوائية DS(differencing stationary) ،ليشمل النماذج المحددة (غير العشوائية) TS(trend stationary) ،ولهذا يوجد نوعين من السلاسل الغير مستقرة.

1- السيرورة TS(trend statinary) :

هذه النماذج غير مستقرة وتبرر عدم إستقرارية تحديدية أي بمعني وجود إتجاه عام تحديدي deterministic trend ويأخذ الشكل $Y_t = f(t) + \varepsilon_t$ هي دالة كثير حدود للزمن قد تكون خطية غير خطية .وε_t تمثل خطأ التشويش الأبيض .وأكثر هذه النماذج إنتشارا هو كثير الحدود من الدرجة الأولى والذي يكتب على الشكل التالي: $Y_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t$.وخصائص هذه السيرورة هي :

$$* \ E(Y_t) = E[a_0 + a_1 t + \varepsilon_t] = a_0 + a_1 t\,.$$

$$* \ var(Y_t) = E[a_0 + a_1 t + \varepsilon_t - (a_0 + a_1 t)]^2 = E[0 + \varepsilon_t]^2 = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2\,.$$

$$* \ cov(Y_t, Y_{t'}) = 0 \quad ; \ \forall\, t \neq t'.$$

هذا النموذج غير مستقر لأن توقعه الرياضي $E(Y_t)$ مرتبط بالزمن لكننا نجعله مستقرا بتقدير المعلمات $\hat{a}_0$ و $\hat{a}_1$ بطريقة المربعات الصغرى (OLS) وطرح المقدار $\hat{a}_0 + \hat{a}_1 t$ من Y_t أي $\hat{Y}_t - \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t$. في هذا النوع من النمذجة ،يكون التاثير ناتج عن صدمة ما (أو صدمات عشواشية) في اللحظة t .

2- السيرورة DS(differency stationary) :

هذه النماذج أيضا غير مستقرة ،ولها خاصية عدم إستقرارية عشوائية أي وجود إتجاه عام عشوائي stochastic trend ،ويأخذ شكل نموذج $Y_t = Y_{t-1} + a + \varepsilon_t$ حيث ε_t يمثل التويش الأبيض ،a عدد ثابت حقيقي ،يمكننا جعلها بأخذ الفروقات لها :

$\Delta^d Y_t = (1-B)^d = a + \varepsilon_t$ و d هي درجة الفروقات ،غالبا ما نستعمل الفروقات من الدرجة الأولى $d = 1$ وتكتب على الشكل التالي: $\Delta Y_t = (1-B)Y_t = a + \varepsilon_t$.تأخذ هذه النماذج شكل :

* إذا كان $a = 0$ يسمي نموذج DS بدون مشتقة ويسمي كذالك بنموذج السير العشوائي (random walk model) ويكتب على شكل: $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ ،كثيرا ما يستخدم لتحليل كفاءة الأسواق المالية .لدراسة خصائص هذا النموذج نحاول كتابة في شكله الموسع :

$$Y_1 = Y_0 + \varepsilon_1$$

$$Y_2 = Y_1 + \varepsilon_{t-1} = Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\vdots \cdots$$

$$.Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

خصائص هذه السيرورة (بإفتراض أن Y_0 معلومة) :

* $E(Y_t) = Y_0.$

* $var(Y_t) = var(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i) = t\sigma_t^2.$

* $cov(Y_t, Y_{\acute{t}}) = Min(t, \acute{t})\sigma_\varepsilon^2 \;\; \forall \;\; t \neq \acute{t}$.

مثال رقم 27:

$$cov(Y_4, Y_2) = E[(Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - Y_0)(Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - Y_0)]$$

$$= E(\varepsilon_1\varepsilon_1) + E(\varepsilon_2\varepsilon_2) = 2\sigma_\varepsilon^2 \quad .$$

في الواقع نعلم أن كل جداء $t \neq \acute{t}$ فإن $E(\varepsilon_t\varepsilon_{\acute{t}}) = 0$ هذه السيرورة غير مستقرة في التباين لأنه مرتبط بالزمن .نعتبر هذه السيرورة عشوائية ،ولهذا علينا تطبيق الفرق من الدرجة الأولي : $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1-B)Y_t = \varepsilon_t$.

* إذا كان $a \neq 0$ يسمي نموذج DS مع المشتقة والتي تكتب كما يلي :

$$Y_t = Y_{t-1} + a + \varepsilon_t \ .$$

كما أنه في السابق يمكن إيجاد شكل مكافئ موسع :

$$Y_t = Y_{t-1} + a + \varepsilon_t$$

$$Y_{t-1} = Y_{t-2} + a + \varepsilon_{t-1} \implies Y_t = Y_{t-2} + 2a + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_{t-2} = Y_{t-3} + a + \varepsilon_{t-2} \implies Y_t = Y_{t-3} + 3a + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

لو فرضنا أن قيمة Y_0 معروفة ومحددة إذن الشكل يصبح كمايلي :

$$.Y_t = Y_0 + at + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

نستطيع تحليل خصائص هذه السيرورة :

$$* \ E(Y_t) = Y_0 + at \ .$$

$$* \ var(Y_t) = var(\textstyle\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i) = t\sigma_t^2.$$

$$* \ cov(Y_t, Y_{\acute{t}}) = Min(t, \acute{t})\sigma_\varepsilon^2 \ \ \forall \ \ t \neq \acute{t} \ .$$

السيرورة غير مستقرة بالنسبة لتوقعها وتباينها .

من خلال التوقع ،هذا الشكل هو نفسه نموذج TS ،حيث يمكن أن ندرك بأن هذه السيرورة غير مستقرة تحديدية وعشوائية في نفس الوقت.

يتم إستقرار هذه السيرورة بإستخدام معامل الفرق من الدرجة الأولي .

$$.Y_t = Y_{t-1} + a + \varepsilon_t \Leftrightarrow \ (1 - B)Y_t = a + \varepsilon_t$$

لنستخدم النموذج الموسع :

$$Y_t = Y_0 + at + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

$$Y_{t-1} = Y_0 + a(t - 1) + \sum_{i=1}^{t-1} \varepsilon_i$$

ومنه :

$.Y_t - Y_{t-1} = (1-B)Y_t = a + \varepsilon_t$

في السيرورات من نوع DS ،الصدمة في لحظة معينة ،يكون لها إنعكاس غير محدود على القيم المستقبلية للسلسلة ،وبالتالي تاثير الصدمة يكون دائم ويقل عبر الزمن.

نلخص ،لجعل السيرورة TS مستقرة ،أحسن طريقة هي طريقة المربعات الصغرى ،بالنسبة للسيرورة DS يجب إستخدام معاملات الفرق .

* الفرق TD و DS :

TSP	TDP
1- ليست مستقرة . 2- مستقرة بإزالة الإتجاه. 3- الإتجاه في المتوسط إتجاه محدد . 4- لا يوجد إتجاه في التباين أو التباين المشترك. 5- تاثير الصدمة مؤقت ،تاثير قصير.	1- لبست مستقرة . 2- مستقرة بعد أخذ الفرق . 3- الإتجاه في المتوسط ،أتجاه محدد أو لايوجد إتجاه محدد في المتوسط أي بدون أتجاه محدد. 4- إتجاه على مستوى التباين أو التباين المشترك ،إتجاه عشوائي ،يتضمن الإتجاه العشوائي جميع الصدمات العشوائية $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_t)$ التي لها تاثير دائم على مستوى $\mathrm{Y_t}$. 5- تاثير الصدمة دائم يستمر لمدة طويلة.

الفصل الخامس : إختبارت جذر الوحدة :

إن السلاسل الزمنية مستقرة ،لكن في العموم السلاسل غير مستقرة ،وجذر الوحدة يعني خصائص الجذور التي تساوي واحد ،وكذالك وجود جذر وحدة ،هذا يستلزم أن السلسلة غير مستقرة ،ويوجد عدة طرق للكشف عن إستقرار السلسلة من عدمها من بينها رسم البيانات وكذالك رسم دالة الإرتباط الذاتي الجزئي .ولكن رسم ACF ضعيف في الكشف عن جذر الوحدة يوجد الكثير من الإختبارات الإحصائية للكشف عن وجود جذر وحدة.

1- إختبار ديكي فولر :

يعمل إختبار ديكي فولر Dicky Fuller 1979 على البحث عن إستقرارية السلسلة أو عدمها .وذالك بمعرفة مركبة الإتجاه العام للسلسة سواء كانت تحديدية deterministic أو عشوائية stochastic ،ولهذا إختبار ديكي فولر يتمثل في النموذج $AR(1)$ كالتالي :

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \cdots (1)$$

$$Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \cdots (2)$$

$$Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + bt + \varepsilon_t \cdots (3)$$

قبل القيام بإجراء ،نحتاج إلى تقدير النموذج بطريقة المربعات الصغرى،بالنسبة للنموذج $AR(1)$ وجود جذر وحدة يعني أن $|\varphi_1| = 1$.

لذالك يوجد فرضيات للإختبار بعد التقدير :

$$H_0:\ |\varphi_1| = 1$$

$$H_1:\ |\varphi_1| < 1$$

قبول الفرضية H_0 يعني وجود إتجاه عام .أو النموذج نموذج سير عشوائي ،وقبول الفرضية H_1 يعني أن السلسلة مستقرة ،وهذا بالنسبة للمعادلة للمعادلة (1) و (2) .

أما بالنسبة للمعادلة (3) الفرضيات تكون كما يلي :

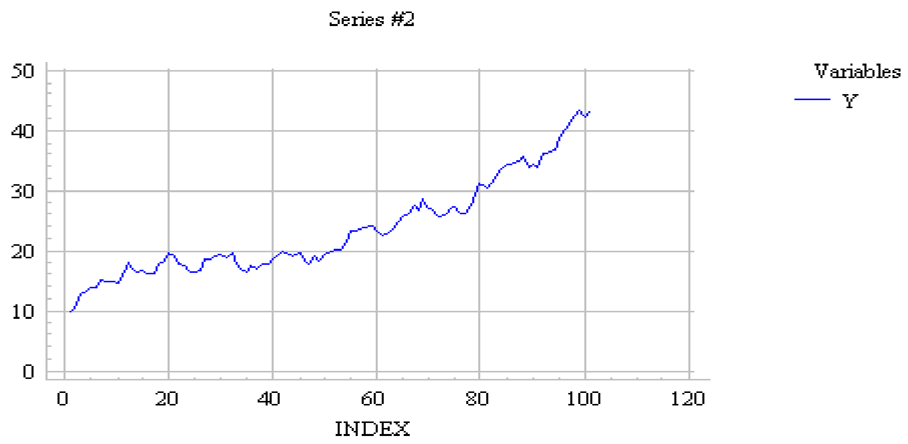
$$H_0:\ |\varphi_1| = 1\ ;\ b = 0$$

$$H_1:\ |\varphi_1| < 1 \quad b \neq 0$$

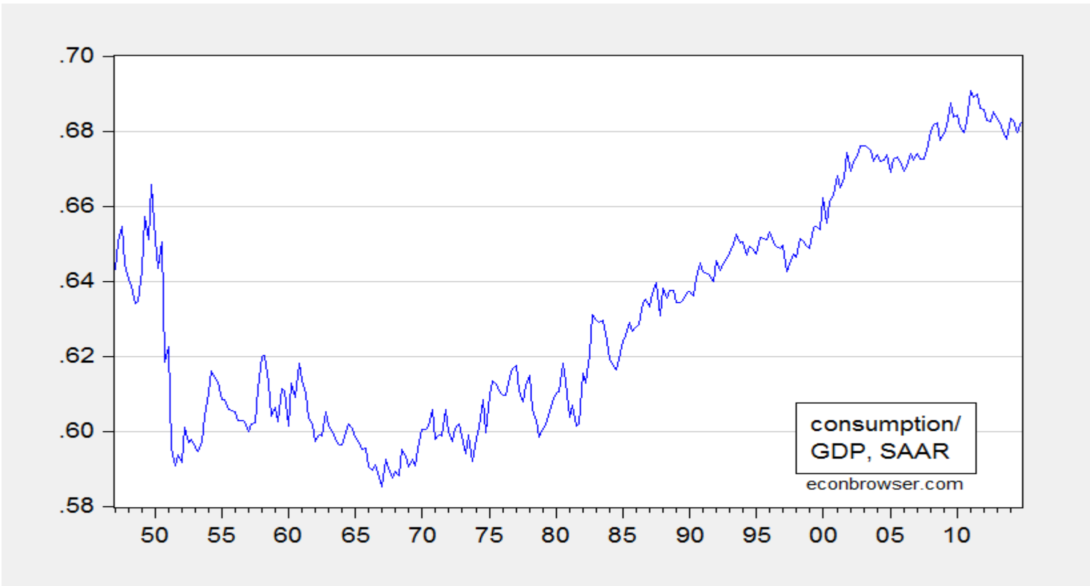
قبول H_0 يعني أن السيرورة من نوع DSP وقبول H_1 يعني أن السيرورة من نوع TSP يعد تحديد النموذج أمرا بالغ الأهمية لإختبار جذر الوحدة .إذا كانت مشاهدات السلسلة لا تظهر إتجاها متزايدا او متناقصا .إذن النموذج المناسب ،إما النموذج (1) أو (2) .

الأشكال التالية توضح المسار الزمني لسلسلة ذات إتجاه .

* **الحالة الأولى :** سلسلة بدون جذر وحدة .



* **الحالة الثانية :** السلسلة تحتوى جذر وحدة .



