



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Etude d'un problème de contact dynamique
avec frottement en thermo-viscoélasticité**

Présenté par : Nasrat Anouar

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Hadj Ammar Tedjani	PR	Président	Univ. El Oued
Azeb Ahmed Abelaziz	MCA	Rapporteur	Univ. El Oued
Douib Bachir	MCA	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2021– 2022

Table des matières

Introduction générale	1
1 Modélisation	3
1.1 Cadre physique	3
1.2 Modèle mathématique	5
1.3 Lois de comportement	6
1.4 Conditions aux limites	8
1.4.1 La condition aux limites de déplacement	8
1.4.2 La condition aux limites de traction.	8
1.4.3 La condition aux limites de contact bilatérale	8
1.4.4 La condition de contact avec compliance normale	9
1.5 Contact avec ou sans frottement	10
1.5.1 Contact sans frottement	10
1.5.2 Contact avec frottement	10
2 Outils mathématiques	12
2.1 Espaces fonctionnels	12
2.1.1 Fonctions continues et continûment différentiables	13
2.1.2 Espaces $L^p(\Omega)$	13
2.1.3 Espace de Sobolev	14
2.2 Espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence	15
2.3 Compléments divers	19
2.4 Fonctions convexes et semi-continuité inférieure	20

2.5	Équations différentielles non linéaires	20
2.5.1	Équation différentielle parabolique non linéaire	21
2.5.2	Équation différentielle hyperbolique non linéaire	22
2.6	Enoncés de certains théorèmes	24
2.6.1	Lemmes de Gronwall	24
3	Problème thermo-mécanique et formulation variationnelle	26
3.1	Formulation variationnelle	30
4	Existence et unicité de la solution	32
	Conclusion générale	38
	Bibliography	42

Notations Principales

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 1, 2, 3)$, on note par.

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω
Γ	la frontière de Ω , supposée souvent régulière.
$\Gamma_i (i = \overline{1, 3}, a, b)$	une partie de la frontière Γ .
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue (d-1) dimensionnelle de Γ_1 .
ν	la normale unitaire sortante à Γ .
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v définies sur $\overline{\Omega}$.
σ_ν, σ_τ	les composantes normale et tangentielle du champ tensoriel σ définies sur $\overline{\Omega}$.
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.
$D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω .
$D'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω .
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$.
Q	l'espace $L^2_s(\Omega)^{d \times d}$.
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$.
Q_1	l'espace $\{\sigma \in Q \text{ tel que } \operatorname{div} \sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
H'_Γ	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

H^d	l'espace $\{x = x_i/x_i \in H\}$.
$H_s^{d \times d}$	l'espace $\{x = x_{ij}/x_{ij} = x_{ji} \in H\}$.
$(\cdot, \cdot)_H$	le produit scalaire de H .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$	le produit de dualité entre H' et H .
$\ \cdot\ _H$	La norme de H .
H'	l'espace dual de H .

Si de plus $[0, T]$ est un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par :

$C(0, T; H)$	l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans H .
$C^1(0, T; H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H .
$L^p(0, T; H)$	l'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H . telles que $\int_0^T u(t) _H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; H)}$	la norme de $L^p(0, T; H)$.
$W^{k, p}(0, T; H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p .
$\ \cdot\ _{W^{k, p}(0, T; H)}$	la norme de $W^{k, p}(0, T; H)$.

Pour une fonction u ; on note par

∇u	le gradient de u .
\dot{u}, \ddot{u}	les dérivées première et seconde de u par rapport au temps.
$\partial_i u, u_{,i}$	la dérivées partielle de u fonction .
$\text{Div } u$	la divergence de u .
$\varepsilon(u)$	la partie symétrique du gradient de $u = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$.
\mathbb{S}^d	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d .
I_d	le tenseur identité du second ordre sur \mathbb{R}^d .
Λ^p	puissance p de l'opérateur Λ .
c	des constantes génériques strictement positives.
$p.p.$	presque partout.

$\partial\varphi(x_0)$ le sous-différentiel de φ au point x_0

$D(A)$ domaine de A

$P(H)$ l'ensemble des parties de H

Introduction générale

Le contact des corps élastiques déformables, avec ou sans frottement, est la relation entre les forces normales (pression de contact) et le mouvement relatif entre le corps et la fondation. Les problèmes de contact sont présents dans de nombreux processus industriels et dans la vie quotidienne. Des problèmes dynamiques de contact avec frottement entre un corps viscoélastique et un obstacle à effet thermique ont été réalisés dans [6, 3, 7] et plus récemment dans [1] [21]. Le résultat dans [14, 15, 16], [17], on peut trouver plusieurs classes de problèmes dynamiques de contact par frottement par inégalités hémivariationnelles avec ou sans effets thermiques. Pour plus d'informations sur le problème quasistatique et dynamique sans effets thermiques, reportez-vous à [18, 9] [10]. Un certain nombre d'articles étudiant les problèmes thermo-viscoélastiques de contact quasistatique avec frottement peuvent être trouvés dans [2, 13, 19]. Essoufi et al [12, 11] étudier deux modèles dynamiques de contact avec frottement entre un corps électro-viscoélastique et une base rigide non conductrice, utilisant le modèle de Tresca et Coulomb pour le contact. Les auteurs dans [4] ont introduit un problème de contact quasistatique d'évolution d'un corps viscoélastique avec une fondation, ils ont modélisé le contact avec compliance normale et une loi de frottement local. Ils ont établi l'existence d'une solution unique et la dépendance continue de la solution aux conditions aux limites de contact.

Cette mémoire se compose de quatre chapitres : Dans le premier chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des matériaux thermo-viscoélastiques, les lois de contact avec ou sans frottement, les conditions aux limites et nous présentons le problème de contact avec adhésion en thermo-viscoélasticité . Dans le deuxième chapitre, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les espaces

liés aux opérateurs de déformation et de divergence, les espaces des fonctions à valeurs vectorielles les équations, les éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert. Nous rappelons sur quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations et le Lemme de Gronwall. Quant au troisième chapitre, nous avons abordé à la formulation du problème de contact avec frottement et adhésion entre un corps thermo-viscoélasticité et un fondation, Nous avons également présenté les hypothèses fondamentales pour le problème à étudier. Enfin, nous concluons le chapitre à l'étude de la formulation variationnelle. Le dernier chapitre est consacré de démontrons l'existence et d'unicité d'une solution faible en utilisant des techniques des inéquations variationnelles paraboliques et hyperboliques et arguments du point fixe.

Chapitre 1

Modélisation

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus ou nous allons introduire le cadre physique utilisé dans cette mémoire, il est destiné à rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement thermo-viscoélastique. Par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact avec frottement et adhésion.

1.1 Cadre physique

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique dans ce mémoire et la formulation mathématique appropriée à l'étude de problème de contact avec frottement entre un corps thermo-viscoélastique et une fondation.

Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ avec une surface frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$, partitionnée en trois parties mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , telles que $mes(\Gamma_1) > 0$. Nous notons par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 et d'une source de chaleur donnée par la fonction q . Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact avec frottement avec un obstacle sur la partie Γ_3 . Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps, sous l'hypothèse des petites transformations.

Nous notons par \mathbb{S}^d ($d = 2, 3$) l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), "." et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d tels que :

$$\begin{aligned} u.v &= u_i v_i, & \|v\| &= (v.v)^{1/2} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d, & 1 \leq i, j \leq d, \\ \sigma.\tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij} & \|\tau\| &= (\tau.\tau)^{1/2} \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d, & 1 \leq i, j \leq d. \end{aligned}$$

Nous désignons par u_ν , u_τ les composantes normale et tangentielle d'un vecteur u à la frontière tels que

$$u_\nu = u.\nu, \quad u_\tau = u - u_\nu \nu. \quad (1.1)$$

Nous notons par $\sigma = \sigma(x, t)$ le champ des contraintes, par $u = u(x, t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(u)$ le champ des déformations infinitésimales tels que $x \in \bar{\Omega}$ et $\beta = \beta(x, t)$ le champ d'adhésion telle que $x \in \Gamma_3$, pour tous $t \in [0, T]$.

Pour le champ des contraintes σ nous notons par σ_ν et σ_τ les composantes normale et tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu. \quad (1.2)$$

Les relations (1.1) et (1.2) nous permettent d'écrire la relation suivante :

$$(\sigma\nu).v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau.v_\tau. \quad (1.3)$$

qu'on va l'utiliser pour la démonstration de formulation variationnelle de problème mécanique de contact. Les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps et la virgule représente la dérivée par rapport à la variable spatiale, c'est à dire

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

où \dot{u} désigne le champ des vitesses et \ddot{u} désigne le champ des accélérations. Pour le champ de vitesses \dot{u} les notations \dot{u}_ν et \dot{u}_τ représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est-à-dire

$$\dot{u}_\nu = \dot{u}.\nu, \quad \dot{u}_\tau = \dot{u} - \dot{u}_\nu \nu.$$

La relation entre le champ des déplacements u et le champ des déformations ε dans l'hypothèse des petites transformations est donnée par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div}\sigma = (\sigma_{ij,j}), \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (1.4)$$

Notons qu'ici et tout au long de la mémoire, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale.

