



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Méthode de décomposition de domaine
de type Schwarz pour l'équation de
Laplace discrétisée par éléments finis**

Présenté par: Arbia Ikram

Daoudi Warda

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Dr.Habita Khaled	MCA/Prof.	Président	Univ. El Oued
Dr.Touati Brahim Said	Prof.	Rapporteur	Univ. El Oued
Dr.Menaceur Bakkeur	MCA/MC	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2018 – 2019

Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier «**Allah**» le tous puissant, pour nous avoir donné la force et la patience.

Nous exprimons notre profonde gratitude et nos remerciements :

À notre encadreur de mémoire **Dr. Touati brahim Said** Maitre de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour avoir accepté de nous encadrer, pour son enseignement, son support, ses encouragements tout au long de ce travail.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance. Un remerciement spécial et sincère aux **notre parents**.

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de nos familles.

Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également à nos camarades de la promotion 2019 de Mathématiques et tous nos amis.

Finalement, Nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendu.

Table des matières

Introduction générales	v
Notations générales	vii
1 Préliminaire	1
1.1 Espace de Hilbert	1
1.2 Espaces fonctionnelles	2
1.2.1 Les espaces $L^p(\Omega)$	2
1.3 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$	3
1.3.1 L'espace de $H_0^1(\Omega)$	3
1.3.2 Un théorème de trace	4
1.3.3 Applications du théorème de Trace	5
1.4 Les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$	5
1.5 Espace $W^{m,p}(\Omega)$	5
1.5.1 Dualité	6
1.5.2 L'espace $L^p(0, T, X)$	7
1.6 L'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$	7
1.7 Classification des EDP	8
1.7.1 Types des équations aux dérivées partielles	8
1.8 Introduction à la méthode des éléments finis	8
1.8.1 Formulation variationnelle	8
1.8.2 Approximation interne générale	11
1.8.3 Principe général de la méthode des éléments finis	13

1.8.4	Cadre général	19
1.8.5	Estimateurs basés sur l'erreur d'interpolation	20
2	Méthodes de décomposition de domaine de type Schwarz	27
2.1	Introduction	27
2.2	Méthodes de décomposition de domaine	28
2.2.1	La méthode de Schwarz originale classique	28
2.2.2	Méthodes avec recouvrement	29
2.2.3	Méthodes sans recouvrement	33
2.3	Méthodes optimisées de Schwarz	41
2.4	Exemples en 1D	43
2.4.1	Le problème de Laplace	43
2.5	La preuve de convergence originale de Schwarz	44
2.5.1	La preuve variationnelle de P.L.Lions	46
2.6	Formalisme algébrique	49
2.7	Conclusion	57
3	Estimation d'erreur a posteriori pour les méthodes de décomposition générali- sée de domaines avec recouvrement	59
3.1	Introduction	59
3.1.1	Formulation de problème et méthode de décomposition de domaine	60
3.2	Estimation d'erreur a posteriori dans le cas continu	61
3.3	Estimation d'erreur a posteriori dans le cas discret	67
	Conclusion générale	72
	Références	73

Table des figures

1.1	Fonction de base φ_i	17
1.2	Temps CPU de résolution du problème (1.23) par la méthode du gradient conjugué	24
2.1	Décomposition du carré unité en deux sous-domaines qui se recouvrent . .	29
2.2	Décomposition de domaine $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$	30
2.3	Décomposition de domaine sans recouvrement	33
3.1	Deux exemples de décompositions de domaines (Schur et Schwarz).	62

Introduction générales

A l'origine, les méthodes de décomposition de domaine ont été utilisées pour résoudre des problèmes de grande taille.

Les méthodes de décomposition de domaine sont des méthodes qui permettent de résoudre plus efficacement le problème algébrique $Ax = b$ en le parallélisent par de décomposer le système linéaire initial en sous systèmes linéaire plus petits peuvent être résolus facilement.

Les méthodes sont développées et ont été étendues à d'autres besoins. En effet, dans certaines applications, la modélisation recouvre différents milieux physiques ayant des propriétés très différentes on considère différents modèles selon des zones différentes. Les méthodes de décomposition de domaine sont particulièrement adoptées puisqu'elles découplant les problèmes en différentes sous domaines.

L'origine, des méthodes de décomposition de domaine remonte à H.A.Schwarz, qui a introduit en 1870 une méthode itérative (la méthode de Schwarz multiplication).

Plus tard, dans les années 1980, P.L.Lions propose une version parallèle de l'algorithme de Schwarz avec recouvrement des sous domaine.

L'analyse a posteriori est maintenant un outil important pour améliorer l'efficacité de la discrétisation une EDP par méthode d'élément finis ou volume finis.

La stratégie de ce mémoire est la suivant :

Dans la premier chapitre, nous présentons quelques définitions nécessaires et théorèmes fondamentales sur l'analyse fonctionnelle et numérique.

En deuxième chapitre, nous expliquons les principaux méthodes de décomposition de domaine, et l'introduisons les méthodes de Schwarz.

Dans la troisième chapitre, en propose une estimation d'erreur a posteriori pour la

problème de Laplace, on utilisant la méthode des éléments finis pour assurer la convergence de la solution discrète.

Notations générales

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous lisons ci-dessous :

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}^n	Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
$ \cdot $	Valeur absolue ou module.
<i>i.e.</i>	C'est à dire
<i>s.e.v</i>	Sous espace vectoriel.
<i>SDP</i>	Symétrique définie positive.
<i>DDM</i>	Méthode décomposition de domaine.
<i>GODDM</i>	Méthode décomposition de domaine avec recouvrement généralisé.
$\partial\Omega = \Gamma$	La frontière topologique de Ω .
η	le vecteur unité normal extérieur par rapport à $\partial\Omega$.
∇u	Le gradient de u .
Δu	Laplacien de u .
V_G	dimension fini d'espace des éléments finis.
$\ \cdot\ _p = (\int_{\Omega} f ^p)^{\frac{1}{p}}$	la norme de fonction f dans $L^p(\Omega)$.
H	$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p(\Omega) \text{ tel que, } \forall \alpha \text{ avec } \alpha \leq m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \right\}$.
(\cdot, \cdot)	produit scalaire dans V , si V est espace de Hilbert.
$W^{1,p}(\Omega)$	espace de sobolev.
$H_0^1(\Omega)$	$= W_0^{1,2}$.
I	Identité.

Chapitre 1

Préliminaire

Le cadre approprié pour l'étude rigoureuse de la théorie d'équation aux dérivées partielles s'avère être l'espace fonctionnel le plus important en physique et en analyse moderne, connu sous le nom d'espaces de Hilbert.

En suite, nous devons donner quelques résultats importants sur ces espaces ici .

1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni du produit scalaire (u, v) tel que : $\|u\| = \sqrt{(u, v)}$ est la norme qui soit H complète.*

Corollaire 1.1.1. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers u , dans topologie faible et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre suite qui converge faiblement vers v ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n) = (u, v).$$

Proposition 1.1.1. *[Inégalité de Cauchy–Schwarz]*

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit hermitien sur E . Alors, pour tous $x_1, x_2 \in E$, on a :

$$|\langle x_1, x_2 \rangle| \leq \|x_1\| \|x_2\|.$$

avec égalité si et seulement si la famille $\{x_1, x_2\}$ est liée.

1.2 Espaces fonctionnelles

1.2.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.2.1. Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'espace

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

Pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Définition 1.2.2. L'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ est défini par

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists C \leq 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \mu\text{-pp} \right\}.$$

Pour toute fonction $f \in L^\infty(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \left\{ C \leq 0, |f| \leq C \mu\text{-pp} \right\}.$$

Définition 1.2.3. [Inégalité de Minkowski]

Si $1 \leq p < \infty$ et $u, v \in L^p$, alors :

$$\|u + v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}.$$

Notation :

Soit $1 \leq p \leq \infty$, on note par q le nombre $\frac{p}{p-1}$ pour que $1 \leq p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, q est appelé la composante conjugué de p .

Théorème 1.2.1. [Inégalité de Hölder]

Soient $1 \leq p \leq \infty$, q l'exposant conjugué de p , $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu(x) \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

1.3 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Définition 1.3.1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, \dots, N\} \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}. \quad (1.1)$$

où $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de v .

Proposition 1.3.1. Muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \left(u(x)v(x) + \nabla u(x) \nabla v(x) \right) dx, \quad (1.2)$$

et la norme :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left(|v(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert et séparable (i.e : il existe une partie dénombrable dense dans $H^1(\Omega)$).

Lemme 1.3.1. [1] Pour tout fonction $v \in H^1(0, 1)$ et pour tout $x, y \in [0, 1]$ on a :

$$v(y) = v(x) + \int_x^y v'(s) ds.$$

Plus généralement ,pour tout $x \in [0, 1]$, l'application $v \rightarrow v(x)$, définie de $H^1(0, 1)$ dans \mathbb{R} , est une forme linéaire continue sur $H^1(0, 1)$.

En particulier, toute fonction $v \in H^1(0, 1)$ est continue sur $[0, 1]$.

1.3.1 L'espace de $H_0^1(\Omega)$

Nous avons défini maintenant un autre espace de Sobolev qui nous sera très utile pour les problèmes avec condition aux limites de Dirichlet.

Définition 1.3.2. Soit $C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonction de classe C^∞ à support compact dans Ω l'espace Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.3.2. *Muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$, l'espace Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

L'espace Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est un sous espace de $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.3.3. [Inégalité de Poincaré]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx. \quad (1.3)$$

Remarque 1.1. *L'inégalité de Poincaré n'est pas vraie pour les fonctions de $H^1(\Omega)$.*

Corollaire 1.3.1. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N borné dans au moins une direction de l'espace.*

Alors la semi norme :

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|\nabla v(x)|^2) dx \right)^{1/2}, \quad (1.4)$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $H^1(\Omega)$.

1.3.2 Un théorème de trace

Lemme 1.3.2. [1] *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 , Soit $(\omega_i)_{1 \leq i \leq I}$ une partition régulier Ω , c'est-à-dire que chaque (ω_i) est un ouvert régulier de classe C^1 , $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^I \overline{\omega_i}$. Soit v une fonction dont la restriction à chaque ω_i , $v_i = v|_{\omega_i}$, appartient à $H^1(\omega_i)$. Si v est continue sur $\overline{\Omega}$, alors v appartient à $H^1(\omega_i)$.*

Théorème 1.3.1. [1] *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 , ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. On définit l'application de trace γ_0*

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C(\overline{\partial\Omega}) \\ v &\longrightarrow \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Cette application γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_0 . En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.5)$$

1.3.3 Applications du théorème de Trace

Nous avons donner quelques conséquences importantes du théorème de trace.

Théorème 1.3.2. [Formule de Green]

Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 . Si u et v sont des fonction de $H^1(\Omega)$, elles vérifient

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x) dx, \quad (1.6)$$

où $n = (n_i)_{1 \leq i \leq N}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$.

Corollaire 1.3.2. [Formule d'intégration par partie]

Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ de classe C^1 par morceaux. Alors si u et v sont fonction de $H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} (\partial_{x_i} u) v dx = - \int_{\Omega} u (\partial_{x_i} v) dx + \int_{\Gamma} u v x_i dx, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.7)$$

où x_i est la $i^{\text{ème}}$ composante de la normale sortante au domaine Ω .

1.4 Les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$

Définition 1.4.1. Pour tout entier $m \geq 1$, on appelle espace de Sobolev d'ordre m sur Ω l'espace

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que : } \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}, \quad (1.8)$$

on muni $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{m, \Omega} = \int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v \right) dx \quad (1.9)$$

et on note $\|v\| = \left(\langle u, v \rangle_{m, \Omega} \right)^{1/2}$ la norme correspondante.

1.5 Espace $W^{m,p}(\Omega)$

On généralise les définitions précédentes pour un entier $m \geq 0$ et pour un réel p où $1 \leq p < \infty$.

Définition 1.5.1. pour tout entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p(\Omega) \text{ tel que, } \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \right\}, \quad (1.10)$$

où la dérivée partielle $\partial^\alpha v$ est à prendre au sens faible.

Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^p \right)^{1/p}.$$

Proposition 1.5.1. Si $1 \leq p < \infty$, L^p est réflexive, séparable, et le dual de L^p pour tout p est L^q .

Si $p = 1$, L^1 est pas , séparable et le dual de L^1 est L^∞ .

Si $p = \infty$, L^∞ est pas réflexive, pas séparable et L^1 est le dual de L^∞ .

1.5.1 Dualité

Définition 1.5.2. Le dual de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est appelé $H^{-1}(\Omega)$ on note

$$\langle L, \phi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = L(\phi)$$

le produit de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et son dual pour tout forme linéaire continue $L \in H^{-1}(\Omega)$ et toute fonction $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Proposition 1.5.2. [1] L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est caractérisé par

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ f = v_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \text{ avec } v_0, v_1, \dots, v_N \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Autrement dit, toute forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$, notée $L \in H^{-1}(\Omega)$, s'écrit pour toute $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$L(\phi) = \int_{\Omega} \left(v_0 \phi - \sum v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dx,$$

avec $v_0, v_1, \dots, v_N \in L^2(\Omega)$.

1.5.2 L'espace $L^p(0, T, X)$

Définition 1.5.3. Soit X est un espace de Banach, on note par $L^p(0, T, X)$ l'espace de fonctions mesurables

$$f :]0, T[\longrightarrow X$$

$$t \longrightarrow f(t),$$

tel que

$$\int_0^T (\|f(t)\|_X^p)^{\frac{1}{p}} dt = \|f\|_{L^p(0, T, X)} < \infty.$$

Si $p = \infty$

$$\|f\|_{L^p(0, T, X)} = \sup_{t \in]0, T[} \text{ess}\|f\|_X.$$

Théorème 1.5.1. [6] L'espace $L^p(0, T, X)$ est un espace de Banach.

Lemme 1.5.1. [6] Soit $f \in L^p(0, T, X)$ et $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0, T, X)$, ($1 \leq p \leq \infty$), alors la fonction f est continue de $[0, T]$ vers X . i.e $f \in C^1(0, T, X)$.

1.6 L'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$

$H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ est défini par

$$H^{\frac{1}{2}}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), |u|_{\frac{1}{2}, \Omega} < \infty \right\}$$

Où la norme de $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ est obtient par

$$|u|_{\frac{1}{2}, \Omega} = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^2} d\delta(x) d\delta(y) \quad u \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$$

Le dualité de cette espace défini par

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega_1) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \tilde{u} \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \right\}$$

muni de produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega_1)} = \langle u, v \rangle_{\frac{1}{2}, \Omega_1} + \int_{\Omega_1} \frac{uv}{\rho(x, \partial\Omega_1)} d\delta(x)$$

1.7 Classification des EDP

Définition 1.7.1. La forme générale d'une équation aux dérivées partielles linéaire, scalaire, d'ordre 2 est :

$$au + c\nabla u + \operatorname{div}(A\nabla u) = f$$

où $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ sont les coefficients de l'équation aux dérivées partielles linéaire.

1.7.1 Types des équations aux dérivées partielles

Dans le cas où u est scalaire ($n = 1$) et les coefficients sont constants, on obtient :

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda u = f,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda$ sont des scalaires. Cette équation est dite :

1. elliptique si $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$;
2. parabolique si $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$;
3. hyperbolique si $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.

On peut dire que :

– les problèmes elliptiques vont concerner les problèmes stationnaires tels que ceux de la mécanique, la thermique, l'électrostatique, les membranes élastiques, l'écoulement potentiel.

1.8 Introduction à la méthode des éléments finis

1.8.1 Formulation variationnelle

L'approche que nous allons présenter est appelée : approche variationnelle, l'intérêt de cette approche dépasse le cadre des EDP, nous reprendrons cette approche variationnelle pour un problème d'évolution en temps, et elle sera cruciale pour comprendre la méthode numérique des éléments finis .

Cette approche admet une interprétation physique et en mécanique très naturelle.

1.8.1.1 Formulation général

Définition 1.8.1. Une forme linéaire $L(u)$ sur V est continue ssi il existe une constante K telle que $|L(u)| \leq K\|u\|_V \forall u \in V$.

Définition 1.8.2. Une forme bilinéaire $a(u, w)$ sur $V \times W$ est continue ssi il existe une constante M telle que $|a(u, w)| \leq M\|u\|_V\|w\|_W \forall (u, w) \in V \times W$.

1.8.1.2 Problèmes variationnels

Le cadre générale abstrait adapté à la résolution de nombreux problèmes EDP par les formulations variationnelles est : on se donne

- 1) Un espace de Hilbert V (sur \mathbb{R}) de norme $\|\cdot\|$
- 2) Un forme bilinéaire $u, v \mapsto a(u, v)$
- 3) Un forme linéaire $v \mapsto L(v)$

On considère alors le problème variationnel générale : trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, a(u, v) = L(v).$$

1.8.1.3 Continuité

Définition 1.8.3. Continuité d'une forme linéaire. Une forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est dite continue si elle vérifie :

$$\exists c > 0, \forall (u, v) \in H^2, |a(u, v)| \leq c\|u\|\|v\|.$$

Définition 1.8.4. Coercivité d'une forme linéaire. Une forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est dite coercitive si elle vérifie :

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in H, a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2.$$

1.8.1.4 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.8.1. [de Lax-Milgram]

Soit H un espace de Hilbert et $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive sur $H \times H$ et $L : H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur H , c'est à dire

- (i) $\exists M > 0, \forall (u, v) \in H^2, |a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|$ (continuité de a)

(ii) $\exists \alpha > 0, \forall u \in H, a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$ (coercivité de a)

(iii) $\exists c > 0, \forall v \in H, |L(v)| \leq c \|v\|$ (continuité de L)

Alors le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que :} \\ \forall v \in H, a(u, v) = L(v) \end{cases}$$

admet une solution unique .

Démonstration. Soit $A : H \rightarrow H$ l'opérateur linéaire défini par $\langle Au, v \rangle = a(u, v)$ pour tout v dans H .

L'existence de Au résulte du théorème de Riesz, car $v \rightarrow a(u, v)$ est linéaire continue sur H . L'opérateur A est linéaire continu car

$$\|Au\| = \sup_{v \in H \setminus \{0\}} \frac{|\langle Au, v \rangle|}{\|v\|} \leq \frac{M \|u\| \|v\|}{\|v\|} = M \|u\|$$

D'autre part toujours d'après le théorème de Riesz, il existe $b \in H$ tel que $L(v) = \langle b, v \rangle$; $\forall v \in H$.