يرتكز إختبار ديكي فولر Dicky Fuller على النماذج الثلاثة التالية :

* **النموذج الأول :** إختبارجذر الوحدة بدون تابت (drift) وبدون إتجاه .

$$\Delta Y_t = \lambda Y_t + \varepsilon_t \cdots (4)$$

* **النموذج الثاني :** إختبارجذر الوحدة بثابت (with drift).

$$\Delta Y_t = \varphi_0 + \lambda Y_t + \varepsilon_t \cdots (5)$$

* **النموذج الثالث :** إختبارجذر الوحدة بثابت (with drift) وإتجاه تحديدي .

$$\Delta Y_t = \varphi_0 + bt + \lambda Y_t + \varepsilon_t \cdots (6)$$

يمكن تقدير هذه النماذج وإختبار جذر الوحدة وفق الفرضيات التالية :

* الفرضيات بالنسبة للنموذج (4) و (5) هي :

$H_0: \ |\lambda| = 0$.

$H_1: \ |\lambda| < 0$.

* الفرضيات بالنسبة للنموذج (6) هي :

$H_0: \ |\lambda| = 0 \, ; b = 0$.

$H_1: \ |\lambda| < 0 \quad b \neq 0$.

ملاحظة :

إختبار جذر الوحدة يكون من الطرف الأيسر على طرف واحد .

بعد تقدير $\hat{\varphi}_1$ بطريقة OLS المربعات الصغرى فإن :

$$\hat{\varphi}_1 = \varphi_1 + \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_{t-1}\varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{n} Y_{t-1}^2} \qquad \text{أو} \qquad \hat{\varphi}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_{t-1}Y_t}{\sum_{t=1}^{n} Y_{t-1}^2}$$

وكذالك لدينا التوقع لـ $\hat{\varphi}_1$ هو $E(\hat{\varphi}_1) = \varphi_1$ مقدر غير متحيز .وكذالك التباين هو :

$$\mathrm{var}(\hat{\varphi}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{n} Y_{t-1}^2} = \frac{\sigma^2}{\frac{n\sum_{t=1}^{n} Y_{t-1}^2}{n}} = \frac{\sigma^2}{\frac{n\sigma^2}{1-\varphi_1^2}} = \frac{1-\varphi_1^2}{n} \ .$$

لدينا $\varepsilon_t \backsim WN(0, \sigma^2)$، وتحت قبول الفرضية H_1 أي Y_t مستقرة بمعنى $|\varphi_1| < 1$ فإن :

$\hat{\varphi}_1 \backsim N\left(\varphi_1, \frac{1-\varphi_1^2}{n}\right)$.

نعلم أن القيمة الإحصائية تحت الفرضية H_0 هي :

$$t_{\hat{\varphi}_1} = \frac{\hat{\varphi}_1 - 1}{\sigma_{\hat{\varphi}_1}} = \frac{\hat{\lambda}}{\sigma_{\hat{\lambda}}} \backsim N(0,1)$$

ومنه تحت الفرضية H_0 ومن النتيجة أعلاه لـ $\hat{\varphi}_1$ التي تتبع التوزيع الطبيعي فإن :

$\hat{\varphi}_1 \backsim N(0_1, 1)$. والذي من الواضح لا معنى له .

في سنة 1987 أظهر Philips وديكي فولر Ducky Fuller أن لحظات العينة من Y_t تتقارب من الدالة العشوائية Browniam motion .

بعد التقدير بطريقة المربعات الصغرى OLS :

$$\hat{\varphi}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_{t-1} Y_t}{\sum_{t=1}^{n} Y_{t-1}^2}$$

عندما تكون القيمة الصحيحة لـ $\varphi = 1$ فإن :

$$.n(\hat{\varphi}_1 - 1) = \frac{n^{-1} \sum_{t=1}^{n} Y_{t-1} Y_t}{n^{-2} \sum_{t=1}^{n} Y_{t-1}^2}$$

ومنه :

$$.\ n(\hat{\varphi}_1 - 1) = \frac{\int_0^1 W(r) dW(r)}{\int_0^1 W(r)^2 dt}$$

$\hat{\varphi}_1$ لا تتبع التوزيع الطبيعي ،وبالتالي تم حساب القيم الحرجة للإختبار عن طريف المحاكاة ووضعوه في جدول يسمى جدول ديكي فولر ،ونفوم بحساب القيمة المحسوبة بعد تقدير المعلمة $\hat{\varphi}_1$ كما يلي :$n(\hat{\varphi}_1 - 1)$.

* إذا كانت $n(\hat{\varphi}_1 - 1)$ أكبر من القيمة المجدولة ،نقبل H_0 فرضية العدم ،إذن يوجد جذر وحدة ،ونرفض H_1 الفرضية البديلة .

مثال رقم 28:

ليكن النموذج التالي : $\hat{Y}_t = 0.946 Y_{t-1}$ حيث $n = 34$ و $\alpha = 5\%$.

الحل :

نقوم بحساب القيمة الإحصائية :

$.n(\widehat{\varphi}_1 - 1) = 34(0.964 - 1) = -1.836$

تحت مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ فإن القيمة المجدولة لما $n = 34$ هي $t_t = -1.95$ بما أن $-1.836 > -1.95$ نقبل H_0 ونرفض H_1 أي السلسلة Y_t غير مستقرة أي وجود جذر وحده ،ولهذا نحتاج لأخذ الفروق حتى تكون هذه السلسلة مستقرة .

2- إختبار ديكي فولر المطور Augmented Dicky Fuller :

سايد وديكي فولر في سنة 1984 قام بتطوير إختبار ديكي فولر البسيط وهو إمتداد لإختبار جذر الوحدة للإنحدار الذاتي ،هذا الإحتبار يشير إلى إختبار ديكي فوبر المطور .

* إختبار ديكي فولر إذا تحققت فرضية العدم H_0 نقول أن سلسلة الفروقات من الدرجة الأولى مستقرة أي إن السلسلة الأصلية Y_t متكاملة من الدرجة الأولى $I(1)$ ،أما إذا كانت السلسلة مستقرة بعد الحصول على الفروقات من الدرجة الثانية ،فإن السلسلة الأصلية متكاملة من الدرجة الثانية $I(2)$ ،أما إذا تحققت الفرضية البديلة H_1 فإن السلسلة الأصلية Y_t مستقرة ومتكاملة من الدرجة صفر $I(0)$.

* إذا كانت السلسلة من نوع سيرورة من إنحدار ذاتي بدرجات أعلى من واحد ،فإننا نحتاج إلى دمج الحدود المطورة لتحويلها إلى إنحدار ذاتي من الدرجة الأولى $AR(1)$ ،لنعتبر Y_t من نوع سيرورة $AR(2)$:

$$.Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \cdots (1)$$

نستطيع تغيير النموذج كالتالي :

$$Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t + \varphi_2 Y_{t-2} - \varphi_2 Y_{t-2} .$$

ومنه :

$$.Y_t = \varphi_0 + (\varphi_1 + \varphi_2) Y_{t-1} - \varphi_2 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \varepsilon_t$$

أو :

$$Y_t - Y_{t-1} = \varphi_0 + (\varphi_1 + \varphi_2) Y_t - \varphi_2 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \varepsilon_t - Y_{t-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$.\Delta Y_t = \varphi_0 + (\varphi_1 + \varphi_2 - 1) Y_{t-1} - \varphi_2 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \varepsilon_t$$

أو

$$.\Delta Y_t = \varphi_0 + \lambda Y_{t-1} + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \cdots (2)$$

حيث $\lambda = \varphi_1 + \varphi_2$ و $\alpha_1 = -\varphi_2$.

المعادلة (1) هي تكون نموذج إنحدار ذاتي من الدرجة الأولى $AR(1)$ مع حد مطور $\alpha_1 \Delta Y_{t-1}$ والنموذج هو نموذج ديكي فولر المطور ،أي أنه إذا كانت Y_t من نوع $AR(2)$ ،نحتاج إلى حد مطور واحد لتحويلها إلى $AR(1)$ ،كذالك النموذج $AR(2)$ هو نموذج ديكي فولر المطور من الرتبة الأولى ،النموذج $AR(1)$ هو نموذج ديكي فولر من الرتبة صفر ،أما بالنسبة للنموذج $AR(3)$ تكتب على الشكل :

$$.Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varphi_3 Y_{t-3} + \varepsilon_t \cdots (3)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varphi_3 Y_{t-3} + \varepsilon_t + \varphi_2 Y_{t-1} + \varphi_3 Y_{t-1} + \varphi_3 Y_{t-1} + \varphi_3 Y_{t-2} - \varphi_2 Y_{t-1} - \varphi_3 Y_{t-1} - \varphi_3 Y_{t-2}.$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Y_t = \varphi_0 + (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) Y_{t-1} - (\varphi_2 + \varphi_3)(Y_{t-1} - Y_{t-3}) - \varphi_3 (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \varepsilon_t .$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Y_t - Y_{t-1} = \varphi_0 + (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) Y_{t-1} - (\varphi_2 + \varphi_3)(Y_{t-1} - Y_{t-3}) - \varphi_3 (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \varepsilon_t - Y_{t-1} .$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Delta Y_t = \varphi_0 + (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - 1) Y_{t-1} - (\varphi_2 + \varphi_3)(Y_{t-1} - Y_{t-3}) - \varphi_3 (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \varepsilon_t .$$

$$\Leftrightarrow$$

$.\Delta Y_t = \varphi_0 + \lambda Y_{t-1} + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \alpha_3 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$

حيث $\lambda = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - 1$ و $\alpha_1 = -(\varphi_2 + \varphi_3)$ و $\alpha_2 = \varphi_3$.

هذا النموذج نموذج $AR(1)$ مع حدين مطورين ،وهكذا إذا كان لدينا سيرورة من نوع $AR(p)$،يجب علينا دمج $(p-1)$ حد مطور داخل النموذج المنشأ $AR(1)$.

$.\Delta Y_t = \varphi_0 + \lambda Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$

لو أدرجنا مركبة الإتجاه العام المحدد في محتوى النموذج $AR(p)$ ،صيغة ديكي فولر المطور من الرتبة $(p-1)$.

أما بالنسبة لدرجة الفرق من الدرجة الثانية Δ^2 يكون كما يلي :

$.\Delta^2 Y_t = \tilde{\varphi}_0 + \tilde{\lambda} Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \tilde{\alpha}_i \Delta^2 Y_{t-i} + \varepsilon_t$

$.H_0: \; Y_t \backsim I(1)$

$.H_1: \; Y_t \backsim I(0)$

H_0: مرفوض $Y_t \backsim I(0)$

H_1: مقبول $\Rightarrow$

$H_0: \; Y_t \backsim I(2)$

أو $H_0: \; \Delta Y_t \backsim I(1)$

$H_1: \; Y_t \backsim I(1)$

H_0: مرفوض $Y_t \backsim I(1)$

H_1: مقبول $\Rightarrow$

$H_0: \; Y_t \backsim I(3)$

أو $H_0: \; \Delta^2 Y_t \backsim I(1)$

$H_1: \quad Y_t \backsim I(2)$

$H_0:$ مرفوض $Y_t \backsim I(2)$

$H_0:$ مرفوض : يوجد مشكل

خلاصة :

خلاصة إختبار ديكي فولر ،أننا نقوم بتقدير الإنحدار ثم نقوم بحساب الفيمة المحسوبة .

* $t_{\hat{\varphi}_1} = n(\hat{\varphi}_1 - 1)$ لها توزيع ولها جدول خاص بها وهو جدول ديكي فولر .

* $t_{\hat{\varphi}_1} = \frac{n(\hat{\varphi}_1 - 1)}{\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}_1}}$ لها توزيع ولها جدول خاص بها وهو جدول ديكي فولر .

يجب مقارنة هذه القيم بـ t_{DF} القيمة المجدولة لديكي فولر لكل جدول ،إذا كانت

$|t_{\hat{\varphi}_1}| > t_{DF}$ ومن هنا نقبل H_0 فرضية العدم ،ومنه نقول أن السلسلة لها جذر وحده ،أي السلسلة غير مستقره ونقبل H_1 الفرضية البديلة إذا كان العكس .

مثال رقم 29:

عندما يكون الحد الثابت موجود على مستوى تقدير الإنحدار الذاتي بالنسبة لبيانات معدل الفائدة والمثال التالي نتيجة كالتالي بعد التقدير :

$$i_t = 0.211 + 0.9669 i_{t-1}$$

$$(0.112) \quad (0.019133)$$

حيث $n = 168$ و القيم التي بين قوسين تمثل الإنحرافات المعيارية .

الحل :

إختبار ديكي فولر يرتكز على القيمة المقدرة لـ φ_0 ومنه :

* **الحالة الأولى :** $t_{\hat{\varphi}_1} = n(\hat{\varphi}_1 - 1) = 168(0.96691 - 1) = -5.56$.

من جدول ديكي فولر الخاص بهذه الحالة عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ نجد أن القيمة الحرجة هي $t_{DF} = -13.8$ نلاحظ أن $-13.8 < -5.56$ ومنه نقبل H_0 أي أن $\hat{\varphi}_1 = 1$ أي يوجد جذر أحادى السلسلة غير مستقرة .

* **الحالة الأولى :** $t_{\hat{\varphi}_1} = t_{\hat{\varphi}_1} = \frac{n(\hat{\varphi}_1 - 1)}{\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}_1}} = \frac{(0.96691-1)}{0.019133} = -1.73$.

من جدول ديكي فولر الخاص بهذه الحالة عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ نجد أن القيمة الحرجة هي $9t_{DF} = -2.89$ نلاحظ أن $-2.89 < -1.73$ ومنه نقبل H_0 أي أن $\hat{\varphi}_1 = 1$ أي يوجد جذر أحادى السلسلة غر مستقرة .