Passons maintenant à la description un modèle mathématique associée cadres physique ci-dessus.

1.2 Modèle mathématique

Nous commençons avec le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps dans le cadre physique. Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ le champ de température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de Cauchy

$$\text{Div}\sigma + f_0 = \rho\ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (1.5)$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse. Le processus d'évolution défini par (1.5) s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. où le champ des vitesses \dot{u} varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho\ddot{u}$ peut être négligé et l'équation (1.5) devient

$$\text{Div}\sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (1.6)$$

L'équation (1.6) s'appelle l'équation d'équilibre. Le processus d'évolution défini par (1.5) s'appelle processus quasistatique. Nous rappelons que dans le cadre physique f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au temps. Par conséquent, nous supposons que les accélérations dans le système sont négligeables. Nous nous plaçons donc dans le cas quasistatique et nous utilisons l'équation (1.6).

Puisque le corps est encastré sur Γ_1 , le champ des déplacements s'annule

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0, T]. \quad (1.7)$$

La condition aux limites en tractions est

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times [0, T]. \quad (1.8)$$

Nous allons compléter ultérieurement le modèle mathématique (1.5)–(1.8) par les conditions de contact sur la partie Γ_3 de la frontière.

Du point de vue mathématique l'équation (1.5) ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre précédent car, par exemple, les d'ui du champ des déplacement ne figurent pas dans cette équation. Par remarquons que l'équation (1.5) exprime une loi univeselle valable pour tout les solides. Donc, soumis à des conditions identique les divers milieux continus auraient des comportements indentique. Ceci est naturellement absurde. Par conséquent, il faut lui ajouter d'autre relations qui caractérise le comportement de chaque type de solide. C'est l'objet des lois de compertement que nous décrivons dans la section suivante.

1.3 Lois de comportement

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charged écharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement mécanique, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ , le tenseur des déformations infinitésimales ε et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$.

Loi de comportement viscoélastique

le corps suit une loi de comportement de Kelvin-Voigt de la forme

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) \quad t \in [0, T]. \quad (1.9)$$

où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des fonction constitutives non linéaire, tel que \mathcal{A} représente l'opérateur de viscosité et \mathcal{B} est l'opérateur d'élasticité.

Pour un corps élastique, la loi se réduit à

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u})) \quad (1.10)$$

Dans le cas viscoélastique avec mémoire long ,le corps suit une loi de comportement de Kelvin-Voigt de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s)\varepsilon(u(s))ds, \quad (1.11)$$

Ici \mathcal{G} est le tenseur de relaxation d'ordre quatre qui définit le comportement du matériau avec mémoire long

lorsque $\mathcal{G} \cong 0$ on retrouve la viscoélasticité de la mémoire courte

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u) \quad (1.12)$$

Loi de comportement thermo-viscoélastique

Nous citons également parmi les lois thermo-viscoélastiques, une autre loi de comportement qui est même une généralisation de la loi (1.9), et écrit sous la forme

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{M}(\theta(t)) \quad t \in [0, T]. \quad (1.13)$$

où \mathcal{M} est un opérateur de dilatation thermique.

On rappelle qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contrainte $\sigma = \sigma_{ij}$ est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{u}) + b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u) + m_{ij}(\theta(t)) \quad (1.14)$$

Où σ_{ij} , a_{ijkl} , b_{ijkl} , m_{ij} représentent respectivement les composantes du tenseur des contraintes σ , du tenseur de viscosité A et du tenseur d'élasticité B

L'évolution de champ de température θ est régie par l'équation de la chaleur, obtenue à partir de la conservation de l'énergie, et définie par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(\mathcal{K}\nabla\theta) = -\mathcal{R}\varepsilon(u(t)) + q. \quad (1.15)$$

où $q(x, t)$ est la quantité de chaleur dans la volume Ω durant l'intervalle de temps où $\mathcal{K} = (k_{ij})$ représente le tenseur de conductivité thermique avec $\operatorname{div}(\mathcal{K}\nabla\theta) = (k_{ij}\theta_{,i})_{,i}$ et ψ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la densité du volume de la source températeure.

1.4 Conditions aux limites

Nous nous plaçons dans le cadre physique et nous présentons en détails les conditions aux limites sur chacune des trois parties Γ_1, Γ_2 , et Γ_3 , avec une discription de l'aspect mathématique et micanique de ces conditions .

1.4.1 La condition aux limites de déplacement

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie Γ_1 , le champ des déplacements u est par conséquent nul

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0, T]. \quad (1.16)$$

1.4.2 La condition aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité f_2 agit sur Γ_2 et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ satisfait à :

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times [0, T]. \quad (1.17)$$

1.4.3 La condition aux limites de contact bilatérale

Quand le contact entre le corps et la base est maintenue en tout temps on dit que c'est un contact bilatéral. C'est généralement le cas dans de nombreuses machines et entre les

pièces et composants d'équipement ou de machines mobiles. Comme il n'y a pas d'écart entre le corps et la base nous avons

$$u_\nu = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.18)$$

La condition de contact bilatéral (1.18) a été utilisé dans un certain nombre de document, pour plus de détails voir par exemple [30, 32]. On note ici que dans le le troisième chapitre de cette mémoire nous plaçons dans ce type de contact.

1.4.4 La condition de contact avec compliance normale

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν satisfait la condition dite de compliance normale

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g). \quad (1.19)$$

où u_ν est le déplacement normal, g représente l'interstice entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale.

La relation (1.19) est dite condition de compliance normale et signifie que la fondation exerce une pression suivant la normale sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$. Des conditions de contact avec compliance normale ont été utilisées par exemple dans [29, 28, 31].

Remarque 1.4.1. *Dans le cas où l'interstice entre le corps et la fondation est nul on prend $g = 0$.*

Pour la fonction de contrainte normale p_ν on prend comme exemple la fonction suivante

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+ \quad (1.20)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(s) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases} \quad (1.21)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.19) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

1.5 Contact avec ou sans frottement

1.5.1 Contact sans frottement

Dans un contact parfait, où sans frottement, l'action mécanique transmissible par obstacle entre deux solides ne peut être en tout point que normale au contact (perpendiculaire au plan tangent commun du contact). Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0.$$

qui signifie que la contrainte tangentielle est nulle. Si ce n'est pas le cas, on dit que le mouvement tangentielle se produit avec frottement ce qui nous oblige à introduire une loi de frottement qui prend en considération la composante tangentielle avec les autres variables du système.

1.5.2 Contact avec frottement

Par condition de contact nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes. Par loi de frottement nous comprenons une relation entre la contrainte tangentielle σ_τ et le déplacement tangential u_τ ou la vitesse tangentielle \dot{u}_τ .

Contact bilatéral avec frottement de Tresca

La loi de Tresca présente un seuil de frottement fixe g lorsque le solide et la base rigide sont en contact, la base rigide exerce sur le solide un effort tangential qui ne dépasse pas un certain seuil g :

$$\|\sigma_\tau\| \leq g \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil g , le milieu continu ne peut pas se déplacer par rapport à l'obstacle et il y'a blocage, ce qui traduit par :

$$\|\sigma_\tau\| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

Lorsque ce seuil est atteint le solide peut se déplacer tangentiellement par rapport à la base rigide et il y'a alors un glissement. La contrainte tangentielle s'oppose à la vitesse. Par conséquent, on a :

$$\|\sigma_\tau\| = g \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

En conclusion, les conditions aux limites de type frottement de Tresca s'écrivent alors comme suit :

$$\begin{cases} u_\nu = \mathbf{0} \\ \|\sigma_\tau\| \leq g \\ \|\sigma_\tau\| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = g \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

où $g > 0$ est le seuil de frottement.

Loi de frottement de type Coulomb

C'est une des lois de frottement les plus répandues et elle est plus réaliste. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer sous la forme :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu |\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu |\sigma_\nu| \implies \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu |\sigma_\nu| \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau. \end{cases} \quad (1.22)$$

où σ_τ est la contrainte tangentielle, $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement, \dot{u}_τ représente le déplacement normale et tangentielle.

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq p_\tau (u_\nu - g), \\ -\sigma_\tau = p_\tau (u_\nu - g) \frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq \mathbf{0}, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T)$$

où p_τ sont des fonctions données et g représente l'interstice initiale.

Chapitre 2

Outils mathématiques

Ce chapitre est consacré à la description des espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire et nous rappelons quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, des théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations et quelques hypothèses qui facilitent notre problème.

Nous supposons dans ce chapitre que $\Omega \subset R^d (d = 2, 3)$ le domaine initialement occupé par un corps thermo-viscoélastique. Ω est censé être ouvert et délimité par une frontière suffisamment régulière Γ . Γ est partitionné en trois parties mesurables, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, où Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont des ensembles ouverts disjoints et $mes(\Gamma_1) > 0$.

2.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons définir les espaces de fonctions continues, continûment différentiables, les fonctions intégrables et les espaces de Sobolev.

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ d'entiers positifs ou nuls on désigne par

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}. \quad (2.1)$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$ est la longueur de α .