Le problème revient donc à montrer qu'il existe $u \in H$ tel que $Au = b$. On va procéder de manière itérative en partant d'un $u_0 \in H$ quelconque et en définissant, pour $\rho > 0$, la suite récurrente

$$u_{k+1} = u_k - \rho(Au_k - b) = F(u_k).$$

Montrons que pour $\rho > 0$ suffisamment petit, F est contractante. On a

$$F(u) - F(v) = u - v - \rho(A(u - v))$$

donc

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|^2 &= \|u - v\|^2 + \rho \|A(u - v)\|^2 - 2\rho \langle A(u - v), u - v \rangle \\ &= \|u - v\|^2 + \rho \|A(u - v)\|^2 - 2\rho a(u - v, u - v) \\ &\leq \|u - v\|^2 + M^2 \rho^2 \|u - v\|^2 - 2\rho \alpha \|u - v\|^2 \\ &\leq (1 - 2\rho \alpha + \rho^2 M^2) \|u - v\|^2 \end{aligned}$$

Choisissons donc ρ tel que $\rho < 2 \frac{\alpha}{M^2}$. Alors F est contractante et d'après le théorème du point fixe contractant (valable sur un espace complet) le schéma itératif est convergent, ce qui prouve le théorème. \square

Théorème 1.8.2. [12] [*Forme variationnelle du théorème de Lax-Milgram*]

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - f(v)$ pour tout v de E :

$$\exists! u \in H, J(u) = \min_{v \in H} J(v) = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2}a(u, v) - f(v) \right).$$

1.8.2 Approximation interne générale

1.8.2.1 Principe général

Étant donné un espace de Hilbert V , une forme bilinéaire continue et coercive $a(u, v)$, et une forme linéaire continue $L(v)$, on considère la formulation variationnelle :

$$(\mathcal{Q}) \quad \text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \quad (1.11)$$

dont on sait qu'elle admet une solution unique par le théorème de Lax-Milgram .

L'approximation interne de (1.11) consiste à remplacer l'espace de Hilbert V par un sous espace de dimension finie V_h , c'est à dire à chercher la solution de :

$$(\mathcal{Q}_h) \quad \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (1.12)$$

La résolution de l'approximation interne (1.12) est facile comme le montre le lemme suivant .

Lemme 1.8.1. Soit V un espace de Hilbert réel, et V_h un sous espace de dimension finie . Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur V , et $L(v)$ une forme linéaire continue sur V . Alors l'approximation interne (1.12) admet une unique solution . Pour ailleurs cette solution peut s'obtenir en résolvant un système linéaire de matrice définie positive (et symétrique si $a(u, v)$ est symétrique) .

Démonstration. Voir [2]. □

Le lemme suivant , du à Jean Céa , montre que la distance entre la solution exacte u et la solution approchée u_h est majorée uniformément par rapport au sous espace v_h par la distance entre u et v_h .

Lemme 1.8.2. [de Céa]

On se place sous les hypothèses du lemme 1.8.1. Soit u la solution de (1.11) et u_h celle de (1.12). On a

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\nu} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

Démonstration. voir [2]. □

1.8.2.2 Interprétation de u_h

On a $a(u, v) = L(v), \forall v \in V$, donc en particulier $a(u, v_h) = L(v_h); \forall v_h \in V_h$, car $V_h \subset V$. Par ailleurs, $a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h$. Par différence, on déduit que

$$a(u - u_h, v_h) = 0; \forall v_h \in V_h. \quad (1.13)$$

Dans le cas où $a(.,.)$ est symétrique, il s'agit d'un produit scalaire sur V . u_h peut être interprétée comme la projection orthogonale de u sur V_h au sens de $a(.,.)$.

1.8.2.3 Estimation d'erreur

On a :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h). \end{aligned}$$

Où $v_h - u_h \in V_h$. Donc $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$ d'après (1.13). On a donc : $a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h), \forall v_h \in V_h$.

1.8.2.4 Projection orthogonale

Définition 1.8.5. Soit E un espace vectoriel de dimension n .

Soient F et H deux sous-espaces vectoriels de E complémentaires : $E = F \oplus H$. Alors l'application

$$p_F : E = F \oplus H \mapsto E, p_F(\vec{x}) = \vec{y}, \text{ si } \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}, \text{ avec } (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times H,$$

est linéaire.

On l'appelle la projection sur F parallèlement à H . Dans ce cas $id_E - p_F = p_H$ est la projection sur H parallèlement à F . Si E est un espace euclidien de norme $\| \cdot \|$, et si $H = F^\perp$, on dit que p_F est la projection orthogonale sur F .

Dans ce cas on a l'égalité de Pythagore $\forall \vec{x} \in E$,

$$\|\vec{x}\|^2 = \|p_F(\vec{x})\|^2 + \|p_H(\vec{x})\|^2.$$

1.8.3 Principe général de la méthode des éléments finis

Le principe de la méthode des éléments finis est de construire des espaces d'approximation interne V_h des espaces fonctionnelles usuels $H^1(\Omega), H_0^1(\Omega), H^2(\Omega), \dots$

La démarche générale de la méthode des éléments finis est la suivante. On a une EDP à résoudre sur un domaine Ω . On écrit la formulation variationnelle de cette EDP et on se ramène donc à un problème du type

$$(Q) \quad \text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V.$$

On va chercher une approximation de u par approximation interne. Pour cela, on définit un maillage du domaine, grâce auquel on va définir un espace d'approximation V_h , s.e.v. de V de dimension finie N_h (par exemple V_h sera l'ensemble des fonctions continues sur Ω et affines sur chaque maille). Le problème approché est alors

$$(Q_h) \quad \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h})$ une base de V_h . En décomposant u_h sur cette base sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i,$$

le problème (Q_h) devient

$$\text{Trouver } u_1, \dots, u_{N_h} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h,$$

ou encore par linéarité de a et L :

$$\text{Trouver } u_1, \dots, u_{N_h} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad \forall j = 1, \dots, N_h.$$

c'est à dire résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & \dots & a(\varphi_1, \varphi_{N_h}) \\ \vdots & & \vdots \\ a(\varphi_{N_h}, \varphi_1) & \dots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_{N_h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{N_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\varphi_1) \\ \vdots \\ L(\varphi_{N_h}) \end{pmatrix}$$

soit

$$A\mu = b.$$

La matrice A est a priori pleine. Toutefois, pour limiter le volume de calculs, on va définir des fonctions de base φ_i dont le support sera petit, c'est à dire que chaque fonction φ_i sera nulle partout sauf sur quelques mailles. Ainsi les termes $a(\varphi_i, \varphi_j)$ seront le plus souvent nuls, car correspondant à des fonctions φ_i et φ_j de supports disjoints. La matrice A sera donc une matrice creuse, et on ordonnera les φ_i de telle sorte que A soit à structure bande, avec une largeur de bande la plus faible possible.

A ce niveau, les difficultés majeures en pratique sont de trouver les φ_i et de les manipuler pour les calculs d'intégrales nécessaires à la construction de A . Sans rentrer pour le moment dans les détails, on peut toutefois indiquer que la plupart de ces difficultés seront levées grâce à trois idées principales :

- Le principe d'unisolvance - On s'attachera à trouver des degrés de liberté (ou ddl) tels que la donnée de ces ddl détermine de façon univoque toute fonction de V_h . Il pourra s'agir par exemple des valeurs de la fonction en quelques points. Déterminer une fonction reviendra alors à déterminer ses valeurs sur ces ddl.
- Définition des φ_i - On définira les fonctions de base par $\varphi_i = 1$ sur le $i^{\text{ème}}$ ddl, et $\varphi_i = 0$ sur les autres ddl. La manipulation des φ_i sera alors très simplifiée, et les φ_i auront par ailleurs un support réduit à quelques mailles.
- La notion de "famille affine d'éléments" - Le maillage sera tel que toutes les mailles soient identiques à une transformation affine près. De ce fait, tous les calculs d'intégrales pourront se ramener à des calculs sur une seule maille "de référence", par un simple changement de variable.

1.8.3.1 Exemple

Soit à résoudre le problème

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & a < x < b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

où f et c sont des fonctions données continues sur $[a, b]$. On supposera de plus que la fonction c est strictement positive sur $[a, b]$. Un tel problème est appelé problème aux limites.

Définition 1.8.6. Une solution classique (ou solution forte) de (\mathcal{P}) est une fonction de $C^2([a, b])$ telle que $u(a) = u(b) = 0$ et $\forall x \in]a, b[, -u''(x) + c(x)u(x) = f(x)$.

En faisant le produit scalaire $L^2(]a, b[)$ de l'équation différentielle avec une fonction-test $v \in \mathcal{D}(]a, b[)$ (c'est à dire en intégrant sur $[a, b]$), on a :

$$\int_a^b u''(x)v(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

soit, en intégrant par parties le premier terme :

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

car $v(a) = v(b) = 0$ puisque $v \in \mathcal{D}(]a, b[)$. Chaque terme de cette équation a en fait un sens dès lors que $v \in H_0^1(]a, b[)$. De plus, $\mathcal{D}(]a, b[)$ étant dense dans $H_0^1(]a, b[)$, cette équation est vérifiée pour tout $v \in H_0^1(]a, b[)$.

On peut donc définir le nouveau problème :

$$(\mathcal{Q}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(]a, b[) \text{ tel que} \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \end{cases} \quad (1.15)$$

Ce problème est la formulation variationnelle (ou formulation faible) du problème (\mathcal{P}) . Toute solution de (\mathcal{Q}) est appelée solution faible. Il est immédiat que toute solution forte de (\mathcal{P}) est aussi une solution faible.

On peut poser :

$$a(u, v) = \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx$$

et

$$L(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

a ainsi définie est une forme bilinéaire symétrique continue coercive sur $H_0^1(a, b) \times H_0^1(a, b)$, et L est une forme linéaire continue sur $H_0^1(a, b)$. Donc le problème (1.15) admet une solution unique d'après le théorème de Lax-Milgram.

Cherchons maintenant à interpréter cette solution u de (1.15). Prenons $v = \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$.

Alors

$$\int_a^b u'(x)\varphi'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

soit, en intégrant par parties :

$$- \int_a^b u''(x)\varphi(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

c'est à dire $(-u'' + cu, \varphi)_0 = (f, \varphi)_0 \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$. $\mathcal{D}(]a, b[)$ étant dense dans $L^2(]a, b[)$, on a donc : $-u'' + cu = f$ dans $L^2(]a, b[)$. u étant dans $L^2(]a, b[)$, et f et c étant dans $C^0([a, b])$, donc également dans $L^2(]a, b[)$, on en déduit que $u'' = cu - f$ est aussi dans $L^2(]a, b[)$. Puisque u est dans $H_0^1(]a, b[)$ et que u'' est dans $L^2(]a, b[)$, on en déduit que u est dans $H^2(]a, b[)$. Donc u est dans $C^1([a, b])$. De ce fait, $cu - f$, c'est à dire u'' est dans $C^0([a, b])$. Donc u_0 est dans $C^1([a, b])$, donc u est dans $C^2([a, b])$.

La solution faible u est donc aussi solution forte du problème de départ.

En résumé :

- On est parti d'un problème (\mathcal{P}) et on a introduit sa formulation variationnelle (\mathcal{Q}).
- On a montré l'existence et l'unicité d'une solution faible (en utilisant le théorème de Lax-Milgram). Toute solution forte étant aussi solution faible, ceci prouve qu'il y a au plus une solution forte pour (\mathcal{P}).
- On a prouvé que cette solution faible est bien une solution forte. Le problème de départ (\mathcal{P}) a donc une solution unique.

L'intérêt de cette démarche est d'une part que la formulation variationnelle se prête bien à l'étude de l'existence et de l'unicité de solutions, et d'autre part que l'on travaille dans des espaces de Hilbert, ce qui va permettre de faire de l'approximation interne.

On peut maintenant construire un maillage de $[a, b]$ en définissant une subdivision (pas

nécessairement régulière) $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$. Définissons alors l'espace V_h , sous-espace de $H_0^1(a, b)$ de dimension finie, par :

$$V_h = \{v_h \in C^0(a, b) = v_h \text{ affine sur chaque segment } [x_j, x_{j+1}] \text{ et } v_h(a) = v_h(b) = 0\}.$$

Le problème approché sur V_h est :

$$(\mathcal{Q}_h) \quad \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h.$$

En remarquant qu'une fonction de V_h est entièrement déterminée par ses valeurs en x_1, \dots, x_N , on établit que la dimension de V_h est N , et qu'une base de V_h est par exemple $(\varphi_1; \dots; \varphi_N)$, où φ_i est définie par $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, j = 1, \dots, N$ (δ_{ij} est ici le symbole de Kronecker). φ_i est donc la fonction "chapeau" représentée sur (la figure 1.1).

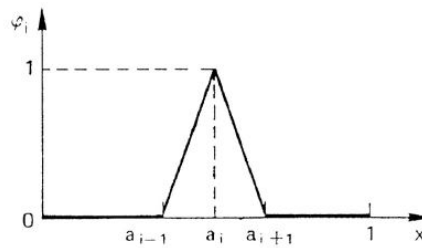


FIGURE 1.1 – Fonction de base φ_i

En décomposant la solution approchée u_h sur cette base sous la forme $u_h = \sum_{i=1}^N \mu_i \varphi_i$, on obtient le système linéaire $A\mu = b$, avec :

$$\begin{aligned} A_{ji} &= a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b [\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + c(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)] dx \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} [\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + c(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)] dx \end{aligned}$$

Le support de φ_i étant réduit à $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, on en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \quad \text{si } |i - j| \geq 2 \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varphi_i'(x)\varphi_{i+1}'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)] dx \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_i'(x)\varphi_{i-1}'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)] dx \\ a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [\varphi_i'^2(x) + c(x)\varphi_i^2(x)] dx \end{array} \right. \quad (1.16)$$

A est donc tridiagonale.

1.8.3.2 Définition des erreurs de discrétisation

L'erreur de discrétisation ε au sens de la norme de l'énergie sur un domaine \mathcal{D} notée $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$, est définie par :

$$\varepsilon = \|u - u_h\|_{\mathcal{D}}.$$

Soit D le domaine d'étude et T un élément fini (un tétraèdre dans le cas de cette étude), on définit l'erreur globale ε_D par :

$$\varepsilon_D^2 = \|u - u_h\|_D^2,$$

et l'erreur locale dans chaque élément ε_T par :

$$\varepsilon_T^2 = \|u - u_h\|_T^2.$$

On définit maintenant le patch d'un élément $\mathcal{P}(T)$ par l'ensemble des éléments qui ont une face (cas 3D) ou une arête (cas 2D) commune avec l'élément T (voir Fig. 1.1).

Dans ce cas, l'erreur locale $\varepsilon_{\mathcal{P}(T)}$ est définie par :

$$\varepsilon_{\mathcal{P}(T)}^2 = \|u - u_h\|_{\mathcal{P}(T)}^2$$

On peut alors exprimer :

$$\varepsilon_{\mathcal{P}(T)}^2 = \sum_{T \in \mathcal{P}(T)} \varepsilon_T^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_D^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}} \varepsilon_T^2,$$

où \mathcal{T} est l'ensemble des tétraèdres.

1.8.4 Cadre général

1.8.4.1 Espaces des éléments finis

Une triangulation (conforme) \mathcal{T} d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est une partition de Ω en N sous-domaines \mathcal{T} telle que :

1. $\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^N \bar{T}_j$.
2. pour $i \neq j$ l'ensemble $\bar{T}_i \cap \bar{T}_j$ est vide ou contient un sommet ou une arête commune.

Sur une triangulation \mathcal{T} , définissons un espace d'éléments finis V_h par un ensemble de fonctions de base $\{\varphi_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ où \mathcal{N} est l'ensemble des nuds de \mathcal{T} . Ces points permettent de définir les fonctions de base par :

$$\varphi_n(n') = c_n \delta_{nn'}, \quad \varphi_n \in P_k(T),$$

où φ_n est un facteur d'échelle approprié et $P_k(T)$ est l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à k par élément.

Notons \mathcal{N}^∂ l'ensemble $\mathcal{N} \cap \partial\Omega$ et $\mathring{V}_h = \{\varphi \in V_h; \varphi(n) = 0 \ \forall n \in \mathcal{N}^\partial\}$ le sous-espace de V_h des fonctions s'annulant sur la frontière.

1.8.4.2 Exemple

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine ouvert de frontière polygonale $\partial\Omega$. Nous considérons le problème elliptique suivant :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(x)\nabla u(x)) &= f && \text{dans } \Omega \\ u &= u^d && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.17}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $u^d \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ sont des fonctions données.

On introduit l'espace de Sobolev $V = \{u \in H^1(\Omega); u = u^d \text{ sur } \partial\Omega\}$. La formulation faible associée au problème (1.17) est :

Trouver $u \in V$ tel que :

$$\int_{\Omega} a \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in \mathring{V}. \quad (1.18)$$

Notons $a(.,.)$ la forme bilinéaire $a(u, v) = \int_{\Omega} a \nabla u \nabla v \, dx$.

Pour s'assurer que le problème (1.18) admet une solution unique, nous supposons que la forme bilinéaire $a(.,.)$ satisfait la condition de continuité :

$$\|a(u, v)\| \leq \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u \in V, \forall v \in V$$

où $\|\cdot\|_V$ est une norme en énergie dans l'espace V .

La solution du problème (1.18) est approchée par une méthode d'éléments finis. Soit \mathcal{T} une triangulation de Ω . Nous approchons l'espace continu V dans \mathcal{T} par un sous-espace de dimension finie $V_h \subset V$. Le problème discret s'écrit alors :

Trouver $u_h \in V_h$ tel que :

$$\int_{\Omega} a \nabla u_h \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathring{V}_h. \quad (1.19)$$

Par abus de notation, nous écrivons les intégrales sur Ω pour le problème discret alors qu'elles sont évaluées sur la triangulation \mathcal{T} .

L'espace de discrétisation considéré V_h est l'espace des fonctions continues sur le domaine et linéaires par élément du maillage.

1.8.5 Estimateurs basés sur l'erreur d'interpolation

1.8.5.1 Idée générale [14]

La propriété fondamentale de la méthode des éléments finis est que plus la taille des éléments diminue, plus l'erreur de discrétisation est faible. L'analyse numérique nous donne des résultats d'estimations d'erreur a priori concernant cette convergence en fonction du type d'interpolation utilisée. A priori, nous avons la majoration suivante :

$$\|u - u_h\| \leq c \|u - \pi_h u\|$$

où $\pi_h u$ est l'interpolation de la solution u sur l'espace éléments finis V_h . Ainsi le contrôle de l'erreur d'interpolation amène à un contrôle de l'erreur sur la solution elle-même. Les résultats expérimentaux présentés plus loin montrent que le lien est beaucoup plus fort que la simple majoration a priori et que l'utilisation de l'erreur d'interpolation fournit un bon estimateur.

L'estimateur employé ici est dérivé de la théorie de l'interpolation par éléments finis. La solution est développée en une série de Taylor et le premier terme d'ordre supérieur négligé par les fonctions d'interpolation est utilisé comme indicateur d'erreur.

Pour une approximation linéaire, ce terme est proportionnel à la dérivée seconde de la solution.

Pour des raisons de simplicité, l'estimation de l'erreur d'interpolation est d'abord illustrée dans le cas unidimensionnel, puis appliquée en dimension 2.