3- تحديد درجة التأخير :

من المهم تحديد درجة التاخير (scherert 1989) و (Harris 1992) و (Agiakloglou and Newbold 1993) عرض من قبل $(Ng\ and\ Person)$ إذا تم إختبار p على أساس معيار المعلومات $information\ criteria\ (IC)$، طريقة تحديد معامل التاخير على أساس معيار المعلومات (IC) والتي تعنى المفاضلة بين تشوهات الحجم وهذا لإدراج عدد قليل من فترات معامل التأخير وفقدانه للمصدقية لإدراجه عدد كبير من فترات معامل التأخير ،بهذه الطريقة (IC) معامل التأخير الأفضل (p^*) نتحصل عليه بالطريقة التالية :

$$p^* = \text{argmin}\left(\text{p}_{\min} \leq \text{p} \leq \text{p}_{\max} IC(p)\right).$$

$$IC(p) = ln\hat{\sigma}_p^2 + p\frac{C_t}{T}.$$

حيث $\hat{\sigma}_{\text{p}}$ هي مقدار البواقي بطريقة المربعات الصغرى OLS لـ p درجة الإنحدار لديكي فولر المطور .و C_t هي دالة جزائية محددة بأشكال حسب معيار المعلومات الذي سيستخدم .

معيار المعلومات الأكثر استخداما هم :

* Akaike information criterion(AIC) المقترحة من طرف Akaike سنة 1979 .

* Bayesian information criterion(BIC) المقترحة من طرف Schwartz سنة 1978 .

* Hannan and Quinn information criterion(HQIC) .

ومنه في معيار (AIC) قيمة $C_t = 2$. وفي معيار (BIC) قيمة $C_t = \ln T$ وفي معيار (HQIC) قيمة $C_t = \ln(\ln T)$. والتي تعطي كلها المعادلات التالية :

* $AIC(P) = Tln\hat{\sigma}_p^2 + 2P$.

* $BIC(P) = Tln\hat{\sigma}_p^2 + Pln(T)$.

* $\mathrm{HQIC(P)} = \mathrm{Tln}\hat{\sigma}_\mathrm{p}^2 + \mathrm{Pln}\big(\ln(\mathrm{T})\big)$.

في هذا الأجراء يجب أن نضع حد أعلى Pmax لـ p ،وتقدير نموذج إنحدار ديكي فولر مع $p = Pmax$ ،إذا كانت معاملات فروق التاخير غير معنوية إحصائيا نحن بحاجة إلى تقليل طول التأخير الفرق الواحد تلو الآخر وإعادة العملية .يوجد قاعدة مفيدة مشهورة لتحديد $Pmax$ المقترحة من طرف Schwartz(1989) هي :

$$.Pmax = int\left[12\left(\frac{T}{100}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$$

مثال رقم 29:

دعنا نقدر (AIC) و (BIC) حيث $\hat{\sigma}_p^2$ تستخدم كما هي موضحة في الجدول التالي ،و T تمثل حجم العينة .

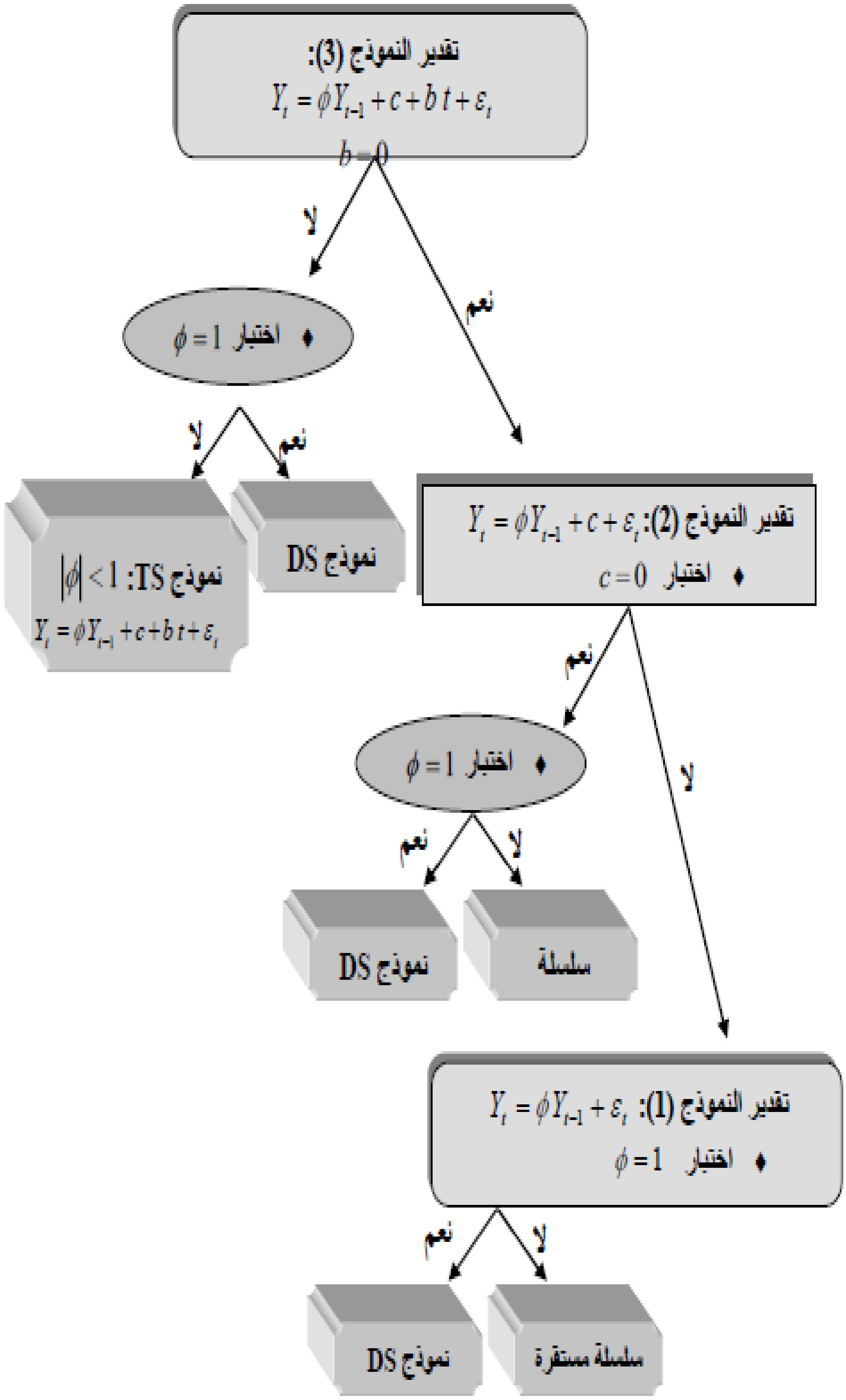
	P=0	P=1	p=2
$\hat{\sigma}_p^2$	2256	2017	1944
$Tln\hat{\sigma}_p^2$	200.4	200.29	200.25
$Pln(T)$	30.03	30.05	30.08
$2P$	29.01	29.02	29.03
BIC	230.43	230.34	230.33
AIC	229.41	229.31	229.28

كما يرى في الجدول أعلاه بعد الحساب .نلاحظ أن أقل قيمة عند BIC لما $p = 2$ ،وكذالك أقل قيمة عند AIC لما $p = 2$ ومنه العدد المحدد هو $p = 2$.

السلسلة مستقرة .

فيما يلي صورة مبسطة لمنهجية إختبارات الجذر الأحادي ADF.

الشكل يوضح منهجية مبسطة لإختبارات جذر الوحدة .



المصدر : محمد شيخي طرق الإقتصاد القياسي .

4- إختبار ديكي فليبس بيرون Phillips Peron :

سنة 1988 طور نظرية أكثر شمولية للسلاسل الغير مستقرة ،أي التي لها جذر وحدة ،الإختبار مشابه لإختبار ADF ،إختبار جذر الوحدة لفليبس وبيرون يختلف عن إختبار ADF أساسا في كيفية التعامل مع الإرتباط التسلسلي والأخطاء ε_t ،وعدم تجانس الأخطاء على وجه الخصوص ،حيث إختبار ADF يستخدم إنحدار ذاتي معلمي ،والتي تقترب من بنية نموذج $ARMA$ للأخطاء في إنحدار الإختبار،بينما إختبارات فليبس وبيرون تتجاهل الإرتباط التسلسلي في إختبار الإنحدار .الإختبار عادة يعطى نفس النتائج وحساب قيم إحصائية معقدة .

لنعتبر النموذج : $Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

.DF: $\varepsilon_t \sim$ iid (مستقلة ومتماثلة التوزيع)

.PP: $\varepsilon_t \sim$ (إرتباط متسلسل)(serially correlated)

إضافة المعامل المصحح المسمى التباين على المدى الطويل لإحصائية إختبار DF ديكي فولر البسيط (ADF هو يكون مضافا إليه معامل التأخير الفرق ΔY_t) .

* فرضيات إختبار فليبس وبيرون :

$.H_0: \ |\lambda| = 0$

$.H_1: \ |\lambda| < 0$

إحصائية إختبار فليبس وبيرون هي إحصائية ستودنت المصححة بطريقة غير معلمية ،والتي تعتمد على المعامل المصحح ،الذي يسمح بتقدير تباين الأخطاء ε_t على المستوى الطويل (تحسب بواسطة الكثافة الطيفية للخطأ العشوائي ε_t بتردد صفري f_0) هذا الذي يسمح بأن يكون إختبار فليبس وبيرون قوي في وجود إرتباط ذاتي للأخطاء وكذالك وجود عدم تجانس الأخطاء ε_t ،يوجد من مقدرات الطيف بتردد صفر f_0 بالنسبة للأخطاء العشوائية ε_t .

* مقدرات قاعدة البيانات ($Kernel - based\ estimator$) أو مقدر النواة .

* مقدرات الكثافة الطيفية للإنحدار الذاتي .

يعتمد إختبار فليبس وبيرون على نفس التوزيعات الإحصائية المرفقة لإختباري DF و ADF ويجرى هذا الإختبارفي عدة مراحل :

- التقدير بواسطة OLS النماذج الثلاثة القاعدية لإختبار ديكي فولر Dicky Fuller مع حساب الإحصائيات المرافقة .

- مقدر المجموع المرجح للتباين المشترك للبواقي : $\hat{Y}_J = \sum_{t=j+1}^{n} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-j}$.

- تقدير التباين قصير المدى و $\hat{\varepsilon}_t$ تمثل البواقي $\gamma_0 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2}{n}$.

- تقدير التباين على المدى الطويل لـ $\hat{\varepsilon}_t$ أو تقدير المعامل المصحح $\widehat{W}^2$:

$$\hat{w}^2 = \hat{\gamma}_0 + 2\sum_{j=1}^{q}\left(1 - \frac{j}{q+1}\right)\hat{\gamma}_j.$$

وهذا المقدار يشار إليه كذاك بمقدار Newy − west estimator هذا المقدر يتطلب إختيار حجم النافذة ويسمى (Bartlet window) نافذة بارتلت ،والتي $\left(1 - \frac{j}{q+1}\right)$. يوجد العدد من النوافذ منها Bartlet window و Parzen window و *Quadratic spectrale window*، وكذالك من أجل تقدير هذا التباين من الضروري إيجاد عدد التأخيرات لـ q المقدر بعدد المشاهدات n على النحو التالي : $q = 12\left(\frac{n}{100}\right)^{\frac{1}{4}}$.

- S^2 هو تباين البواقي لـ $\hat{\varepsilon}_t$ بطريقة المربعات الصغرى OLS حيث : $S^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2}{n-2}$.

- حساب إحصائية فليبس وبيرون كما يلي :

$$Z_{\hat{\alpha}} = n(\hat{\varphi}_1 - 1) - \frac{1}{2}\left(\frac{n^2\hat{\sigma}^2_{\hat{\varphi}_1}}{S^2}\right)\left(\widehat{W}^2 - \hat{\gamma}_0\right).$$

$$Z_t = \sqrt{\frac{\hat{\gamma}_0}{\widehat{W}^2}}\left(\frac{\hat{\varphi}_1 - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}_1}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{W}^2 - \hat{\gamma}_0\left(n\frac{\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}_1}}{s}\right)}{\hat{w}}\right).$$

مميزات إختبار PP على إختبارات ADF :

* قوي بالنسبة للصيغ العامة لعدم تجانس حد الخطأ العشوائي ε_t .

* لا يحتاج لتحديد طويل معامل التأخير كما رينا في إختبار *ADF* .

مثال رقم 30:

ليكن $\hat{\varepsilon}_t$ يشير إلى مقدار البواقي بطريقة المربعات OLS وهذا بالنسبة للإنحدار معدل الفائدة كما يلي :

$$\hat{\varepsilon}_t = i_t - 0.211 - 0.96691 i_{t-1} \quad , t = 1,2, \cdots 168$$

$$(0.112) \quad (0.019133)$$

حيث $q = 4$.