2.1.1 Fonctions continues et continûment différentiables

L'espace des fonctions uniformément continues sur Ω est noté par $C(\overline{\Omega})$ et il est un espace de Banach pour la norme donnée par

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\{|v(x)|, x \in \overline{\Omega}\}.$$

Toute fonction uniformément continue est bornée et possède une unique extension continue sur $\overline{\Omega}$. Pour tout entier m , l'espace $C^m(\overline{\Omega})$ donné par

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) / D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leq m\}.$$

est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ dont les dérivées d'ordre au plus m sont également continues sur $\overline{\Omega}$. Il est aussi un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$|v|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{C(\overline{\Omega})}.$$

L'espace $C^\infty(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables :

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\overline{\Omega}).$$

Nous pouvons maintenant parler de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur l'ensemble Ω à support compact inclus dans Ω , défini par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) / \text{supp } v \subset \Omega\},$$

où $\text{supp } v = \overline{\{v \in C^\infty(\Omega) / v(x) \neq 0\}}$ est le support de la fonction v . Si $\text{supp } v$ est un sous ensemble propre de Ω , on dit que v est une fonction à support compact dans Ω .

2.1.2 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 2.1.1. (Espace de Lebesgue). Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / v \text{ Lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ et } |v|^p \text{ Lebesgue intégrable sur } \Omega\}.$$

C'est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

si $p = \infty$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, alors on définit $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ par

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{supess}(v) = \inf\{c : |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Définition 2.1.2. Soit $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$, on dit qu'une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $u \circ I_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$, où I_K représente l'application identité de K .

Remarque 2.1.1. Soit $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, si on a

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

alors $u = 0$ p.p. dans Ω .

2.1.3 Espace de Sobolev

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, d\}.$$

D'abord, on note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)}.$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad \text{et on écrit} \quad \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.2)$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 2.1.1. (Rellich)

$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection compacte.

Théorème 2.1.2. (trace de Sobolev) Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\gamma u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Remarque 2.1.2. l'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représente l'espace des fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle $d\Gamma$. L'application s'appelle application de trace; elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

On note que l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

Définition 2.1.3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_{\alpha} \in L^p(\Omega); \text{ tel que } v_{\alpha} = D^{\alpha}u\}.$$

Remarque 2.1.3. Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^{\alpha}u$ et v_{α} . La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

2.2 Espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence

On introduit dans cette section les espaces de type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation, on montre leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On rappelle aussi quelques espaces de fonctions définies sur un intervalle réel et à valeurs dans l'espace de Hilbert. Toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans cette mémoire sont introduits dans cette section. Pour sa rédaction nous nous sommes inspiré de [22, 23, 24, 25, 27]

Ici et partout dans ce manuscrit nous utilisons la convention de l'indice muet. Par ailleurs, l'indice après une virgule dénote la dérivée par rapport à la composante correspondante de la variable spatiale x . Dans toute la suite, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné avec une frontière de Lipschitz notée Γ . Pour le champ de déplacements et le champ des contraintes nous utilisons les espaces suivants

$$\begin{cases} H &= (L^2(\Omega))^d, \\ H_1 &= (H^1(\Omega))^d, \\ Q &= \{\tau = (\tau_{ij}) : \tau_{ij} = \tau_{ji} \text{ } L^2(\Omega)\}, \\ Q_1 &= \{\sigma \in Q : \text{Div } \sigma \in H\}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Les espaces H, H_1, Q et Q_1 sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés par

$$\begin{cases} \langle u, v \rangle_H &= \int_{\Omega} u_i v_i dx, \\ \langle \sigma, \tau \rangle_Q &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ \langle u, v \rangle_{H_1} &= \langle u, v \rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_Q, \\ \langle \sigma, \tau \rangle_{Q_1} &= \langle \sigma, \tau \rangle_Q + \langle \text{Div } \sigma, \text{Div } \tau \rangle_H. \end{cases} \quad (2.4)$$

où ε et Div sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces H, H_1, Q, Q_1 sont notées par $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_{H_1}, \|\cdot\|_Q$ et $\|\cdot\|_{Q_1}$, respectivement. Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteur $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace de γv sur Γ , Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. et nous notons par v_ν et v_τ les composantes normales et tangentielles de v sur la frontière données par

$$v_\nu = v \cdot \nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu.$$

Nous définissons de façon analogue les composantes normale et tangentielle d'un champ régulier $\sigma \in Q_1$ par les formules

$$\sigma_\nu = (\sigma \nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu.$$

Rappelons aussi la formule de Green ci-dessous :

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_Q + \langle \text{Div } \sigma, v \rangle_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da, \quad \forall v \in H_1. \quad (2.5)$$

Soit V le sous-espace fermé de H_1 défini par :

$$V = \{v \in H_1 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}. \quad (2.6)$$

Ensuite, nous considérons le sous-espace convexe fermé U de V donné par

$$U = \{v \in V : u_\nu \leq g \text{ sur } \Gamma_3\}. \quad (2.7)$$

Pour le champ de température, nous définissons l'ensemble E de $H^1(\Omega)$ par

$$E = \{\omega \in H^1(\Omega) \mid \omega = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}, \quad (2.8)$$

et on considère le produit scalaire et la norme correspondante donnés par :

$$(\theta, \eta)_E = (\nabla \theta, \nabla \eta)_H, \quad \|\eta\|_E = (\eta, \eta)_E^{\frac{1}{2}} \quad \forall \theta, \eta \in E \quad (2.9)$$

D'après le théorème de la trace de Sobolev, il existe une constante $C_1 > 0$ qui ne dépend que de Ω et de Γ telle que

$$\|\eta\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C_1 \|\eta\|_E \quad \forall \eta \in E \quad (2.10)$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est satisfaite, ainsi,

$$\|\nabla \eta\|_{L^2(\Omega)^d} \geq C_F \|\eta\|_E \quad \forall \eta \in E \quad (2.11)$$

Rappelons que lorsque $\mathbf{q} \in L^2(\Omega)^d$ est une fonction régulière, la formule de Green est satisfaite

$$\langle \mathbf{q}, \nabla \omega \rangle_{L^2(\Omega)^d} + \langle \text{Div } \mathbf{q}, \omega \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} \mathbf{q} \nu \cdot \omega da, \quad \forall \omega \in H_1. \quad (2.12)$$

Théorème 2.2.1. (Inégalité de Korn)

Si $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, alors il existe une constante $c_\Omega > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$\|\varepsilon(v)\|_Q \geq c_\Omega \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V. \quad (2.13)$$

Sur V nous considérons le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_Q, \quad \forall u, v \in V, \quad (2.14)$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, i.e.

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_Q \quad \forall v \in V. \quad (2.15)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert réel.

Preuve. On a d'après (??)

$$(u, v)_{H_1} = \langle u, v \rangle_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q.$$

Alors

$$\|v\|_{H_1} = (\|v\|_H^2 + \|\varepsilon(v)\|_Q^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_{H_1}^2 = \|v\|_H^2 + \|\varepsilon(v)\|_Q^2,$$

$$\|\varepsilon(v)\|_Q^2 \leq \|\varepsilon(v)\|_Q^2 + \|v\|_H^2, \quad (2.16)$$

d'après (2.13) et (??) on obtient

$$c_\Omega^2 \|v\|_{H_1}^2 \leq \|\varepsilon(v)\|_Q^2 \leq \|\varepsilon(v)\|_Q^2 + \|v\|_H^2,$$

$$c_\Omega \|v\|_{H_1} \leq \|\varepsilon(v)\|_Q \leq \|v\|_{H_1}. \quad (2.17)$$

Alors $\|\cdot\|_{H_1}$ équivalent $\|\cdot\|_Q$.

□

En outre, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $d_\Omega > 0$ dépendant uniquement de Ω, Γ_1 et Γ_3 telle que

$$\|v\|_{(L^2(\Gamma_3))^d} \leq d_\Omega \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (2.18)$$

Pour $p \in [1, \infty]$, nous utilisons la norme standard de $L^p([0, T], V)$. Nous utilisons également l'espace de Sobolev $W^{1, \infty}([0, T]; V)$ équipé de la norme

$$\|v\|_{W^{1, \infty}([0, T], V)} = \|v\|_{L^\infty([0, T], V)} + \|\dot{v}\|_{L^\infty([0, T], V)}. \quad (2.19)$$

2.3 Compléments divers

Opérateurs linéaires bornés

Définition 2.3.1. Soit H un espace de Hilbert et un corps \mathbb{K} , qui sera ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Une application $T : H \rightarrow H$ est dite opérateur linéaire si

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \quad \forall x, y \in H \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Définition 2.3.2. On dit qu'un opérateur T défini sur H est borné s'il existe une constante C telle que

$$\|Tx\| \leq C\|x\|.$$

Théorème 2.3.1. Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ la norme de T est donné par

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Définition 2.3.3. Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow R$ est dite coercive s'il existe une constante $m_a > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq m_a \|v\|_V^2.$$

Définition 2.3.4. Une forme bilinéaire $m : X \times X \rightarrow R$; est continue s'il existe un réel $M_a > 0$, tel que

$$|a(u, v)| \leq M_a \|u\|_V \|v\|_V,$$

Théorème 2.3.2. (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) Étant donné $\eta \in X'$, il existe $f \in X$ unique telle que

$$(\eta, v)_{X' \times X} = (f, v)_X \quad \forall v \in X,$$

on a de plus

$$\|\eta\|_{X'} = \|f\|_X.$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur X peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire.