Soit u une fonction approchée sur l'intervalle $I = [0, h]$ par son interpolée $\pi_h u$ linéaire par intervalle, exacte aux extrémités. En utilisant un développement de Taylor d'ordre 2, l'erreur d'interpolation en un point $x \in I$ est donnée par :

$$(u - \pi_h u)(x) = \frac{x^2 - xh}{2} u''(x). \quad (1.20)$$

L'erreur d'interpolation élémentaire sur l'intervalle I est :

$$E_I = \left(\frac{1}{h} \int_0^h (u - \pi_h u)^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

qui est une valeur moyenne de $(u - \pi_h u)$ sur I . On peut intégrer exactement cette expres-

sion si u est une fonction quadratique (u'' constante sur I) :

$$\begin{aligned} E_I &= |u''|_I \left(\frac{1}{4h} \int_0^h x^2(x-h)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |u''|_I \frac{h^2}{\sqrt{120}}. \end{aligned}$$

Même si u n'est pas quadratique, on peut considérer que l'erreur E_I est proportionnelle au produit de h^2 par la dérivée seconde de u .

En pratique, ni u , ni ses dérivées ne sont des données accessibles mais on connaît une solution approchée, assimilée à $\pi_h u$ si elle est linéaire par intervalle. $\pi_h u$ n'est pas dérivable partout et, là où elle l'est, sa dérivée seconde n'apporte aucune information pour l'estimation ($(\pi_h u)'' = 0$). Cependant il est toujours possible de définir un opérateur de dérivée seconde par un schéma aux différences finies. Ainsi, l'erreur d'interpolation E_I peut être évaluée par l'estimateur d'erreur :

$$\varepsilon(I) = c h_I^2 |D_I^2(\pi_h u)|. \quad (1.21)$$

où h_I est la longueur de l'intervalle I et D_I^2 est un opérateur approché de dérivée seconde de l'espace des fonctions continues linéaires par intervalle sur chaque intervalle de discrétisation.

En dimension 2, la fonction u est interpolée sur un maillage triangulaire par la fonction $\pi_h u$, continue, linéaire par élément et qui prend les mêmes valeurs que u aux sommets. Le rôle de la dérivée seconde est maintenant joué par la matrice hessienne :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Si X est un vecteur unitaire, la dérivée seconde de u dans la direction X s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X^T H X.$$

De même qu'en dimension 1, u n'est pas connue en général et ses dérivées secondes sont évaluées à partir de $\pi_h u$. Cela nécessite la définition d'opérateurs discrets D^{ij} , $i, j = 1$

ou 2, agissant sur les fonctions continues et linéaires par élément, qui permettent d'approcher H par la matrice :

$$\widehat{H} = \left(D^{ij}(\pi_h u) \right)_{i,j=1..2}.$$

On remarque cependant que l'erreur unidimensionnelle (1.20) ne se justifie que lorsque $\pi_h u$ est l'interpolé de u sur l'intervalle I . En dimension supérieure à 1, $\pi_h u$ est l'interpolé sur l'espace des fonctions continues sur le domaine et linéaires par élément, ayant les mêmes valeurs que u aux sommets. Les seuls segments sur lesquels l'estimateur 1D (1.21) reste valable sont les arêtes du maillage.

1.8.5.2 Méthodes de calcul

L'estimateur basé sur l'erreur d'interpolation ne nous permet d'obtenir qu'une majoration locale de l'erreur de discrétisation. Mais il faut garder en mémoire qu'un estimateur d'erreur est utilisé pour fournir une indication sur l'erreur relative et que son calcul ne doit pas avoir un coût exagéré par rapport au temps total de calcul de la solution.

Il nous faut à présent expliciter le calcul des opérateurs de dérivées secondes. Pour évaluer la matrice hessienne, on utilise la solution en éléments finis u_h . Or u_h est continue sur le domaine et linéaire par élément, donc n'est pas deux fois dérivable.

1.8.5.3 Estimateur ε_1 : calcul du hessien par formulation faible

Nous définissons l'estimateur en 2D par extension de l'estimateur 1D (1.21). Soit a une arête de longueur h_a , supportée par un vecteur unitaire x_a quelconque. L'erreur d'interpolation linéaire de u sur a peut être estimée par :

$$\varepsilon_1(a) = h_a^2 |X_a^T \widehat{H} X_a|. \quad (1.22)$$

La première méthode de calcul du hessien consiste à projeter les dérivées secondes de u sur l'espace des fonctions linéaires par élément. Après une intégration par partie, la formulation faible permettant d'obtenir une approximation continue des dérivées secondes s'écrit pour tout $\widehat{H}^{ij} \in V_h$:

$$\int_{\Omega} \widehat{H}^{ij} \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx \quad \forall \varphi \in \mathring{V}. \quad (1.23)$$

En raison de l'absence de conditions aux limites, les valeurs aux bords sont obtenues par une méthode d'extrapolation.

La matrice de masse du problème (1.23) est une matrice à diagonale dominante et est bien conditionnée.

Condensation de la matrice masse (mass lumping).

Cette technique conduit à une expression simple pour le calcul de \widehat{H}_{ij} en chaque sommet s de la triangulation :

$$\widehat{H}_{ij}(s) = - \frac{\int_{\Omega_s} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} dx}{\int_{\Omega_s} \varphi_s dx}$$

où Ω_s , représente l'ensemble des éléments ayant le sommet s en commun et φ_s , est la fonction d'interpolation du sommet s .

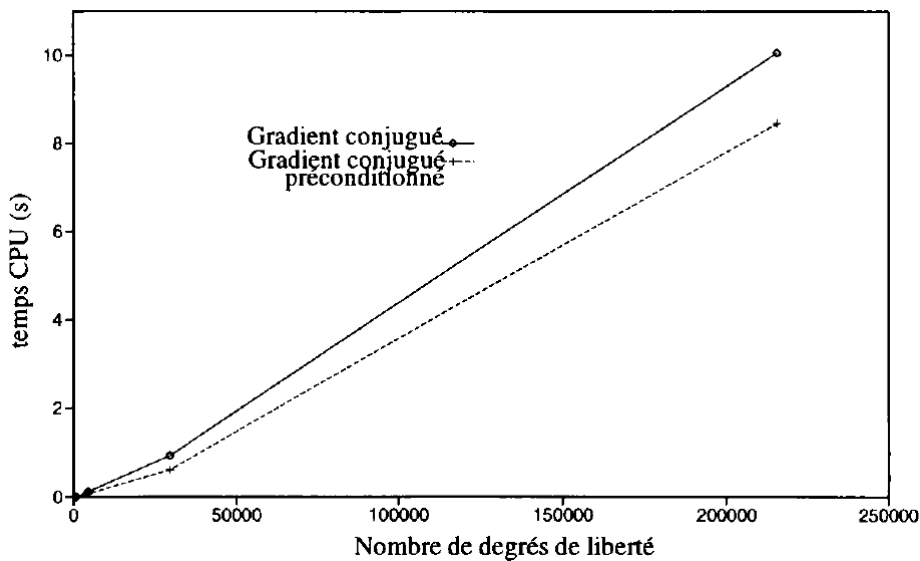


FIGURE 1.2 – Temps CPU de résolution du problème (1.23) par la méthode du gradient conjugué

Résolution du problème global.

En utilisant les valeurs aux bords obtenues par la méthode précédente comme conditions aux limites, le problème (1.23) est résolu à l'aide de la méthode du gradient conjugué. La vitesse de convergence de cette méthode est améliorée ici en utilisant un préconditionneur diagonal la Figure 1.2 .

1.8.5.4 Estimateur ε_2 : valeurs absolues du hessien

Dans le cadre de l'adaptation de maillage, il est plus classique de considérer une matrice M symétrique définie positive. La construction de la matrice M s'obtient en gardant les mêmes directions propres que H et les valeurs absolues des valeurs propres associées. Soient Λ la matrice diagonale des valeurs propres de H et R la matrice des vecteurs propres :

$$\widehat{H} = R^T \Lambda R \quad \text{et} \quad M = R^T |\Lambda| R.$$

La dérivée seconde de u dans une direction x quelconque est alors majorée en valeur absolue par :

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right| \simeq |X^T \widehat{H} X| \leq X^T M X. \quad (1.24)$$

La seconde relation est une égalité pour x de même direction que l'une des directions propres de \widehat{H} , et pour tout x si \widehat{H} est positive ($M = \widehat{H}$) ou négative ($M = -\widehat{H}$). On introduit alors un nouvel estimateur défini pour chaque arête a du maillage :

$$\varepsilon_2(a) = h_a^2 (X_a^T M X_a). \quad (1.25)$$

1.8.5.5 Estimateur ε_3 : estimation par dérivation du gradient

Un opérateur de dérivées secondes discrètes de type différences finies a été développé. Une première étape consiste à projeter le gradient de la solution éléments finis u_h sur l'espace des fonctions continues sur tout le domaine et linéaires par élément :

trouver $G u_h \in \mathring{V}_h \times \mathring{V}_h \times \mathring{V}_h$ tel que :

$$\int_{\Omega} G u_h \Phi dx = \int_{\Omega} \nabla u_h \Phi dx \quad \forall \Phi \in \mathring{V}_h \times \mathring{V}_h \times \mathring{V}_h.$$

Ce système est résolu par la méthode du gradient conjugué.

La deuxième étape approche les dérivées secondes de u sur les arêtes du maillage en considérant la dérivée directionnelle de Gu_h dans la direction (unitaire) X , de l'arête a . Celle-ci est définie par :

$$D_a Gu_h = X_a \cdot Gu_h.$$

On note a_0 et a_1 les extrémités de l'arête a . L'estimation de l'erreur d'interpolation est donnée par l'expression :

$$\varepsilon_3(a) = h_a |D_a Gu_h(a_1) - D_a Gu_h(a_0)|. \quad (1.26)$$

La notation que nous avons choisie correspond à une notation de type différence centrée.

Les indicateurs basés sur l'erreur d'interpolation sont directement liés à la solution approchée et sont donc indépendants de la nature des équations différentielles à résoudre. Ils ne dépendent que de la solution par éléments finis, des fonctions d'interpolation et du maillage. Ce type d'estimateur est donc très général et est applicable à une vaste gamme de problèmes. Il est portable d'un type d'équations aux dérivées partielles à un autre, pourvu que l'on considère une variable significative du problème physique.

Chapitre 2

Méthodes de décomposition de domaine de type Schwarz

2.1 Introduction

Basiquement les méthodes de décomposition de domaine de type Schwarz consiste à remplacer la résolution d'une EDP posée sur un domaine Ω potentiellement gros et compliqué par une succession de résolutions de la même EDP sur des sous-domaines de Ω , notés Ω_i , supposément plus simples, plus petits, etc ...

Évidemment, ceci ne peut se faire tout à fait aisément et il s'agit de procéder à des résolutions itératives sur les sous-domaines, choisies de telle sorte que la solution exacte du problème complet soit obtenue à convergence.

Historiquement ces méthodes ont été introduites pour démontrer d'un point de vue théorique l'existence de solutions au problème de Dirichlet sur des domaines plus complexes que ceux pour les quels un calcul explicite est possible (disque, carré, ...).

Aujourd'hui, ces méthodes sont plutôt utilisées à des fins numériques (ou bien sur le problème continu avant discrétisation, ou bien directement sur le problème discrétisé, voire même directement sur la matrice du problème) afin d'accélérer la résolution nu-

mérique des problèmes, ou même de permettre un calcul parallèle des solutions.

Dans cette courte présentation, on va se baser sur le problème modèle suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

2.2 Méthodes de décomposition de domaine

L'une des réponses à la problématique de parallélisation d'un problème, se trouve dans les méthodes de décomposition de domaines. L'idée est de découper le domaine de calcul en plusieurs sous-domaines. Il existe deux grandes familles des méthodes pour ce découpage par sous-domaines :

1. Les méthodes avec recouvrement
2. Les méthodes sans recouvrement

Nous illustrerons ces deux types de méthodes appliquées aux problèmes en espace pour des opérateurs linéaires. Parmi les méthodes sans recouvrement, il existe les méthodes de types Schwarz et celles de type complément de Schur.

Nous introduirons pour les méthode de type Schwarz celles avec recouvrement.

2.2.1 La méthode de Schwarz originale classique

Nous considérons le problème suivant :

$$\mathcal{L}u = f \quad , \text{ dans } \Omega. \quad (2.2)$$

où \mathcal{L} est un opérateur différentiel partiel, f est une fonction donnée et u est la solution inconnue.

Si Ω est partitionné en deux sous-domaines disjoints Ω_1 et Ω_2 . Notons pour $i = 1, 2$ par u_i la restriction de u à Ω_i , il en résulte de la forme (2.2) que

$$\mathcal{L}u_1 = f \quad \text{dans } \Omega_1; \quad \mathcal{L}u_2 = f \quad \text{dans } \Omega_2. \quad (2.3)$$

Nous avons besoin des conditions de transmission entre u_1 et u_2 à travers Γ ces conditions exprimées par

$$\Phi(u_1) = \Phi(u_2) \quad \text{sur } \Gamma; \quad \Psi(u_1) = \Psi(u_2) \quad \text{sur } \Gamma. \quad (2.4)$$

où les fonctions Φ et Ψ dépendront sur la nature du problème.

Ces conditions d'interface sont le plus souvent déterminées en notant que :

- i) La solution u appartient à un espace de fonctions défini sur l'ensemble Ω . Cela nécessite que $u|_{\Omega_1}$ dans Ω_1 et $u|_{\Omega_2}$ dans Ω_2 aient une certaine régularité et en plus que ils satisfont à une correspondance appropriée sur Γ .
- ii) Les restrictions $u|_{\Omega_1}$ et $u|_{\Omega_2}$ sont des solutions de distribution pour l'équation donnée dans Ω_1 et Ω_2 respectivement. Une autre condition d'interface entre eux vient du fait que u satisfait en fait l'équation au sens de distributions dans l'ensemble Ω ; à savoir, via l'interface Γ et pas seulement séparément dans Ω_1 et Ω_2 .

2.2.2 Méthodes avec recouvrement

On commence par étudier le cas où les sous-domaines de Ω se recouvrent, par exemple de l'une des deux façons indiquées dans la Figure 2.1.

On note γ_{12} (resp. γ_{21}) la partie du bord de $\partial\Omega_1$ (resp. $\partial\Omega_2$) qui est contenue dans $\overline{\Omega_2}$ (resp. $\overline{\Omega_1}$).

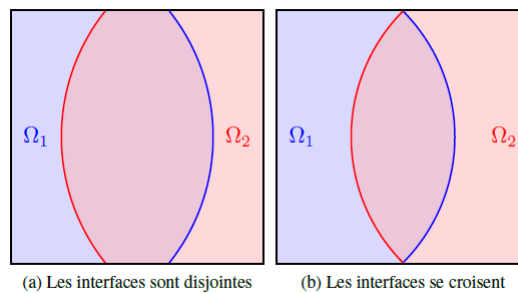


FIGURE 2.1 – Décomposition du carré unité en deux sous-domaines qui se recouvrent

2.2.2.1 La méthode de Schwarz

A l'origine, les méthodes de décomposition de domaine ont été utilisées pour résoudre de gros problèmes, les méthodes directes sont souvent trop coûteux pour résoudre le système linéaire.

Les méthodes de décomposition de domaine puis permet de décomposer l'initiale système linéaire en sous-systèmes linéaires plus petits pouvant être résolus par un seul processeur. Selon un algorithme itératif.

L'origine des méthodes de décomposition de domaine remonte à H. A. Schwarz, qui a introduit en 1870 une méthode itérative, connue aujourd'hui sous le nom de la méthode de Schwarz multiplicative.

On recherche la solution du problème de Poisson représenté par l'opérateur \mathcal{L} sur le domaine Ω suivant :

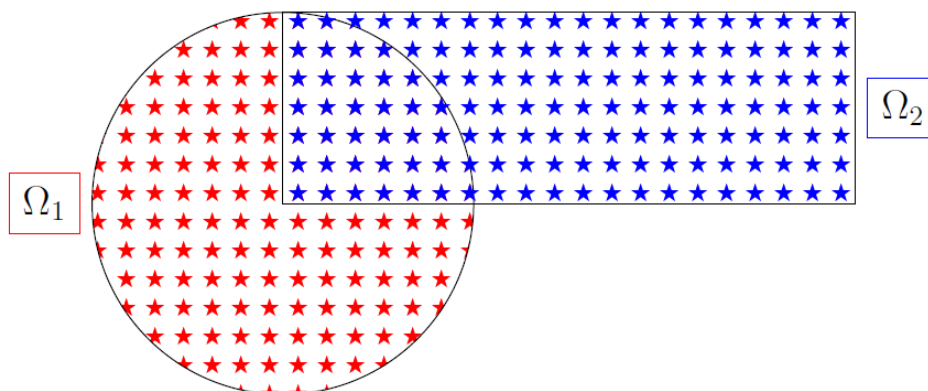


FIGURE 2.2 – Décomposition de domaine $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.5)$$

La méthode de Schwarz est une méthode itérative. On définit une solution initiale sur tout le domaine, et sur le bord des sous-domaines. Pour chaque sous-domaine, on a un

problème de Poisson bien défini grâce aux conditions de Dirichlet. En résolvant chaque sous-domaine on obtient de nouvelles valeurs de bord. Puis on réitère ce processus jusqu'à convergence.

Le découpage du domaine Ω en un sous-domaine rectangulaire Ω_1 et un sous-domaine circulaire Ω_2 . On écrit la méthode de Schwarz pour un opérateur \mathcal{L} linéaire :

1. Étape 1 : on résout

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \text{ sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_1 \end{cases} . \quad (2.6)$$

2. Étape 2 : on résout

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_2^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} \text{ sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \end{cases} . \quad (2.7)$$

3. Si la convergence n'est pas atteinte à un ϵ près, on effectue une itération supplémentaire.

2.2.2.2 Principe général -Schwarz alternée-

Étant donnée une partition de Ω de la forme donnée dans la Figure 2.1, l'algorithme de Schwarz le plus élémentaire consiste à construire des suites $(u_1^n)_n \subset H^1(\Omega_1)$ et $(u_2^n)_n \subset H^1(\Omega_2)$ de la façon suivante

- Choisir des initialisations u_1^0 et u_2^0 .
- Pour tout $n \geq 0$, effectuer de façon successive :
 - Calcul de $u_1^{n+1} \in H^1(\Omega_1)$ solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f, \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n, \text{ sur } \gamma_{12}. \end{cases} \quad (2.8)$$

- Calcul de $u_2^{n+1} \in H^1(\Omega_1)$ solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} = f, \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2. \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1}, \text{ sur } \gamma_{21}. \end{cases} \quad (2.9)$$

- S'arrêter à convergence (si celle-ci se produit!), i.e. quand u_1^n et u_2^n sont suffisamment proches sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$ par exemple.

Remarquons que l'étude de la convergence peut toujours se ramener au cas $f = 0$ en soustrayant la (restriction de la) solution limite recherchée u de toutes les valeurs de u_1^n et u_2^n . Le problème revient donc à savoir si, en partant de données initiales non nulles u_1^0 et u_2^0 , l'algorithme précédent (avec $f = 0$) fournit bien deux suites qui convergent vers 0.

Dans toute la suite nous allons donc supposer $f = 0$.

Par ailleurs, on voit que l'algorithme est complètement déterminé par la seule valeur de la donnée initiale u_2^0 sur l'interface γ_{12} et qu'au bout d'une itération complète, on obtient une valeur de la trace de u_2^1 sur γ_{12} . L'algorithme peut donc être compris comme une itération de la fonction qui à une trace sur γ_{12} associe une nouvelle trace sur γ_{12} obtenue en résolvant successivement deux problèmes elliptiques.