مقدرات التباين المشترك للبواقي :

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2}{n} = 0.630 \qquad ; \hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{n} = 0.114 \; ;$$

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-2}}{n} = -0.162 \qquad ; \; \hat{\gamma}_3 = \frac{\sum_{t=4}^{n} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-3}}{n} = 0.064$$

$$\hat{\gamma}_4 = \frac{\sum_{t=5}^{n} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-4}}{n} = 0.047 \qquad ; \; S^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2}{n-2} = 0.63760$$

الحل :

$$\hat{w}^2 = 0.630 + 2\left(\frac{4}{5}\right)(0.114) + 2\left(\frac{3}{5}\right)(-0.162) + 2\left(\frac{2}{5}\right)(0.064) + 2\left(\frac{1}{5}\right)(0.047) = 0.688 \; .$$

$$Z_{\hat{\alpha}} = n(\hat{\varphi}_1 - 1) - \frac{1}{2}\left(\frac{n^2 \hat{\sigma}_{\hat{\varphi}_1}^2}{S^2}\right)\left(\widehat{W}^2 - \hat{\gamma}_0\right)$$

$$Z_{\hat{\alpha}} = 168(0.96691 - 1) - \frac{1}{2}\frac{[(168)(0.019133)]^2}{0.63760}(0.688 - 0.630) = -0.603$$

$.Z_{\hat{\alpha}} = -0.603$

حسب حالة النموذج رقم 2 عند مستوى معنوية 5% فإن القيمة الحرجة هي -13.8 نلاحظ أن $-13.8 < -6.03$ ومنه نقبل الفرضية H_0 وهذا يعني أن السلسلة الخاصة بمعدل الفائدة تحتوي على جذر الوحدة .

$$Z_t = \sqrt{\frac{\hat{\gamma}_0}{\widehat{W}^2}}\left(\frac{\hat{\varphi}_1 - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}_1}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{W}^2 - \hat{\gamma}_0\left(n\frac{\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}_1}}{s}\right)}{\hat{w}}\right).$$

$$= \left[\sqrt{\frac{(0.630)}{0.688}}\cdot\left(\frac{0.96691-1}{0.019133}\right) - \left[\frac{\frac{1}{2}(0.688-0.630)\left(\frac{168(0.019133)}{\sqrt{0.63760}}\right)}{\sqrt{0.688}}\right]\right] = -1.80 \quad .$$

من خلال الجدول عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ فإن القيمة الحرجة تساوي -2.89. ومنه $-2.89 < -1.80$ نقبل H_0 ومنه يوجد جذر وحدة .

5- إختبار KPSS 1992 :

إختبار KPSS يقترح تصحيح غير معلمي للإرتباط الذي مماثل لإختبار فليبس وبيرون ،إختبار KPSS يعالج مشكلة إحتمالية وجود إرتباط ذاتي للأخطاء ε_t ،ويستخدم معامل التصحيح الذي يقدر التباين الطويل المدى للأخطاء ε_t (الذي يحسب بواسطة الكثافة الطيفية للأخطاء لـ ε_t بتردد صفري f_0) .

الفرضية الصفرية H_0 لإختبار ADF و PP تمثل وجود جذر وحدة أي $H \sim I(1)$ أما بالنسبة لإختبار KPSS فإن الفرضية الصفرية H_0 تمثل غياب جذر الوحدة أي $H \sim I(0)$ أي أن السلسلة تكون مستقرة ،والذي يعتمد على النموذجين التالين :

$$Y_t = a + \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t ; t = 1,2, \cdots n.$$

$$Y_t = a + bt + \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t ; t = 1,2, \cdots n.$$

نحن نهتم بفرضية العدم ومنه :

$H_0: \ |\varphi_1| < 1$; غياب جذر الوحدة.

$H_1: \ |\varphi_1| = 1$ وجود جذر الوحدة

إقترح Kwiatkowski , Phillips , Schmidt and Schur إستخدام مضاعف لاغرانج لإختبار فرضية الإستقرارية H_0 لتطبيق إختبار KPSS نتبع الخطوات التالية :

* فبعد تقدير النموذجين أعلاه ،نحسب المجموع الجزئي للبواقي: $S_t = \sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t$.

* تقدير التباين طويل المدى $\hat{w}^2$ بنفس طريقة إختبارفليبس وبيرون كما يلي :

$$\hat{w}^2 = \hat{\gamma}_0 + 2\sum_{j=1}^{q}\left(1 - \frac{j}{q+1}\right)\hat{\gamma}_j \ .$$

* تحسب إحصائية إختبار KPSS من العلاقة التالية :

$$.LM_{\text{KPSS}} = \frac{1}{\hat{w}^2}.\frac{\sum_{t=1}^{n} s_t^2}{n^2}$$

- إذا كانت قيمة LM_{KPSS} أكبر من القيمة الحرجة المستخرجة من الجدول المعد من طرف Phillips Kwiakowski ،إذن نقبل H_0 إذن السلسلة مستقرة .

- إذا كانت قيمة LM_{KPSS} أكبر من قيمة الحرجة المستخرجة من الجدول ،إذن نرفض H_0 إذن وجود جذر وحدة .

ما هو إختبار جذر الوحدة المستخدم ؟.

* ADF * PP * KPSS .

- إختبار فليبس وبيرون أقوى في عدم التجانس مقارنة بإختبار ADF .

- إختبار KPSS لديه فرضية صفرية عكس إختبار ADF وPP لذالك فهي إختبارات تكميلية وليست إلزامية ،التي تستخدم يمكن أن تعطى نتائج قوية .

الفصل الخامس : السيرورات المختلطة الغير مستقرة :

إختبارات ديكي فولر المطورة ،كما درسنا أنه يسمح بتحديد إذا كانت السلسلة مستقرة وكذالك الحالة الغير مستقرة مع تحديديها لنوعها : TS و DS ،إذا كانت السلسلة المدروسة من

نوع TS يجب أن تكون مستقرة عن طريق الإنحدار خلال الزمن بإستخلاص بواقي معادلة الإتجاه العام ،ثم يتم مواصلة التقدير بواسطة منهجية بوكس جنكينز $\mathrm{Box-jinkins}$ هذا يسمح بتحديد رتبة p و q من جزء AR و MA للأخطاء ،النموذج دائما يكون في هذه الحالة $\mathrm{ARMA}(p,q)$.

إذا كانت السلسلة المدروسة من نوع DS ،يجب أن تكون مستقرة عند إستخدام درجات الفروق حسب درجة التكامل $\mathrm{I}=\mathrm{d}$ (بمعنى عدد مرات التي يجب أن تكون حتى تكون السلسلة مستقرة) ،كذالك السلسلة المستقرة بواسطة إستخدام الفروق تتم مواصلة دراستها بواسطة منهجية بوكس-جينكز $\mathrm{Box-jinkins}$ التي تسمح كذالك بتحديد رتبة AR و MA نرمز لهذا النوع من النموذج بـ $\mathrm{ARIMA}(p,q)$.

1- السيرورة $\mathrm{ARMA}(p,q)$ غير المستقرة (نماذج ARIMA) :

السلسلة Y_t غير مستقرة فيقال عنها أنها متكاملة أو غير مستقرة Integrated or Nonstationary ،وإذا تعين الحصول على فروقات السلسلة d مرة حتى تصبح مستقرة ،يقال عندئذ أن السلسلة Y_t متكاملة من الدرجة d $\mathrm{I(d)}$.

وبعبارة أخرى نقول أن Y_t هي سلسلة متجانسة وغير مستقرة متكاملة من الدرجة d إذا وجدت $\mathrm{W_t}=\Delta^{d}\mathrm{Y_t}$ سلسلة مستقرة جديدة ،ومنه يمكن أن ننمذج السلسلة الجديدة $\mathrm{W_t}$ كأنها $\mathrm{ARMA}(p,q)$ في هذه الحالة ينتج أن $\mathrm{Y_t}$ هي سيرورة $\mathrm{ARIMA}(p,d,q)$ ،ويسمى كذالك بنموذج الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك المتكامل ،هذا الأخير بالإضافة إلى الدرجتين p و q فإنه يتميز بدرجة ثالثة d .

مثال رقم 31:

ليكن Y_t هي سيرورة من $\mathrm{ARIMA}(p,1,q)$ كما يلي: $W_t=\mathrm{Y_t}-\mathrm{Y_{t-1}}=\Delta\mathrm{Y_t}$ ،ومن ثم W_t سيرورة من نوع $\mathrm{ARMA}(p,q)$ ومنه يفترض أن :

$$.W_t=\varphi_1\mathrm{W_{t-1}}+\varphi_2\mathrm{W_{t-2}}\cdots+\varphi_p\mathrm{W_{t-p}}+\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\cdots+\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

ومنه Y_t مقبولة :

$Y_t - Y_{t-1} = \varphi_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \varphi_2(Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \cdots + \varphi_p(Y_{t-p} - Y_{t-p+1}) + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$.

وكذالك نتحصل على صيغة معادلة الفرق لـ Y_t :

$\Delta Y_t = \varphi_1\Delta Y_{t-1} + \varphi_2\Delta Y_{t-2} + \cdots + \varphi_p\Delta Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$.

والتي هي سيرورة من نوع: $ARIMA(p,1,q) = ARMA(p+1,q)$.

كثير الحدود الخاص بالإنحدار الذاتي AR لـ Y_t والممثل بواسطة معامل التأخير B يكون $(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 + \cdots + \varphi_p B^p)(1 - B)$ التي لها جذر وحدة ،إذن السيرورة $ARMA(p+1,q)$ غير مستقرة.

في العموم إذا كانت السلسلة Y_t من نوع $ARIMA(p,d,q)$ و $W_t = \Delta^2 Y_t$ فإن الشكل العام يكون كمايلي :

$W_t = \varphi_1 W_{t-1} + \varphi_2 W_{t-2} \cdots + \varphi_p W_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$.

وكذالك نتحصل على معادلة الفرق والتي شكلها كما يلي :

$\Delta^d Y_t = \varphi_1\Delta^d Y_{t-1} + \varphi_2\Delta^d Y_{t-2} + \cdots + \varphi_p\Delta^d Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$.

حيث $\Delta^d Y_t$ لها كثير الحدود الخاص بالإنحدار الذاتي AR والممثل بواسطة معامل التأخير B يكون $\Phi_p(B)$ ثم Y_t لها كثير الحدود الخاص بالإنحدار AR والذي هو $\Phi_p(B)(1-B)^d$ يمكننا إستخدام هذا لتحديد نوع نماذج ARIMA .

إذا كانت السيرورة الصادرة $ARMA(p,q)$ ،إذن السيرورة المدخلة Y_t هي $ARIMA(p,d,q)$ ،السيرورة $ARIMA(p,d,q)$ يمكن كتابتها بدلالة معامل التأخير B كما يلي:

$\Phi_p(B)(1-B)^d Y_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t$.

$\left[\mathrm{ARIMA(p,d,q)} = ARMA(p+d,q)\right.$ غير مستقرة$\left.\right]$

ملاحظة :

يتم تطبيق نماذج ARIMA في بعض الحالات التي يظهر فيها البيانات تأكيد على عدم الإستقرارية ،حيث خطوة الفرق الأولية يمكن تطبيقها مرة أو أكثر من مرة وهذا لجعل السلسلة مستقرة .

$\mathrm{AR(p)} \equiv \mathrm{ARIMA(p,0,0)}$.

$\mathrm{MA(q)} \equiv \mathrm{ARIMA(0,0,q)}$.

$\mathrm{ARMA(p,q)} \equiv \mathrm{ARIMA(p,0,q)}$.

$\mathrm{WN} \equiv \mathrm{ARIMA(0,0,0)}$.

مثال رقم 32:

* ARIMA(1,1,1)

يمكن كتابتها كما يلي :

$$\equiv \quad (1-\varphi_1 B)(1-\mathrm{B})\mathrm{Y_t} = (1+\theta_1\mathrm{B})\varepsilon_t$$

$$\equiv \quad (1-\varphi_1 B)\Delta\mathrm{Y_t} = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

$$\equiv \quad \Delta\mathrm{Y_t} - \varphi_1\Delta\mathrm{Y_{t-1}} = \varepsilon_t + \theta_1\mathrm{B}\varepsilon_t$$

$$\Delta\mathrm{Y_t} = \varphi_1\Delta\mathrm{Y_{t-1}} + \varepsilon_t + \theta_1\mathrm{B}\varepsilon_t.$$

* ARIMA(2,1,1)

يمكن كتابتها كما يلي :

$$\equiv \quad (1-\varphi_1\mathrm{B}-\varphi_2\mathrm{B}^2)(1-\mathrm{B})\mathrm{Y_t} = (1+\theta_1\mathrm{B})\varepsilon_t$$

$$\equiv \quad (1-\varphi_1\mathrm{B}-\varphi_2\mathrm{B}^2)\Delta\mathrm{Y_t} = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

$$\Delta Y_t - \varphi_1 \Delta Y_{t-1} - \varphi_2 \Delta Y_{t-2} = \varepsilon_t + \theta_1 B \varepsilon_t \quad \equiv$$

$$.\Delta Y_t = \varphi_1 \Delta Y_{t-1} - \varphi_2 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 B \varepsilon_t$$

* ARIMA(1,2,2)

يمكن كتابتها كما يلي :

$$(1-\varphi_1 B)(1-B)^2 Y_t = (1+\theta_1 B + \theta_2 B^2)\varepsilon_t \quad \equiv$$

$$(1-\varphi_1 B)\Delta^2 Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \quad \equiv$$

$$\Delta^2 Y_t - \varphi_1 \Delta^2 Y_{t-1} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \quad \equiv$$

$$.\Delta^2 Y_t = \varphi_1 \Delta^2 Y_{t-1} \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

* الحد الثابث في نماذج ARIMA :

إذا كانت Y_t من نوع $ARIMA(p,d,q)$ و $W_t = \Delta^d Y_t$ من نوع $ARMA(p,q)$ عندما W_t يكون لديها متوسط ثابت حيث $\mu \neq 0$ يمكن أن تنمذج على الشكل التالي :

$$.W_t - \mu = \alpha + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i (W_{t-i} - \mu) + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \vartheta_j \varepsilon_{t-j}$$

بأخذ القيمة المتوقعة يمكن الحصول على ما يلي :

$$.\alpha = \mu(1 - \varphi_0 - \varphi_1 - \varphi_2 - \cdots - \varphi_p)$$

هناك عائلتان خاصتان بالسيرورات الغير مستقرة ،وهما :

* $IMA(d,q) = ARIMA(0,d,q)$ السيرورة لا تحتوى عنصر الإنحدار الذاتي .

* $IRA(p,d) = ARIMA(p,d,0)$ السيرورة لا تحتوى عنصر المتوسط المتحرك .