2.4 Fonctions convexes et semi-continuité inférieure

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et à valeur dans $] -\infty, +\infty]$. Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est à dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u, v \in X, t \in [0, 1].$$

La fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tel que $u \neq v$. Pour toute fonction $\varphi : X \rightarrow] -\infty, +\infty]$, on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par :

$$\text{dom } \varphi = \{u \in X \mid \varphi(u) < +\infty\}, \quad \text{epi } \varphi = \{(u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(u) \leq \alpha\}.$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants :

1. φ est propre si et seulement si $\text{dom } \varphi \neq \emptyset$.
2. Le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe.
3. φ est convexe si et seulement si $\text{epi } \varphi$ est un ensemble convexe de $X \times \mathbb{R}$.

La fonction $\varphi : X \rightarrow] -\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) si

$$\liminf_n \varphi(u_n) \geq \varphi(u),$$

pour tout $u \in X$ et $u_n \rightarrow u$ dans X . La propriété de semi-continuité inférieurement peut être caractérisée par :

Lemme 2.4.1. *Soit $\varphi : X \rightarrow] -\infty, +\infty]$, alors Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. φ est semi-continue inférieurement.
2. L'épigraphe de φ est fermée dans $X \times \mathbb{R}$.

2.5 Équations différentielles non linéaires

On considère un espace de Hilbert X munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$.

2.5.1 Équation différentielle parabolique non linéaire

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire.

Définition 2.5.1. *L'opérateur $A : X \rightarrow X$ est dit :*

1. *fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2, \quad \forall u, v \in X.$$

2. *de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que*

$$\|Au - Av\|_X \leq M\|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

3. *hémicontinu si pour tous $u, v \in X$ L'application $t \rightarrow (A(u + tv), v)_X$ est continu de \mathbb{R} dans \mathbb{R}*

Proposition 2.5.1. *Tout opérateur de Lipschitz est hémicontinu.*

Théorème 2.5.1. *Soit $V \subseteq H \subseteq V$ un triplet de Gelfand et soit $A : V \rightarrow V$ un opérateur hémicontinue et monotone satisfaisant.*

$$\langle Av, v \rangle_V \geq \omega|v|_V^2 + \lambda \quad \forall v \in V. \tag{2.20}$$

$$|Av|_V \leq C(|v|_V + 1) \quad \forall v \in V. \tag{2.21}$$

Pour des constantes $\omega > 0, C > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ Etant donnée $u_0 \in H$ et $f \in L^2([0, T]; V)$, il existe une fonction unique u satisfait

$$u \in L^2([0, T]; V) \cap C([0, T]; V), \quad \dot{u} \in L^2([0, T]; V).$$

$$\dot{u} + Au(t) = f(t) \quad p.p \quad t \in [0, T].$$

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0$$

2.5.2 Équation différentielle hyperbolique non linéaire

La théorie des équations d'évolution non linéaires nous amène à étendre la notion d'opérateur. Un opérateur (multivoque) sera une application de X dans $P(X)$ ensemble de partie de X . Le domaine de A est l'ensemble $D(A) = \{x \in X \mid Ax \in X \neq \emptyset\}$ et l'image de A est l'ensemble $R(A) = \bigcup_{x \in X} Ax$. Si pour tout $x \in X$, l'ensemble Ax contient au plus un élément on dira que A est univoque. Nous justifierons ultérieurement l'intérêt des opérateurs multivoques.

Notion d'un opérateur multivoque maximal monotone

Définition 2.5.2. *Un opérateur multivoque A de X est monotone si*

$$\forall x, y \in D(A); (Ax - Ay, x - y) \geq 0.$$

Ou plus précisément

$$\forall X \in Ax, Y \in Ay; (X - Y, x - y) \geq 0$$

Définition 2.5.3. *Un opérateur A de X est dit maximale monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones.*

Proposition 2.5.2. *A est un opérateur maximal monotone si et seulement si A est monotone et pour tout $(x, y) \in H \times H$ tel que $(y - Ax_0, x - x_0) \geq 0, \forall x_0 \in D(A)$, alors $y \in Ax$.*

Ou plus précisément

$$(y - y_0, x - x_0) \geq 0, \forall y_0 \in Ax_0 \text{ alors } y \in Ax$$

.

Proposition 2.5.3. *Si A un opérateur monotone et continue alors A est maximal monotone.*

Définition 2.5.4. *Soit $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ et soit $u \in X$. Le sous-différentiel de φ en u est l'ensemble*

$$\partial\varphi(u) = \{f \in X : \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X\}$$

On note

$$D(\partial\varphi) = \{u \in X : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}.$$

La Fonction φ est dite sous-différentiable en $u \in X$ si $u \in D(\partial\varphi)$, et chaque élément $f \in \partial\varphi(u)$ s'appelle sous-gradient de φ en u . La fonction φ est dite sous-différentiable si elle est sous-différentiable en tout point de X , c'est-à-dire si $D(\partial\varphi) = X$.

Proposition 2.5.4. Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre sur H , le sous différentiel $\partial\varphi$ est monotone.

Démonstration.

Soient $x_1, x_2 \in H$, soient $y_1 \in \partial\varphi(x_1)$, $y_2 \in \partial\varphi(x_2)$, on a par définition,

$$y_1 \in \partial\varphi(x_1) \iff \partial\varphi(x_2) \geq \partial\varphi(x_1) + \langle x_2 - x_1, y_1 \rangle$$

$$y_2 \in \partial\varphi(x_2) \iff \partial\varphi(x_1) \geq \partial\varphi(x_2) + \langle x_1 - x_2, y_2 \rangle$$

par addition,

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) \geq \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \langle x_2 - x_1, y_1 \rangle + \langle x_1 - x_2, y_2 \rangle.$$

Alors,

$$\langle x_2 - x_1, y_1 \rangle + \langle x_1 - x_2, y_2 \rangle \leq 0$$

donc,

$$\langle x_1 - x_2, y_1 \rangle + \langle x_1 - x_2, -y_2 \rangle \geq 0$$

et par suit,

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0, \forall x_1, x_2 \in H.$$

D'ou, $\partial\varphi$ est monotone.

Proposition 2.5.5. Soit H un espace de Hilber et $f : H \rightarrow H$ une fonction convexe et s.c.i alors ∂f est un opérateur maximal monotone sur H

Proposition 2.5.6. Soit A un opérateur maximal monotone et B monotone lipschitzien de H dans H alors $A + B$ est maximal monotone

Théorème 2.5.2. Soit $V \subseteq H \subseteq V'$ un triplet de gelfand :

Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur linéaire hémicontinue et monotone satisfaisant le coercivité suivante :

$$\langle Av, v \rangle_V + \alpha|v|^2 \geq \omega|v|_V^2 \quad \forall v \in V$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$

étant donné $f \in W^{1,1}(0.T.H)$ et u_0, v_0 où :

$$u_0 \in V \quad , \quad v_0 \in D(M), \quad \{Au_0 + Mv_0\} \cap H \neq \emptyset.$$

Alors il existe une unique solution u satisfaisant

$$u \in W^{1,\infty}(0.T.V) \cap W^{2,\infty}(0.T.H)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au + M\left(\frac{du}{dt}\right) \in f(t)$$

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = v_0.$$

2.6 Énoncés de certains théorèmes

(Théorème de point fixe de Banach)

Théorème 2.6.1. Soit K un sous ensemble fermé et non-vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que :

$\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in [0, 1]$ telle que :

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_X \leq c\|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda u = u$. Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \rightarrow K$ défini par la relation :

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}), \quad m \geq 2.$$

Théorème 2.6.2. Soit K un sous-ensemble fermé et non-vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ et soit $\Lambda : K \rightarrow K$. Supposons que $\Lambda^m : K \rightarrow K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors, Λ a un point fixe unique dans K .

2.6.1 Lemmes de Gronwall

Lemme 2.6.1. Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante, et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$.

1. Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors :

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

2. Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors :

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s)ds.$$

Dans le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 2.6.1. Soit $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ tel que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$. Si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Lemme 2.6.2. Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$, $n(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$, $a \geq 0$. Soit également $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\psi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\psi(t)dt + \int_0^s n(t)\psi(t)dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors

$$|\psi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t)dt \right) e^{\int_0^s n(t)dt} \quad \forall s \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $n = 0$, le Lemme précédent devient :

Corollaire 2.6.2. Soit $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ tel que $m(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Soit également $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\psi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\psi(t)dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors,

$$|\psi(s)| \leq a + \int_0^s m(t)dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Chapitre 3

Problème thermo-mécanique et formulation variationnelle

Problème \mathcal{P}

Trouver un champ de déplacements $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, un champ de contraintes, $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$, un champ de température $\theta : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{u}) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(u) - \mathcal{M}(\theta) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.1)$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + f_0 = \rho \ddot{u}(t) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.2)$$

$$\dot{\theta} - \text{div}(\mathcal{K}\nabla\theta) = \mathcal{R}\boldsymbol{\varepsilon}(u(t)) + q \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.3)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (3.4)$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (3.5)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times [0, T], \quad (3.6)$$

$$-\sigma_\nu(u(t) - g) = p_\nu(u_\nu(t) - g), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau(t)\| \leq p_\tau(u_\nu(t) - g), \\ \dot{u}_\tau(t) \neq 0 \implies \sigma_\tau(t) = p_\tau(u_\nu(t) - g) \frac{\dot{u}_\tau(t)}{\|\dot{u}_\tau(t)\|} \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial q(t)}{\partial \nu} = k_c(u_\nu(t) - g) \phi_L(\theta(t) - \theta_F) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (3.9)$$

$$u(0) = u_0 \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad \text{sur } \Omega. \quad (3.10)$$

où (3.1) sont la loi de comportement thermo-viscoélastique du matériau, $\sigma = (\sigma_{ij}) : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$ le tenseur de stress, . L'équation (3.2) est l'équation du mouvement. L'équation (3.3) est la loi de Fourier de conduction de la chaleur où une fonction $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_{ij})$ décrit l'influence de ladéplacement champ. Ici et ci-dessous $\text{Div } \sigma = \sigma_{ij,j}$ désignent l'opérateur de divergence pour les fonctions tensorielles et vectorielles. Les conditions (3.4) - (3.5) sont le déplacement et la condition aux limites thermiques. Les conditions initiales sont représentées dans l'équation (3.10). Relation (3.7) représente la condition normale de contact de conformité, Lorsqu'il est positif, $u_\nu - g$ représente la pénétration de la surface en parités dans celles de la fondation. La loi de frottement de Coulomb est considérée en relation (3.8) où p_τ est une fonction prescrite non négative, appelée borne de friction. Enfin, la relation (3.9) représente une condition de contact thermique régularisée où $\frac{\partial q}{\partial \nu}$ est la dérivée normale de q telle que :

La fonction constitutive linéaire $\phi : \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\phi_L(s) = \begin{cases} -L & \text{if } s < -L, \\ s & \text{if } -L \leq s \leq L, \\ L & \text{if } s > L, \end{cases} \quad \begin{cases} k_c(r) = 0 & \text{if } r < 0, \\ k_c(r) > 0 & \text{if } r \geq 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

où L est une grande constante positive, Par la suite, nous supposons aussi que les forces volumiques f_0 , les tractions surfaciques, f_2 et la densité de la source de chaleur externe satisfont les régularités

$$f_0 \in C([0, T]; H), \quad f_2 \in C([0, T]; L^2(\Gamma_2)^d), \quad q \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega)). \quad (3.12)$$

Les données initiales satisfont les conditions suivantes :

$$u_0 \in U, \quad (3.13)$$

$$\theta_0 \in E, \quad (3.14)$$

$$\theta_F \in L^2([0, T]; L^2(\Gamma_3)), \quad (3.15)$$

$$k_c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+). \quad (3.16)$$

$$\mathcal{A}_{ijkl} = \mathcal{A}_{jikl} = \mathcal{A}_{lkij} \in L^\infty(\Omega), \quad (3.17)$$

$$\mathcal{B}_{ijkl} = \mathcal{B}_{jikl} = \mathcal{B}_{lkij} \in L^\infty(\Omega), \quad (3.18)$$

$$\mathcal{K}_{ij} = \mathcal{K}_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad (3.19)$$

$$\mathcal{M}_{ij} = \mathcal{M}_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad (3.20)$$

$$\mathcal{R}_{ij} = \mathcal{R}_{ji} \in L^\infty(\Omega). \quad (3.21)$$

Nous considérons les fonctionnelles $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $\chi : V \times Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

$$j(u(t), v) = \int_{\Gamma_C} p_\nu (u_\nu(t) - g) v_\nu da + \int_{\Gamma_C} p_\tau (u_\tau(t) - g) (\|v_\tau\|_V) \quad (3.22)$$

$$\chi(u(t), \theta(t), \eta) = \int_{\Gamma_3} k_c (u_\nu(t) - g) \phi_L (\theta(t) - \theta_F(t)) \eta da, \quad (3.23)$$

Le théorème de représentation de Riesz, nous permet de définir les fonctions $f : [0, T] \rightarrow V$ et $q_{th} : [0, T] \rightarrow Q$ respectivement

$$\langle f(t), v \rangle_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v da \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \quad (3.24)$$

$$(q_{th}(t), \eta)_Q = \int_{\Omega} q_0(t) \eta dx, \quad \forall \eta \in Q. \quad (3.25)$$

Les conditions (3.27) impliquent

$$f \in C([0, T]; V). \quad (3.26)$$

les opérateurs suivants

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (3.27)$$

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(u, v) = (\mathcal{B}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (3.28)$$

$$d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(\theta, \eta) = (\mathcal{K}\nabla\theta, \nabla\eta)_H, \quad (3.29)$$

$$m : Q \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad m(\theta, v) = (\mathcal{M}\theta, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (3.30)$$

$$e : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad e(u, \eta) = (\mathcal{R}\varepsilon(v), \eta)_{L^2(\Omega)}. \quad (3.31)$$

Il existe des constantes positives m_a, m_b et m_d telles que

$$a(v, v) \geq m_a \|v\|_V^2, \quad b(v, v) \geq m_b \|v\|_V^2, \quad d(\eta, \eta) \geq m_d \|\eta\|_Q^2. \quad (3.32)$$

Les opérateurs a, b, d, m et e vérifient la propriété suivante

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq M_a \|u\|_V \|v\|_V, & |b(u, v)| &\leq M_b \|u\|_V \|v\|_V, \\ |d(\theta, \eta)| &\leq M_d \|\theta\|_Q \|\eta\|_Q, & |m(\theta, v)| &\leq M_m \|\theta\|_Q \|v\|_V, & |e(u, \eta)| &\leq M_e \|u\|_V \|\eta\|_Q, \end{aligned} \quad (3.33)$$

La fonction de compliaince normale p_ν et fonction de contact tangential p_τ satisfont l'hypothèses suivantes pour $r = \nu, \tau$:

$$\left\{ \begin{array}{l} i) p_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \\ ii) x \rightarrow p_r(x, u) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}, \\ iii) x \rightarrow p_r(x, u) = 0 \text{ for } u \leq 0, p.p x \in \Gamma_3, \\ iv) \text{ Il existe } L_r > 0 \text{ tel que } |p_r(\cdot, u) - p_r(\cdot, v)| \leq L_r |u - v|, \text{ par tous } u, v \in \mathbb{R}_+. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \text{ Les forces, la traction et le flux thermique satisfont} \\ f_0 \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad f_1 \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), q_0 \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \\ ii) \text{ La fonction d'écart et le potentiel thermique satisfont,} \\ g \geq 0, g \in L^\infty(\Gamma_3), \text{ sur } \theta_F \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_3)), \\ iii) \text{ La masse volumique } \rho \text{ satisfait} \\ \rho \in L^\infty(\Omega), \text{ et il existe } \rho^* > 0 \text{ tel que } \rho(x) \geq \rho^* \text{ p.p } x \in \mathbb{R}. \\ iv) \text{ La fonctionnelle } j \text{ est propre, convexe et semi-continue inférieure sur } V \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Le coefficient d'échange thermique $k_c : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \text{ Il existe } M_{k_c} > 0 \text{ tel que } |k_c(x, u)| < M_{k_c} \text{ pour tous } u \in \mathbb{R} \text{ } x \in \Gamma_3 \text{ } x \mapsto k_c(x, u) \\ \text{est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tous } x \in \mathbb{R}, k_c(x, u) = 0 \text{ pour tous } x \in \Gamma_3 \text{ et } u \leq 0 \\ ii) \text{ Il existe } L_{k_c} > 0 \text{ tel que } |k_c(x, u_1) - k_c(x, u_2)| \leq L_{k_c} |u_1 - u_2|, \text{ pour tous } u_1, u_2 \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (3.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \text{ Tles données initiales } u_0 \text{ et } \dot{u}_0 \text{ du problème } (P) \text{ satisfont } u_0 \in U, \quad \dot{u}_0 \in D(\partial j), \\ ii) \text{ Il existe } h \in L^2(\Omega)^d \text{ tel que} \\ b(\dot{u}_0, v - \dot{u}_0) + a(u_0, v - \dot{u}_0) + j(u_0, v) - j(u_0, \dot{u}_0) \geq (h, v - \dot{u}_0), \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (3.37)$$

3.1 Formulation variationnelle

En utilisant la formule de Green (2.5), on obtient

$$\langle \sigma \ddot{u}(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)) \rangle_Q + (\text{Div } \sigma(t), v - \dot{u}(t))_H = \int_{\Gamma} \sigma(t) \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) da, \quad \forall v \in H_1, t \in [0, T].$$

on trouve

$$\begin{aligned} \langle \sigma \ddot{u}(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)) \rangle_Q + (\text{Div } \sigma(t), v - \dot{u}(t))_H &= \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) da + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) da, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