2.2.2.3 Méthode de Schwarz parallèle (Lions 1988)

Pierre Louis Lions proposa une version parallèle de l'algorithme 2.1 qui pourrait être utilisée efficacement sur une grappe de serveur.

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \text{ sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_1. \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_2, \\ u_2^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \Omega_1, \\ u_2^{n+1} = u_1^n \text{ sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_1. \end{cases} \quad (2.11)$$

2.2.3 Méthodes sans recouvrement

Soit le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.12)$$

Découpons le domaine Ω en deux sous-domaines. Nous rajoutons les conditions d'égalité de la solution et de la dérivée normale aux interfaces, ces conditions sont dites conditions de raccord.

$$\begin{cases} \Delta u_1 = f_1 \text{ sur } \Omega_1 \\ u_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma \\ u_1 = u_2 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = -\frac{\partial u_1}{\partial n_1} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_\Sigma \text{ sur } \Gamma \\ \Delta u_2 = f_2 \text{ sur } \Omega_2 \\ u_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma \end{cases} \quad (2.13)$$

En numérotant d'abord les inconnues des domaines puis celles des interfaces entre sous-domaines, on obtient le problème suivant sous forme matricielle équivalent à (2.12).

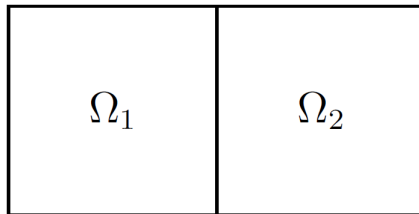


FIGURE 2.3 – Décomposition de domaine sans recouvrement

On obtient une matrice telle que :

$$\begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ & A_2 & C_2 \\ B_1 & B_2 & A_\Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_\Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_\Sigma \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

où $\Sigma = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2 = \partial\Omega_2 \cap \Omega_1$ représente la frontière entre sous-domaine. Les u_k sont les inconnues intérieures au domaine k , et u_Σ les inconnues interface aux domaines. Alors

A_k représente la discrétisation de l'opérateur linéaire pour les inconnues intérieures du domaine k . Les matrices C_k , respectivement B_k , représentent l'influence du bord sur l'intérieur et respectivement l'inverse. Le second membre f_k est la contribution du second membre pour les inconnues intérieures, tandis que f_Σ est la contribution du second membre pour les inconnues interfaces.

2.2.3.1 Méthode de Schur primale

On a les équations suivantes :

$$A_k u_k + C_k u_\Sigma = f_k \quad k = 1, 2 \quad (2.15)$$

et

$$\sum_{k=1}^2 B_k u_k + A_\Sigma u_\Sigma = f_\Sigma \quad (2.16)$$

A_k est la même matrice quelque soit le domaine k . On peut écrire f_Σ comme étant la somme des contributions des deux domaines $f_{1,\Sigma} + f_{2,\Sigma}$, et de même pour $A_\Sigma = A_{1,\Sigma} + A_{2,\Sigma}$. Considérons que les inconnues interfaces sont les mêmes, $u_{1,\Sigma} = u_{2,\Sigma} = u_\Sigma$ on peut alors éliminer les inconnues locales en exprimant u_k à partir de l'équation (2.15),

$$u_k = A_k^{-1}(f_k - C_k u_\Sigma). \quad (2.17)$$

En reportant ces valeurs dans l'équation (2.16), on obtient une équation en u_Σ ,

$$\begin{cases} S_k = A_{k,\Sigma} - B_k A_k^{-1} C_k \\ g_{k,\Sigma} = f_{k,\Sigma} - B_k A_k^{-1} f_k \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} S = S_1 + S_2 \\ g_\Sigma = g_{1,\Sigma} + g_{2,\Sigma} \end{cases} \quad (2.19)$$

$$S u_\Sigma = g_\Sigma \quad (2.20)$$

Dès que l'on connaît u_Σ , en résolvant (2.20), les solutions intérieures de chaque domaine sont données par $u_k = A_k^{-1}(f_k - C_k u_\Sigma)$.

La méthode se résume par le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & C_1 \\ 0 & A_2 & C_2 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_\Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ g_\Sigma \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

On résout alors ce système par une méthode de descente de type Krylov. Le produit matrice-vecteur ainsi que le calcul du second membre peut se faire en parallèle. Pour chaque produit-matrice vecteur, il y a un système linéaire local à résoudre, ce système est petit en comparaison avec le problème initial.

2.2.3.2 Méthode de Dirichlet-Neumann

Donné u_2^0 sur Γ , pour $k \geq 1$ résoudre les problèmes :

$$\begin{cases} Lu_1^{(k)} = f \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{(k)} = u_2^{(k-1)} \text{ sur } \Gamma \\ u_1^{(k)} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} Lu_2^{(k)} = f \text{ dans } \Omega_2 \\ \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial n} = \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial n} \text{ sur } \Gamma \\ u_2^{(k)} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma \end{cases} \quad (2.23)$$

L'algorithme DN est donc cohérent. Sa convergence n'est cependant pas toujours garantie.

2.2.3.3 Principe général

Il s'agit maintenant de proposer des méthodes de décomposition de domaines qui fonctionnent dans le cas où les sous-domaines ne se recouvrent pas. On se convainc aisément qu'une méthode à base de conditions aux limites de Dirichlet (ou de Neumann) n'a aucune chance de fonctionner. C'est pourquoi P.L.Lions a proposé une version de ces méthodes basées sur des conditions de transmission de type Fourier. Plus exactement, étant connues les approximations u_i^n sur tous les sous-domaines, on calcule les nouvelles

approximations u_i^{n+1} en calculant la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_i^{n+1} = f, \text{ dans } \Omega_i \\ u_i^{n+1} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i \\ \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial v_{ij}} + \lambda u_i^{n+1} = \underbrace{\frac{\partial u_j^n}{\partial v_{ij}} + \lambda u_j^n}_{= -\frac{\partial u_j^n}{\partial v_{ji}}}, \text{ sur } \gamma_{ij}. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Dans ces équations λ est un paramètre strictement positif fixé. On discutera de sa valeur un peu plus tard.

En plus de ne pas nécessiter de recouvrement entre les sous-domaines, cette méthode est donc entièrement parallélisable puisque la résolution sur les sous-domaines se fait de façon simultanée.

2.2.3.4 La preuve de convergence

Théorème 2.2.1. [5] Les suites $(u_i^n)_n$ obtenues par la méthode de Schwarz sans recouvrement vérifient

$$u_i^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u|_{\Omega_i}, \text{ dans } H^1(\Omega_i) \text{ pour tout } i$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que, quitte à soustraire la solution u du problème limite, il suffit de montrer le résultat pour $u = 0$ et $f = 0$. C'est-à-dire de montrer la convergence faible vers 0 des approximations dans le cas $f = 0$.

En guise de préliminaire, écrivons l'équation vérifiée par $u_i^{n+1} - u_i^{n-1}$ sur le domaine Ω_i . Celle-ci s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta(u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) = 0, & \text{dans } \Omega_i, \\ u_i^{n+1} - u_i^{n-1} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i, \\ \frac{\partial(u_i^{n+1} - u_i^{n-1})}{\partial v_{ij}} + \lambda(u_i^{n+1} - u_i^{n-1} - 2u_j^n) = 0, & \text{sur } \gamma_{ij}. \end{array} \right. \quad (2.25)$$

- On commence par multiplier l'équation (2.25) par $u_i^{n+1} - u_i^{n-1}$ et on intègre par parties

$$\int_{\Omega_i} |\nabla(u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx + \lambda \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^{n+1} - u_j^n|^2 dx = \lambda \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^{n-1} - u_j^n|^2 dx.$$

On somme sur i et sur n pour obtenir

$$\sum_{n \geq 0} \sum_i \int_{\Omega_i} \left| \nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \right|^2 dx < +\infty, \quad (2.26)$$

et la borne

$$\sup_{n \geq 0} \left(\sum_{i \neq j} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^{n+1} - u_j^n|^2 dx \right) < +\infty. \quad (2.27)$$

- Sur tous les domaines Ω_i qui touchent le bord de Ω , de sorte que $u_i^{n+1} - u_i^{n-1}$ est nul sur une partie du bord de Ω_i et on peut utiliser l'inégalité de Poincaré dans Ω_i pour majorer les normes $L^2(\Omega_i)$ par la norme du gradient.

Pour les domaines qui ne touchent pas le bord, on utilise les conditions de transmission et le lemme suivant

Lemme 2.2.1. [5] Pour tout domaine O et $\gamma_0 \subset \partial O$ d'intérieur non vide dans ∂O , il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(O)$ telle que $\Delta u \in L^2(O)$ on a

$$\|u\|_{H^1(O)} \leq C \left(\|\nabla u\|_{L^2(O)} + \|\Delta u\|_{L^2(O)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda u \right\|_{H^{-1/2}(\gamma_0)} \right).$$

Ceci permet de proche en proche d'obtenir des estimations des normes $L^2(\Omega_i)$ sur tous les domaines. On déduit ainsi de (2.26) l'inégalité

$$\sum_{n \geq 0} \sum_i \int_{\Omega_i} |u_i^{n+1} - u_i^{n-1}|^2 dx < +\infty, \quad (2.28)$$

puis par le théorème de traces

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{i \neq j} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^{n+1} - u_j^n|^2 dx < +\infty. \quad (2.29)$$

Maintenant on multiplie (2.25) par u_i^{n+1} et on intègre par parties

$$\int_{\Omega_i} \nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \cdot \nabla u_i^{n+1} dx + \lambda \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} (u_i^{n+1} + u_i^{n-1} - 2u_j^n) u_i^{n+1} dx.$$

On utilise les formules algébriques suivantes

$$\begin{aligned} \nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \cdot \nabla u_i^{n+1} &= \frac{1}{2} |\nabla u_i^{n+1}|^2 - \frac{1}{2} |\nabla u_i^{n-1}|^2 + \frac{1}{2} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2, \\ (u_i^{n+1} + u_i^{n-1} - 2u_j^n) u_i^{n+1} &= \frac{1}{2} |u_i^{n+1}|^2 + \frac{1}{2} |u_i^{n-1}|^2 - |u_j^n|^2 + |u_i^{n+1} - u_j^n|^2 - \frac{1}{2} |u_i^{n+1} - u_i^{n-1}|^2. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} |\nabla u_i^{n+1}|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^{n+1}|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^{n-1}|^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx + \lambda \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^{n+1} - u_j^n|^2 \\
& = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} |\nabla u_i^{n-1}|^2 dx + \lambda \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_j^n|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^{n+1} - u_i^{n-1}|^2 dx.
\end{aligned}$$

On somme maintenant sur i et on introduit

$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_i \int_{\Omega_i} |\nabla u_i^n|^2 dx, \\
B^n &= \lambda \sum_i \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^n|^2 dx, \\
C^n &= \lambda \sum_i \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^{n+1} - u_j^n|^2 dx, \\
D^n &= \frac{\lambda}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^{n+1} - u_i^{n-1}|^2 dx.
\end{aligned}$$

Il vient

$$\frac{1}{2} A^{n+1} + \frac{1}{2} (B^{n+1} + B^{n-1}) + C^n \leq \frac{1}{2} A^{n-1} + B^n + D^n,$$

ou encore

$$\frac{1}{2} A^{n+1} + \frac{1}{2} (B^{n+1} - B^n) + C^n \leq \frac{1}{2} A^{n-1} + \frac{1}{2} (B^n - B^{n-1}) + D^n.$$

Si on somme cette inégalité entre $n = 1$ et N , on trouve

$$\frac{1}{2} (A^{N+1} + A^N) + \frac{1}{2} (B^{N+1} - B^N) + \sum_{n=1}^N C^n \leq \frac{1}{2} (A^0 + A^1) + \frac{1}{2} (B^1 - B^0) + \sum_{n=1}^N D^n. \quad (2.30)$$

On calcule

$$\begin{aligned}
B^{N+1} - B^N &= \lambda \sum_{i \neq j} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^{N+1}|^2 - |u_j^N|^2 dx \\
&= \lambda \sum_{i \neq j} \int_{\gamma_{ij}} (u_i^{N+1} - u_j^N)(u_i^{N+1} + u_j^N) dx,
\end{aligned}$$

d'où

$$|B^{N+1} - B^N| \leq \lambda \sqrt{C^N} \left(\sum_{i \neq j} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^{N+1}|^2 + |u_i^N|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais par l'inégalité de Poincaré (pour les sous-domaines touchant le bord) et une utilisation répétée du lemme 2.2.1 pour les autres, on a l'estimation des traces

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^n|^2 dx &\leq C \sum_i \sum_{j \neq i} \|u_i^n\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \\ &\leq M \left(\sum_i \|\nabla u_i^n\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ceci montre qu'il existe une constante M ne dépendant que des données vérifiant

$$|B^{N+1} - B^N| \leq M \sqrt{C^N} (1 + \sqrt{A^N + A^{N+1}}).$$

Grâce à l'inégalité (2.27) qui montre que la suite $(C^n)_n$ est bornée, on conclut finalement que

$$|B^{N+1} - B^N| \leq \tilde{M} (1 + \sqrt{A^N + A^{N+1}}).$$

Par l'inégalité de Young, on obtient

$$\frac{1}{2} |B^{N+1} - B^N| \leq \frac{\tilde{M} + \tilde{M}^2}{2} + \frac{1}{4} (A^N + A^{N+1}),$$

et donc (2.30) donne

$$\frac{1}{4} (A^{N+1} + A^N) + \sum_{n=1}^N C^n \leq \frac{\tilde{M} + \tilde{M}^2}{2} + \frac{1}{2} (A^0 + A^1) + \frac{1}{2} (B^1 - B^0) + \sum_{n=1}^N D^n \quad (2.32)$$

Enfin, d'après (2.29), la série de terme général D_n est convergente et donc, in fine, on a montré

$$\begin{aligned} \sup_{N \geq 1} A^N &< +\infty, \\ \sum_{n \geq 1} C^n &< +\infty. \end{aligned}$$

Avec (2.31), on a donc finalement montré en particulier que

$$(u_i^n)_n \text{ est bornée dans } H^1(\Omega_i) \text{ pour tout } i$$

et

$$\|u_i^{n+1} - u_j^n\|_{L^2(\gamma_{ij})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.33)$$

- Des considérations précédentes, on déduit que les suites

$$(u_1^n)_n, \dots, (u_J^n)_n, \text{ et } (u_1^{n+1})_n, \dots, (u_J^{n+1})_n,$$

sont toutes bornées dans les Sobolev respectifs et on peut donc extraire une même sous-suite et trouver des $u_i, \tilde{u}_i \in H^1(\Omega_i)$ tels que

$$\begin{aligned} u_i^{\varphi(n)} &\rightharpoonup u_i, \text{ dans } H^1(\Omega_i) \\ u_i^{\varphi(n)+1} &\rightharpoonup \tilde{u}_i, \text{ dans } H^1(\Omega_i). \end{aligned}$$

De plus, d'après (2.28), nous avons également

$$u_i^{\varphi(n)+2} \rightharpoonup u_i, \text{ dans } H^1(\Omega_i). \quad (2.34)$$

Il est clair que les u_i et \tilde{u}_i satisfont l'équation $-\Delta u_i = -\Delta \tilde{u}_i = 0$ dans chaque Ω_i ainsi que les conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$. De plus, d'après (2.33), on a les égalités

$$u_i = \tilde{u}_j, \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall i \neq j. \quad (2.35)$$

En passant à la limite (faible) dans la condition de Fourier sur chaque interface, on trouve également

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu_{ij}} = \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \nu_{ij}}, \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall i \neq j. \quad (2.36)$$

Par passage à la limite dans les équations, u_i et \tilde{u}_i sont solutions, dans chaque sous-domaine, des problèmes

$$\begin{aligned} -\Delta u_i &= 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \nu_{ij}} = \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \nu_{ij}}, \\ -\Delta \tilde{u}_i &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \nu_{ij}} = \frac{\partial u_j}{\partial \nu_{ij}}. \end{aligned}$$

On soustrait ces deux équations, on multiplie par $u_i - \tilde{u}_i$ et on intègre par parties, on trouve

$$0 = \int_{\Omega_i} |\nabla(u_i - \tilde{u}_i)|^2 dx - \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \nu_{ij}} - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \nu_{ij}} \right) (u_i - \tilde{u}_i) dx, \forall i \in \{1, \dots, J\}.$$

En sommant sur i et en regroupant les termes de chaque interface

$$0 = \sum_i \int_{\Omega_i} |\nabla(u_i - \tilde{u}_i)|^2 dx - \sum_{i < j} \int_{\gamma_{ij}} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial \nu_{ij}} - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \nu_{ij}} \right) (u_i - \tilde{u}_i) + \left(\frac{\partial u_j}{\partial \nu_{ji}} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \nu_{ji}} \right) (u_j - \tilde{u}_j) \right] dx.$$

On utilise alors les conditions de transmissions obtenues à la limite (2.35) et (2.36) (et on remarque que les normales ν_{ij} et ν_{ji} sont opposées) pour conclure que chacun des termes d'interface dans cette somme est nul.

On conclut de tout cela que $u_i = \tilde{u}_i$ pour tout i . A la lumière des ces égalités, on constate que les conditions de transmission (2.35) (2.36) deviennent

$$u_i = u_j, \text{ et } \frac{\partial u_i}{\partial \nu_{ij}} = \frac{\partial u_j}{\partial \nu_{ij}} \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall i \neq j.$$

Ainsi, la fonction v définie sur Ω en recollant les fonctions u_i est bien dans $H_0^1(\Omega)$ (raccord continu aux interfaces) et vérifie l'équation $-\Delta v = 0$ dans Ω (raccord des flux). Ceci prouve donc que $v = 0$. Par unicité de cette valeur d'adhérence faible, on a bien établi les convergences

$$u_i^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ dans } H^1(\Omega_i) \text{ pour tout } i.$$

□

2.3 Méthodes optimisées de Schwarz

Au cours des dernières décennies, une nouvelle classe de méthodes de Schwarz sans recouvrement ou avec recouvrement a été développée pour les équations aux dérivées partielles, à savoir les méthodes de Schwarz optimisées. Ces méthodes sont basées sur une décomposition de domaine classique, mais elles utilisent des conditions de transmission plus efficaces que les conditions de Dirichlet classiques aux interfaces entre sous-domaines.

Les méthodes optimisées de Schwarz (OSM) sont des méthodes très populaires qui ont été introduites par P.L. Lions pour les problèmes elliptiques et par B. Després pour

les phénomènes de propagation d'ondes.

Pour les problèmes elliptiques, la méthode Schwarz est définie uniquement pour les sous-domaines avec recouvrement. La méthode de décomposition de domaine introduite par P.L.Lions constituent un troisième type de méthodes. Il peut être appliqué à la fois aux sous-domaines avec recouvrement et sans recouvrement. Il est basé sur l'amélioration des méthodes de Schwarz en remplaçant les conditions d'interface de Dirichlet par des conditions d'interface Robin.