مثال رقم 33:

* $IMA(1,1) = ARIMA(0,1,1)$

$$\Delta Y_t = (1-B)Y_t = (1+\theta_1 B)\varepsilon_t \quad \equiv$$

$$Y_t - Y_{t-1} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_t \qquad \equiv$$

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_t$$

$$* \ IMA(2,2) = ARIMA(0,2,2)$$

$$\Delta^2 Y_t = (1 - B)^2 Y_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2)\varepsilon_t \quad \equiv$$

$$\Delta(\Delta Y_t) = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_t + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} \qquad \equiv$$

$$\Delta(Y_t - Y_{t-1}) = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_t + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} \qquad \equiv$$

$$\Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_t + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} \qquad \equiv$$

$$Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-1} - Y_{t-2} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_t + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} \qquad \equiv$$

$$Y_t = 2Y_{t-1} + Y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_t + \varphi_2 \varepsilon_{t-2}$$

$$* \ ARIMA(1,1,1)$$

$$(1 - \varphi_1 B)(1 - B)Y_t = \varepsilon_t \quad \equiv$$

$$(1 - \varphi_1 B)\Delta Y_t = \varepsilon_t \qquad \equiv$$

$$\Delta Y_t - \varphi_1 \Delta Y_{t-1} = \varepsilon_t \quad \equiv$$

$$Y_t - Y_{t-1} = \varphi_1 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \varepsilon_t \quad \equiv$$

$$Y_t = Y_{t-1} + \varphi_1 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \varepsilon_t \quad \equiv$$

$$Y_t = (1 + B)Y_{t-1} - \varphi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

2- السيرورة $\mathbf{ARIMA(P,D,Q)}$ الموسمية (السيرورة $\mathbf{ARMA(P,Q)}$ الموسمية الغير مستقرة) :

نعتبر سلسلة Y_t ممثلة بالسيرورة DS الموسمية من الرتبة D وبالفترة الموسمية S ،يمكن إرجاع هذه السلسلة مستقرة بإستعمال المرشح الذي يدمج الفروقات الموسمية من الرتبة D أي:

$$Y_t = \Delta_s Y_t = Y_t - Y_{t-s} = (1 - B^s)Y_t.$$

تحتوى السلسلة Y_t على D جذر أحادي حقيقي أو مركب ،بمعنى اخر نقول عنها أنها متكاملة من الدرجة D ونكتب $Y \backsim I_s(D)$ حيث D هي درجة التكامل و s تمثل الفترة الموسمية .

خلاصة :

نفترض أن السيرورة المتحصل عليها من المرشح هي W_t وهي من نوع $SARIMA_{s,\acute{s}}(P,Q)$ غير مستقرة ،وكذالك $\mathrm{SARIMA}(P,D,Q)$ هي سيرورة $SARMA(P,Q)$ W_t مستقرة .

3- السيرورة ARIMA الموسمية والغير موسمية في نفس الوقت :

من خلال نماذج ARIMA الغير موسمية ونماذج ARIMA الموسمية يمكن بناء نماذج تضاعفية أو جدائية بين نماذج ARIMA الغير موسمية ونماذج ARIMA الموسمية ،إنه النموذج الأكثر شيوعا وإستعمالا الموجود في منهجية بوكس و جينكينز .

$$W_t = (1 - B)^d (1 - B^s)^D Y_t.$$

تحتوي هذه السيرورة على $d + D$ جذر أحادي أو مركب بمعنى آخر يعتبر متكاملا من الرتبة $d + D$ ونكتب $Y_t \backsim I_s(d + D)$.

خلاصة :

إذا كانت السيرورة المتحصل عليها من المرشح هي W_t وهي من نوع :

$$\mathrm{ARMA}(p,q) \times \mathrm{SARMA}_{s,\acute{s}}(P,Q).$$

إذن السيرورة المدخلة Y_t هي من نوع : $\mathrm{ARIMA}(p,d,q) \times \mathrm{SARIMA}_{s,\acute{s}}(P,D,Q)$ والتي تكتب كما يلي :

$$\Phi_p(B)\Phi_P(B^s)(1-B^s)^D(1-B)^d Y_t = \Theta_q(B)\Theta_Q(B^{\acute{s}})\varepsilon_t.$$

حيث $\Phi_p(B)$ و$\Theta_q(B)$ هي على التوالي كثيرات حدود المميزة للإنحدار الذاتي AR ،والمتوسط المتحرك MA ،وكذالك $\Phi_P(B^s)$ و $\Theta_Q(B^{\acute{s}})$ هي على التوالي كثيرات حدود المميزة المميزة للإنحدار الذاتي SAR ،والمتوسط المتحرك SMA .

ملاحظة :

السيرورة $ARIMA(p,d,q) \times SARIMA_{s,\acute{s}}(P,D,Q)$ هي سيرورة من نوع : $ARMA(p+d+Ps+Ds, q+Q\acute{s})$ غير مستقرة .

الفصل السادس : منهجية بوكس- جينكينز($Box\ and\ Jenkins$) :

إهتم 1976 بوكس وجينكينز بجمع التقنيات المستعملة في السلاسل الزمنية للمساعدة على تحديد النموذج وتقدير معلماته ،ثم إقترحا بعض الطرق للتأكد من صلاحيته النموذج لأخذ شكله النهائي ،ويرى بوكس و جينكينز أن النماذج الديناميكية الخطية المقدرة والتحليلات النظرية المرافقة لها لا تعطينا شكل النموذج فقط بل تمكننا أيضا من الحصول على المعلمات المقدرة وإختبار جودتها الإحصائية والتنبؤ الذي يعتبر الهدف الأساسي من هذه العملية .

المخطط التالي يوضح أهم الخطوات العملية حسب منهجية بوكس و جينكينز لبناء نموذج عشوائي لسلسلة زمنية واحدة ،وأهم هذه خظوات هذه المنهجية هي :

* تحويل السلسلة .

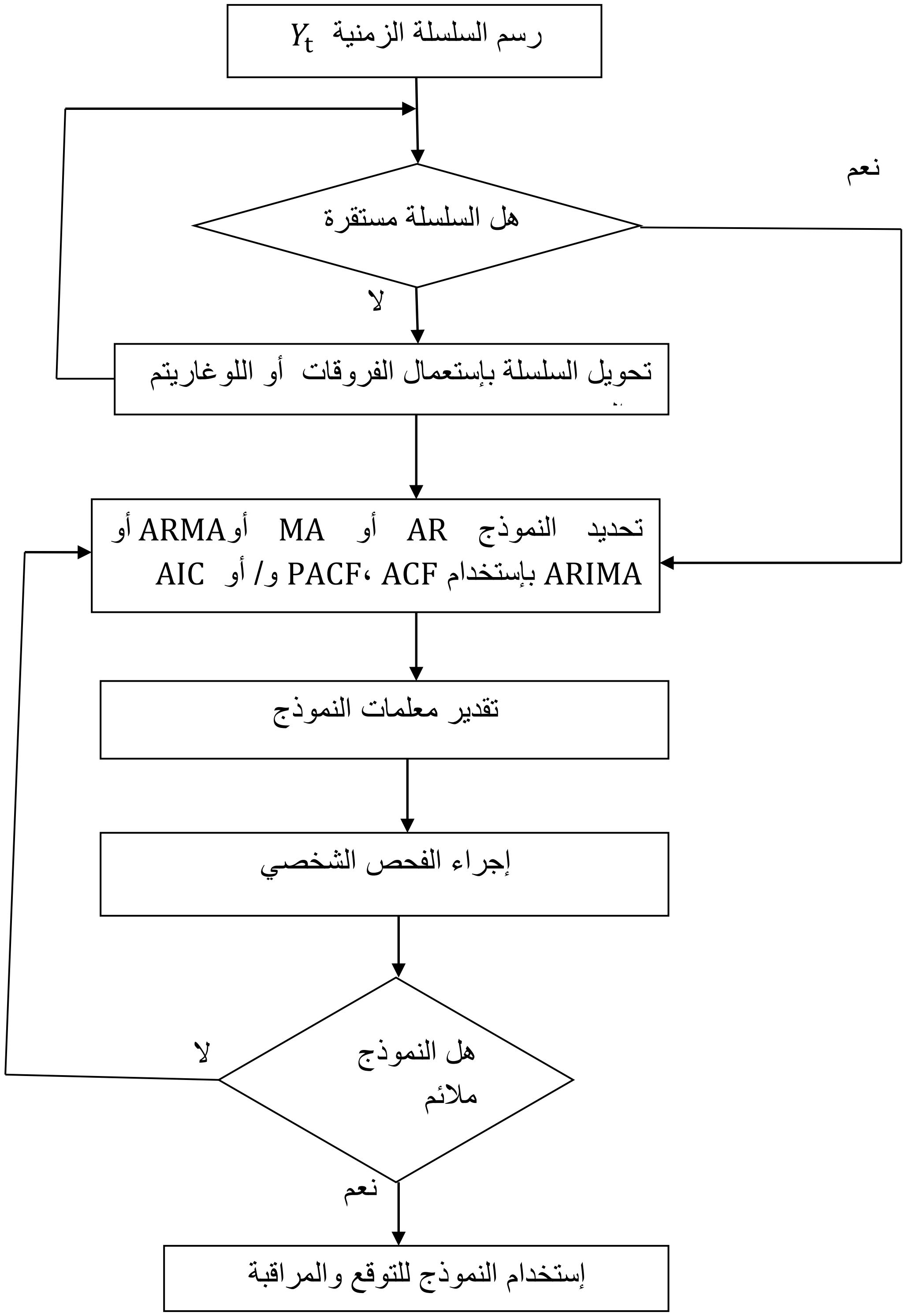
* التعرف .

* التقدير .

* مرحلة الفحص .

* مرحلة التنبؤ .

مخطط يوضح خطوات منهجية بوكس و جينكينز لمتغير واحد



حسب منهجية بوكس – جينكينز أن هذه المنهجية هي عبارة عن خوارزمية تكرارية ممثلة في خمس خطوات يمكن توضيح كل خطوة من هذه الخطوات كما يلي :

1- الخطوة الأولى : التحويل (Trandformation) :

يمكن إستخدام منهجية بوكس – جينكينز للسيرورات المستقرة والغير مستقرة ،الخطية والغير خطية ،إلا أنه إذا كانت السيرورة غير مستقرة أو غير خطية وجب تحويلها إلى سيرورة مستقرة وخطية لتقريب خصائص هذه السلسلة الزمنية من السيرورة ARMA النظرية وذالك للتعرف الجيد على السيرورة المولدة لهذه السلسلة .

في الحقيقة ،أن السلاسل الزمنية الإقتصادية نادرا ما تكون مستقرة ولهذا السبب خلال معالجة هذه السلسلة بالإعتماد على منهجية بوكس – جينكينز ،تعد مرحلة تحويل السلسلة الزمنية قيد الدراسة إلى سلسلة زمنية مستقرة ،لهذا إذا كانت Y_t السلسلة الأصلية و $\hat{Y}_t$ هي السلسلة المستقرة لـ Y_t يتم تعريفها كما يلي :

* $\hat{Y}_t = Y_t$ إذا كانت Y_t مستقرة $\hat{Y}_t = Y_t$.

* $\hat{Y}_t = \ln(Y_t)$ إذا كانت Y_t غير مستقرة و $\ln(Y_t)$ مستقرة.

* $\hat{Y}_t = (1-B)Y_t$ إذا كانت Y_t غير مستقرة و متكاملة من الدرجة 1.

* $\hat{Y}_t = (1-B)^2Y_t$ إذا كانت Y_t غير مستقرة و متكاملة من الدرجة 2.

* $\hat{Y}_t = (1-B)\ln(Y_t)$ إذا كانت Y_t غير مستقرة و$\ln(Y_t)$ متكاملة من الدرجة 1.

* $\hat{Y}_t = (1-B)^2\ln(Y_t)$ إذا كانت Y_t غير مستقرة و$\ln(Y_t)$ متكاملة من الدرجة 2.

* $\hat{Y}_t = Y_t - \hat{a} - \hat{b}t$ إذا كانت Y_t غير مستقرة وتحتوى إتجاه عام (خطي) ،طبعا في هذه الحالة الأخيرة ،يجب تقدير a و b بطريقة المربعات الصغرى OLS للنموذج :

$$Y_t = a + bt + \varepsilon_t$$

عندما تعرض سلسلة شهرية أو ربع سنوية ،تغيرات موسمية يكون التحول أكثر تعقيدا إذا كانت Y_t سلسلة موسمية فإن شكلها يكون كما يلي :

* إذا كانت $\hat{Y}_t = (1-B^s)^2Y_t$ إذا كانت Y_t غير مستقرة و متكاملة من الدرجة 2 (حيث S هي دورة السلسلة الزمنية $S = 4,12 \cdots$).

* إذا $\hat{Y}_t = (1-B^s)^2\ln(Y_t)$ إذا كانت Y_t غير مستقرة و$\ln(Y_t)$ متكاملة من الدرجة 2

أما إذا كانت السلسلة Y_t.سلسلة موسمية وغير موسمية في نفس الوقت فإن :

$.\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{t}} = \widehat{Y}_{\mathrm{t}} = (1-\mathrm{B})^{\mathrm{d}}(1-B^{s})^{D}\mathrm{Y}_{\mathrm{t}}$

$.\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{t}} = \widehat{Y}_{\mathrm{t}} = (1-\mathrm{B})^{\mathrm{d}}(1-\mathrm{B})^{2}\ln(\mathrm{Y}_{\mathrm{t}})$

.حيث d هي درجة الفرق و D هي درجة الفرق الموسمية و S هي دورية السلسلة .