En utilisant la définition (2.7) de l'espace U combinée avec les condition (3.2), (3.5) et (3.2), on obtient

$$\begin{aligned} &\langle \sigma \ddot{u}(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)) \rangle_Q + \langle \sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)) \rangle_Q - \int_{\Omega} f_0 \cdot (v - \dot{u}(t)) dx \\ &= \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - \dot{u}(t)) da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) da, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.38)$$

En utilisant (1.3) la décomposition du tenseur de Cauchy :

$$\sigma \nu (v - \dot{u}) = \sigma_{\nu} (v_{\nu} - \dot{u}_{\nu}) + \sigma_{\tau} (v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}).$$

D'après (3.8) on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_{\tau} \cdot (v_{\tau} - \dot{\mathbf{u}}_{\tau}) &= -p_{\tau} (\mathbf{u}_v - g) \frac{\dot{\mathbf{u}}_{\tau}}{\|\dot{\mathbf{u}}_{\tau}\|} (v_{\tau} - \dot{\mathbf{u}}_{\tau}) \\ &\geq p_{\tau} (u_v - g) \|\dot{\mathbf{u}}_{\tau}\| - p_{\tau} (u_v - g) \|v_{\tau}\| \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \end{aligned}$$

Car $\dot{\mathbf{u}}_{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{\tau} = \|\dot{\mathbf{u}}_{\tau}\|^2$ et $\dot{\mathbf{u}}_{\tau} \cdot v_{\tau} \leq \|\dot{\mathbf{u}}_{\tau}\| \|v_{\tau}\|$; sur les points de Γ_3 où $\dot{\mathbf{u}}_{\tau} = \mathbf{0}$ nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_{\tau} \cdot (v_{\tau} - \dot{\mathbf{u}}_{\tau}) &= \sigma_{\tau} \cdot v_{\tau} \geq -\|\sigma_{\tau}\| \|v_{\tau}\| \\ &\geq -p_{\tau} (u_v - g) \|v_{\tau}\| = p_{\tau} (u_v - g) \|\dot{\mathbf{u}}_{\tau}\| - p_{\tau} (u_v - g) \|v_{\tau}\| \end{aligned}$$

car $\|\sigma_{\tau}\| \leq p_{\tau} (u_v - g)$ et $\|\dot{\mathbf{u}}_{\tau}\| = 0$. sur Γ_3 on obtient

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau} \cdot (v_{\tau} - \dot{\mathbf{u}}_{\tau}) da \geq \int_{\Gamma_3} p_{\tau} (u_v - g) (\|\dot{\mathbf{u}}_{\tau}\| - \|v_{\tau}\|) da. \quad (3.39)$$

Gardant à l'esprit (3.24), on remplace (3.39) dans (3.38), on peut écrire l'inégalité (3.38) comme suit :

$$\begin{aligned} \langle \ddot{u}(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)) \rangle_Q + \langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u) - \mathcal{M}(\theta), \varepsilon(v - \dot{u}(t)) \rangle_Q - \int_{\Gamma_3} p_\tau (u_\nu - g) (\| \dot{u}_\tau \| - \| v_\tau \|) da \\ \geq \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - \dot{u}(t)) da + \int_{\Omega} f_0 \cdot (v - \dot{u}(t)) dx \end{aligned}$$

Combinant maintenant (3.27), (3.28), (3.30) et (3.22) on trouve

$$\begin{aligned} (\ddot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) - m(\theta(t), v - \dot{u}(t)) \\ + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V, \end{aligned} \quad (3.40)$$

On multiplie scalairement l'équation (3.3) par $\omega \in E$ ($\omega = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$), en appliquant la formule de Green (2.12) on obtient

$$\int_{\Omega} \dot{\theta}(t) \omega dx + (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \omega)_{L^2(\Omega)^d} - \int_{\Gamma} \mathcal{K} \nabla \theta(t) \cdot \nu \omega da - (\mathcal{R} \varepsilon(v), \omega)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} q(t) \omega dx. \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} (\dot{\theta}(t), \omega)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \omega)_{L^2(\Omega)^d} + \int_{\Gamma_3} k_c (u_\nu(t) - g) \phi_L(\theta(t) - \theta_F) \cdot \nu \omega da - (\mathcal{R} \varepsilon(v), \omega)_{L^2(\Omega)} \\ = \int_{\Omega} q(t) \omega dx. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Nous utilisons les définitions (3.23), (3.25) et (3.31), (3.31) de \mathcal{R} , et $\chi(t)$ respectivement, avec (3.42) on écrit

$$(\dot{\theta}(t), \omega) + d(\theta(t), \omega) - e(u(t), \omega) + \chi(u(t), \theta(t), \omega) = (q_{th}(t), \omega)_E, \quad (3.43)$$

Problème \mathcal{P}_V

Trouver un champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, un champ de contraintes $\sigma : [0, T] \rightarrow Q_1$, et la champ de température $\theta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{M}(\theta(t)) \quad (3.44)$$

$$(\ddot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) - m(\theta(t), v - \dot{u}(t)) \quad (3.45)$$

$$+ j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V,$$

$$(\dot{\theta}(t), \omega) + d(\theta(t), \omega) - e(u(t), \omega) + \chi(u(t), \theta(t), \omega) = (q_{th}(t), \omega)_E, \quad (3.46)$$

$$u(0) = u_0, \theta(0) = \theta_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (3.47)$$

Chapitre 4

Existence et unicité de la solution

Le résultat principal de cette section est le suivant

Théorème 4.0.1. *Supposons que les hypothèses (3.27)(3.28)(3.30)-(3.37) soient vérifiées. Alors, il existe une unique solution (u, θ) du problème (3.47) -(3.45) qui vérifie*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; V) \cap W^{2,\infty}(0, T; H), \quad (4.1)$$

$$\theta \in L^2(0, T; E) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)). \quad (4.2)$$

La démonstration de ce théorème se fait en plusieurs étapes et s'appuie sur l'argument de l'inégalité variationnelle d'évolution non linéaire du second ordre et sur le théorème du point fixe de Banach. Soit $\alpha \in L^2(0, T; V)$ et $\beta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ donné par

$$(\alpha(t), v - \dot{u}_\alpha(t)) = m(\theta_\beta(t), v - \dot{u}_\alpha(t)), \quad (4.3)$$

$$(\beta(t), \eta) = -e(u_\alpha(t), \eta) + \chi(u_\alpha(t), \theta_\beta(t), \eta). \quad (4.4)$$

Un Trois de fonctions (u, σ, θ) qui vérifie (3.44)-(3.47) est appelée solution faible du problème mécanique \mathcal{P} . Nous concluons par le Théorème 4.0.1 que, pour tout $t \in [0, T]$. Il s'ensuit maintenant de (3.35) que $\text{Div } \sigma \in C([0, T]; Q_1)$ ce qui montre que

$$\sigma \in C([0, T]; Q_1). \quad (4.5)$$

Démonstration du Théorème 4.0.1

La démonstration du Théorème 4.0.1 sera effectuée en plusieurs étapes et elle est basée sur

les résultats abstraits donnés par le Théorème 2.6.1. A cet effet nous supposons dans la suite que définition 2.5.1 -(3.21) sont satisfaites ; ci après, c est une constante générique positive qui peut dépendre de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, L$ et R , dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur $x \in \Omega \cup \Gamma$.

Soit $\eta \in C([0, T]; V)$ et $a \in C([0, T]; Q_1)$ des fonctions données et soit

$$\sigma_{\eta a}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_{\eta a}(t)) + \varepsilon(\eta(t)). \quad (4.6)$$

Dans la première étape, nous considérons le problème intermédiaire suivant :

Problème $\mathcal{P}_{\eta a}$

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}_\alpha(t), v - \dot{u}_\alpha(t)) + a(u_\alpha(t), v - \dot{u}_\alpha(t)) + b(\dot{u}_\alpha(t), v - \dot{u}_\alpha(t)), \\ & - (\alpha(t), v - \dot{u}_\alpha(t)) + j(u_\alpha(t), v) - j(u_\alpha(t), \dot{u}_\alpha(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}_\alpha(t))_V, \forall v \in V, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$u_\alpha(0) = u_0, \dot{u}_\alpha(0) = \dot{u}_0. \quad (4.8)$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

$$u_{\eta a}(0) = u(0). \quad (4.9)$$

Dans l'étude du problème variationnel $\mathcal{P}_{\eta a}$ nous avons le résultat suivant :

Lemme 4.0.1. *Pour tout $v \in U$ et pour p.p $t \in]0, T[$, le problème (4.7)-(4.8) admet une unique solution u_α satisfait la régularité (4.1).*

Preuve. Par le théorème de représentation de Riesz, on définit l'opérateur

$$(f_\alpha(t), v)_V = (f(t), v)_V - (\alpha(t), v)_V. \quad (4.10)$$

Alors (4.7)-(4.8) peut s'écrire

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}_\alpha(t), v - \dot{u}_\alpha(t)) + b(\dot{u}_\alpha(t), v - \dot{u}_\alpha(t)) + a(u_\alpha(t), v - \dot{u}_\alpha(t)) \\ & + j(u_\alpha(t), v) - j(u_\alpha(t), \dot{u}_\alpha(t)) \geq (f_\alpha(t), v - \dot{u}_\alpha(t))_V \end{aligned} \quad (4.11)$$

$\mathcal{P}_{\eta a}$ admet une solution unique, de plus la solution satisfait

Par les hypothèses (3.17), et (3.32) l'opérateur a est continu symétrique bilinéaire et coercif.