Soit α un nombre positif, l'algorithme modifié

$$\begin{cases} -\Delta u_1^n = f & \text{dans } \Omega_1, \\ \frac{\partial u_1^{n+1}}{\partial \eta_1} + \alpha_1 u_1^{n+1} = \frac{\partial u_2^n}{\partial \eta_1} + \alpha_1 u_2^n & \text{sur } \Gamma_1, \\ u_1^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1, \end{cases} \quad (2.37)$$

et

$$\begin{cases} -\Delta u_2^n = f & \text{dans } \Omega_2, \\ \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial \eta_2} + \alpha_2 u_2^{n+1} = \frac{\partial u_1^n}{\partial \eta_2} + \alpha_2 u_1^n & \text{sur } \Gamma_2, \\ u_2^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.38)$$

où η_1 et η_2 sont les normales extérieures sur la frontière des sous-domaines.

Nous utilisons la transformée de Fourier pour analyser le bénéfice des conditions d'interface de Robin dans un cas simple.

C'est aussi possible considérer d'autres conditions d'interface que les conditions de Robin et optimiser leur choix par rapport au facteur de convergence.

La formulation algébrique de la P.L. Algorithme Lions dans le cas de sous-domaines avec recouvrement. Il est basé sur l'introduction de l'ORAS (Additif restreint optimisé Schwarz) :

$$M_{ORAS}^{-1} := \sum_{i=1}^N R_i^T D_i B_i^{-1} R_i, \quad (2.39)$$

où $(B_i)_{1 \leq i \leq N}$ est la matrice de discrétisation du problème de Robin dans le sous-domaine Ω_i .

La méthode de point fixe suivante

$$U^{n+1} = U^n + M_{\text{ORAS}}^{-1} (F - AU^n), \quad (2.40)$$

donne des itérations équivalentes à celle de la discrétisation de P.L. Algorithme Lions.

2.4 Exemples en 1D

On va commencer par essayer de comprendre la situation en dimension 1 d'espace.

2.4.1 Le problème de Laplace

Prend donc $\Omega =]0, 1[$, $\Omega_1 =]0, \gamma_{12}[$ et $\Omega_2 =]\gamma_{21}, 1[$. Si on note α la valeur de $u_2(\gamma_{12})$ au début de l'algorithme, on peut calculer aisément

$$u_1(x) = \frac{\alpha x}{\gamma_{12}}, \quad \forall x \in \Omega_1. \quad (2.41)$$

ce qui donne la valeur de la trace transmise à Ω_2 : $u_1(\gamma_{21}) = \frac{\alpha \gamma_{21}}{\gamma_{12}}$ et permet la résolution du problème dans Ω_2

$$u_2(x) = \frac{\alpha \gamma_{21}}{\gamma_{12}} \frac{1-x}{1-\gamma_{21}}, \quad \forall x \in \Omega_2. \quad (2.42)$$

On obtient, à la fin de l'itération

$$u_2(\gamma_{12}) = \alpha \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{12}} \frac{1-\gamma_{12}}{1-\gamma_{21}}. \quad (2.43)$$

Ainsi, l'ensemble de l'algorithme revient à multiplier α par le nombre

$$k = \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{12}} \frac{1-\gamma_{12}}{1-\gamma_{21}} = 1 - \frac{\gamma_{12} - \gamma_{21}}{\gamma_{12}(1-\gamma_{21})}. \quad (2.44)$$

On observe que $0 < k < 1$ dès lors que les deux sous-domaines se recouvrent (i.e. $\gamma_{21} < \gamma_{12}$) et donc que la méthode itérative va converger de façon géométrique de raison k . Observons aussi que la raison tend vers 1 quand la taille du recouvrement $\gamma_{12} - \gamma_{21}$ tend vers 0.

Les conclusions de cette étude sont que la convergence a bien lieu mais qu'elle se dégrade de façon importante quand la taille du recouvrement tend vers 0.

De plus, il est clair que si le recouvrement est nul, la méthode est stationnaire et ne peut en aucun cas converger.

2.5 La preuve de convergence originale de Schwarz

H.Schwarz a démontré la convergence de cette méthode dans un cadre assez général en utilisant le principe du maximum dont nous rappelons une conséquence ici.

Théorème 2.5.1. [5] *Si w_1 est solution de $\Delta w_1 = 0$ dans Ω_1 avec $w_1 = 1$ sur γ_{12} et $w_1 = 0$ sur $\partial\Omega_1 \setminus \gamma_{12}$, alors w_1 est continue sur $\overline{\Omega}_1$ sauf possiblement sur $\partial\Omega \cap \gamma_{12}$ et de plus elle ne peut atteindre son maximum à l'intérieur de Ω_1 .*

On peut dès lors étudier la convergence de la méthode de Schwarz dans le cas de la Figure 2.2.2.a. Soit $v : \gamma_{12} \rightarrow \mathbb{R}$ la trace sur γ_{12} de la donnée initiale de la composante u_2 .

Par définition de u_1 et de w_1 , nous avons

$$-\|v\|_\infty w_1 \leq u_1 \leq \|v\|_\infty w_1, \quad \text{sur } \partial\Omega_1. \quad (2.45)$$

et les trois fonctions intervenant dans cette inégalité sont harmoniques dans Ω_1 . Le principe du maximum implique que nous avons

$$\|v\|_\infty w_1 \leq u_1 \leq \|v\|_\infty w_1, \quad \text{dans tout } \Omega_1 \quad (2.46)$$

Par le théorème précédent, la fonction w_1 est continue sur le compact γ_{21} , elle y atteint donc son maximum, celui ne pouvant pas être atteint sur le bord (car w_1 est nulle en ces points). Le maximum de w_1 sur γ_{21} est donc atteint à l'intérieur de Ω_1 et il est donc nécessairement strictement plus petit que 1 sur les interfaces, sinon le principe du maximum impliquerait que $w_1 = 1$ partout.

Dans fin, on a obtenu

$$\sup_{\gamma_{21}} |v_1| \leq k_1 \sup_{\gamma_{12}} |v|, \quad (2.47)$$

avec $k_1 \in]0, 1[$.

De la même manière pour la seconde étape d'une itération de la méthode, on trouve

$$\sup_{\gamma_{12}} |u_2| \leq k_2 \sup_{\gamma_{21}} |u_1|, \quad (2.48)$$

avec $k_2 \in]0, 1[$.

Tout compte fait, au bout d'une itération de la méthode on a

$$\sup_{\gamma_{12}} |u_2| \leq k_1 k_2 \sup_{\gamma_{12}} |v|, \quad (2.49)$$

ce qui montre le caractère contractant de la méthode et donc sa convergence géométrique vers 0.

Si les deux interfaces γ_{12} et γ_{21} se touchent de façon non tangentielle (voir la figure 2.2.2.b), alors l'argument précédent doit être affiné car les fonctions w_1 et w_2 ne sont plus continues aux points d'intersection.

On peut quand même démontrer que ces fonctions ont un maximum strictement plus petit que 1 mais il faut l'étudier de façon plus précise. La démonstration générale est un peu technique nous allons juste montrer comment l'argument fonctionne dans le cas du demi-espace.

Plus précisément on peut calculer explicitement la fonction w_1 définie sur \mathbb{R}_+^2 et telle que $w_1(x, 0) = 1$ si $x < 0$ et $w_1(x, 0) = 0$ si $x > 0$. En effet, la formule explicite est donnée par

$$w_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_x^{+\infty} \frac{y}{t^2 + y^2} dt = -\frac{1}{\pi} f(x/y), \quad (2.50)$$

où f est la primitive s'annulant en $+\infty$ de $1/(1+t^2)$ (c'est-à-dire $f(t) = \arctan(t) - \pi/2$).

On observe que si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ de façon non tangentielle à la frontière, c'est-à-dire avec $x/y \rightarrow \alpha$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, alors nous obtenons

$$w_1(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-1}{\pi} f(\alpha) \quad (2.51)$$

qui est bien une valeur strictement comprise entre 0 et 1.

Le reste de la preuve s'en suit directement.

2.5.1 La preuve variationnelle de P.L.Lions

Commençons par quelques remarques.

- Si $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$, son prolongement par 0 à tout Ω que l'on note encore v_i vérifie $u_i \in H_0^1(\Omega_i)$. On identifie donc $H_0^1(\Omega_i)$ à un sous-espace fermé de $H_0^1(\Omega)$.
- Par construction des deux étapes (2.8) et (2.9), on peut conventionnellement prolonger u_1^{n+1} et u_2^{n+1} à tout Ω par les formules suivantes

$$u_1^{n+1} = \begin{cases} u_1^{n+1} & \text{dans } \Omega_1, \\ u_2^n & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_1. \end{cases} \quad (2.52)$$

et

$$u_2^{n+1} = \begin{cases} u_2^{n+1} & \text{dans } \Omega_2, \\ u_1^n & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_2. \end{cases} \quad (2.53)$$

Par définition, ces prolongements sont bien dans $H^1(\Omega)$.

- On introduit la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.54)$$

intervenant dans la formulation variationnelle du problème étudié.

Si maintenant $u_2^n \in H_0^1(\Omega)$ est connu, alors le problème (2.8) admet la formulation variationnelle suivante

$$\text{Trouver } u_1^{n+1} \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } u_1^{n+1} - u_2^n \in H_0^1(\Omega_1) \text{ et } a(u_1^{n+1}, v) = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega_1). \quad (2.55)$$

De même, si $u_1^{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ est connu, le problème (2.9) s'écrit

$$u_2^{n+1} \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } u_2^{n+1} - u_1^{n+1} \in H_0^1(\Omega_2) \text{ et } a(u_2^{n+1}, v) = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega_2). \quad (2.56)$$

Si on définit $P_i, i = 1, 2$ la projection orthogonale dans l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ sur le sous-espace fermé $H_0^1(\Omega_i)$ et $Q_i = I - P_i$ la projection orthogonale sur l'orthogonal de cet espace, on voit que les deux étapes de l'algorithme s'écrivent désormais

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} &= u_2^n - P_1(u_2^n) = Q_1(u_2^n) \\ u_2^{n+1} &= u_1^{n+1} - P_2(u_1^{n+1}) = Q_2(u_1^{n+1}) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Ainsi, une itération complète de l'algorithme revient à appliquer deux projections successives sur deux sous-espaces fermés de $H_0^1(\Omega)$. Tout l'enjeu est donc de déterminer si Q_2Q_1 est une application contractante ou pas.

Théorème 2.5.2. [5] Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces fermés de $H_0^1(\Omega)$ et P_i (resp. Q_i) les projections orthogonales dans H_0^1 sur V_i (resp. sur V_i^\perp). On suppose que $V_1 + V_2$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ (ce qui est équivalent à $V_1^\perp \cap V_2^\perp = \{0\}$). Soit $u_0^2 \in H_0^1(\Omega)$ quelconque une initialisation de l'algorithme. On pose, pour tout n ,

$$u_2^{n+1} = Q_2Q_1u_2^n. \quad (2.58)$$

Alors la suite $(u_2^n)_n$ tend vers 0 dans $H_0^1(\Omega)$ (autrement dit l'algorithme de Scwarz converge). Si de plus on a $V_1 + V_2 = H_0^1(\Omega)$, alors la convergence est géométrique : il existe $0 < k < 1$ tel que

$$\|u_2^n\|_{H_0^1} \leq k^n \|u_2^0\|_{H_0^1}, \quad \forall n \geq 0. \quad (2.59)$$

Démonstration. On écrit tout d'abord, la somme orthogonale

$$u_2^n = P_1(u_2^n) + Q_1(u_2^n) = (u_2^n - u_1^{n+1}) + u_1^{n+1}, \quad (2.60)$$

ce qui donne en passant à la norme

$$\|u_2^n\|_{H_0^1}^2 = \|u_2^n - u_1^{n+1}\|_{H_0^1}^2 + \|u_1^{n+1}\|_{H_0^1}^2 \quad (2.61)$$

De la même façon, on a

$$\|u_1^{n+1}\|_{H_0^1}^2 = \|u_1^{n+1} - u_2^{n+1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_2^{n+1}\|_{H_0^1}^2 \quad (2.62)$$

En particulier la suite des normes $(\|u_2^n\|)_n$ est décroissante donc convergente et de plus

$$\|u_2^n - u_1^{n+1}\|_{H_0^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.63)$$

On peut extraire de $(u_2^n)_n$ une sous-suite faiblement convergente donc on note u la limite. Comme $u_2^n \in V_2^\perp$ pour tout n et que V_2^\perp est un fermé faible de $H_0^1(\Omega)$, on a immédiatement que $u \in V_2^\perp$. Mais on a également que $u_1^{n+1} = Q_1u_2^n$ converge faiblement vers Q_1u et d'après (2.63) la différence $u_1^{n+1} - u_2^n$ tend vers 0. Ceci montre que $Q_1u = u$ et donc en

particulier que $u \in V_1^\perp$.

On a donc montré que $u \in V_1^\perp \cap V_2^\perp$ et donc par hypothèse $u = 0$.

Ainsi, la suite $(u_2^n)_n$ a une unique valeur d'adhérence faible qui est 0, ce qui montre la convergence faible de toute la suite vers 0. Il reste à montrer la convergence forte.

Pour cela, on observe que

$$\begin{aligned} \|u_n^2\|_{H_0^1}^2 &= \|(Q_2 Q_1)^n u_0^2\|_{H_0^1}^2 = \langle (Q_1 P_2)^n (Q_2 Q_1)^n u_0^2, u_0^2 \rangle_{H_0^1} \\ &= \langle Q_1 (Q_2 Q_1)^{2n-1} u_0^2, u_0^2 \rangle_{H_0^1} \\ &= \langle u_{2n-1}^0, Q_1 u_0^2 \rangle_{H_0^1}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

et la convergence faible obtenue plus haut permet de conclure au fait que $\|u_n^2\|_{H_0^1} \rightarrow 0$.

Supposons maintenant que $V_1 + V_2 = H_0^1(\Omega)$. On va montrer que sous cette hypothèse la norme de tout élément de $H_0^1(\Omega)$ peut être contrôlée par les normes des deux projections $P_1 v$ et $P_2 v$.

En effet, l'hypothèse implique que l'application

$$\Phi : (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \mapsto v_1 + v_2 \in H_0^1(\Omega), \quad (2.65)$$

est surjective (et bien entendu linéaire et continue). Le théorème de l'application ouverte implique alors que Φ est ouverte ce qui signifie que l'image de tout ouvert de $V_1 \times V_2$ est ouverte dans $H_0^1(\Omega)$ ou encore

$$\exists C > 0, \quad B_{H_0^1}(0, C) \subset \Phi(B_{V_1}(0, 1) \times B_{V_2}(0, 1)), \quad (2.66)$$

ce qui peut également s'écrire

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \exists (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \text{ tels que } v = v_1 + v_2, \text{ et } \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 \leq \frac{1}{C} \|v\|^2. \quad (2.67)$$

Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on prend le couple (v_1, v_2) donné ci-dessus et on écrit

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_0^1}^2 &= \langle v, v_1 \rangle_{H_0^1} + \langle v, v_2 \rangle_{H_0^1} \\ &= \langle P_1 v, v_1 \rangle_{H_0^1} + \langle P_2 v, v_2 \rangle_{H_0^1} \\ &\leq \|P_1 v\|_{H_0^1} \|v_1\|_{H_0^1} + \|P_2 v\|_{H_0^1} \|v_2\|_{H_0^1} \\ &\leq C' \|v\|_{H_0^1} (\|P_1 v\|_{H_0^1} + \|P_2 v\|_{H_0^1}). \end{aligned} \quad (2.68)$$

On a donc bien montré qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$\|v\|_{H_0^1} \leq C' (\|P_1 v\|_{H_0^1} + \|P_2 v\|_{H_0^1}), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.69)$$

On applique maintenant l'inégalité (2.69) à $Q_1 v$ ce qui donne

$$\|Q_1 v\|_{H_0^1} \leq C' \|P_2 Q_1 v\|_{H_0^1}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.70)$$

En élevant au carré et en utilisant la décomposition orthogonale $Q_1 v = P_2 Q_1 v + Q_2 Q_1 v$, on obtient

$$\|Q_1 v\|_{H_0^1}^2 = \|P_2 Q_1 v\|_{H_0^1}^2 + \|Q_2 Q_1 v\|_{H_0^1}^2 \geq \frac{1}{(C')^2} \|Q_1 v\|_{H_0^1}^2 + \|Q_2 Q_1 v\|_{H_0^1}^2. \quad (2.71)$$

et donc

$$\|Q_2 Q_1 v\|_{H_0^1}^2 \leq \left(1 - \frac{1}{(C')^2}\right) \|Q_1 v\|_{H_0^1}^2. \quad (2.72)$$

Ceci implique

$$\|Q_2 Q_1 v\|_{H_0^1}^2 \leq \left(1 - \frac{1}{(C')^2}\right) \|v\|_{H_0^1}^2. \quad (2.73)$$

et donc le caractère contractant de l'application $Q_2 Q_1$. \square

2.6 Formalisme algébrique

Le preuve de convergence variationnelle donnée plus haut peut en fait être vue comme un cas particulier d'un algorithme plus général que nous allons décrire ici.

Ce formalisme contient beaucoup de méthodes différentes (Schwarz, multigrilles, etc ...).

Soit H un espace de Hilbert (éventuellement de dimension finie). On considère un problème linéaire du type

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H. \quad (2.74)$$

où a et L vérifient les hypothèses du théorème de Lax-Milgram (avec a symétrique pour simplifier ici). On introduit l'opérateur A et le vecteur b représentant a et L dans le produit scalaire de H :

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle, \quad \langle b, v \rangle = L(v), \quad \forall u, v \in H. \quad (2.75)$$

Au vu des hypothèses, la matrice A est symétrique définie positive. Le problème à résoudre s'écrit alors

$$\text{Trouver } u \in H \text{ tel que } Au = b. \quad (2.76)$$

On suppose donnée une décomposition de l'espace H en sous-espaces fermés H_1, \dots, H_J (non nécessairement en somme directe). On note $I_k : H_k \rightarrow H$ l'injection canonique et I'_k son adjoint, c'est-à-dire la projection sur H_k définie par

$$\langle I_k v_k, v \rangle = \langle v_k, I'_k v \rangle, \quad \forall v_k \in H_k, \forall v \in H. \quad (2.77)$$

La restriction de l'opérateur initial sur le sous-espace H_k est définie par

$$A_k = I'_k A I_k,$$

et comme A est SDP, on vérifie aisément que A_k est SDP dans H_k .

L'idée des méthodes présentées consiste à utiliser la résolution (éventuellement approchée) sur les sous-espaces H_k pour construire des méthodes itératives de résolution de (2.76).

Pour ce faire, on note $R_k : H_k \rightarrow H_k$ un opérateur résolution dans H_k qui a vocation à être une approximation de A_k^{-1} , et qui d'ailleurs peut être égal à A_k^{-1} comme on l'a vu précédemment. On suppose que R_k est SDP dans H_k et que $R_k A_k$ est diagonalisable (cet opérateur est A_k -SDP).