2- الخطوة الثانية : التعرف (Identification) :

هي مرحلة التعرف على النموذج المبدئي الملائم لبيانات السلسلة الزمنية المرصودة ،ويقصد بالتعرف على النموذج هو تحديد إختيار أو تحديد رتب النموذج الثلاث (p,d,q) ،حيث يشير الرمز d إلى درجة الفرق الضرورية ويشير الرمز p إلى عدد حدود عدد حدود المشاهدات السابقة التي يجب يجب إدراجها في النموذج المبدئي الملائم ،بينما يشير الرمز q إلى عدد متغيرات التشويش الأبيض التي يجب أن يشملها النموذج الملائم ،وتعد مرحلة التعرف من أصعب مراحل التحليل وأهمها ،ليس في مجال السلاسل الزمنية فحسب بل في مجال الإحصاء بصفة عامة ،بصفة خاصة حيث تتطلب هذه المرحلة ،بالإضافة إلى الأسس النظرية ،مهارة وخبرة وممارسة عملية وقدر من الحكم الشخصي للباحث .

بعد تحديد رتبة الفروق الضرورية لإستقرار السلسلة ،يجب تحديد رتبة الجزء الخاص بالإنحدار الذاتي p ورتبة الجزء الخاص بالمتوسطات المتحركة q ،وتعتبر كل من دالة الإرتباط الذاتي ودالة الإرتباط الذاتي الجزئي أحد المفاتيح السحرية والفعالة في التمييز بين النماذج $\mathrm{AR}(\mathrm{p})$ والنماذج $\mathrm{MA}(\mathrm{q})$ والنماذج المختلطة $\mathrm{ARMA}(\mathrm{p},\mathrm{q})$ وقد يكون من الضروري إستدعاء الخصائص الضرورية لهاتين الدالتين ونمط كل منهما لأهم النماذج التي تنتمي إلى هذه العائلات الثلاث وتلخيصها في جدول .

جدول خصائص دالتي الإرتباط الذاتي والذاتي الجزءي لنماذج ARMA

النموذج	$\rho_{(h)}$	$\phi_{h,h}$

التشويش الأبيض ε_t	كلها قيم صفرية	كلها قيم صفرية
$AR(1)$	تنعدم تدريجيا من الصفر بشكل أسي أو شكل متردد في الإشارة .	تنعدم تماما بعد الدرجة 1 .
$AR(2)$	تنعدم تدريجيا من الصفر بشكل أسي أو شكل متردد في الإشارة .	تنعدم تماما بعد الدرجة 2 .
$AR(p)$	تنعدم تدريجيا من الصفر بشكل أسي أو شكل متردد في الإشارة أو موجات جيبية .	تنعدم تماما بعد الدرجة p .
$MA(1)$	تنعدم تماما بعد الدرجة 1 .	تقترب تدريجيا من الصفر بصورة تدريجية.
$MA(2)$	تنعدم تماما بعد الدرجة 2 .	تقترب تدريجيا من الصفر بصورة تدريجية أو موجات تحاكي دالة جيبية.
$MA(q)$	تنعدم تماما بعد الدرجة q .	تقترب تدريجيا من الصفر بصورة تدريجية أو موجات تحاكي دالة جيبية.
$ARMA(p,q)$	تقترب تدريجيا من الصفربعد $(q-p)$ من الدرجات بشكل أسي أو موجات تحاكي دالة جيبية.	تقترب تدريجيا من الصفربعد $(p-q)$ من الدرجات بشكل أسي أو موجات تحاكي دالة جيبية.
سيرورة السير العشوائي	تقترب من 1 ولا تؤول الى الصفر .	كل القيم صفرية بعد 1.

هناك فكرة اساسية في منهجية بوكس – جينكينز وهي مبدأ البخل أو الشح بإدراج معلمات إضافية يزيد من القدرة التفسيرية للنموذج (مثلا قيمة R^2 تزيد) في مقابل فقدان درجة حرية في النموذج .

يبين ويوضح بوكس – جينكينز من خلال هذه المنهجية بأن نموذج تشحيح (أقل معلمات) ينتج عادة تنبؤات أفضل من نموذج قيمة معلمات زائدة ،بعبارة أخرى ،نموذج شحيح يناسب ويوافق عادة وبشكل جيد السلسلة الزمنية قيد الدراسة من دون إدراج أي معلمات لا داعي لها.

من ناحية أخرى ،خلال إختيار النموذج المناسب يحتاج الإقتصادي أن يدرك أن العديد من النماذج المختلفة قد يكون لها نفس الخواص المماثلة للنموذج المختار ،فمثلا ،نموذج إنحدار ذاتي من الدرجة الأولى $\mathrm{AR}(1)$:

$$.\mathrm{Y_t} = 0.5\mathrm{Y_{t-1}} + \varepsilon_\mathrm{t}$$

يكافئ في الحقيقة نموذج متوسط متحرك ذو درجة غير منتهية $\mathrm{MA}(\infty)$ ويمكن توضيح ذالك كما يلي :

$$Y_\mathrm{t} = 0.5\mathrm{Y_{t-1}} + \varepsilon_\mathrm{t}$$

$$Y_\mathrm{t} = 0.5(0.5\mathrm{Y_t} + \varepsilon_\mathrm{t-1}) + \varepsilon_\mathrm{t}$$

$$Y_\mathrm{t} = 0.25\mathrm{Y_{t-2}} + 0.5\varepsilon_\mathrm{t-1} + \varepsilon_\mathrm{t}$$

$$Y_\mathrm{t} = 0.25(0.5Y_\mathrm{t-3} + \varepsilon_\mathrm{t-2}) + 0.5\varepsilon_\mathrm{t-1} + \varepsilon_\mathrm{t}$$

$$Y_\mathrm{t} = 0.125\mathrm{Y_{t-3}} + 0.25\varepsilon_\mathrm{t-2} + 0.5\varepsilon_\mathrm{t-1} + \varepsilon_\mathrm{t}$$

$$\vdots$$

$$Y_\mathrm{t} = \varepsilon_\mathrm{t} + 0.5\varepsilon_\mathrm{t-1} + 0.25\varepsilon_\mathrm{t-2} + 0.125\mathrm{Y_{t-3}} + \cdots$$

في أغلب العينات (السلاسل الزمنية) تقريب هذا المتوسط المتحرك الغير محدود $MA(\infty)$ لـ $\mathrm{MA}(2)$ أو $\mathrm{MA}(3)$ سيمكن من الحصول على نموج ذو جودة عالية ،ومع ذالك ،يعتبر $\mathrm{AR}(1)$ النموذج الأكثر شحا والمفضل في هذه الحالة ،من ناحية أخرى ،يمكن أن نلاحظ بأن هذا النموذج الأخير $\mathrm{AR}(1)$ لدينا تمثيل مماثل ومكافئ لـ :

$$Y_\mathrm{t} = 0.5\mathrm{Y_{t-1}} + \varepsilon_\mathrm{t}$$

$$Y_t = 0.5(0.5Y_t + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$Y_t = 0.25Y_{t-2} + 0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

وهو موافق في الحقيقة للسيرورة $ARMA(2,1)$.

تعتبر هذه الخطوة أصعب مراحل تطبيق منهجية بوكس – جينكينز وهي صعوبة لا ننكرها بل نؤكد عليها ،ونعتبرها أحد العيوب الأساسية لهذه المنهجية وأحد أسباب توجيهات الأبحاث الحديثة لإيجاد أسلوب أسهل وأكثر موضوعية للتعرف على النموذج المبدئي للبيانات .

3- الخطوة الثالثة : التقدير (Estmation) :

بعد الإنتهاء من مرحلة التعرف على النموذج المبدئي للبيانات المتاحة ،يجب تقدير معالم النموذج بإستخدام إحدى الطرق المعروفة في نظرية الإحصاء ،والمتمثلة في مرحلة تقدير معلمات النموذج .

1-2 تقدير معلمات نموذج الإنحدار الذاتي AR :

1-1-2 طريقة معادلات نظام يوول وولكر :

تعتمد هذه الطريقة على معادلات يوول وولكر التى تحدثنا عنها سابقا من خلال معاملات الإرتباط الذاتي لتقدير معلمات النموذج $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$ ففي حالة $AR(p)$ إذن تكون لدينا p معادلة .

$$\rho_1 = \varphi_1\rho_0 + \varphi_2\rho_1 + \cdots + \varphi_p\rho_{p-1}$$

$$\rho_2 = \varphi_1\rho_1 + \varphi_2\rho_2 + \cdots + \varphi_p\rho_{p-2}$$

$$\vdots$$

$$\rho_h = \varphi_1\rho_{p-1} + \varphi_2\rho_{p-2} + \cdots + \varphi_p\rho_0$$

حيث $\rho_0 = 1$ ،ومنه يمكن كتابة المعادلات على الشكل المصفوفي التالي كما يلي :

2-1-2 الطريقة الإنحدارية :

تمثل هذه النماذج إنحدار المتغير Y_t على المتغيرات المفسرة (المستقلة) $Y_{t-1t}, Y_{t-2}, \cdots, Y_{t-p}$ تشبه الى حد كبير نماذج الإنحدار العام التقليدية حيث يلعب Y_t دور المتغير التابع وتلعب المتغيرات $Y_{t-1t}, Y_{t-2}, \cdots, Y_{t-p}$ دور المتغيرات المفسرة ،بينما يلعب ε_t دور الأخطاء الحقيقية ،ومن ثم يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى ،ليكن لدينا النموذج التالي $AR(p)$:

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

وبكتابتها على الشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & Y_1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & Y_{t-1} & Y_{t-2} & \cdots & Y_{t-p} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{bmatrix}$$

نحصل على الكتابة المختصرة : $Y = X\ \Phi + \varepsilon$.

حيث $X(T, p+1)$ مصفوفة المتغيرات المستقلة $Y(T,1)$ المتغير التابع ،$\Phi(p+1,1)$ شعاع المعلمات الواجب تقديرها ،$\varepsilon(T,1)$ شعاع الأخطاء نذكر أننا سنفقد p مشاهدة يتم تعويض تلك القيم المفقودة بالصفر ،وتحت فرضيات معينة معروفة يمكن تقدير شعاع المقدرات بطريقة المربعات الصغرى OLS كما يلي :

$$\hat{\Phi} = \left(\acute{X}X\right)^{-1}\acute{X}Y.$$

أما مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة للمقدرات تعرف كما يلي :

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}{T-P-1} \quad ; \Omega_{\hat{\Phi}} = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2\left(\acute{X}X\right)^{-1}.$$

حيث $\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2$ هي مجموع مربعات البواقي RSS و $\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{Y}_t$.

2-2 تقدير معلمات نموذج المتوسط المتحرك والمختلطة:

تعتبر النماذج $MA(q)$ و $ARMA(p,q)$ أعقد بكثير من حيث التقدير للنماذج الإنحدارية كونها غير خطية في المعلمات من جهة وعدم مشاهدة الأخطاء العشوائية من جهة أخرى ،فهدف التقدير إذن هو تحديد قيم معلمات قسم الإنحدار الذاتي وقسم المتوسط المتحرك لـ $ARMA(p,q)$ معا ،في الحالة العامة لدينا :

$$\Phi_p(B)Y_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t.$$

فإفتراض إمكانية قلب دالة تصبح كما يلي :

$$\varepsilon_t = \Theta_q(B)^{-1}\Phi_p(B)Y_t.$$

لتقدير معلمات النموذج ،يجب تصغير مجموع مربعات البواقي أي $Min \sum \hat{\varepsilon}_t^2 = S(\hat{\varphi},\hat{\theta})$.

لقد رأينا إمكانية وسهولة تقدير معالم العلاقة في حالة غياب الطرق $MA(q)$ بينما في حالة وجودها لوحدها أو مع مركبة الإنحدار الذاتي $AR(p)$ فإن هذه العلاقة تصبح غير خطية المعالم .ومنه يوجد عدة طرق من بين هذه الطرق :

1-2-2 طريقة البحث التشابكي :

وهي أحد طرق نماذج $ARMA(p,q)$.

2-2-2 طريقة المعقولية العظمى (MLE) Maximum likehood :

ليكم لدينا السيرورة ARMA التالية :

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}.$$

حيث $\varepsilon_t \sim^{iid} N(0,\sigma^2)$ ،في العموم نحتاج لتقدير ما يلي : $\hat{b} = (\hat{\varphi}_1,\cdots\hat{\varphi}_p,\hat{\theta}_1,\cdots\hat{\theta}_q)$ و $\hat{\sigma}^2$ ،السيرورة ARMA يمكن كتابتها كما يلي :

$$\varepsilon_t = Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \varphi_2 Y_{t-2} - \cdots - \varphi_p Y_{t-p} - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

نفرض أن الأخطاء تتوزع توزيعا طبيعيا حيث $t = 1,2,\cdots n$ و $\varepsilon_t \sim^{iid} N(0,\sigma^2)$
فإن دالة الكثافة للمعقولية العظمى تكتب على الشكل التالي :

$$.L\left(b, \sigma^2/_{\varepsilon}\right) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2\right)}$$

حيث $\mathrm{b} = \left(\varphi_1, \cdots, \varphi_p, \theta_1, \cdots, \theta_q\right)^{T}$ و $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$.لنأخذ اللوغاريتم لدالة المعقولية العظمى :

$$.ln\left(b, \sigma^2/_{\varepsilon}\right) = -\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2$$

يتم تقدير معالم النموذج وتباين الأخطاء بتعظيم دالة المعقولية حيث :

$$.max_{b,\sigma^2}\left\{ln\left(b, \sigma^2/_{\varepsilon}\right)\right\} = max_{b,\sigma^2}\left\{-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2\right\}$$

الشروط الضرورية لكي يكون لوغاريتم الدالة عند قيمتها العظمى هي :

$$.\frac{\partial \ln(L)}{\partial b} = 0 \implies b = \hat{b} = \left(\hat{\varphi}_1, \cdots \hat{\varphi}_p, \hat{\theta}_1, \cdots \hat{\theta}_q\right)$$

$$.\frac{\partial \ln(L)}{\partial \sigma^2} = 0$$

مقدر المعقولية العظمى MLE لـ σ^2 هو $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2}{n}$.تعظيم اللوغاريتم لدالة العظمى ،هو يعادل أقل ما يمكن مجموع مربعات الأخرى $S(b) = \sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2$.