Ensuite, nous définissons l'opérateur multivoque $B : V \mapsto V$ par $B = b + \partial j$.

D'après (3.32), (3.33) et Proposition 2.5.3, b est maximal monotone, et par Proposition 2.5.5 on peut démontrer que ∂j est maximal monotone et en utilisant Proposition 2.5.6 on déduit que B maximal monotone.

Par (3.37) les conditions initiales u_0 et \dot{u}_0 satisfont la condition $\{au_0 + b\dot{u}_0\} \cap L^2(\Omega)^d \neq 0$.

Enfin en utilisant Théorème 2.5.5 nous obtenons la régularité (4.1).

Dans la deuxième étape, nous considérons le problème variationnel suivant de la température.

Problem(PV_{th})

:Trouver une température $\theta_\beta : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ p.p $t \in]0, T[$ et $\eta \in E$ tel que

$$\left(\dot{\theta}_\beta(t), \eta \right) + d(\theta_\beta(t), \eta) + (\beta(t), \eta) = (q_{th}(t), \eta)_E, \quad (4.12)$$

$$\theta_\beta(0) = \theta_0. \quad (4.13)$$

Le résultat de ce problème est présenté dans le lemme suivant.

Lemme 4.0.2.

Il existe une solution unique pour le problème (4.12)-(4.13) qui satisfait (4.1).

Preuve. En utilisant le théorème de représentation de Riesz, il existe un opérateur q_β défini par

$$(q_\beta(t), \eta)_E = (q_{th}(t), \eta)_E - (\beta(t), \eta)_E \quad (4.14)$$

Alors, le problème (4.12),(4.13) peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \left(\dot{\theta}_\beta(t), \eta \right) + d(\theta_\beta(t), \eta) &= (q_\beta(t), \eta), \\ \theta_\beta(0) &= \theta_0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

D'après les hypothèses (3.32) et (3.33) l'opérateur est linéaire et coercif est un hémicontinu et monotone. Par (4.14) et la régularité de q_{th} , on obtient que $q_\beta \in L^2(0, T; E)$.

Il découle maintenant du théorème 2.3.2 qu'il existe une unique fonction θ_β qui vérifie (4.1).

Dans la dernière étape, pour tout $t \in [0, T]$ nous définissons l'opérateur

$$\Lambda(\alpha, \beta)(t) := (\Lambda_1(\alpha, \beta)(t), \Lambda_2(\alpha, \beta)(t)) \in V \times E, \quad (4.16)$$

donné par

$$(\Lambda_1(\alpha, \beta)(t), v) := m(\theta_\beta, v) \quad (4.17)$$

$$(\Lambda_2(\alpha, \beta)(t), \eta) := -e(u_\alpha(t), \eta) + \chi(u_\alpha(t), \theta_\beta(t), \eta) \quad (4.18)$$

et on a le résultat suivant

Lemme 4.0.3.

For $(\alpha, \beta) \in L^2(0, T; V) \times L^2(0, T; E)$ l'opérateur Λ is continu. De plus, il existe un unique tel $(\alpha^*, \beta^*) \in L^2(0, T; V \times E)$ that $\Lambda(\alpha^*, \beta^*) = (\alpha^*, \beta^*)$. Preuve.

Laisser $(\alpha, \beta) \in L^2(0, T; V \times E)$ et laissez $t_1, t_2 \in [0, T]$. De (4.17) et (3.33), il s'ensuit que

$$\|\Lambda_1(\alpha, \beta)(t_1) - \Lambda_1(\alpha, \beta)(t_2)\|_{V \times E} \leq M_m \|\theta_\beta(t_1) - \theta_\beta(t_2)\|_E. \quad (4.19)$$

En tenant compte de la régularité de θ_β , nous avons trouvé que $\Lambda_1(\alpha, \beta) \in C([0, T]; V)$. La relation (4.18) combinée avec (3.33) (3.36), et (2.10), il existe une constante positive c dépendant de $M_e, M_m, L, M_{kc}, C_{S_1}$ et C_{S_2} tels que

$$\begin{aligned} & \|\Lambda_2(\alpha, \beta)(t_1) - \Lambda_2(\alpha, \beta)(t_2)\|_{V \times E} \\ & \leq c (\|u_\alpha(t_1) - u_\alpha(t_2)\|_V + \|\theta_\beta(t_1) - \theta_\beta(t_2)\|_E) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Puis, $\Lambda_2(\alpha, \beta) \in C([0, T], E)$. Par conséquent, on en déduit que Λ est continue.

Aussi de $u_{\alpha_i}(t) = \int_0^t \dot{u}_{\alpha_i}(s) ds + u_0$ pour $i = 1, 2$, on trouve

$$\|u_{\alpha_1}(t) - u_{\alpha_2}(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \|\dot{u}_{\alpha_1}(s) - \dot{u}_{\alpha_2}(s)\|_V^2 ds. \quad (4.21)$$

En utilisant l'inégalité (4.7), on trouve

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}_{\alpha_1}(t) - \ddot{u}_{\alpha_2}(t), \dot{u}_{\alpha_1}(t) - \dot{u}_{\alpha_2}(t)) + b(\dot{u}_{\alpha_1}(t) - \dot{u}_{\alpha_2}(t), \dot{u}_{\alpha_1}(t) - \dot{u}_{\alpha_2}(t)) \\ & a(u_{\alpha_1}(t) - u_{\alpha_2}(t), \dot{u}_{\alpha_1}(t) - \dot{u}_{\alpha_2}(t)) + (\alpha_1(t) - \alpha_2(t), \dot{u}_{\alpha_1}(t) - \dot{u}_{\alpha_2}(t)) \\ & j(u_{\alpha_1}(t), \dot{u}_{\alpha_1}(t)) - j(u_{\alpha_1}(t), \dot{u}_{\alpha_2}(t)) - j(u_{\alpha_2}(t), \dot{u}_{\alpha_1}(t)) + j(u_{\alpha_2}(t), \dot{u}_{\alpha_2}(t)) \leq 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

De plus, d'après (2.10) , (3.13) , (3.22) et (3.36),(3.35) on a

$$\begin{aligned} & |j(u_{\alpha_1}(t), \dot{u}_{\alpha_1}(t)) - j(u_{\alpha_1}(t), \dot{u}_{\alpha_2}(t)) - j(u_{\alpha_2}(t), \dot{u}_{\alpha_1}(t)) + j(u_{\alpha_2}(t), \dot{u}_{\alpha_2}(t))| \\ & \leq C_{S_1}^2 (L_\nu + L_\tau) \|u_{\alpha_1}(t) - u_{\alpha_2}(t)\|_V \|\dot{u}_{\alpha_1}(t) - \dot{u}_{\alpha_2}(t)\|_V \end{aligned} \quad (4.23)$$

On intègre la relation (4.22) à 0 en t et on utilise (4.23),et (3.32) et la condition initiale $\dot{u}_{\alpha_1}(0) = \dot{u}_{\alpha_2}(0) = \dot{u}_0$ pour obtenir

$$\begin{aligned} & m_b \int_0^t \|\dot{u}_{\alpha_1}(s) - \dot{u}_{\alpha_2}(s)\|_V^2 ds + \frac{1}{2} \|\dot{u}_{\alpha_1}(t) - \dot{u}_{\alpha_2}(t)\|_V^2 \\ & \leq - \int_0^t (\alpha_1(s) - \alpha_2(s), \dot{u}_{\alpha_1}(t) - \dot{u}_{\alpha_2}(t)) ds \\ & + (M_a + C_{S_1}^2 (L_\nu + L_\tau)) \int_0^t \|u_{\alpha_1}(s) - u_{\alpha_2}(s)\|_V \cdot \|\dot{u}_{\alpha_1}(s) - \dot{u}_{\alpha_2}(s)\|_V ds \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité $xy \leq \kappa x^2 + \frac{1}{4\kappa} y^2$, ($\kappa > 0$)et Gornw toute inégalité, nous obtenons que

$$\|u_{\alpha_1}(t) - u_{\alpha_2}(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_V^2 ds \quad (4.25)$$

Dans l'ordre des mots de (4.7), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & (\dot{\theta}_{\beta_1}(t) - \dot{\theta}_{\beta_2}(t), \theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)) + d(\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t), \theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)) \\ & + (\beta_1(t) - \beta_2(t), \theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)) = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Similaire à (4.25), nous avons

$$\|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_E^2 \leq c \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_E^2 ds. \quad (4.27)$$

Maintenant, en combinant (4.20), (4.25) et (4.27), on obtient

$$\|\Lambda(\alpha_1, \beta_1)(t) - \Lambda(\alpha_2, \beta_2)(t)\|_{V \times E}^2 \leq c \int_0^t \|(\alpha_1, \beta_1)(s) - (\alpha_2, \beta_2)(s)\|_{V \times E}^2 ds \quad (4.28)$$

Répéter cette inégalité n fois donne

$$\begin{aligned} & \|\Lambda^n(\alpha_1, \beta_1) - \Lambda^n(\alpha_2, \beta_2)\|_{L^2(0,T;V \times E)}^2 \\ & \leq \frac{(CT)^n}{n!} \|(\alpha_1, \beta_1) - (\alpha_2, \beta_2)\|_{L^2(0,T;V \times E)}^2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Ce qui implique que pour n suffisamment grand, Λ^n est un opérateur de contraction dans l'espace de Banach $L^2(0, T; V \times Q)$.