On va de plus typiquement supposer que $\rho(I - R_k A_k) < 1$ (ceci ayant au moins un sens en dimension finie) de sorte que, à k fixé, la méthode itérative

$$u_k^{n+1} = u_k^n - R_k (A_k u_k^n - I'_k f), \quad \forall n \geq 0,$$

converge vers la solution de $A_k u_k = I'_k f$. L'algorithme est alors le suivant : si on suppose une approximation $u^n \in H$ de la solution de (2.76) connue, alors on effectue successivement :

- Poser $u_0^n = u^n$.
- Pour $k = 1, \dots, J$:
 - Calculer la projection du résidu sur H_k

$$r_k = I'_k (f - A u_{k-1}^n).$$

- Calculer le correcteur, c'est-à-dire résoudre la contribution du résidu sur H_k

$$c_k = R_k r_k.$$

- Mettre à jour la solution approchée

$$u_k^n = u_{k-1}^n + I_k c_k.$$

- Définir la solution approchée en fin d'itération

$$u^{n+1} = u_J^{n+1}.$$

Comme $f = Au$, on peut récrire complètement l'algorithme en fonction de l'erreur

$$e^n = u^n - u.$$

- Pour $k = 1, \dots, J$:

- Calculer la projection du résidu sur H_k

$$r_k = -I_k' A e_{k-1}^n.$$

- Calculer le correcteur, c'est-à-dire résoudre la contribution du résidu sur H_k

$$c_k = R_k r_k.$$

- Mettre à jour l'erreur

$$e_k^n = e_{k-1}^n + I_k c_k.$$

- Définir l'erreur finale

$$e^{n+1} = e_J^{n+1}.$$

Ceci s'écrit encore

$$e_k^n = (I - I_k R_k I_k' A) e_{k-1}^n, \quad \forall k.$$

Si on pose $T_k = I_k R_k I_k' A$, l'évolution de l'erreur au cours des itérations s'écrit donc

$$e^{n+1} = (I - T_J) \cdots (I - T_1) e^n, \quad \forall n \geq 0.$$

Ainsi l'étude de la convergence de la méthode se ramène à l'étude de la norme et du spectre d'opérateurs de la forme

$$E = (I - T_J) \cdots (I - T_1),$$

appelés opérateurs de propagation de l'erreur. On comprend mieux sous cette forme pourquoi la méthode s'appelle ici méthode multiplicative.

Remarque 2.1. *Ce formalisme inclut par exemple les méthodes de Gauss-Seidel par blocs.*

Nous aurons besoin d'introduire les opérateurs intermédiaires

$$E_j = (I - T_j) \cdots (I - T_1), \quad \forall 1 \leq j \leq J,$$

avec $E_0 = I$ par convention.

On vérifie aisément par récurrence que

$$E_{j-1} - E_j = T_j E_{j-1}, \quad I - E_j = \sum_{i=1}^j T_i E_{i-1} \quad (2.78)$$

Théorème 2.6.1. [5] *Supposons que la somme $\sum_{k=1}^J H_k$ est dense dans H , alors la méthode itérative précédente est convergente (quelque soit le choix des opérateurs de résolution locale R_k satisfaisant les hypothèses (*

$$\omega_0 \langle Av_k, v_k \rangle \leq \langle AR_k A_k v_k, v_k \rangle \leq \omega_1 \langle Av_k, v_k \rangle, \quad \forall v_k \in H_k \quad (2.79)$$

tel que $0 < \omega_0 \leq \omega_1 < 2$).

Démonstration. On a vu que l'erreur évolue selon les formules suivantes (avec $e_0^n = e^n$ et $e_j^n = e^{n+1}$) en

$$e_k^n = (I - T_k) e_{k-1}^n, \quad \forall k = 1, \dots, J,$$

ou encore de façon globale

$$e^{n+1} = (I - T_J) \cdots (I - T_1) e^n$$

On remarque que pour tout k et n nous avons

$$\begin{aligned} \|e_{k-1}^n\|_A^2 - \|(I - T_k) e_{k-1}^n\|_A^2 &= \|(I - T_k) e_{k-1}^n + T_k e_{k-1}^n\|_A^2 - \|(I - T_k) e_{k-1}^n\|_A^2 \\ &= \|T_k e_{k-1}^n\|_A^2 + 2 \langle (I - T_k) e_{k-1}^n, T_k e_{k-1}^n \rangle_A \\ &= 2 \langle T_k e_{k-1}^n, e_{k-1}^n \rangle_A - \|T_k e_{k-1}^n\|_A^2 \end{aligned}$$

Et on a

$$\begin{aligned}
\langle AT_k v, T_k v \rangle &= \langle AI_k R_k I'_k A v, I_k R_k I'_k A v \rangle \\
&= \langle I'_k A I_k R_k I'_k A v, R_k I'_k A v \rangle \\
&= \langle A_k R_k I'_k A v, R_k I'_k A v \rangle \\
&\leq \omega_1 \langle R_k^{-1} R_k I'_k A v, R_k I'_k A v \rangle \\
&= \omega_1 \langle I'_k A v, R_k I'_k A v \rangle \\
&= \omega_1 \langle A I_k R_k I'_k A v, v \rangle \\
&= \omega_1 \langle AT_k v, v \rangle
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Si on utilise (2.80), et la définition de l'erreur au cran suivant $e_k^n = (I - T_k) e_{k-1}^n$, on arrive à l'inégalité

$$\|e_{k-1}^n\|_A^2 - \|e_k^n\|_A^2 \geq (2 - \omega_1) \langle T_k e_{k-1}^n, e_{k-1}^n \rangle_A. \tag{2.81}$$

Comme $\omega_1 < 2$, le terme de droite est positif et on en déduit que la norme de l'erreur décroît à chaque étape du calcul (sur chaque sous-domaine) et donc, plus globalement on a la décroissance de $(\|e^n\|_A)_n$. On en déduit en particulier que cette suite de nombres positifs est convergente et donc bornée. Si on revient à (2.81), on a de plus la convergence des séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle T_k e_{k-1}^n, e_{k-1}^n \rangle_A, \text{ pour tout } k = 1, \dots, J. \tag{2.82}$$

D'après (2.80) et la formule en $e_k^n - e_{k-1}^n = T_k e_{k-1}^n$, on déduit que les séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|e_k^n - e_{k-1}^n\|^2, \text{ convergent pour tout } k = 1, \dots, J.$$

En particulier, la série suivante converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|e^{n+1} - e^n\|_A^2,$$

et donc en particulier

$$\|e^{n+1} - e^n\|_A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \tag{2.83}$$

Comme $(e^n)_n$ est A -bornée (donc bornée), on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente

$$e^{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e.$$

Par continuité de tous les opérateurs mis en jeu, on déduit

$$e_k^{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (I - T_k) \cdots (I - T_1)e, \text{ pour tout } k = 1, \dots, J.$$

On note e_k cette limite.

Grâce à la convergence des séries (2.82) on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_k e_{k-1}^n, e_{k-1}^n \rangle_A = 0,$$

et donc $\langle T_k e_{k-1}^n, e_{k-1}^n \rangle_A = 0$.

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle T_k (e_{k-1}^n - e_{k-1}), e_{k-1}^n - e_{k-1} \rangle_A \\ &= \langle T_k e_{k-1}^n, e_{k-1}^n \rangle_A - 2 \langle T_k e_{k-1}^n, e_{k-1} \rangle_A + \langle T_k e_{k-1}, e_{k-1} \rangle_A \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} - \langle T_k e_{k-1}, e_{k-1} \rangle_A \end{aligned}$$

D'après (2.80), on déduit que $T_k e_{k-1} = 0$ pour tout k .

La limite faible e vérifie donc

$$T_1 e = 0, T_2 (I - T_1) e = 0, \dots, T_k (I - T_{k-1}) \cdots (I - T_1) e = 0,$$

ce qui implique

$$T_k e = 0, \forall k = 1, \dots, J.$$

Revenons à la définition de $T_k = I'_k R_k I_k A$ et prenons le produit scalaire de $T_k e = 0$ par Ae

$$0 = \langle I_k R_k I'_k A e, A e \rangle = \langle R_k I'_k A e, I'_k A e \rangle,$$

et donc $I'_k A e = 0$ pour tout k , ou encore

$$Ae \perp H_k, \quad \forall k \in \{1, \dots, J\}.$$

Ainsi, Ae est orthogonal à la somme des espaces H_k et par l'hypothèse de densité, cela implique $Ae = 0$ et donc $e = 0$. □

On peut maintenant conclure cette section en montrant une estimation d'erreur pour la méthode dans le cas où la somme des espaces H_k est égale à H .

Théorème 2.6.2. [5] On suppose que $H = \sum_{k=1}^J H_k$. Alors il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$\text{Pour tout } v \in H, \text{ il existe } v_1 \in H_1, \dots, v_J \in H_J \text{ tels que } v = \sum_{k=1}^J v_k \text{ et } \sum_{k=1}^J \|v_k\|_A^2 \leq C_0 \|v\|_A^2.$$

Par ailleurs, ceci implique que la méthode de Schwarz converge de façon géométrique : il existe une constante $k < 1$ telle que

$$\|e_n\|_A \leq \|e_0\|_A k^n.$$

Démonstration. L'existence de la constante C_0 , comme on l'a déjà vu, est une conséquence du théorème de l'application ouverte et donc du fait que les espaces H_k sont fermés et que leur somme est l'espace entier.

- On va tout d'abord montrer une estimation sur les opérateurs R_k^{-1} . On écrit $v = \sum_{k=1}^J v_k$ comme dans l'hypothèse et on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^J \langle R_k^{-1} v_k, v_k \rangle &= \sum_{k=1}^J \langle A_k A_k^{-1} R_k^{-1} v_k, v_k \rangle \\ &\leq \sum_{k=1}^J \langle A_k v_k, v_k \rangle \frac{\langle A_k A_k^{-1} R_k^{-1} v_k, v_k \rangle}{\langle A_k v_k, v_k \rangle} \\ &\leq \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=1}^J \langle A_k v_k, v_k \rangle \\ &= \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=1}^J \langle A I_k v_k, I_k v_k \rangle \\ &= \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=1}^J \|I_k v_k\|_A^2 \\ &\leq \frac{C_0}{\omega_0} \|v\|_A^2. \end{aligned} \tag{2.84}$$

On a utilisé ici l'hypothèse spectrale (2.79).

- On peut maintenant démontrer une inégalité du type Lemme de Lions qui consiste à estimer la norme d'un élément de H en fonction des normes de $T_k v$. Soit $v = \sum_{k=1}^J I_k v_k \in H$, nous avons

$$\|v\|_A^2 = \sum_{k=1}^J \langle v, I_k v_k \rangle_A = \sum_{k=1}^J \langle I_k' A v, v_k \rangle = \sum_{k=1}^J \langle R_k I_k' A v, R_k^{-1} v_k \rangle.$$

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire $\langle R_k, \cdot \rangle$ pour obtenir

$$\|v\|_A^2 \leq \left(\sum_{k=1}^J \langle R_k R_k^{-1} v_k, R_k^{-1} v_k \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^J \langle R_k I_k' A v, I_k' A v \rangle \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En appliquant l'estimation sur les R_k^{-1} obtenue précédemment, il vient

$$\|v\|_A^2 \leq \left(\frac{C_0}{\omega_0} \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_A \left(\sum_{k=1}^J \langle I_k R_k I_k' A v, v \rangle_A \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par définition de $T_k = I_k R_k I_k' A$, on obtient

$$\|v\|_A^2 \leq \frac{C_0}{\omega_0} \left(\sum_{k=1}^J \langle T_k v, v \rangle_A \right). \quad (2.85)$$

- Pour $1 \leq k \leq J$, on écrit (en utilisant (2.78))

$$\langle T_k v, v \rangle_A = \langle T_k v, E_{k-1} v \rangle_A + \sum_{i=1}^{k-1} \langle T_k v, T_i E_{i-1} v \rangle_A.$$

Ensuite, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le semi-produit scalaire $\langle T_k, \cdot \rangle_A$, et (2.80) pour obtenir

$$\begin{aligned} \langle T_k v, v \rangle_A &\leq \langle T_k v, v \rangle_A^{\frac{1}{2}} \langle T_k E_{k-1} v, E_{k-1} v \rangle_A^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{k-1} \langle T_k v, T_i v \rangle_A^{\frac{1}{2}} \langle T_i E_{i-1} v, T_i E_{i-1} v \rangle_A^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \langle T_k v, v \rangle_A^{\frac{1}{2}} \left(\langle T_k E_{k-1} v, E_{k-1} v \rangle_A^{\frac{1}{2}} + \omega \sum_{i=1}^{k-1} \langle T_i E_{i-1} v, E_{i-1} v \rangle_A^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Si on simplifie et qu'on élève au carré, il vient

$$\langle T_k v, v \rangle_A \leq 2 \left(\langle T_k E_{k-1} v, E_{k-1} v \rangle_A + \omega^2 (k-1) \sum_{i=1}^{k-1} \langle T_i E_{i-1} v, E_{i-1} v \rangle_A \right).$$

En sommant sur k et en réorganisant les termes, il vient

$$\sum_{k=1}^J \langle T_k v, v \rangle_A \leq [2 + \omega^2 J (J-1)] \sum_{k=1}^J \langle T_k E_{k-1} v, E_{k-1} v \rangle_A. \quad (2.86)$$

- L'inégalité (2.81), peut se récrire sous la forme plus générale suivante

$$\|v\|_A^2 - \|E v\|_A^2 = \|v\|_A^2 - \|E_J v\|_A^2 \geq (2 - \omega_1) \sum_{k=1}^J \langle T_k E_{k-1} v, E_{k-1} v \rangle_A.$$

Avec (2.86), on obtient

$$\|v\|_A^2 - \|Ev\|_A^2 \geq \frac{2 - \omega_1}{2 + \omega^2 J(J-1)} \left(\sum_{k=1}^J \langle T_k v, v \rangle_A \right),$$

et maintenant on utilise (2.85) pour obtenir

$$\|v\|_A^2 - \|Ev\|_A^2 \geq \frac{2 - \omega_1}{2 + \omega^2 J(J-1)} \frac{\omega_0}{C_0} \|v\|_A^2.$$

Si on note $C_1 = \frac{2 - \omega_1}{2 + \omega^2 J(J-1)} \frac{\omega_0}{C_0}$, on a donc montré

$$\|Ev\|_A^2 \leq (1 - C_1) \|v\|_A^2, \quad \forall v \in H,$$

ce qui montre bien le caractère contractant de l'opérateur d'erreur avec la constante de contraction

$$k = 1 - C_1 < 1.$$

□

2.7 Conclusion

La méthode DD a été utilisée pour résoudre les problèmes de valeurs limites fixes ou évolutives sur des domaines composés de deux ou plus sous-domaines avec recouvrement.

La solution est approchée par une suite infinie de fonctions qui résulte de la résolution d'une suite de problèmes de valeurs limites stationnaires ou évolutives dans chacun des sous-domaines.

Analyse approfondie de la méthode d'alternance de Schwarz pour les problèmes de valeurs limites elliptiques non linéaires peuvent être trouvés dans [15], [16], et les références à l'intérieur.

Aussi, l'efficacité des méthodes de Schwarz pour résoudre ces problèmes, notamment ceux de la mécanique des fluides, a été démontrée dans de nombreux articles. Voir les

actes de la conférence annuelle sur la décomposition de domaine commençant par [8].

En outre, plusieurs articles donnent une estimation prioritaire de l'erreur pour le problème stationnaire, voir par exemple Lions [10], Dans laquelle une formulation variationnelle de la méthode de Schwarz classique est dérivée.

Chapitre 3

Estimation d'erreur a posteriori pour les méthodes de décomposition généralisée de domaines avec recouvrement ¹ [3]

3.1 Introduction

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans la section 1, nous introduisons quelques notations nécessaires, puis nous donnons une formulation variationnelle de notre problème de modèle. Nous établissons, à la section 2, un critère d'arrêt pour le processus itératif dans le cas continu. Dans la section 3, une estimation d'erreur a posteriori est proposée pour la convergence de la solution discrétisée à l'aide de la méthode des éléments finis sur les sous-domaines. Nous concluons cette section par une adaptation des techniques d'analyse d'erreur résiduelle a posteriori pour donner une estimation a posteriori dans le cas discret.

1. H.Benlarbi and A.S.Chibi, A Posteriori Error Estimates for the Generalized Overlapping Domain Decomposition Methods, Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics, 2012.

3.1.1 Formulation de problème et méthode de décomposition de domaine

Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^2 avec une limite par morceaux $C^{1,1}$ frontière $\partial\Omega$. On note $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ est le produit scalaire usuel et la norme de $L^2(\Omega)$. Soit $H^1(\Omega)$ espace de Sobolev avec une norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ et un semi-norme $|\cdot|_{1,\Omega}$; $H_0^1(\Omega)$ est le sous-espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ disparaître sur $\partial\Omega$.

Soient Ω_1 et Ω_2 deux sous-domaines de Ω (à définir plus tard), où $\Gamma_i \subset \partial\Omega_i$ nous avons besoin l'espace $W_i = H_{00}^{1/2}(\Gamma_i) = \{v|_{\Gamma_i} : v \in H^1(\Omega_i), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i \setminus \Gamma_i\}$ qui est un sous-espace de $H^{1/2}(\Gamma_i)$; $i = 1, 2$ muni de la norme

$$\|\varphi\|_{W_i} = \inf_{v \in H^1(\Omega_i), v = \varphi \text{ sur } \Gamma_i} |v|_{1,\Omega_i}. \quad (3.87)$$

Sur le sous-domaine Ω_i , on utilise l'espace $V_i = H_0^1(\Omega) \cap H^1(\Omega_i)$ qui a comme un espace de trace $W_i = V_i|_{\Gamma_i} = H_{00}^{1/2}(\Gamma_i)$, $i = 1, 2$. On note la produit scalaire de $L^2(\Gamma_i)$ par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_i}$.

Considérons le problème modèle suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \in L^2(\Omega) \text{ sur } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.88)$$

La formulation variationnelle de ce problème est donnée par

$$\text{Trouve } u \text{ la solution de } a(u, v) = (f, v)_{\Omega}, \forall v \in V, \quad (3.89)$$

Où $a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx$ et $(f, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} f v \, dx \, \forall v \in V = H_0^1(\Omega)$. Nous avons divisé le domaine Ω à deux sous-domaines avec recouvrements Ω_1 et Ω_2 tels que

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega_{12}, \quad \partial\Omega_i \cap \Omega_j = \Gamma_i, \quad i \neq j \ (i, j = 1, 2). \quad (3.90)$$

La méthode de décomposition de domaine avec recouvrement généralisée s'est écrit comme suit : un ensemble u_i^0 dans Ω et construit la suite u_i^{n+1} , $i = 1, 2$ en parallèle pour $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f \text{ dans } & \Omega_1, \\ u_1^{n+1} = 0 \text{ sur } & \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega, \\ \frac{\partial u_1^{n+1}}{\partial \eta_1} + \alpha_1 u_1^{n+1} = \frac{\partial u_2^n}{\partial \eta_1} + \alpha_1 u_2^n & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases} \quad (3.91)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_2^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_2, \\ u_2^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega, \\ \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial \eta_2} + \alpha_2 u_2^{n+1} = \frac{\partial u_1^n}{\partial \eta_2} + \alpha_2 u_1^n & \text{sur } \Gamma_2, \end{array} \right. \quad (3.92)$$

où η_i est la normale extérieure pour Ω_i et α_i est un paramètre réel, $i = 1, 2$.