4- الخطوة الرابعة : الفحص:

بعد تحديد وتقدير معلمات النموذج ،فإن الخطوة الثالثة هي التحقق من مدى ملائمة النموذج المناسب يمكن إستخدام عدة طرق للفحص التشخيصي :

1-4 معايير المفاضلة بين النماذج الملائمة :

قد يحدث أحيانا أن يكون هناك مجموعة من النماذج ونريد المفاضلة بينهم .ولهذا يوجد عدة معايير :

4-1-1 معيار AIC 1971 $Akaike\ information\ criterion$:

يحسب بالعلاقة التالية :

$$* \ \mathrm{AIC}(p,q) = n\ln\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} + 2(p+q) \ .$$

حيث $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$ هو التباين المقدر لبواقي النموذج $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_{t}^{2}}{n}$.

4-1-2 معيار $Baysian\ information\ criterion\ BIC$:

يسمى كذالك بمعيار $Schwarz$. ويحسب بالعلاقة التالية :

$$* \ B\mathrm{IC}(p,q) = n\ln\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} + (p+q)\ln(n) \ .$$

4-1-3 معيار HQ 1979 $Hannan - Quin$:

يحسب بالعلاقة التالية :

$$* \ \mathrm{HQIC}(P) = n\ln\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} + p\ln\big(\ln(n)\big) \ .$$

وتعتبرهذه المعايير هي الأكثر إستعمالا في حالة نماذج السلاسل الزمنية ،والنموذج الأفضل هو يمحننا أقل القيم الممكنة للمعايير السابقة ،وكذالك يمكننا إستعمال معيار لوغاريتم المعقولية العظمى $\ln(L)$ والنموذج الأفضل هو الذي يمنحنا أقل قيمة .

4-2 إختبار معنوية المعلمات وامعنوية الكلية للنموذج :

إذا إعتبرنا أن مقدرات نموذج $\mathrm{ARMA}(p,q)$ تتوزع طبيعيا فإن :

$$.\frac{\hat{\varphi}_{i}}{\hat{\sigma}_{\varphi_{i}}} \backsim N(0,1) \quad i = 1,2 \cdots p$$

$$.\frac{\hat{\theta}_{i}}{\hat{\sigma}_{\theta_{j}}} \backsim N(0,1) \quad j = 1,2 \cdots q$$

وعليه نختبر مدى معنوية المعلمات φ_{i} و θ_{j} وفق الفرضيتين :

$$.H_{0}: \theta_{1} = \cdots = \theta_{j} \ ; \ H_{0}: \varphi_{i} = 0 \quad ; \ i = 1,2,\cdots,p$$

$.H_1: \theta_j \neq 0 \quad ; H_0: \varphi_i \neq 0 \quad ; \ j = 1,2,\cdots,q$

نطبق الطريقة الكلاسكية ،نستخدم توزيع t ستيودنت ،يمكن الوصول عادة إلى أن معلمة أو العديد من معلمات ليس معنويا يختلف عن الصفر ،ففي هذه الحالة نرجع إلى مرحلة التقدير بحذف المتغير الذي له معلمة غير معنوية .

لإختبار المعنوية الكلية للنموذج $\mathrm{ARMA}(p,q)$ (غير متظمنة ثابت) نستخدم إحصائية Fisher ،حيث نختبر الفرضية التالية :

$$.H_0: \theta_1 = \cdots = \theta_j = \cdots \theta_q = \varphi_1 = \cdots = \varphi_i = \cdots = \varphi_p = 0$$

تعرف إحصائية كما يلي :

$$.F_c = \frac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y}) / (p+q)}{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2 / (n-p-1)} = \frac{R^2 / (p+q)}{(1-R^2) / (n-p-1)} \backsim F\big((p+q), n-p-q\big)$$

إذا تجاوزت الإحصائية F_c قيمة F المجدولة عند مستوى معنوية α بدرجتي حرية $p-q$ و $n-p-q$ ،فإننا نقبل الفرضية H_1 القائلة بأن معلمات النموذج ليست جميعها مساوية للصفر وأن R^2 يختف معنويا عن الصفر وفي هذه الحالة يمكن القول أنه ذو دلالة إحصائية .

ملاحظة :

n عدد المشاهدات المستخدمة في النموذج وليست بالضرورة عدد المشاهدات السلسلة الزمنية Y_t ،في الحقيقة :

* إذ تم تقدير $\mathrm{ARMA}(p,q)$ فإننا سنفقد p ملاحظة .

* إذا تم تطبيق فروقات بسيطة أو موسمية على السلسلة الزمنية ،فإننا نفقد $(d + s\Delta)$ ملاحظة في الحالة العامة لسيرورة موسمية وغير موسمية في نفس الوقت .

3-4 تحليل البواقي :

إذا كانت البواقي تمثل فعلا تشويش أبيض ،فإنه عند وجود إرتباط ذاتي في السلسلة والبواقي يجب أن تكون متجانسة ،والإختبارات التالية يمكن أن تستخدم للتحقق من ذالك :

* إختبار Box – Piere 1979 (تكلمنا عنه سابقا) ،أثبت أن التوزيع المقارب لدوال الإرتباط الذاتي للبواقي $\rho_{\varepsilon}(h)$ حيث $h = 1,2,3 \cdots$ يمكن أن تستخدم للتحقق من فرضيات التشويش الأبيض في ظل وجود نماذج $\mathrm{ARMA}(p,q)$.

* تحت الفرضية الصفرية السيرورة هي تشويش أبيض بدلا من إختيار العشوائية في كل فترة تأخير مميزة ،Box – Piere 1979 قدما إختبار Portmanteau لدوال الإرتباط الذاتي للبواقي ،مع فترة تأخير m .

* Ljing و Box (الذي تكلمنا عنه سابقا) حسنا من إختبار من Box – Piere 1979 بتقديم إختبار Portmanteau جديد.

* إختبار pena و Rodriguez إقتراحا إختبار Portmanteau للتباين المعمم ،والذي أوضح أن إختبارهم الإحصائي أقوى من إختبار Ljing و Box .

* إختبار ARCH – LM : يستعمل إختبار ARCH لإختبار التباين الشرطي للأخطاء ،أي إختبار ما إذا كان التذبذب الشرطي الذي يعبر في الغالب عن المخاطرة ثابتا ،يعتمد هذا الإختبار على إحصائية مضاغف لاغرانج LM ،نتبع الخطوات التالية :

- تقدير النموذج العام $\Phi_p(B)Y_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t$. بطريقة المعقولية العظمى أو أي طريقة أخرى ،ثم نقوم بحساب مربعات البواقي $\hat{\varepsilon}_t^2$.

- تقدير المعادلة التالية $\hat{\varepsilon}_t = \theta_0 + \theta_1\hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \theta_q\hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + \hat{v}_t$ ثم حساب معامل التحديد الخاص بهذه المعادلة R^2 نفقد في هذه الحالة q مشاهدة .

- فرضيات ثبات التباين الشرطي للأخطاء H_0 التي ينبغي إختيارها هي :

$.H_0: \theta_0 = \theta_1 = \cdots = \theta_q = 0$

تخضع إحصائية مضاعف لاغرانج $\mathrm{LM} = (\mathrm{n} - \mathrm{q}) \times \mathrm{R}^2$ لتوزيع $\mathcal{X}^2$ بدرجة حرية q عند مستوى معنوية α .فإننا نقبل فرضية تجانس التباين الشرطي للأخطاء H_0 ،أي إذا كانت كل معاملات معادلة ARCH تساوي معنويا الصفر في آن واحد .

5- الخطوة الخامسة : التنبؤ The forcasting:

لنعتبر السلسلة الزمنية $\mathrm{Y_t}$ ،حيث قيم $\mathrm{Y_t}$ عبر الزمن $\mathrm{t = n}$ التنبؤ بقيم $\mathrm{Y_t}$ في الزمن $\mathrm{t} = \mathrm{n} + 1$ تكون ليست لها قيمة ،وتكتب كما يلي : $\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{n+1/n}}$.

* $\mathrm{Y_{n+k/n}}$أو تسمى التنبؤ في الفترة بخطوة واحدة إلى الأمام لـ $\mathrm{Y_{n+1}}$ أو تسمى التنبؤ في الفترة الأولى ،ثم نأخذ القيمة المتوقعة الشرطية $\widehat{Y}_{\mathrm{n+1}} = \mathrm{E}(\mathrm{Y_{t+1}}/\mathrm{Y_1} \cdots \mathrm{Y_n})$ نظرا لأن التنبؤ يسبق البيانات المتاحة بخطوة واحدة $\cdots Y_n, Y_{n-1}$.

* في العموم ،التنبؤ بـ k خطوة الى الأمام هي $\mathrm{Y_{n+k/n}}$ ويمكن أن نعبر عنها كمجموعة خطية كما يلي :

$$\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{n+k/n}} = \mathrm{a_0} + \mathrm{a_1 Y_n} + \mathrm{a_2 Y_{n-1}} \cdots$$

* هدفنا هو إنتاج تنبؤا مثل الحد لمتوسط مربع الأخطاء $\mathrm{MSE}\ (\mathit{Mean\ Square\ Error})$
حيث MSE تعرف كما يلي : $\mathrm{MSE} = \mathrm{E}\left(\mathrm{Y_{n+k}} - \widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{n+k/n}}\right)^2$.

* نلاحظ أن التنبؤ لـ k خطوة الى الأمام يمكن أن يكتب بعدة طرق مثل $\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{n+k/n}}$ أو $\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{n/n-k}}$ أو $\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{n-2/n-k-2}}$ ...الخ .

لنعتبر نموذج AR(p) :

$$.Y_{\mathrm{t}} = \varphi_1 \mathrm{Y_{n-1}} + \varphi_2 \mathrm{Y_{n-2}} + \cdots + \varphi_{\mathrm{p}} \mathrm{Y_{n-p}} + \varepsilon_{\mathrm{t}}$$

حيث $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ،نفترض أن التنبؤ بخطوة واحدة الى الأمام $\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{n+1/n}}$ هو المطلوب .إذا كانت المعلمات حول السلسلة الزمنية كمايلي في الفترة n :

$$.Y_{\mathrm{n+1}} = \varphi_1 \mathrm{Y_n} + \varphi_2 \mathrm{Y_{n-1}} + \cdots + \varphi_{\mathrm{p}} \mathrm{Y_{n-p-1}} + \varepsilon_{\mathrm{n+1}}$$

$.Y_{n+1/n} = \varphi_1 Y_{n/n} + \varphi_2 Y_{n-1/n} + \cdots + \varphi_p Y_{n-p-1/n} + \varepsilon_{n+1/n}$

$\widehat{Y}_{n+1/n} = \widehat{\varphi}_1 \widehat{Y}_{n/n} + \varphi_2 \widehat{Y}_{n-1/n} + \cdots + \varphi_p \widehat{Y}_{n-p-1/n} + \widehat{\varepsilon}_{n+1/n}$

الآن ،لأن المعلومات في الزمن t .قيم $\widehat{Y}_{n/n}, \widehat{Y}_{n-1/n}, \cdots, \widehat{Y}_{n-p-1/n}$ معرفة قيمتها بالضبط ،هم القيم لـ Y في الزمن t $n, n-1, \cdots, n-p+1$ تسلسليا بمعنى

$\left(\widehat{Y}_{n/n} = Y_n, \widehat{Y}_{n-1/n} = Y_{n-1}, \widehat{Y}_{n-p-1/n} = Y_{n-p+1}\right)$ بالنسبة للقيمة الغير المعروفة لـ $\widehat{\varepsilon}_{n+1/n}$ ،يمكن أن تعوض بمتوسطها التي هي صفر .

* التنبؤ بخطوة واحدة إلى الأمام يعطي كمايلي :

$.\widehat{Y}_{n+1/n} = \widehat{\varphi}_1 Y_{n/n} + \widehat{\varphi}_2 Y_{n-1/n} + \cdots + \widehat{\varphi}_p Y_{n-p-1/n}$

الخطأ في عمل التنبؤ هو $\varepsilon_{n+1} = Y_{n+1} - Y_{n+1/n}$.

* في العموم ،التنبؤات بـ k خطوة إلى الأمام يمكن أن يكتب كمايلي :

$\widehat{Y}_{n+k/n} = \widehat{\varphi}_1 \widehat{Y}_{n+k-1/n} + \varphi_2 \widehat{Y}_{n+k-2/n} + \cdots + \varphi_p \widehat{Y}_{n+k-p/n} + \widehat{\varepsilon}_{n+k/n}$

كما من قبل ،قيمة $\widehat{\varepsilon}_{n+k/n}$ تعوض بقيمة متوسطها ضفر تصبح كما يلي :

$\widehat{Y}_{n+k/n} = \widehat{\varphi}_1 \widehat{Y}_{n+k-1/n} + \varphi_2 \widehat{Y}_{n+k-2/n} + \cdots + \varphi_p \widehat{Y}_{n+k-p/n}$

مثال رقم 34:

لنعتبر النموذج AR(1) $Y_t = 0.6Y_{t-1} + \varepsilon_t$ حيث لدينا Y_{100} أوجد التنبؤ لـ Y_{101} و Y_{102} و Y_{103} و Y_{104} .