Par conséquent, Λ a un point fixe unique. Nous avons maintenant tout ce qui est nécessaire pour prouver le théorème 4.0.1 Preuve du théorème 4.0.1.

soit le point fixe de l'opérateur Γ et soit $u_{\alpha^*}^*, \theta_{\beta^*}^*$ soit la solution de (4.7)-(4.8) et (4.12)-(4.13) respectivement, pour $(\alpha, \beta) = (\alpha^*, \beta^*)$, la définition de Λ on trouve que la paire $(u_{\alpha^*}^*, \theta_{\beta^*}^*)$ est une solution de Problème (PV)Unicité : L'unicité de la solution est une conséquence du point fixe de l'opérateur Λ donné par (4.16).

Conclusion générale

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'étude un problème de contact entre un corps déformable et une fondation. Le contact est modélisé avec une condition de compliance normale avec frottement. Le comportement des matériaux est modélisé avec une loi de comportement thermo-viscoélastique linéaire. Une formulation variationnelle du problème thermo-mécanique est dérivée, et l'existence et l'unicité de la solution faible peuvent être prouvées si le coefficient de frottement est suffisamment petit.

La preuve est basée sur les arguments des inégalités variationnelles dépendantes du temps, des équations différentielles et du théorème de Banach à point fixe.

Enfin, ce problème peut être approché numériquement en utilisant les méthodes itératives des éléments finis et des différences finies.

Bibliographie

- [1] Samir Adly, Oanh Chau et Mohamed Rochdi, Solvabilité d'une classe de problèmes de contact dynamique thermique avec des conditions sous-différentielles, (2012)

- [2] A Amassad, KL Kuttler, M Rochdi et M Shillor, Problème de contact thermoviscoélastique quasi-statique avec coefficient de frottement dépendant du glissement, Modélisation mathématique et informatique **36** (2002), no. 7-8, 839-854.

- [3] KT Andrews, KL Kuttler, M Rochdi et M Shillor, Contact thermoviscoélastique dynamique unidimensionnel avec dommage, Journal d'analyse mathématique et applications 272 (2002), no. 1, 249-275.

- [4] B Awbi, El H Essoufi et M Sofonea, Un problème de contact viscoélastique avec réponse amortie normale et frottement, Annales Polonici Mathematici, vol. 75, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 2000, pp. 233-246.

- [5] V. Barbu, Semigroupes non linéaires et équations différentielles dans les espaces de banache, (1976).

- [6] Oanh Chau et Viorica Venera Motreanu, Problèmes de contact dynamique avec conditions de vitesse, Revue internationale de mathématiques appliquées et d'informatique 12 (2002), 17-26.

-
- [7] Oanh Chau, Rachid Oujja et Mohamed Rochdi, Une analyse mathématique d'un modèle dynamique de contact par frottement en thermoviscoélasticité, *Discrete & Continuous Dynamical Systems-S* 1 (2008), no. 1, 61 .
- [8] G Duvaut, Problème de frontière libre lié à la thermoélasticité et au contact unilatéral, *Problèmes de frontière libre* 2 (1979), 217-236.
- [9] IR Ionescu and J-C Paumier, On the frictional contact problem depending on the sliding rate in elastodynamics, *European journal of mechanics. A. Solids* 13 (1994), no. 4, 555-568.
- [10] Jiří Jarušek, Problèmes de contact dynamique avec frottement donné pour les corps viscoélastiques, *Czechoslovak Mathematical Journal* 46 (1996), no. 3, 475 – 487.
- [11] Mostafa Kabbaj et El-H Essoufi, Problème de contact par frottement en électroélasticité dynamique, *Glasnik matematički* 43 (2008), no. 1, 137-158.
- [12] Mostafa Kabbaj et El-Hassan Essoufi, Frottement dépendant du glissement dans l'électroviscoélasticité dynamique, *Glasnik matematički* 45 (2010), no. 1, 125-137.
- [13] KL Kuttler et Meir Shillor, Un problème de contact dynamique dans la thermoviscoélasticité unidimensionnelle, *Nonlinear World* 2 (1995), 355-385.
- [14] Stanislaw Migorski, Inégalités hémivariationnelles aux frontières de type hyperbolique et applications, *Journal of Global Optimization* 31 (2005), no. 3, 505-533.
- [15] Stanisław Migórski*, Inégalité hémivariationnelle dynamique modélisant le problème de contact viscoélastique avec réponse amortie normale et frottement, *Applicable Analysis* 84 (2005), no. 7, 669-699.

-
- [16] Stanistaw Migórski, Anna Ochal et Mircea Sofonea, Inégalités hémivariationnelles intégrodifférentielles avec applications au contact par frottement viscoélastique, *Modèles et méthodes mathématiques en sciences appliquées* 18 (2008), no. 02, 271-290.
- [17] Stanistaw Migórski et Paweł Szafraniec, Une classe de problèmes dynamiques de contact par frottement gouvernés par un système d'inégalités hémivariationnelles en thermoviscoélasticité, *Analyse non linéaire : Applications du monde réel* 15(2014), 158 – 171.
- [18] Roberto Giorgio Rabel, Weimin Han et Mircea Sofonea, Quasistatic contact problems in viscoelasticity and viscoplasticity, *American Mathematical Soc.*, 2002.
- [19] M Rochdi et M Shillor, Existence and unicity for a quasistatic frictional bilateral contact problem in thermoviscoelasticity, *Quarterly of Applied Mathematics* 58(2000), no.3, 543–560.
- [20] Mircea Sofonea, Weimin Han et Meir Shillor, *Analyse et approximation des problèmes de contact avec adhérence ou dommage*, CRC Press, 2005.
- [21] Paweł Szafraniec, Problèmes dynamiques de contact par frottement non lisse avec endommagement en thermoviscoélasticité, *Mathematics and Mechanics of Solids* 21 (2016), no. 5, 525 – 538.
- [22] O. Chau, J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion. Journal of Computational and Applied Mathematics* 159(2), 43-465 (2003).
- [23] M.Cocou and R.Rocca, *Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* 34, 981-1001 (2000).

- [24] P. Alart and A. Curnier, *A generalized Newton methode for contact problems with friction. J. Theor. Appl. Mech* 7, 67-82 (1988).
- [25] H.T. Banks, R.C. Smith and Y. Wang, *Smart Material Structures : Modeling, Estimation and Control*, Masson, Wiley, 1996.
- [26] T. Cazenave, A. Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, Ellipses, Paris, 1990.
- [27] P.G. Ciarlet, *Basic Error Estimates for Elliptic Problem. Dans P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds, Handbook of Numerical Analysis, Vol. II, pages 17-351. North Holland, Amsterdam, 1991.*
- [28] M. Frémond, *Adhérence des solides. Journal of Mécanique Théorique et Appliquée* 6, 383-407(1987).
- [29] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II, 295, pp. 913-916, 1982.*
- [30] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity, Studies in Advanced Mathematics 30, American Mathematical Society, Providence, RI - Intl. Press, Sommerville, MA, 2002.*
- [31] W. Han, M. Sofonea, *Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems, SIAM Journal of Numerical Analysis* 38 (2000), 556-579.
- [32] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and variational analysis of quasistatic contact. Lecture Notes in Physics, Vol. 655, Springer, Berlin (2004).*

Mustapha BouALLALA : bouallalamustaphaanigmai l.com Département de Mathématiques et d'Informatique, Faculté Polydisciplinaire de Safi, Université Cadi Ayyad, Marrakech, Maroc

EL Hassan Essoufi : e.h.essoufi@gmail.com

Univ. Hassan 1, Laboratoire MISI, 26000 Sett at, Maroc.

- ملخص

تناولت في مذكرتي دراسة مسألة حلول المعادلة الرياضية لإحتكاك الأجسام المرنة اللازجة مع الأجسام الصلبة وإمكانية وجود وحدانية الحل لهذه المسألة .
-الكلمات المفتاحية : الإتصال الديناميكي , اللزوجة المرنة , وحدانية الحل , معادلة رياضية .

-Résumé:

Dans mon mémoire, j'ai étudié la question des solutions de l'équation mathématique pour le frottement des corps élastiques collants avec des corps solides et la possibilité d'avoir une solution unique pour ce problème.

-Les mots clés : Equation mathématique , Unicité de la solution , viscoélasticité , contact dynamique.