La convergence de GODDM (3.91) et (3.92) est prouvée en [7] et [8]. Notre principal intérêt est pour obtenir une estimation d'erreur a posteriori, nous devons arrêter le processus itératif dès que la précision globale requise est atteinte.

Les formulations faibles des problèmes (3.91), (3.92) sont données respectivement par

$$u_1^{n+1} \in V_1 : a_1(u_1^{n+1}, v_1) + \langle \alpha_1 u_1^{n+1}, v_1 \rangle_{\Gamma_1} = (f, v_1) + \left\langle \frac{\partial u_2^n}{\partial \eta_1} + \alpha_1 u_2^n, v_1 \right\rangle_{\Gamma_1}, \quad \forall v_1 \in V_1, \quad (3.93)$$

$$u_2^{n+1} \in V_2 : a_2(u_2^{n+1}, v_2) + \langle \alpha_2 u_2^{n+1}, v_2 \rangle_{\Gamma_2} = (f, v_2) + \left\langle \frac{\partial u_1^n}{\partial \eta_2} + \alpha_2 u_1^n, v_2 \right\rangle_{\Gamma_2}, \quad \forall v_2 \in V_2, \quad (3.94)$$

où V_i est défini ci-dessus. Il peut aussi être écrit comme

$$V_i = \{v \in H^1(\Omega_i) : v|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega} = 0\}, \quad a_i(u, v) = (\Delta u, \Delta v)_{\Omega_i}. \quad (3.95)$$

3.2 Estimation d'erreur a posteriori dans le cas continu

Depuis, il est numériquement plus facile de comparer les solutions de sous-domaines sur les interfaces Γ_1 et Γ_2 plutôt que sur le chevauchement Ω_{12} , nous devons donc introduire deux problèmes auxiliaires définis sur sous-domaines sans recouvrements de Ω . Cette idée nous permet d'obtenir l'estimation de l'erreur a posteriori par les étapes suivants de Otto et Lube [12]. Nous obtenons ces problèmes auxiliaires en couplant chacun des problèmes (3.91), (3.92) avec un autre problème de manière sans recouvrement sur Ω . Ces problèmes auxiliaires sont nécessaires pour l'analyse et non pour le calcul, pour obtenir l'estimation. Nous voyons que nous pouvons partir du GODDM à quelques

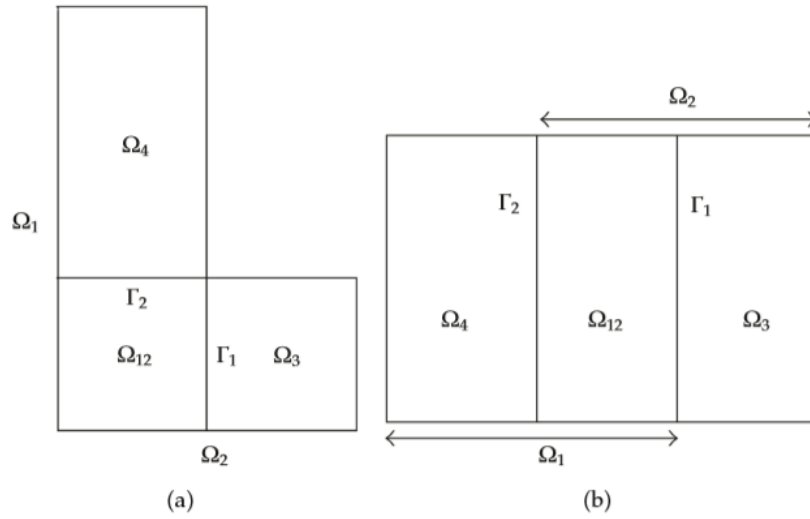


FIGURE 3.1 – Deux exemples de décompositions de domaines (Schur et Schwarz).

méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement avec des conditions limites de Robin sur les interfaces Γ_1 et Γ_2 . Pour définir ces problèmes auxiliaires, nous devons diviser le domaine Ω à deux ensembles de sous-domaines disjoints : Ω_1, Ω_3 et Ω_2, Ω_4 , voir la Figure 1, tel que

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_3 \quad \text{avec} \quad \Omega_1 \cap \Omega_3 = \emptyset, \quad \Omega = \Omega_2 \cup \Omega_4 \quad \text{avec} \quad \Omega_2 \cap \Omega_4 = \emptyset. \quad (3.96)$$

Soit (u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) les solutions aux problèmes (3.91), (3.92). Nous définissons le couple (u_1^{n+1}, u_3^{n+1}) sur Ω_1, Ω_3 est la solution aux problèmes sans recouvrement suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_1^{n+1} = f & \text{dans} \quad \Omega_1, \\ u_1^{n+1} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega, \\ \frac{\partial u_1^{n+1}}{\partial \eta_1} + \alpha_1 u_1^{n+1} = \frac{\partial u_2^n}{\partial \eta_1} + \alpha_1 u_2^n & \text{sur} \quad \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (3.97)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_3^{n+1} = f & \text{dans} \quad \Omega_3, \\ u_3^{n+1} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_3 \cap \partial\Omega, \\ \frac{\partial u_3^{n+1}}{\partial \eta_3} + \alpha_3 u_3^{n+1} = \frac{\partial u_3^n}{\partial \eta_1} + \alpha_1 u_3^n & \text{sur} \quad \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (3.98)$$

Nous pouvons écrire $u_2^n = u_3^n + \epsilon_1^n$ sur Γ_1 (dans la troisième équation de (3.97)), c'est-à-dire

que ϵ_1^n est la différence entre les solutions de recouvrement et de sans recouvrement u_2^n et u_3^n (dans les problèmes (3.91)-(3.92) avec (3.97)-(3.98) resp.), dans Ω_3 . Parce que les problèmes avec recouvrement et sans recouvrement sont convergents, c'est-à-dire u_2^n et u_3^n tendent à $u_2 = u|_{\Omega_2}$, ϵ_1^n devrait tendre à néant où n tend à l'infini dans V_2 .

par la multiplication de la première équation de (3.97) par $v_1 \in V_1$ et la intégration par parties nous obtenons

$$\int_{\Omega_1} \Delta u_1^{n+1} \Delta v_1 \, dx + \int_{\Gamma_1} \alpha_1 u_1^{n+1} v_1 \, dx = \int_{\Omega_1} f v_1 \, dx + \int_{\Gamma_1} \Lambda_3^n v_1 \, d\sigma, \quad (3.99)$$

où Λ_3^n est donné par

$$\Lambda_3^n = \frac{\partial u_3^n}{\partial \eta_1} + \alpha_1 u_3^n + \frac{\partial \epsilon_1^n}{\partial \eta_1} + \alpha_1 \epsilon_1^n. \quad (3.100)$$

D'autre part, en utilisant la dernière équation de (3.98) et en mettant

$$\theta_1^n = \frac{\partial \epsilon_1^n}{\partial \eta_1} + \alpha_1 \epsilon_1^n, \quad (3.101)$$

On a

$$\begin{aligned} \Lambda_3^n &= \frac{\partial u_3^{n+1}}{\partial \eta_1} + \alpha_1 u_3^{n+1} + \theta_1^{n+1} = -\frac{\partial u_3^{n+1}}{\partial \eta_3} + \alpha_1 u_3^{n+1} + \theta_1^{n+1} \\ &= \alpha_3 u_3^{n+1} - \frac{\partial u_1^n}{\partial \eta_3} - \alpha_3 u_1^n + \alpha_1 u_3^{n+1} + \theta_1^{n+1} \\ &= (\alpha_1 + \alpha_3) u_3^{n+1} - \Lambda_1^n + \zeta^n. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Où $\zeta^n = \theta_1^{n+1} + \theta_3^n$. À partir de ce résultat, nous pouvons écrire l'algorithme suivant, qui est équivalent au problème auxiliaire sans recouvrement (3.97) - (3.98). Nous avons besoin de cet algorithme et de deux lemmes pour obtenir une estimation de l'erreur a posteriori pour ce problème.

Algorithm 3.1. Les suite $(u_1^{n+1}, u_3^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont solutions des problèmes (3.97), (3.98) satisfont à l'algorithme de décomposition de domaine suivant, noté ALG.G.D.D.M.

- (1) Soit $\Lambda_i^0 \in W_1^*$ est une valeur initiale, $i = 1, 3$ (W_1^* est le dual de W_1 .)
- (2) Donné $\Lambda_j^n \in W_1^*$ résoudre pour $i = 1, 3, i \neq j$: Trouver $u_i^{n+1} \in V_i$ solutions de

$$a_i(u_i^{n+1}, v_i) + \langle \alpha_i u_i^{n+1}, v_i \rangle_{\Gamma_1} = F(v_i) + \langle \Lambda_j^n, v_i \rangle_{\Gamma_1}, \quad v_i \in V_i. \quad (3.103)$$

(3) Calculer les nouvelles données $\Lambda_i^{n+1} \in W_1^*, i = 1, 3$ de

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_i^{n+1}, \varphi \rangle_{\Gamma_1} &= \langle (\alpha_i + \alpha_j) u_i^{n+1}, \varphi \rangle_{\Gamma_1} - \langle \Lambda_j^n, \varphi \rangle_{\Gamma_1} + \langle \zeta^n, \varphi \rangle_{\Gamma_1}, \\ &\forall \varphi \in W_1, j \neq i. \end{aligned} \quad (3.104)$$

(4) Pose $n = n + 1$, allez à l'étape 2.

Lemme 3.2.1. Soit $u_i = u|_{\Omega_i}, e_i^{n+1} = u_i^{n+1} - u_i, \eta_i^n = \Lambda_i^n - \Lambda_i$ et $\xi_1^n = \zeta^n - \zeta$. Ensuite pour $i=1, 3, i \neq j$, les relations suivantes tiennent

$$a_i(e_i^{n+1}, v_i) + \langle \alpha_i e_i^{n+1}, v_i \rangle_{\Gamma_1} = \langle \eta_j^n, v_i \rangle_{\Gamma_1}, \quad v_i \in V_i. \quad (3.105)$$

$$\langle \eta_i^{n+1}, \varphi \rangle_{\Gamma_1} = \langle (\alpha_i + \alpha_j) e_i^{n+1}, \varphi \rangle_{\Gamma_1} - \langle \eta_j^n, \varphi \rangle_{\Gamma_1} + \langle \xi_1^n, \varphi \rangle_{\Gamma_1}, \forall \varphi \in W_1. \quad (3.106)$$

La preuve découle directement des étapes 2 et 3 de ALG.G.D.D.M.

Lemme 3.2.2. Soit C est une constante générique qui a différentes valeurs à différents endroits que l'on obtient pour $i = 1, 3, i \neq j$

$$\begin{aligned} \langle \eta_j^{n-1} - \alpha_i e_i^n, w \rangle_{\Gamma_1} &\leq C \|e_i^n\|_{1, \Omega_i} \|w\|_{W_1}, \\ \langle \alpha_i w + \xi_1^n, e_i^{n+1} \rangle_{\Gamma_1} &\leq C \|e_i^{n+1}\|_{1, \Omega_i} \|w\|_{W_1}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Sur la base des deux lemmes précédents, nous pouvons obtenir l'estimation d'erreur a posteriori suivante pour le problème de décomposition de domaine sans recouvrement (3.97) - (3.98).

Proposition 3.2.1. Pour les suites $(u_1^{n+1}, u_3^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ solutions des problèmes (3.97), (3.98) on a l'estimation d'erreur a posteriori suivante

$$\|e_1^{n+1}\|_{1, \Omega_1} + \|e_3^n\|_{1, \Omega_3} \leq C \|u_1^{n+1} - u_3^n\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)}. \quad (3.108)$$

Démonstration. D'après (3.105) et (3.106) on a

$$\begin{aligned} a_1(e_1^{n+1}, v_1) + a(e_3^n, v_3) &= \langle \eta_3^n - \alpha_1 e_1^{n+1}, v_1 \rangle_{\Gamma_1} + \langle \eta_1^{n-1} - \alpha_3 e_3^n, v_3 \rangle_{\Gamma_1} \\ &= \langle \alpha_1 (e_3^n - e_1^{n+1}) + \xi_1^n, v_1 \rangle_{\Gamma_1} + \langle \eta_1^{n-1} - \alpha_3 e_3^n, v_3 - v_1 \rangle_{\Gamma_1}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

En prenant $v_1 = e_1^{n+1}$ et $v_3 = e_3^n$, puis en utilisant le lemme (3.2.2) on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left(\|e_1^{n+1}\|_{1,\Omega_1} + \|e_3^n\|_{1,\Omega_3} \right) &\leq \|e_1^{n+1}\|_{1,\Omega_1}^2 + \|e_3^n\|_{1,\Omega_3}^2 = a_1 \left(e_1^{n+1}, e_1^{n+1} \right) + a_3 \left(e_3^n, e_3^n \right) \\
&\leq \left\langle \alpha_1 \left(e_3^n - e_1^{n+1} \right) + \xi_1^n, e_1^{n+1} \right\rangle_{\Gamma_1} + \left\langle \eta_1^{n-1} - \alpha_3 e_3^n, e_3^n - e_1^{n+1} \right\rangle_{\Gamma_1} \\
&\leq C_1 \|e_1^{n+1}\|_{1,\Omega_1} \|e_3^n - e_1^{n+1}\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)} + C_2 \|e_3^n\|_{1,\Omega_3} \|e_3^n - e_1^{n+1}\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)} \\
&\leq C \left\{ \|e_1^{n+1}\|_{1,\Omega_1} + \|e_3^n\|_{1,\Omega_3} \right\} \|u_1^{n+1} - u_3^n\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)},
\end{aligned} \tag{3.110}$$

C'est le résultat requis. \square

De la même manière, nous définissons un autre problème auxiliaire sans recouvrement sur (Ω_2, Ω_4) . Les suites $(u_2^{n+1}, u_4^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_2^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_2, \\ u_2^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega, \\ \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial \eta_2} + \alpha_2 u_2^{n+1} = \frac{\partial u_1^n}{\partial \eta_2} + \alpha_2 u_1^n & \text{sur } \Gamma_2, \end{array} \right. \tag{3.111}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_4^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_4, \\ u_4^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_4 \cap \partial\Omega, \\ \frac{\partial u_4^{n+1}}{\partial \eta_4} + \alpha_4 u_4^{n+1} = \frac{\partial u_2^n}{\partial \eta_4} + \alpha_4 u_2^n & \text{sur } \Gamma_2, \end{array} \right. \tag{3.112}$$

Où nous pouvons écrire $u_1^n = u_4^n + e_2^n$ sur Γ_2 (dans la troisième équation de (3.111)), c'est-à-dire que e_2^n est la différence entre les solutions avec recouvrement et avec sans recouvrement u_1^n et u_4^n (dans les problèmes (3.91)-(3.92) et (3.111)-(3.112) resp.) dans Ω_4 . Comme les deux suites u_1^n et u_4^n convergent vers u_1, e_2^n devrait tendre à néant quand n tend à l'infini. En utilisant les lemmes (3.2.1) et (3.2.2) sur (Ω_2, Ω_4) , nous obtenons l'estimation d'erreur a posteriori pour ce problème auxiliaire.

Proposition 3.2.2. Pour les suites $(u_2^{n+1}, u_4^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ solutions de problèmes (3.111), (3.112) on a l'estimation d'erreur a posteriori suivante

$$\|u_2^{n+1} - u_2\|_{1, \Omega_2} + \|u_4^{n+1} - u_4\|_{1, \Omega_4} \leq C \|u_2^{n+1} - u_4^n\|_{H_0^{1/2}(\Gamma_2)}. \quad (3.113)$$

Remarque 3.2. Nous remarquons dans les propositions (3.2.1) et (3.2.2) que nous pouvons passer par les suites de solutions aux problèmes (3.91) et (3.92) à des suites de solutions à des problèmes générés par des problèmes de décomposition de domaine sans recouvrement de conditions de transmission de type Robin aux interfaces Γ_1 et Γ_2 . Ce résultat nous permet de comparer les itérations de sous-domaines du GODDM sur les interfaces Γ_1 et Γ_2 plutôt que sur la région de recouvrement Ω_{12} .

Dans le théorème suivant, nous allons utiliser ce fait pour obtenir une estimation d'erreur a posteriori pour la méthode de décomposition de domaine avec recouvrement généralisée continue (3.91)-(3.92).

Théorème 3.2.1. Soit $u_i|_{\Omega_i}$ où u est la solution du problème (3.88) Pour les suites $(u_1^{n+1}, u_2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont les solutions des problèmes (3.91), (3.92), on a l'estimation d'erreur a posteriori suivante

$$\|u_1^{n+1} - u_1\|_{1, \Omega_1} + \|u_2^n - u_2\|_{1, \Omega_2} \leq C \left\{ \begin{array}{l} \|u_1^{n+1} - u_2^n\|_{H_0^{1/2}(\Gamma_1)} + \|u_2^n - u_1^{n-1}\|_{H_0^{1/2}(\Gamma_2)} \\ + \|e_1^n\|_{H_0^{1/2}(\Gamma_1)} + \|e_2^{n-1}\|_{H_0^{1/2}(\Gamma_2)} \end{array} \right\}. \quad (3.114)$$

Démonstration. Nous utilisons deux problèmes auxiliaires lesquels définissent chacun sur deux sous-domaines de Ω sans recouvrement. Ces deux problèmes sont définis respectivement sur Ω_1, Ω_3 et Ω_2, Ω_4 . D'après les deux propositions précédentes, nous avons

$$\begin{aligned} \|u_1^{n+1} - u_1\|_{1, \Omega_1} + \|u_2^n - u_2\|_{2, \Omega_2} &\leq \|u_1^{n+1} - u_1\|_{1, \Omega_1} + \|u_3^n - u_3\|_{1, \Omega_3} \\ &\quad + \|u_2^n - u_2\|_{1, \Omega_2} + \|u_4^{n-1} - u_4\|_{1, \Omega_4} \\ &\leq C \|u_1^{n+1} - u_3^n\|_{H_0^{1/2}(\Gamma_1)} + C \|u_2^n - u_4^{n-1}\|_{H_0^{1/2}(\Gamma_2)}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

D'après les définitions de ϵ_1^n et ϵ_2^n , on a

$$\begin{aligned} \|u_1^{n+1} - u_1\|_{1, \Omega_1} + \|u_2^n - u_2\|_{1, \Omega_2} &\leq C \|u_2^n - u_1^{n-1} - \epsilon_2^{n-1}\|_{H_0^{1/2}(\Gamma_2)} + C \|u_1^{n+1} - u_1^n - \epsilon_1^n\|_{H_0^{1/2}(\Gamma_1)} \\ &\leq C \left\{ \|u_1^{n+1} - u_2^n\|_{H_0^{1/2}(\Gamma_1)} + \|u_2^n - u_1^{n-1}\|_{H_0^{1/2}(\Gamma_2)} \right. \\ &\quad \left. + \|\epsilon_1^n\|_{H_0^{1/2}(\Gamma_1)} + \|\epsilon_2^{n-1}\|_{H_0^{1/2}(\Gamma_2)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.116)$$

□

3.3 Estimation d'erreur a posteriori dans le cas discret

Dans cette section, nous considérons la discrétisation des problèmes variationnels (3.93) et (3.94). Soit τ_h est une triangulation de Ω compatible avec la décomposition et $V_h \subset V$ est le sous-espace (de polynômes de fonctions continues de degré $k, k \geq 1$) qui s'annulent sur $\partial\Omega$. On a

$$V_{i,h} = V_h|_{\Omega_i}, \quad W_{i,h} = V_h|_{\Gamma_i}. \quad (3.117)$$

$W_{i,h}$ est un sous-espace de $H_{00}^{1/2}$ qui consiste des fonctions polynomiales continues par morceaux sur Γ_i , qui disparaissent aux extrémités de points de Γ_i ($i = 1, 2$).