الحل :

$.\hat{Y}_{101/100} = 0.6Y_{100} = 0.6 \times 0.9 = 0.54$

$.\hat{Y}_{102/100} = 0.6Y_{101/100} = 0.6 \times 0.54 = 0.324$

$.\hat{Y}_{103/100} = 0.6Y_{102/100} = 0.6 \times 0.324 = 0.1944$

$$\hat{Y}_{104/100} = 0.6\mathrm{Y}_{103/100} = 0.6 \times 0.1944 = 0.11664.$$

الصيغة العامة للتنبؤ بـ k خطوة إلى الأمام بالنسبة للنموذج $AR(1)$ هي :

$$\hat{Y}_{t+k/t} = \hat{\varphi}^{k} \quad ; k \geq 1.$$

الفصل السابع : نماذج أشعة الإنحدار الذاتي للسلاسل الزمنية متعددة المتغيرات : (VAR)

في الواقع الإقتصادي ،هناك نماذج فيها بعض المتغيرات ليست فقط متغيرات مفسرة لمتغير تابع ولكنها أيضا تفسر بالمتغيرات التي كانت تفسرها ،في هذه الحالة نحصل على نموذج معادلات آنية فيها متغيرات داخلية (مفسرة) وأخرى خارجية إلا أن نماذج المعادلات الآنية عرفت العديد من الإنتقادات ولاسيما ضعف التنبؤات الناتجة عنها في ظل بيئة إقتصادية معكرة ،إضافة إلى ذالك إنتقد Sim 1980 في مقاله الضهير Macroecomomic and Reality ،قرؤ التمييز بين المتغيرات ،حيث إذا كان هناك آنية بين المتغيرات بنفس الطريقة أي يجب أن لا يكون هناك تمييز بين المتغيرات الداخلية والخارجية ،جاءت نماذج VAR

كبديل لهذا النوع من التنبؤية فلقد أثبتت الإختلالات الإقتصادية (الأزمة الإقتصادية العالمية ...الخ) عدم صلاحيتها بسبب آنية العلاقات التي تربط بين المتغيرات الإقتصادية وعدم أخذه بعين الإعتبار حركية نظام المعادلات القياسية .في نماذج VAR ،تعالج كل المتغيرات بصفة مماثلة وبدون شروط إقصاء مع إدخال عامل التأخير أو الإبطاء لكل المتغيرات في المعادلات ليعطي للنظام الطبيعة الحركية .

هذه النماذج عبارة عن تعميم لنماذج الإنحدار الذاتي إذ يتكون من نظام لجملة معادلات بحيث كل متغير هو عبارة عن توليفة خطية لقيمها الماضية والقيم الماضية لمتغيرات أخرى ،بالإضافة إلى الأخطاء العشوائية .

1- الصياغة العامة لنموذج VAR :

يكتب النموذج VAR لـ K متغير و p درجة تأخير على الشكل المصفوفي التالي :

$$Y_t=\begin{bmatrix}a_{01}\\a_{02}\\a_{03}\\\vdots\\a_{0k}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_{1,1}^1 & a_{1,2}^1 & a_{1,3}^1 & \cdots & a_{1,k}^1\\a_{2,1}^1 & a_{2,2}^1 & a_{1,3}^1 & \cdots & a_{2,k}^1\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{k,1}^1 & a_{k,2}^1 & a_{k,3}^1 & \cdots & a_{k,k}^1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}Y_{1,t-1}\\Y_{2,t-1}\\Y_{3,t-1}\\\vdots\\Y_{k,t-1}\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}a_{1,1}^2 & a_{1,2}^2 & a_{1,3}^2 & \cdots & a_{1,k}^2\\a_{2,1}^2 & a_{2,2}^2 & a_{1,3}^2 & \cdots & a_{2,k}^2\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{k,1}^2 & a_{k,2}^2 & a_{k,3}^2 & \cdots & a_{k,k}^2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}Y_{1,t-2}\\Y_{2,t-2}\\Y_{3,t-2}\\\vdots\\Y_{k,t-2}\end{bmatrix}+\cdots+$$

$$.\begin{bmatrix}a_{1,1}^p & a_{1,2}^p & a_{1,3}^p & \cdots & a_{1,k}^p\\a_{2,1}^p & a_{2,2}^p & a_{1,3}^p & \cdots & a_{2,k}^p\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{k,1}^p & a_{k,2}^p & a_{k,3}^p & \cdots & a_{k,k}^p\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}Y_{1,t-2}\\Y_{2,t-2}\\Y_{3,t-2}\\\vdots\\Y_{k,t-2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_{1,t}\\\varepsilon_{2,t}\\\varepsilon_{3,t}\\\vdots\\\varepsilon_{k,t}\end{bmatrix}$$

الصيغة العامة لنموذج ARMAX أو VARMAX نماذج ARMAX هي تعميم لسيرورات $VAR(p)$.تماما مثل سيرورات $\mathrm{ARMA}(p,q)$ هي تعميم لسيرورات $AR(p)$ والتي هي :

$$.Y_t=A_0+A_1Y_{t-1}+\cdots+A_pY_{t-p}+\Theta_1\varepsilon_{t-1}+\cdots+\Theta_{t-q}+\varepsilon_t$$

حيث Θ, A هما مصفوفتان ذات البعد $(k\times k)$ للمتغيرات ومن الممكن أن تتصف بالسيرورة VMA (تم الحصول عليها عندما $p=0$) بالمتوسطات المتحركة المتعددة المتغيرات ،وهو نموذج $\mathrm{ARMA}(p,q)$ متعدد المتغيرات أو $\mathrm{VARMA}(p,q)$ الذي يصطلح تسميته أيضا بـ $\mathrm{ARMAX}(p,q)$.

* تكون السيرورات VAR قابلة للقلب دائما ،ومستقرة إذا كانت جذور كثير الحدود المميزة لها تقع خارج دائرة الوحدة .

* تتوقف شروط القلب والإستقرارية لسيرورات ARMA على أجزاء السيرورات VAR و VMA .

* قد بتضمن نموذج VAR متغيرات مستقلة ويسمى بنموذج SVAR الذي بأخذاشكل التالي :

$$Y_t = A_0 + A_1Y_{t-1} + \cdots + A_pY_{t-p} + \alpha_1X_{t-1} + \cdots + \alpha_mX_{t-m} + \varepsilon_t .$$

حيث:

Y_t شعاع نموذج الإنحدار الذاتي VAR و A_0 شعاع الثوابت و$A_1 \cdots A_p$ مصفوفة المعاملات و ε_t شعاع الأخطاء(التشويش الأبيض).

مصفوفة التباين-التباين المشترك للأخطاء $\sum = E(\acute{\varepsilon}_t\varepsilon_t)$ هنا غير معروفة ،يمكن أيضا كتابة النموذج بدلالة معامل التأخير حيث :

$$.(I_k - A_1B + A_1B^2 + \cdots + A_pB^P)Y_t = A_0 + \varepsilon_t$$

$$.A(B)Y_t = A_0 + \varepsilon_t$$

حيث A هي مصفوفة كثير الحدود ذات البعد $(k \times k)$ للمتغيرات $Y_t^1, Y_t^2 \cdots Y_t^k$ كسلاسل زمنية مستقرة و $\varepsilon_t^1, \varepsilon_t^2, \cdots, \varepsilon_t^k$ ذات تشويش أبيض ولها تباينات ثابتة $\sigma_\varepsilon^{1^2}, \sigma_\varepsilon^{2^2}, \cdots, \sigma_\varepsilon^{k^2}$. يكون المسار VAR إذا تحققت الفرضيات التالية :

- المتوسط $\mu = E(Y_t) = \mu_t$ حيث $\forall\, t \in Z$.

- التباين $var(Y_t) = \sigma_Y^2 = \gamma_0 < \infty$.

- التباين المشترك $cov(Y_t, Y_{t+h}) = \gamma_{(h)} = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+h} - \mu)]$ لكل $\forall\, t, h \in Z$ حيث γ تمثل دالة التباين المشترك لـ Y_t .

بصفة عامة ،تكون السيرورة VAR مستقرة إذا كان كثير الحدود المعرف إنطلاقا من محدد المصفوفة $\left|\mathrm{I_k} - \mathrm{A_1B} + \mathrm{A_1B^2} + \cdots + \mathrm{A_pB^P}\right| = 0$ تحتوى على جذور خارج دائرة الوحدة .

$Y_{1,t}, \cdots Y_{k,t}$ متغيرات داخلية و$\mathrm{X_{1,t}, \cdots X_{k,t}}$ متغيرات خارجية ويطلق عليه بإسم النظام الخطي ،كما يسمي بنموذج المعادلات الآنية الحركية (الديناميكية) بإستعمال معامل التأخير B في النموذج حيث يكون الشكل المختصر كما يلي :

$$\mathrm{A(B)Y_t} = \alpha\mathrm{(B)Y_t} + \varepsilon_\mathrm{t}.$$

وبضرب الشكل المختصر بـ : $\mathrm{A^{-1}(B)}$

$$\mathrm{Y_t} = \mathrm{A^{-1}(B)}\alpha\mathrm{(B)Y_t} + \mathrm{A^{-1}(B)}\varepsilon_\mathrm{t}.$$

حيث $\alpha\mathrm{(B)}$ يسمى بالشكل النهائي للنظام ويكون هذا الشكل موجودا في حالة ما إذا كانت المصفوفة $\mathrm{A(B)}$ قابلة للقلب تحت الشرط التالي :

$$det\big(\mathrm{A(B)}\big) \neq 0.$$

2- طريقة التقدير نموذج VAR:

في حالة نموذج VAR يمكن تقدير كل معادلة من معادلات هذا النموذج بطريقة المربعات الصغرى أو المعقولية العظمى ،يكتب نموذج VAR(p) المقدر وفق الشكل التالي :

$$\widehat{Y}_\mathrm{t} = \widehat{\mathrm{A}}_0 + \widehat{\mathrm{A}}_1\mathrm{Y_{t-1}} + \cdots + \widehat{\mathrm{A}}_\mathrm{p}\mathrm{Y_{t-p}} + \hat{\varepsilon}_\mathrm{t}.$$

حيث ε هو شعاع ذو البعد $(\mathrm{k} \times 1)$ للبواقي المقدرة $(\hat{\varepsilon}_{1t}, \hat{\varepsilon}_{2t}, \cdots, \hat{\varepsilon}_{kt})$ ،ونسمى $\sum_{\hat{\varepsilon}}$ مصفوفة التباين-التباين المشترك لبواقي التقدير.

يجب تقدير معاملات هذا النموذج إنطلاقا من سلاسل مستقرة عن طريق حساب الفروقات من الدرجة d في حالة إتجاه عام عشوائي أو إضافة مركبة إتجاه عام إلى صيغة نموذج VAR في حالة إتجاه عام ثابت ،أيضا يمكن إضافة متغيرات صورية لتصحيح التغيرات الموسمية .

3- طريقة تحديد رتبة نموذج VAR:

لتحديد درجة نموذج $VAR(p)$ ،نستخدم معايير المعلومات ،فطريقة إختيار الدرجة تكمن في تقدير كل معاملات النموذج من أجل أي درجة من 0 الى p^* (p^* هو العدد الأصى المقبول للتأخير المسموح من قبل النظرية الإقتصادية أو البيانات المتاحة) ،نستعمل مثلا ثلاثة معايير Akaike و Schwarz و $Hannan - Quin$ المعرفة كما يلى :

$$* \ AIC(p) = \ln\left(\det\left|\sum\nolimits_{\hat{\varepsilon}}\right|\right) + \frac{2k^2p}{n}.$$

$$* \ SC(p) = \ln\left(\det\left|\sum\nolimits_{\hat{\varepsilon}}\right|\right) + \frac{k^2\ln(n)}{n}.$$

$$* \ AIC(p) = \ln\left(\det\left|\sum\nolimits_{\hat{\varepsilon}}\right|\right) + \frac{2k^2p\times\ln(n)}{n}.$$

قائمة المراجع

قائمة المراجع باللغة العربية :

* محمد شيخي ، طرق القياس الاقتصادي محاضرات وتطبيقات، الحامد ،الطبعة الاولى، 2011.

* سمير مصطفى الشعراوي، مقدمة في التحليل الحديث للسلاسل الزمنيةمركز النشر العلمي، الطبعة الأولى، جده، المملكة العربية، 2005.

* عبد القادر محمد عبد القادر عطية، "الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق"، ط(2)، الإسكندرية: الدار الجامعية، 200.

* مولود حشمان، نماذج وتقنيات التنبؤ على المدى القصير ،ديوان المطبوعات الجامعية ،الجزائر؛ 1998.

* مولود حشمان، "نماذج وتقنيات التنبؤ القصير المدى"، ديوان المطبوعات الجامعية ،الجزائر،2010 .

* *هاري كلجيان، والاس أوتس* ؛ *ترجمة المرسي السيد حجازي، عبد القادر محمد عطية* ،مقدمة في الاقتصاد القياسي: المبادئ والتطبيقات،النشر العلمي والمطابع، المملكة العربية السعودية2001.

* صالح تومي ،مدخل لنظرية القياس الاقتصادي (الجزء الأول) ،ديوان المطبوعات الجامعة ،الجزائر 1999.

قائمة المراجع باللغة الأجنبية :

* Régis Bourbonnais Michel Terraza, Analyse des séries temporelles Applications à l’économie et à la gestion, 3e édition, Dunod, Paris, 2010.

* Esam Mahdi, Time Series Analysis - Part 1, Islamic University of Gaza - Department of Mathematics, 19April, 2017.

* Esam Mahdi, Time Series Analysis - Part 2, Islamic University of Gaza Department of Mathematics, 26April, 2017.

* James D. Hamiltonm, Time Series Analysis, published by Princeton University Press, 41 William St., Princeton, New Jersey 08540, 1994.

* Badi H. Baltagi, Econometrics, Springer Heidelberg Dordrecht London New York, Fifth Edition, 2011.

* Éric DOR, Économétrie, Pearson Education France, 2009.

* Darnodar Gujarati, Econometrics by Example, First published 2011 by PALGRAVE MACMILLAN.

* John D. Levendis, Time Series Econometrics, Springer Nature Switzerland AG, 2018.