Soit $u_h \in V_h$ la solution du problème discret associé avec (3.94), $u_{i,h} = u_h|_{\Omega_i}$.

Nous construisons les suites $(u_{i,h}^{n+1})_{i=1,2}, u_{i,h}^{n+1} \in V_{i,h}$ solutions des versions discrètes de (3.91) et (3.92) à la $(n+1)$ ère itération, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_{1,h}^{n+1} = f \quad \text{sur } \Omega_1, \\ u_{1,h}^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega, \\ \frac{\partial u_{1,h}^{n+1}}{\partial \eta_1} + \alpha_1 u_{1,h}^{n+1} = \frac{\partial u_{2,h}^n}{\partial \eta_1} + \alpha_1 u_{2,h}^n \quad \text{sur } \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (3.118)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_{2,h}^{n+1} = f \quad \text{sur } \Omega_2, \\ u_{2,h}^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega, \\ \frac{\partial u_{2,h}^{n+1}}{\partial \eta_2} + \alpha_2 u_{2,h}^{n+1} = \frac{\partial u_{1,h}^n}{\partial \eta_2} + \alpha_2 u_{1,h}^n \quad \text{sur } \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (3.119)$$

De la même manière à comme celui de la section 2, nous introduisons deux problèmes auxiliaires discrets, l'un sur Ω_1, Ω_3 , et l'autre sur Ω_2, Ω_4 . Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_{1,h}^{n+1} = f \quad \text{sur } \Omega_1, \\ u_{1,h}^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega, \\ \frac{\partial u_{1,h}^{n+1}}{\partial \eta_1} + \alpha_1 u_{1,h}^{n+1} = \frac{\partial u_{2,h}^n}{\partial \eta_1} + \alpha_1 u_{2,h}^n \quad \text{sur } \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (3.120)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_{3,h}^{n+1} = f \quad \text{sur } \Omega_3, \\ u_{3,h}^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_3 \cap \partial\Omega, \\ \frac{\partial u_{3,h}^{n+1}}{\partial\eta_3} + \alpha_3 u_{1,h}^{n+1} = \frac{\partial u_{1,h}^n}{\partial\eta_3} + \alpha_3 u_{1,h}^n \quad \text{sur } \Gamma_1. \end{array} \right. \quad (3.121)$$

Nous pouvons écrire $u_{2,h}^n = u_{3,h}^n + \epsilon_{1,h}^n$ sur Γ_1 , (dans la troisième équation de (3.120)), c'est-à-dire que $\epsilon_{1,h}^n$ est la différence entre la solutions de recouvrement discret et la solution de sans recouvrement $u_{2,h}^n$ et $u_{3,h}^n$ dans les problèmes ((3.118)-(3.119) et (3.120)-(3.121), resp.) dans Ω_3 . Parce que les deux $u_{2,h}^n$ et $u_{3,h}^n$ convergent vers $u_2 + \epsilon_{1,h}^n$ devrait tendre à néant comme n tend à l'infini.

De la même façon, sur Ω_2, Ω_4 , nous considérons les suites $(u_{2,h}^{n+1}, u_{4,h}^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des solutions des problèmes discrets suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_{2,h}^{n+1} = f \quad \text{sur } \Omega_2, \\ u_{2,h}^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega, \\ \frac{\partial u_{2,h}^{n+1}}{\partial\eta_2} + \alpha_2 u_{2,h}^{n+1} = \frac{\partial u_{1,h}^n}{\partial\eta_2} + \alpha_2 u_{1,h}^n \quad \text{sur } \Gamma_2, \end{array} \right. \quad (3.122)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_{4,h}^{n+1} = f \quad \text{sur } \Omega_4, \\ u_{4,h}^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_4 \cap \partial\Omega, \\ \frac{\partial u_{4,h}^{n+1}}{\partial\eta_4} + \alpha_4 u_{4,h}^{n+1} = \frac{\partial u_{2,h}^n}{\partial\eta_4} + \alpha_4 u_{2,h}^n \quad \text{sur } \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (3.123)$$

Où on peut aussi écrire $u_{1,h}^n = u_{4,h}^n + \epsilon_{2,h}^n$ sur Γ_2 , $\epsilon_{2,h}^n$ tendent à néant quand n tend à l'infini comme expliqué pour les problèmes précédents. Nous pouvons obtenir les contre-parties discrètes de Propositions 3.2.1 et 3.2.2 en effectuant presque la même analyse que dans la section 2, (i.e., en passant des espaces continus aux sous-espaces discrets et des suites continues à ceux discrets). Donc

$$\begin{aligned} \|u_{1,h}^{n+1} - u_{1,h}^n\|_{1,\Omega_1} + \|u_{3,h}^n - u_{3,h}^n\|_{1,\Omega_3} &\leq C \|u_{1,h}^{n+1} - u_{3,h}^n\|_{W_{1,h}}, \\ \|u_{2,h}^{n+1} - u_{2,h}^n\|_{1,\Omega_2} + \|u_{4,h}^n - u_{4,h}^n\|_{1,\Omega_4} &\leq C \|u_{2,h}^{n+1} - u_{4,h}^n\|_{W_{2,h}}, \end{aligned} \quad (3.124)$$

Où la norme de sous-espace de trace discrète $\|\cdot\|_{W_{i,h}}$ définie sur Γ_i ($i = 1, 2$) est considérée

comme étant

$$\|w_h\|_{W_{i,h}}^2 = \int_{\Gamma_i} w_h^2 dx + \iint_{\Gamma_i} \frac{(w_h(x) - w_h(y))^2}{|x - y|^2} dx dy \quad (3.125)$$

Par conséquent, en utilisant les deux inégalités précédentes, nous avons

$$\|u_{1,h}^{n+1} - u_{1,h}\|_{1,\Omega_1} + \|u_{2,h}^n - u_{2,h}\|_{1,\Omega_2} \leq C \left\{ \begin{array}{l} \|u_{2,h}^n - u_{1,h}^{n-1}\|_{W_{2,h}} + \|u_{1,h}^{n+1} - u_{2,h}^n\|_{W_{1,h}} \\ + \|e_{1,h}^n\|_{W_{1,h}} + \|e_{2,h}^{n-1}\|_{W_{2,h}} \end{array} \right\}. \quad (3.126)$$

Nous remarquons que (3.126) est la version discrète de (3.114).

Remarque 3.3. Notons que (3.126) est une estimation de l'erreur entre la solution approchée $u_{i,h}$ et la solution approchée de l'algorithme de décomposition de domaine avec recouvrement discrétisé $u_{i,h}^{n+1}$, $i = 1, 2$.

Ensuite, on obtiendra une estimation de l'erreur entre la solution approchée $u_{i,h}^{n+1}$ et la solution exacte u . Nous introduisons quelques notations nécessaires. Nous notons par

$$\varepsilon_h = \{E \text{ un côté de } \tau_h; E \notin \partial\Omega\}. \quad (3.127)$$

Pour chaque $T \in \tau_h$ et $E \in \varepsilon_h$, nous définissons

$$\omega_T = \cup \{T' \in \tau_h; T' \cap T \neq \emptyset\}, \quad \omega_E = \cup \{T' \in \tau_h; T' \cap E \neq \emptyset\}. \quad (3.128)$$

Pour une fonction f qui n'est pas nécessairement continue sur deux éléments voisins de τ_h ayant E comme côté commun, $[f]$ désigne le saut de f à travers E et η_E le vecteur normal de E .

On a le théorème suivant qui donne l'estimation d'erreur a posteriori pour le GODDM discret.

Théorème 3.3.1. Soit $u_i = u|_{\Omega_i}$ où u est la solution du problème (3.88), les suites $(u_{1,h}^{n+1}, u_{2,h}^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des solutions des problèmes (3.118)-(3.119). Ensuite, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|u_{1,h}^{n+1} - u_1\|_{1,\Omega_1} + \|u_{2,h}^n - u_2\|_{1,\Omega_2} \leq C \left\{ \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{T \in \tau_h} (\eta_i^T)^2 + h_T^2 \|f - f_h\|_{0,T}^2 \right)^{1/2} + \sum_{i=1}^2 \eta_{\Gamma_i} \right\}, \quad (3.129)$$

Où

$$\eta_{\Gamma_i} = \left\| u_{i,h}^* - u_{j,h}^{*-1} \right\|_{W_{i,h}} + \left\| e_{i,h}^* \right\|_{W_{i,h}}, \quad i, j = 1, 2, i \neq j \quad (3.130)$$

$$\eta_i^T = h_T \left\| f_h + \Delta u_{i,h}^* \right\|_{0,T} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1/2} \left\| \left[\frac{\partial u_{i,h}^*}{\partial \eta_E} \right] \right\|_{0,E}$$

Le symbole * correspond à $n+1$ quand $i = 1$ et à n quand $i = 2$.

Démonstration. La démonstration est basée sur la technique de l'estimation résiduelle a posteriori voir [16] et le théorème (3.2.1). Nous donnons les étapes principales . Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\sum_{i=1}^2 \left\| u_i - u_{i,h}^* \right\|_{1,\Omega_i} \leq \sum_{i=1}^2 \left\| u_i - u_{i,h} \right\|_{1,\Omega_i} + \sum_{i=1}^2 \left\| u_{i,h} - u_{i,h}^* \right\|_{1,\Omega_i}. \quad (3.131)$$

Le second terme à droite de (3.131) est borné comme en (3.126) par

$$\sum_{i=1}^2 \left\| u_{i,h} - u_{i,h}^* \right\|_{1,\Omega_i} \leq C \sum_{i=1}^2 \left(\left\| u_i^* - u_j^{*-1} \right\|_{W_{i,h}} + \left\| e_{i,h}^* \right\|_{W_{i,h}} \right). \quad (3.132)$$

Pour borner le premier terme sur les valeurs de r.h.s de (3.131), nous utilisons l'équation résiduelle et appliquons la technique de l'estimation de l'erreur résiduelle a posteriori, voir [16], pour on obtient pour $v_h \in V_h$ et $v_{i,h} = v_h|_{\Omega_i}$

$$\begin{aligned} a_i(u_i - u_{i,h}, v) &= a_i(u_i - u_{i,h}, v - v_h) \\ &= \sum_{T \subset \Omega_i} \int (f_h + \Delta u_{i,h})(v_i - v_{i,h}) - \sum_{E \subset \Omega_i} \int_E \left[\frac{\partial u_{i,h}}{\partial \eta_E} \right] (v_i - v_{i,h}) ds \\ &\quad - \sum_{E \subset \Gamma_i} \int_E \frac{\partial u_{i,h}}{\partial \eta_E} (v_i - v_{i,h}) ds + \sum_{T \subset \Omega_i} (f - f_h, v_i - v_{i,h})_{\Omega_i} + \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial \eta_i}, u - v_h \right\rangle_{\Gamma_i}. \end{aligned} \quad (3.133)$$

où f_h est une approximation de f par des polynômes de degré au plus k , donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 a_i(u_i - u_{i,h}, v) &\leq \sum_{i=1}^2 \left\{ \begin{aligned} &\sum_{T \subset \Omega_i} \|f + \Delta u_{i,h}\|_{0,T} \|v_i - v_{i,h}\|_{0,T} \\ &+ \sum_{E \subset \Omega_i} \left\| \left[\frac{\partial u_{i,h}}{\partial \eta_E} \right] \right\|_{0,E} \|v_i - v_{i,h}\|_{0,E} \\ &\sum_{E \subset \Gamma_i} \left\| \frac{\partial u_{i,h}}{\partial \eta_E} \right\|_{0,E} \|v_i - v_{i,h}\|_{0,E} \\ &+ \sum_{T \subset \Omega_i} \|f - f_h\|_{0,T} \|v_i - v_{i,h}\|_{0,T} \\ &\quad + \left\| \frac{\partial u_i}{\partial \eta_i} \right\|_{0,\Gamma_i} \|u - v_h\|_{0,\Gamma_i} \end{aligned} \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{T \subset \Omega_i} (\eta_i^T)^2 + h_T^2 \|f - f_h\|_{0,T}^2 \right)^{1/2} \sum_{i=1}^2 |v_i|_{1,\Omega_i}.
\end{aligned} \tag{3.134}$$

On utilise

$$\|u_i - u_{i,h}\|_{1,\Omega_i} \leq \sup_{v \in V_i} \frac{a_i(u_i - u_{i,h}, v)}{\|v\|_{1,\Omega_i}}. \tag{3.135}$$

Enfin, en combinant (3.131), (3.134) et (3.135), le résultat requis suit. \square

Conclusion générale

L'étude des méthodes de décomposition de domaine est un sujet historiquement important dont les premiers pas remontent à H.A.Schwarz en 1870 avec l'équation de Laplace sur un domaine spécial (disque -Poisson 1815- et rectangle -Fourier 1807-).

Dans ce travail nous sommes intéressés aux méthodes de décomposition de domaine de type Schwarz avec et sans recouvrement .

On a de plus présenté une problème lié à la convergence parfois très lente des DDM de type Schwarz, nous nous amène à nous intéresser aux méthodes de la convergence de GODDM.

Par la suite, on aimerait d'une part compléter l'étude de P.Lions pour estimer l'erreur à posteriori de l'équation de Laplace dans le cas continu et discret.

Enfin, on pourrait effectuer des simulations numériques et des algorithmes, basées sur un schéma d'Euler.

Finalement, on peuvent poursuivre cette étude dans de nombreuses directions, par exemple d'améliorer l'estimation d'erreur à posteriori des équations elliptique linéaire ou non linéaire, parabolique et hyperbolique.

Références

- [1] G.Allaire, Analyse numérique et optimisation, Éditions École Polytechnique, 2005.
- [2] G.Allaire et F.Alouges, Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles, École Polytechnique, 16 janvier 2015.
- [3] H.Benlarbi and A.S.Chibi, A Posteriori Error Estimates for the Generalized Overlapping Domain Decomposition Methods, Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics, 2012.
- [4] E.Blayo, Notes de cours sur la méthode des éléments finis, Janvier 2010.
- [5] F.Boyer et F.Hubert, Méthodes de décomposition de domaine de type Schwarz, Aix-Marseille université, 2014.
- [6] H.Brezis, Functional Analysis, Sobolov Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2010.
- [7] J.Douglas, Jr. and C.S.Huang, "An accelerated domain decomposition procedure based on Robin transmission conditions", BIT Numerical Mathematics, vol. 37, no. 3, pp. 678686, 1997.
- [8] B.Engquist and H.-K. Zhao, "Absorbing boundary conditions for domain decomposition," Applied Numerical Mathematics, (27) 341–365 (1998).
- [9] P.Linel, Méthodes de décomposition de domaines en temps et en espace pour la résolution de systèmes d'EDO non-linéaires, Université Claude Bernard - Lyon I, 2011.
- [10] P.L.Lions. *On the Schwarz alternating method. III : a variant for nonoverlapping subdomains.* In Third international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations , held in houston, texas, march 20-22, 1989.

- [11] E.Maitre, Notes du Cours Méthodes Variationnelles appliquées à la Modélisation ENSIMAG 2A, 2014-2015.
- [12] V.Manet, La Méthode des Éléments finis, Vulgarisation des aspects mathématiques, Illustration des capacités de la méthode, ViM2, Lyon,2013,pp.355.
- [13] F.C.Otto and G.Lube, "A posteriori estimates for a non-overlapping domain decomposition method", Computing, vol. 62, no. 1, pp. 2743, 1999.
- [14] E.Pichelin, M.Fortin et S.Boivin, Étude numérique d'estimations d'erreur a posteriori, Revue européenne des éléments finis. Volume 9- no 4/2000, pages 467 à 486.
- [15] A.Quarteroni and A.Valli, Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, The Clarend on Press,Oxford, UK,1999.
- [16] A.Toselli and O.Widlund, Domain Decomposition Methods Algorithms and Theory, vol. 34 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer, Berlin, Germany, 2005.
- [17] A.Verfürth, A.Review of a Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques, Wiley Teubner, Stuttgart, Germany, 1996.

Résumé

La méthode originale alternée de Schwarz a été introduite par H.A.Schwarz dans le tout de résoudre les problèmes aux limites linéaires. La méthode génère une suite de sous-problèmes dont la suite de solution converge vers la solution exacte du problème.

Dans ce travail, nous proposons de concevoir des méthodes de décomposition de domaine pour la résolution d' EDP elliptique linéaire. Nous développons deux méthodes, la première basée sur une méthode de type Schwarz dont nous montrons la convergence et estimons l'erreur a posteriori, la seconde apparentée à une méthode de complément de Schur.

Mots clé : Décomposition de domaine, méthode de Schwarz alternée , méthode de Schwarz parallèle, estimation d'erreur a posteriori.

Abstract

The original alternating Schwarz method was introduced by H.A.Schwarz in the whole of solving linear boundary problems. The method generates a series of sub-problems whose solution sequence converges to the exact solution of the problem.

In this work, we propose to design domain decomposition methods for linear elliptical EDP resolution. We develop two methods, the first based on a Schwarz-type method whose convergence we show and estimate the error a posteriori, the second related to a Schur complement method.

Key words : Domain decomposition, alternating Schwarz method, parallel Schwarz method, posterior estimation error.

ملخص

قدم شوارتز طريقة في حل المسائل التفاضلية الجزئية الخطية سنة 1870 ، اذ تعتمد الطريقة على انشاء سلسلة في المشكلات الفرعية التي يتقارب حلها الى الحل الدقيق للمشكلة الأصلية (تقسيم المجال الى مجالات فرعية). في هذا العمل، نقتراح طريقة تقسيم المجال الى حل مجالات جزئية لحل معادلة تفاضلية جزئية ناقصية خطية باعتماد طريقتين الأولى تعتمد على أسلوب شوارتز ونثبت تقارب الطريقة ونقدر الخطأ البعدي، الثانية هي طريقة شور المتوازية .

الكلمات المفتاحية: تقسيم المجال، طريقة شوارتز بالتناوب، طريقة شوارتز المتوازية، تقدير الخطأ البعدي.